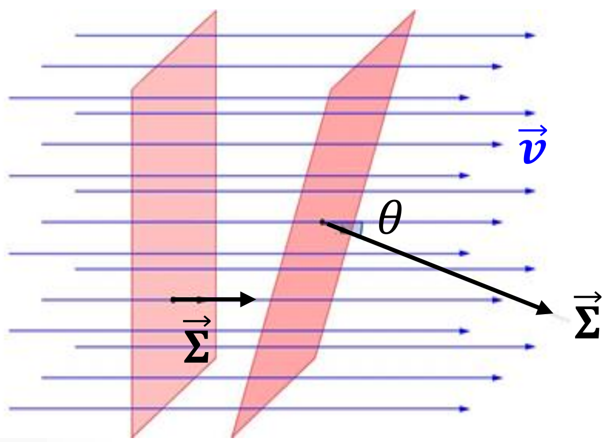
CAPITOLO 3

TEOREMA DI GAUSS

3.1 Il concetto di flusso

Una formulazione equivalente alla legge di Coulomb è quella stabilita dal **teorema di Gauss**, che trae vantaggio dalle situazioni nelle quali vi è una simmetria nella distribuzione delle cariche. La legge di Gauss mette in relazione i campi elettrici su superfici chiuse (superfici gaussiane) e le cariche da esse racchiuse.



Il concetto di flusso è facilmente ricavabile partendo dai fluidi: se abbiamo un fluido in scorrimento possiamo considerare come flusso attraverso una sezione del tubo (o spira) la quantità in volume o la portata volumetrica del fluido stesso che scorre attraverso la spira in figura. Questo flusso dipende da come è orientata la spira: è massimo quando la spira è ortogonale alla velocità (o alle linee di corrente), è minima (nulla) quando la spira è parallela alla velocità.

L'espressione analitica del flusso è $\boldsymbol{\Phi = \Sigma \cdot v \cdot cos\theta}$

essendo θ l'angolo tra $\vec{v}$ e la normale alla superficie della spira.

Questa espressione si può anche vedere come un prodotto scalare:

$$\boldsymbol{\Phi = \vec{v} \cdot \vec{\Sigma}}$$

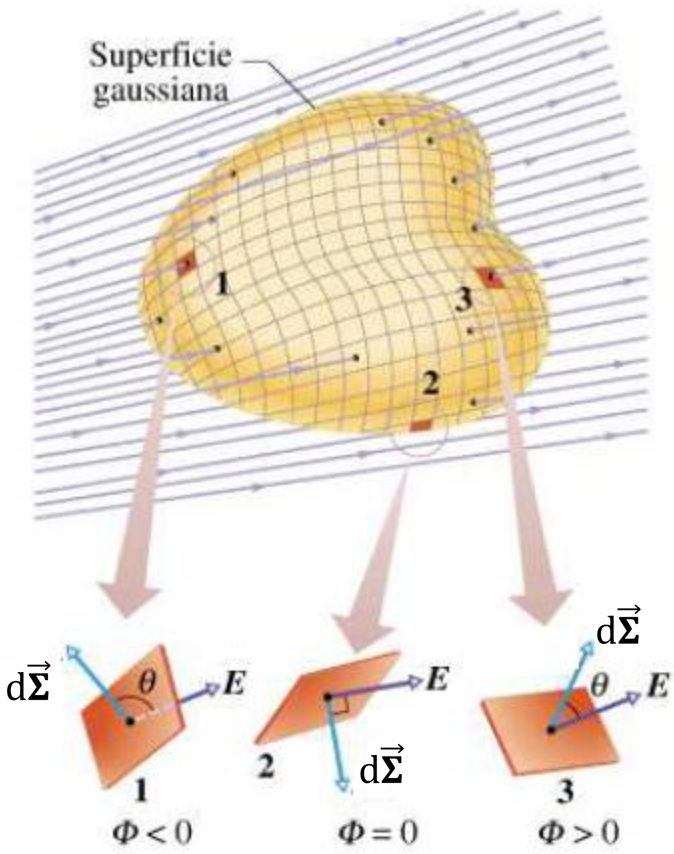
avendo definito $\vec{\Sigma}$ come quel vettore avente per modulo l'area della spira e direzione perpendicolare al piano della spira stessa.

3.2 Flusso del campo elettrico

Il concetto di flusso si può definire per qualunque “**campo vettoriale**”.

Se abbiamo altri campi vettoriali possiamo definire quindi allo stesso modo il flusso del campo attraverso una superficie.

Nel caso del **campo elettrico** si ragiona allo stesso modo considerando però **superfici gaussiane** ovvero **superfici chiuse**.



Se consideriamo una qualunque superficie gaussiana e la dividiamo in tanti elementi infinitesimi e quasi piani estendendo quanto detto prima definiamo come **flusso del campo elettrico sulla superficie gaussiana**

$$\Phi(\vec{E}) = \sum_i \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma_i}$$

con ogni $d\vec{\Sigma_i}$ preso con verso uscente dalla superficie chiusa

3.2 Flusso del campo elettrico

Con questa definizione, se il flusso è **negativo** vi sarà un flusso **entrante** altrimenti se il flusso è **positivo** vi sarà un flusso **uscente**. Facendo tendere ad infinitesimi tutte le aree la definizione corretta di flusso diventa:

Flusso del campo elettrico su una superficie gaussiana

$$\boldsymbol{\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma}$$

dove abbiamo indicato con $\boldsymbol{\widehat{u_N}}$ la direzione normale alle superfici, con verso uscente

$$\boldsymbol{d\vec{\Sigma} = \widehat{u_N} d\Sigma}$$

Il cerchietto sull'integrale indica che il calcolo viene fatto su una superficie chiusa. In definitiva mantenendo l'analogia con i fluidi diciamo che il flusso del campo elettrico è proporzionale al numero di linee di campo che attraversano la superficie.

3.3 Teorema di Gauss

Il **teorema di Gauss** mette in relazione il flusso netto del campo elettrico attraverso una superficie chiusa con la carica racchiusa all'interno della stessa superficie:

Teorema di Gauss

$$\boldsymbol{\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

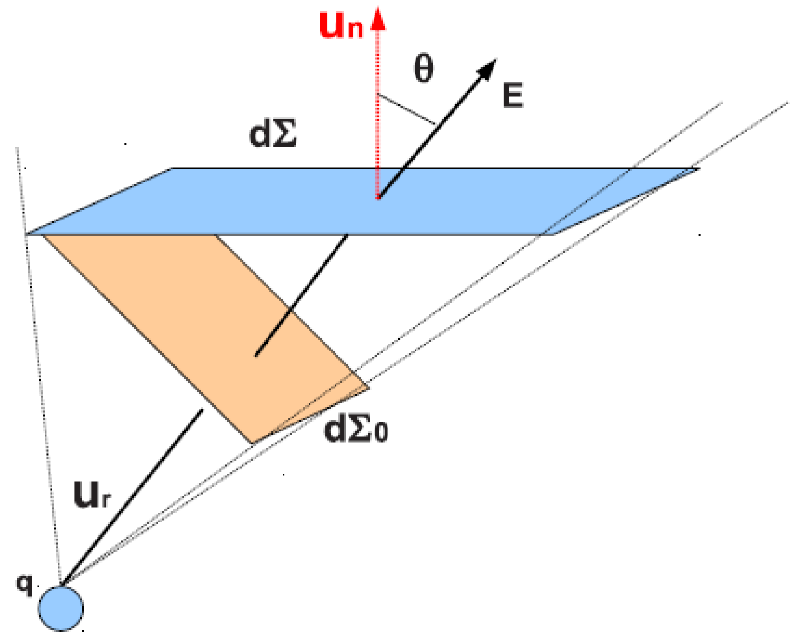
q_{int} è **la somma di tutte le cariche (con il segno) all'interno della superficie chiusa**, indipendentemente da come esse sono distribuite.

Dal teorema discende quindi che il flusso di $\vec{E}$ è negativo se le cariche sono negative e viceversa è positivo (uscente) se le cariche sono positive.

NOTA Anche se il flusso dipende dalle sole cariche dentro la superficie, il campo elettrico dipende da tutte le cariche anche da quelle esterne (che però non danno flusso).

3.4 Dimostrazione del teorema di Gauss

Consideriamo la situazione di una carica puntiforme e di una superficie nello spazio (in azzurro) $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\Sigma}}$ e calcoliamo il contributo di flusso infinitesimo attraverso questa superficie. Se indichiamo con $\boldsymbol{\vartheta}$ l'angolo fra la normale della superficie e la direzione del campo elettrico si ha:

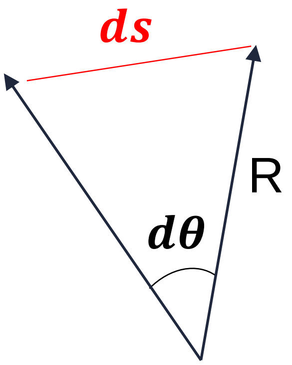


$$d\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\widehat{u_r}\cdot\widehat{u_N}}{r^2}d\Sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\Sigma\, cos\theta}{r^2} = \frac{q d\Sigma_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

con $d\Sigma_0$ (l'area arancione in figura) corrispondente alla proiezione dell'area $d\Sigma$ su un piano perpendicolare a $\widehat{u_r}$

3.4 Dimostrazione del teorema di Gauss

Il termine $\frac{d\Sigma_0}{r^2}$ corrisponde alla estensione nello spazio del concetto di angolo:



$$d\theta = \frac{ds}{R}$$

da cui nello spazio possiamo definire l'angolo solido come

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_0}{r^2}$$

partendo da una generica superficie $d\Sigma$ e proiettandola sulla superficie ortogonale a **r**.

Il massimo angolo solido è quello corrispondente ad una superficie sferica ed è pari a:

$$\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

3.4 Dimostrazione del teorema di Gauss

Riprendendo la dimostrazione:

$$d\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

Quindi il flusso attraverso una superficie finita aperta è:

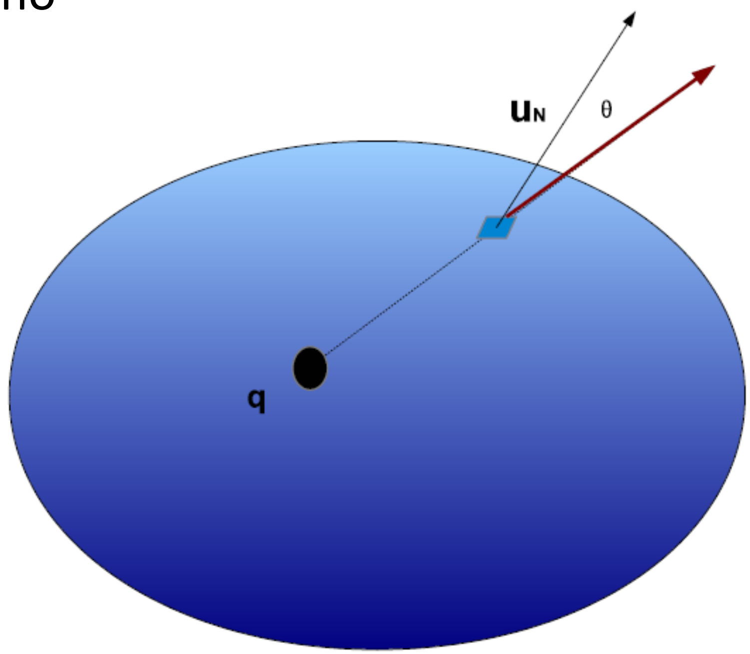
$$\Phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{d\Sigma_0}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \Omega$$

con Ω l'angolo solido con cui la carica **q** sottende la superficie Σ.

Calcoliamo ora l'integrale attraverso una superficie chiusa. In questo caso due casi sono possibili: la carica è dentro la superficie o fuori di essa.

3.4 Dimostrazione del teorema di Gauss

Se la carica è **interna** come nella figura allora i contributi infinitesimi dei termini $\vec{E} \cdot \widehat{u_N}$ hanno tutti lo stesso segno

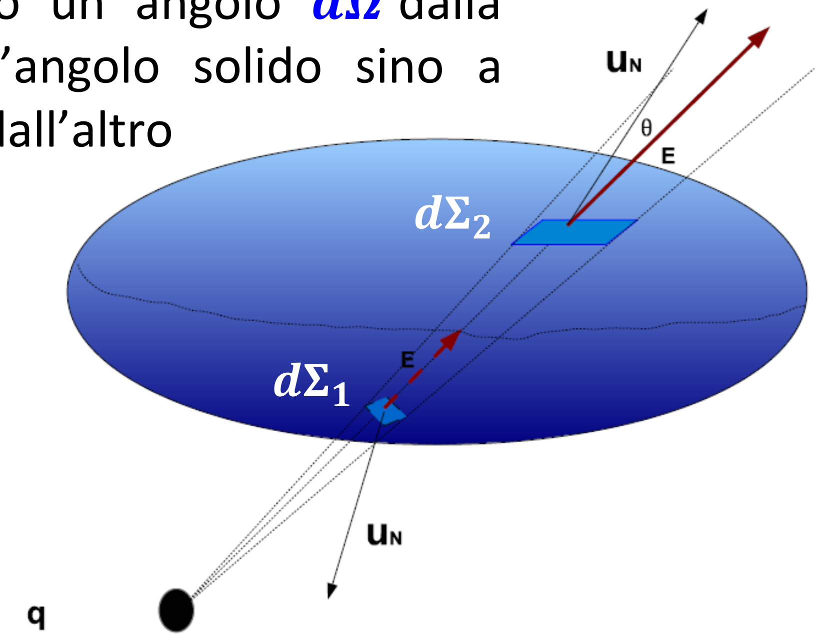


e l'integrale sull'intera superficie diventa:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{\Sigma} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

3.4 Dimostrazione del teorema di Gauss

Se la carica è **esterna** come nella figura per ogni elemento di superficie elementare che è sotteso sotto un angolo $d\Omega$ dalla carica puntiforme **q** si può prolungare l'angolo solido sino a intercettare un'altra superficie infinitesima dall'altro lato dell'intera superficie.



Per queste due superfici intercettate le orientazioni delle normali sono tali che per una si ha:

$$\overrightarrow{E_1} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma_1 < 0$$

e per l'altra

$$\overrightarrow{E_2} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma_2 > 0$$

Quindi il flusso totale attraverso queste due superfici infinitesime è

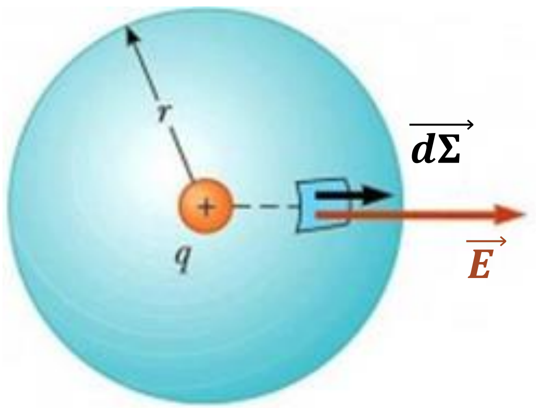
$$d\Phi\left(\overrightarrow{E_1}\right) = \overrightarrow{E_1} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma_1 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

$$d\Phi\left(\overrightarrow{E_2}\right) = \overrightarrow{E_2} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma_2 = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

3.5 Teorema di Gauss e legge di Coulomb

E' facile dimostrare che le due leggi sono **equivalenti** tra loro :

Applichiamo il teorema di Gauss ad una carica puntiforme e consideriamo tra le superfici gaussiane una sfera centrata nella carica e di raggio **r**.



Essendo il campo elettrico funzione della distanza e radiale si vede subito che:

$$\overrightarrow{d\Sigma} \parallel \vec{E}$$

$\vec{E}$ **è costante sulla superficie**

Calcoliamo il flusso di $\vec{E}$ $\quad \Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma = \oint E d\Sigma = E \oint d\Sigma = E 4\pi r^2$

Applichiamo il teorema di Gauss $\quad \Phi(\vec{E}) = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

Eguagliando le due espressioni: $\quad E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

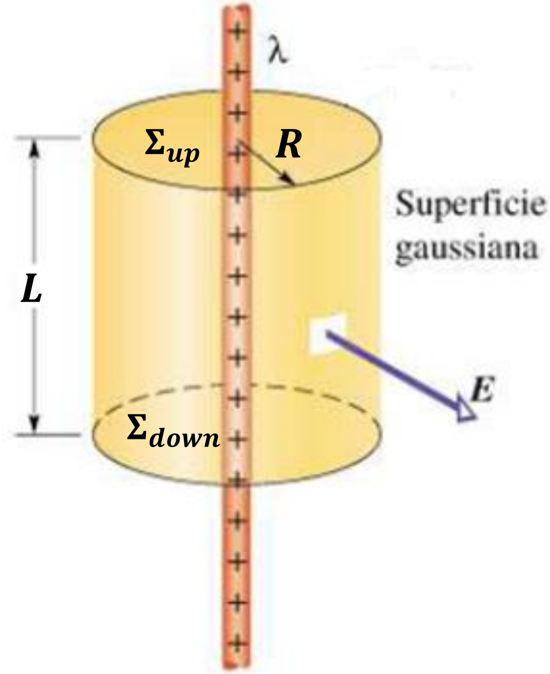
che è il modulo del campo elettrico della carica puntiforme

Esercizio 3.1

Una carica **q** è uniformemente distribuita all’interno di una sfera di raggio **R**. Determinare il campo elettrico all’esterno (**r > R**) e all’interno della sfera (**r < R**).

3.6 Teorema di Gauss – Simmetria cilindrica

Consideriamo un filo uniformemente carico con carica $\boldsymbol{Q}$. In questo caso si ha una evidente simmetria cilindrica per cui scegliamo come superficie gaussiana un cilindro che avvolge il filo come in figura.



Introduciamo la densità di carica: $\boldsymbol{\lambda = \frac{Q}{L}}$

e il campo elettrico deve risultare perpendicolare al filo. Il flusso del campo elettrico sarà:

$$\boldsymbol{\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma = \int_{Sup.Lat.} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma + \int_{\Sigma_{up}} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma + \int_{\Sigma_{down}} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma}$$

I termini di flusso lungo le superfici delle basi $\boldsymbol{\Sigma_{up}}$ e $\boldsymbol{\Sigma_{down}}$ **sono nulli** perché il campo è perpendicolare alla direzione della superficie quindi rimane solo il termine di flusso lungo la superficie laterale.

3.6 Teorema di Gauss – Simmetria cilindrica

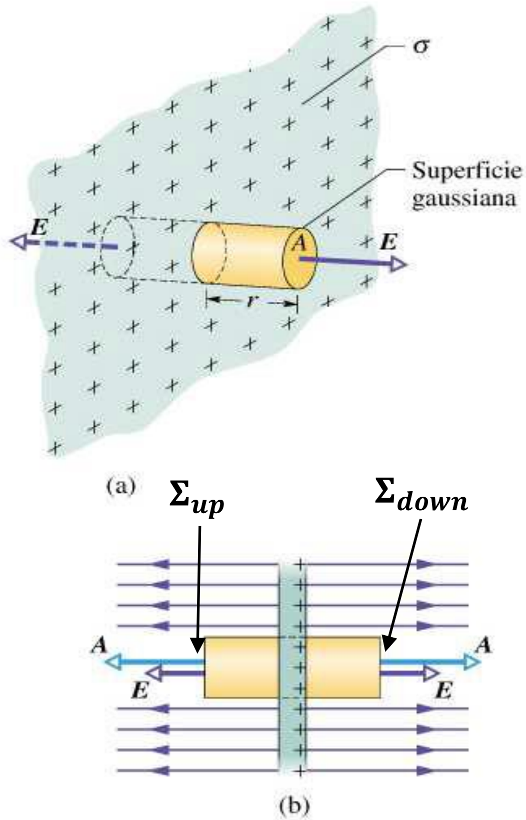
Ci aspettiamo che il **campo sia costante** (per simmetria) lungo la superficie laterale, ed essendo inoltre $\overrightarrow{d\Sigma} \,//\, \vec{E}$, si ottiene:

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{Sup.Lat.} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma = \int_{Sup.Lat.} E d\Sigma = E \int_{Sup.Lat.} d\Sigma = E(2\pi R L)$$

Applichiamo il teorema di Gauss $\Phi(\vec{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$

Eguagliando le due espressioni: $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$

3.7 Teorema di Gauss – Simmetria piana



Consideriamo una superficie sottile ed infinitamente estesa con una densità superficiale di carica **σ**.
Le ragioni di simmetria portano a stabilire che il campo elettrico deve essere ortogonale al piano.

Scegliamo come superficie gaussiana un cilindretto che attraversi la superficie come in figura (b).

In questo caso si ha che il flusso è:

$$\boldsymbol{\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma = \int_{Sup.Lat.} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma + \int_{\Sigma_{up}} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma + \int_{\Sigma_{down}} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma}$$

3.7 Teorema di Gauss – Simmetria piana

In questo caso, il flusso della superficie laterale è nullo, mentre quello le 2 basi danno lo stesso flusso:

$$\int_{\Sigma_{up}} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma = \int_{\Sigma_{down}} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma$$

Come prima, poiché ci aspettiamo che il **campo sia costante** (per simmetria) lungo le due basi, ed essendo inoltre $\overrightarrow{d\Sigma} \, // \, \vec{E}$, si ottiene:

$$\int_{\Sigma_{up}} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma = \int_{\Sigma_{up}} E d\Sigma = E \int_{\Sigma_{up}} d\Sigma = E\Sigma$$

e quindi il flusso sarà: $\Phi(\vec{E}) = 2E\Sigma$

Applichiamo il teorema di Gauss $\Phi(\vec{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\Sigma}{\varepsilon_0}$

Eguagliando le due espressioni: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

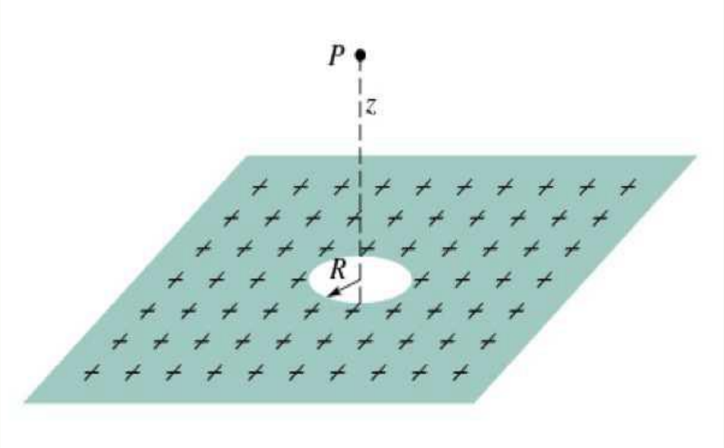
Esercizio 3.2

Su un cavo sottile rettilineo molto lungo è presente una carica negativa con **λ = 3.6 nC/m**. Il cavo viene circondato con una distribuzione uniforme cilindrica di raggio **r = 1.5 cm** e coassiale al cavo. Scegliere la densità di carica superficiale **σ** del cilindro in modo che il flusso del campo elettrico dal cilindro sia nullo.

Esercizio 3.3

Una sfera di raggio **R** ha una carica positiva distribuita nel suo volume secondo la legge **$\rho = A \cdot r$** con **r** la distanza dal suo centro. Calcolare l'espressione del campo elettrico all'interno della sfera e il potenziale nel punto **r = R/2** rispetto l'infinito.

Esercizio 3.4



Su una superficie piana isolante molto estesa è distribuita uniformemente una carica con densità **σ**. Un piccolo foro circolare di raggio **R** viene ricavato nel punto centrale del foglio, come mostrato in figura. Si ignori la distorsione delle linee di campo su tutti i bordi e si calcoli il campo elettrico nel punto **P**, a una distanza **z** dal centro del foro lungo il suo asse.