CAPITOLO 2

POTENZIALE

2.1 Il concetto di potenziale

In questo capitolo consideriamo gli aspetti di **lavoro** ed **energia** connessi con i campi elettrici.

Il lavoro infinitesimo per muovere una carica $\boldsymbol{q_0}$ di uno spostamento infinitesimo $\boldsymbol{d\vec{s}}$ è dato da:

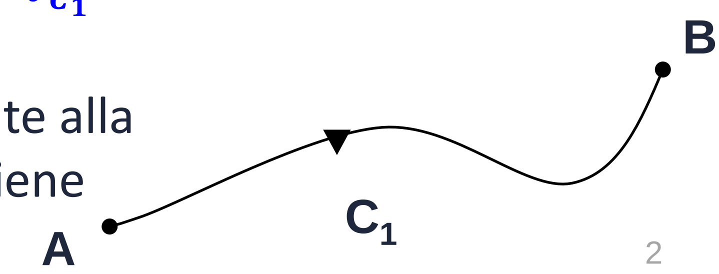
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 E ds \, cos\theta = q_0 E_s \, ds$$

con $\boldsymbol{\theta}$ l'angolo tra $\boldsymbol{\vec{E}}$ e $\boldsymbol{d\vec{s}}$, e con $\boldsymbol{E_s}$ la componente di $\boldsymbol{\vec{E}}$ in direzione di $\boldsymbol{d\vec{s}}$.

Per uno spostamento finito tra **A** e **B** quello che si deve fare è dividere il cammino ad esempio su un cammino curvo $\mathbf{C_1}$ in tanti tratti infinitesimi e sommare i contributi del lavoro. Questo significa in altri termini calcolare l'integrale:

$$W_1 = \int_{C_1} dW_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

In questo caso il vettore $\boldsymbol{d\vec{s}}$ è tangente alla curva $\mathbf{C_1}$ in ogni punto e l'integrale viene detto **curvilineo**.



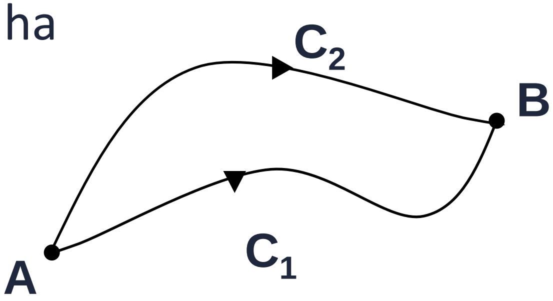
2.1 Il concetto di potenziale

Possiamo definire il rapporto:

$$\frac{W_1}{q_0} = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

come **tensione elettrica tra i punti A e B e relativa al percorso C_1** ed in generale se l'agente che sposta le cariche ha natura qualunque il lavoro dipenderà dal percorso scelto ovvero andando da **A** a **B** su un altro percorso **C_2** si ha

$$\int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \neq \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



Se il percorso è chiuso ad esempio percorrendo la curva **C_1** da **A** a **B** e poi tornando in **A** percorrendo **C_2** si ottiene che:

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = W_1 - W_2$$

da cui l'integrale su un percorso chiuso (detto **circuitazione**) è in generale diverso da zero e viene posto

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 \mathcal{E}$$

2.1 Il concetto di potenziale

La quantità:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

viene definita **forza elettromotrice (f.e.m.) del campo elettrico** e malgrado il nome non è una forza.

La **forza elettrostatica** è invece **conservativa** quindi il lavoro necessario a spostare una carica è indipendente dal percorso e il lavoro su un percorso chiuso è sempre nullo. Possiamo quindi introdurre l' energia potenziale elettrica

$$\Delta U = U_f - U_i = -W_{el}$$

Di regola l'energia potenziale è riferita ad un livello cui attribuiamo valore di **en. potenziale nullo, e spesso si sceglie un punto ad ∞ come riferimento di potenziale**. Ma come in tutte le situazioni che fanno uso del concetto di energia potenziale, sono solo le differenze di potenziale quelle che si usano.

2.1 Il concetto di potenziale

Naturalmente l'energia potenziale dipende sia dalla carica che genera il campo che da quella (di prova) che mettiamo in un qualunque punto dello spazio. Se, come per il concetto di campo, definiamo una energia potenziale per unità di carica troviamo una quantità che dipende solo dalla carica che genera il campo.

Definiamo allora il **potenziale elettrico** o **potenziale** il rapporto tra

$$\boldsymbol{V = \frac{U}{q_0}}$$

Pertanto la **differenza di potenziale** (**d.d.p.**) tra due punti dello spazio è data da:

$$\boldsymbol{\Delta V = V_f - V_i = -\frac{W_{el}}{q} = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

In altre parole abbiamo che il lavoro svolto dalla forza elettrostatica per portare $\mathbf{q_0}$ da "**i**" a "**f**"

$$\boldsymbol{W = -q_0 \Delta V}$$

2.1 Il concetto di potenziale

Inoltre la scelta tipica per il potenziale di riferimento (**nullo ad ∞**) equivale a dire che la carica all'infinito ha $V_i = 0$

ovvero che il potenziale in un punto qualunque corrisponde al lavoro svolto dal campo elettrico sulla carica di prova (e diviso per tale valore) **per spostarla da infinito al punto considerato**.

L'unità di misura del potenziale nel SI è il **Volt (V)** per cui

$$1\,volt = \frac{1\,joule}{1\,coulomb}$$

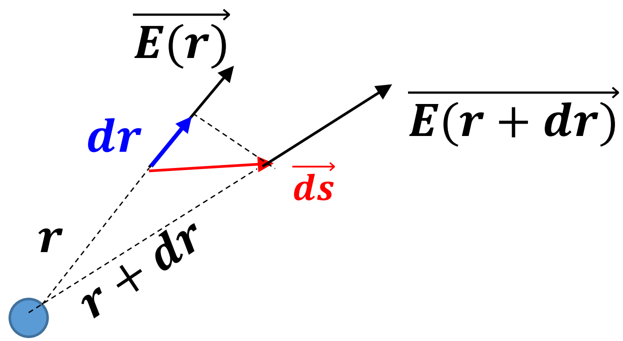
Tramite la nuova unità di misura possiamo ridefinire anche **l'unità di misura del campo elettrico**. Infatti si ha:

$$[E] = \frac{N}{C} = \frac{N}{\frac{J}{V}} = \frac{N \cdot V}{N \cdot m} = \frac{V}{m}$$

quindi il campo elettrico può misurarsi anche in **V/m**.

2.2 Potenziale di una carica puntiforme

Il campo elettrostatico è conservativo in quanto forza centrale. Il lavoro di conseguenza non dipende dal percorso seguito. Se la carica è puntiforme il lavoro della forza $\vec{F}$ per un generico spostamento è

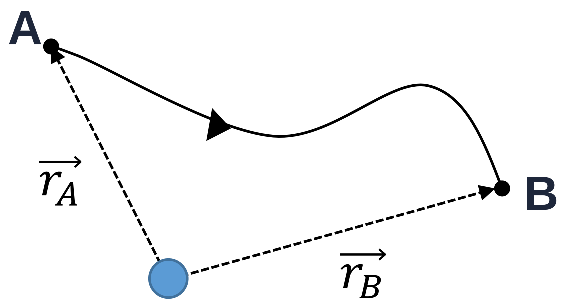


$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{s} = q_0\vec{E}\cdot d\vec{s} = q_0\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{u}\cdot\overrightarrow{ds}}{r^2} = \frac{qq_0 dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

con dr che è la proiezione dello spostamento infinitesimo nella direzione $\hat{u}$ del campo.

$$\vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

2.2 Potenziale di una carica puntiforme



Pertanto la funzione integranda risulta dipendere soltanto dalla variabile **r** ed integrando

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)$$

Per cui

$$V_B - V_A = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}$$

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

2.2 Potenziale di una carica puntiforme

Dal momento che il potenziale è definito a meno di una costante possiamo scrivere:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$$

che con la scelta detta prima $V(\infty) \to 0$, equivale a dire che $C = 0$

Potenziale elettrico di una carica puntiforme

$$V(r) = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

L'espressione dell'**energia potenziale** si ottiene moltiplicando il potenziale per la carica $\mathbf{q_0}$

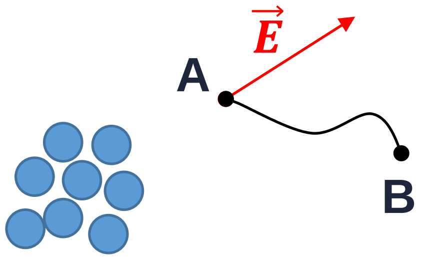
Energia potenziale di una carica puntiforme

$$U(r) = q_0 V(r) = -q_0 \int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

2.3 Potenziale di un sistema di cariche

I risultati appena trovati permettono l'estensione alla situazione di un campo generato da un sistema discreto di cariche utilizzando il **principio di sovrapposizione**. Infatti il lavoro per uno spostamento da **A** a **B** :

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



e se consideriamo la somma vettoriale dei campi di ciascuna carica si ottiene:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \left(\sum_i \vec{E_i} \right) \cdot d\vec{s} = \sum_i \int_A^B \vec{E_i} \cdot d\vec{s} = \sum_i \int_A^B \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \widehat{u_i} \cdot d\vec{s}$$

avendo utilizzato per ognuno dei termini l'espressione del potenziale della carica puntiforme.

2.3 Potenziale di un sistema di cariche

Essendo ogni campo delle singole cariche conservativo, possiamo risolvere i singoli integrali della sommatoria:

$$\boldsymbol{W = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -q_0(V_B - V_A) = \left(\sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{B,i}} - \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{A,i}} \right)}$$

Per cui per il generico punto nello spazio **P(x,y,z)**

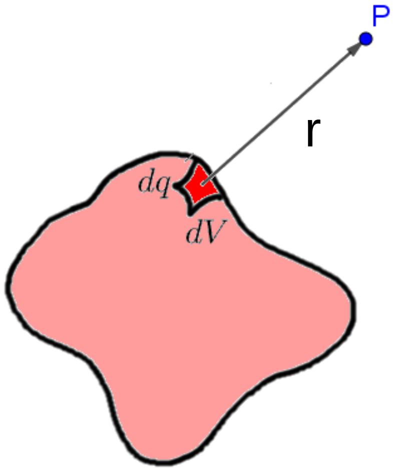
$$\boldsymbol{V(x,y,z) = -\int_\infty^P \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}}$$

che in altre parole dice che il potenziale elettrostatico di un sistema di cariche si ottiene sommando i potenziali di ciascuna delle cariche.

2.3 Potenziale di un sistema di cariche

L’estensione a distribuzioni continue di cariche è ovvia:

$$V(P) = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{dq}{r}$$



avendo inteso l’integrale sulla forma dell’oggetto carico (volume, superficie, linea) e ***dq*** la carica dell’elemento infinitesimo, **r** la distanza tra P e l’elemento infinitesimo.

Infine come ultimo risultato per le distribuzioni di cariche (puntiformi e continue), considerando percorsi chiusi si ha

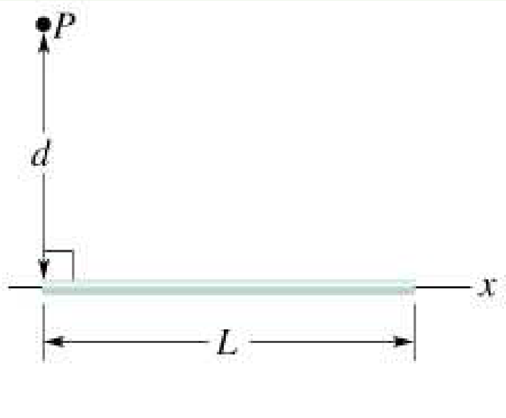
$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

in altre parole **la forza elettromotrice è nulla per campi elettrostatici**

Esercizio 2.1

Calcolare il potenziale nel punto al centro di un quadrato di lato **d** =1.3 m e supponendo che le cariche sono $\mathbf{q_1}$ = +12 nC (in alto a sinistra), $\mathbf{q_2}$ = −24 nC (in alto a destra), $\mathbf{q_3}$ = +31 nC (in basso a sinistra) e $\mathbf{q_4}$ = +17 nC (in basso a destra)

Esercizio 2.2



Consideriamo una bacchetta finita di lunghezza **L** e con carica distribuita uniformemente. Determinare l'espressione del potenziale nel punto **P** distante **d** da una delle due estremità della bacchetta.

2.4 Energia potenziale elettrostatica

Per costruire un sistema di cariche collocate in vari punti dello spazio usiamo la definizione e concludiamo che l'**energia necessaria** (e.potenziale) a creare un sistema di cariche è pari al lavoro necessario da parte di un agente esterno per portare il sistema nella configurazione data, ovvero quello necessario a portare ciascuna carica dall'infinito alla posizione finale.

Il lavoro per muovere una carica

$$\boldsymbol{W} = +\boldsymbol{q}\Delta\boldsymbol{V}$$

Supponiamo di voler spostare una carica **q > 0** dall'infinito, dove il potenziale è nullo, verso una regione con **V > 0** ovvero in presenza di cariche positive, in questo caso **ΔV > 0** e il lavoro risulterà positivo perché dobbiamo vincere la repulsione tra le due cariche; viceversa se le cariche sono discordi risulterà un lavoro negativo.

La procedura seguita ci dà un criterio per capire qual è l'energia necessaria a creare un sistema di cariche puntiformi: consideriamo un processo di costituzione del sistema prendendo una carica alla volta e aggiungendolo al resto

2.4 Energia potenziale elettrostatica

L'energia complessiva del sistema sarà:

$$U_e(sistema) = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

somma estesa a tutte le coppie di punti (il fattore ½ tiene conto del fatto che nella sommatoria del doppio conteggio dei termini simmetrici tipo ***ij*** e ***ji***).

Per una carica esterna **q_0** distinta dalle precedenti, risulterà che la sua energia potenziale è la somma delle energie potenziali dovuta alle cariche del sistema:

$$U_e(q_0) = \sum_{i}^{N} \frac{q_i q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

e l'energia complessiva del sistema sarà:

$$U_e = U_e(sistema) + U_e(q_0)$$

Esercizio 2.3

Tre cariche sono disposte ai vertici di un triangolo equilatero di lato **l** = 12 cm. Se le cariche sono $\mathbf{q_1}$, $\mathbf{q_2}$ e $\mathbf{q_3}$ qual è l'energia potenziale elettrostatica di questo sistema? Qual è il lavoro necessario a mettere una carica $\mathbf{q_0}$ al centro del triangolo?

2.5 Moto di una carica in un campo elettrostatico

Supponiamo di avere una carica $\mathbf{q_0}$ in un campo elettrostatico $\vec{E}$.

Utilizzando **il teorema dell'energia cinetica**:

$$\Delta E_K = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W$$

d'altra parte sappiamo che il lavoro è pari a:

$$W = -\Delta U_e = -q_0\Delta V = -q_0V_B + q_0V_A$$

eguagliando i termini si ottiene:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + q_0V_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + q_0V_B$$

ovvero che la quantità:

$$\frac{1}{2}mv^2 + q_0V = cost$$

che rappresenta la **conservazione dell'energia**

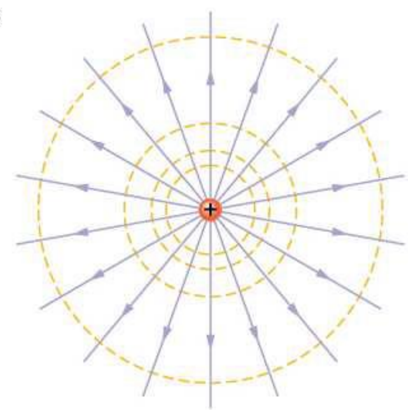
2.6 Superfici equipotenziali

Definiamo superficie equipotenziale il **luogo dei punti aventi il medesimo potenziale** ovvero una superficie delimitata dalla condizione

$$V(x, y, z) = cost$$

In base alla definizione **non è necessario compiere alcun lavoro** per muoversi su una superficie equipotenziale.

Le superfici equipotenziali per una carica puntiforme sono tante sfere concentriche alla carica stessa.

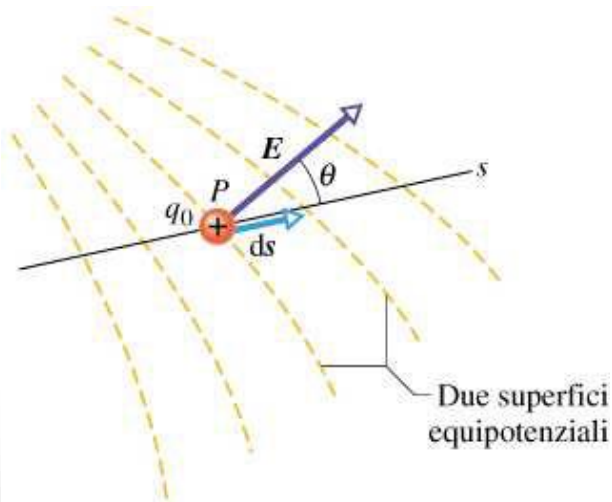


(b)

le linee di campo sono perpendicolari alle superfici equipotenziali. Infatti se non fosse così, una componente del campo elettrico, che è tangente alla linea di forza, si troverebbe lungo la superficie equipotenziale. Ma se fosse così muovendo una carica lungo la superficie risulterebbe che il lavoro per spostare una carica sarebbe diverso da zero, cosa che contraddice la proprietà vista prima delle superfici equipotenziali. Questa proprietà consente anche di ricavare la direzione del campo elettrico nota la superficie equipotenziale.

2.7 Campo come gradiente del potenziale

Vediamo come ricavare il campo elettrico se conosciamo l'espressione del potenziale utilizzando la relazione locale che si può scrivere invece che la versione integrale che **lega il potenziale al campo elettrico**.



Consideriamo due superfici equipotenziali **V** e **V+dV**.

Supponiamo di muovere la carica di prova $\mathbf{q_0}$ lungo uno spostamento infinitesimo

$$\overrightarrow{ds} = dx\widehat{u_x} + dy\widehat{u_y} + dz\widehat{u_z}$$

che intercetta le due superfici equipotenziali.

Il lavoro sarà pari a:

$$dW = -q_0 dV$$

Possiamo però anche dire dalla definizione di lavoro che:

$$dW = \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \left(q_0\vec{E}\right) \cdot \overrightarrow{ds}$$

Unendo le due espressioni:

$$-q_0 dV = \left(q_0\vec{E}\right) \cdot \overrightarrow{ds}$$

2.7 Campo come gradiente del potenziale

Se esplicitiamo il prodotto scalare:

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

e scriviamo il differenziale totale della funzione ***V*** come:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dx$$

L'espressione precedente diventa:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dx = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

che è verificata se e soltanto se:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

che permette di trovare tutte le componenti di $\vec{E}$ noto il potenziale in funzione dello spazio.

2.7 Campo come gradiente del potenziale

Quelle tre relazioni si possono esprimere sinteticamente utilizzando l'**operatore gradiente**:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \quad \text{oppure} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

dove:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\widehat{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\widehat{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\widehat{u_z}$$

Campo elettrico come gradiente del potenziale

Il campo elettrostatico `e in ogni punto uguale al gradiente del potenziale elettrico in quel punto e cambiato di segno.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

L'operatore gradiente è un oggetto che si comporta formalmente come un vettore ma acquista significato solo se applicato ad una funzione scalare. Applicandolo formalmente al potenziale si ottiene infatti:

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x}\widehat{u_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\widehat{u_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\widehat{u_z} = \overrightarrow{grad}V$$

Esercizio 2.4

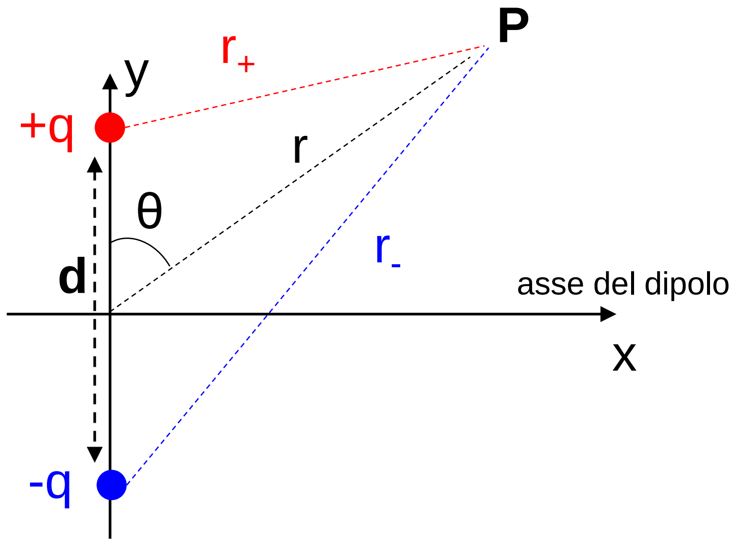
Si consideri un anello carico di raggio **R**, avente una carica **q** uniformemente distribuita. Calcolare il potenziale lungo l’asse dell’anello.

Esercizio 2.5

Si consideri un disco carico di raggio **R**, avente una carica **q** uniformemente distribuita. Calcolare il potenziale lungo l’asse del disco.

2.8 Potenziale di un dipolo elettrico

Calcoliamo il potenziale dovuto al dipolo in un generico punto P del piano del dipolo come in figura.

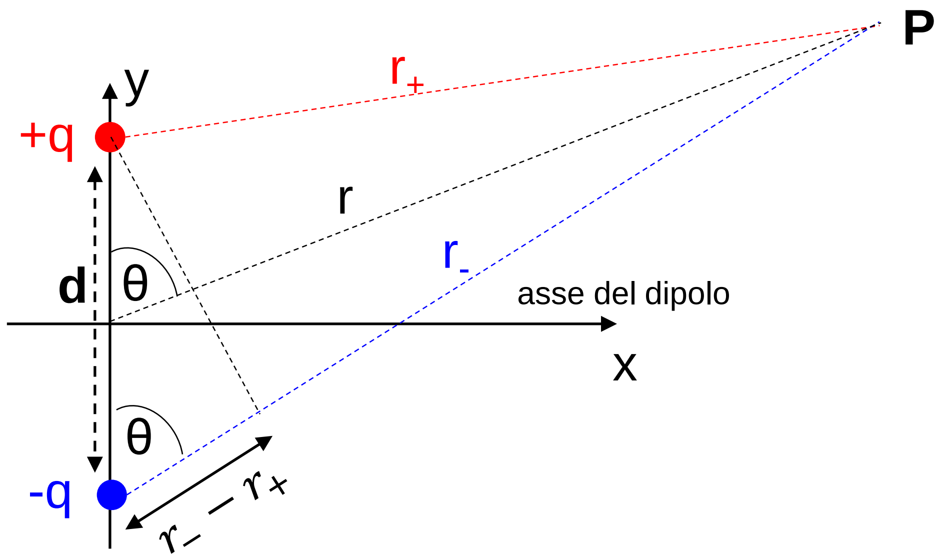


Il potenziale sarà:

$$V = V_+ + V_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} + \frac{-q}{r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_- - r_+}{r_- r_+}\right)$$

2.8 Potenziale di un dipolo elettrico

Il dipolo è una struttura molto frequente ed è ad esempio il campo elettrico generato da un gran numero di molecole. Normalmente si è interessati al campo a distanze relativamente grandi ossia determinate dalla condizione **r >> d**.



In questo caso possiamo approssimare:

$$r_- - r_+ \approx d\cos\theta$$
$$r_- r_+ \approx r^2$$

Con queste approssimazioni il potenziale diventa:

$$V = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$