CAPITOLO 4

CONDUTTORI E CONDENSATORI

4.1 Conduttore carico e isolato

I conduttori sono caratterizzati dal fatto che le cariche al loro interno sono relativamente libere di muoversi. L'applicazione di un campo elettrico nei conduttori di conseguenza porta ad un movimento di cariche che da luogo a quella che chiameremo corrente elettrica.

Tuttavia in condizioni di **equilibrio elettrostatico** le cariche devono rimanere mediamente ferme per cui si deve avere che il **campo elettrico deve essere nullo all'interno del conduttore isolato in equilibrio elettrostatico** anche quando è carico.

Come conseguenza si hanno le seguenti proprietà per i conduttori in equilibrio elettrostatico:

Proprietà dei conduttori in equilibrio

1. **La carica in eccesso del conduttore può stare solo sulla superficie esterna del conduttore**
2. **Il potenziale è costante su tutto il conduttore**
3. **Il campo elettrico sulla superficie del conduttore è perpendicolare alla superficie e di intensità $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$**

4.1 Conduttore carico e isolato

1. **La carica in eccesso del conduttore può stare solo sulla superficie esterna del conduttore**

La prima proprietà discende dal **Teorema di gauss**.

Infatti se per assurdo vi fosse della carica all'interno, allora dal teorema di gauss vi sarebbe del flusso di campo elettrico su una superficie gaussiana interna al conduttore. Ma se c'è un flusso, c'è un campo elettrico e se ci fosse un campo elettrico dentro il conduttore le sue cariche sarebbero soggette a forze che le farebbero muovere.

Questa situazione è possibile ma non in condizioni di equilibrio elettrostatico quando il conduttore è isolato. Di conseguenza questo non può avvenire ed il campo elettrico deve essere nullo all'interno del conduttore.

Anche se ci fosse una cavità nel conduttore il discorso non cambia ($\vec{E}$ **= 0 all'interno del conduttore**).

La carica fornita ad un conduttore isolato si dispone totalmente sulla superficie del conduttore in quanto nessuna carica in eccesso può trovarsi all'interno del conduttore

4.1 Conduttore carico e isolato

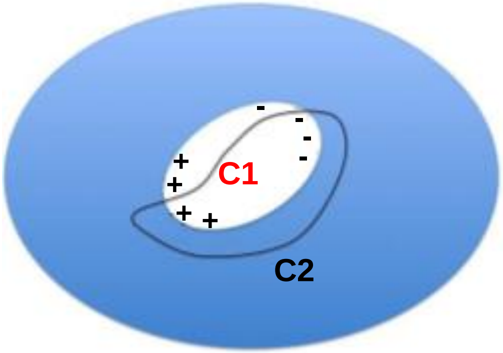
2. Il potenziale è costante su tutto il conduttore

Per quanto riguarda il potenziale, basta applicare la definizione. Consideriamo due generici punti all'interno del conduttore:

$$\boldsymbol{V(P_2) - V(P_1) = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V(P_2) = V(P_1) = V_0}$$

il discorso continua a rimanere valido anche nel caso in cui si scelgono punti sulla superficie e di conseguenza **le superfici dei conduttori sono equipotenziali**.

L'unico caso da verificare con un ragionamento più esteso è quando vi è una cavità nel conduttore: verifichiamo che la carica sulla cavità è nulla e non può neanche esserci una separazione di carica **+q -q** sulla cavità interna.



Quindi, supponiamo per assurdo che ci sia.
Consideriamo un percorso chiuso, di cui un ramo (**C1**) è nella cavità e l'altro (**C2**) nel conduttore. Se per assurdo vi fosse una separazione di carica sulla cavità allora si avrebbe che:

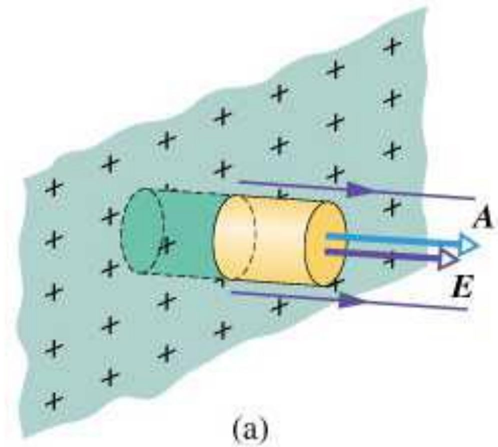
$$\boldsymbol{\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{C1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \cancel{\int_{C2} \vec{E} \cdot d\vec{s}} = \int_{C1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \neq 0}$$

risultato che contraddice il fatto che il campo E è conservativo.

4.1 Conduttore carico e isolato

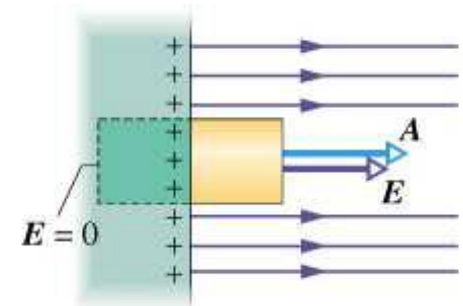
3. **Il campo elettrico sulla superficie del conduttore è perpendicolare alla superficie e di intensità $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$**

Approssimiamo una porzione della superficie del conduttore ad una porzione di piano (quindi infinitesima).



(a)

Su questa porzione abbiamo che la carica del conduttore è solo sulla superficie, il campo è perpendicolare alla superficie, e considero come superficie gaussiana un cilindretto che attraversi il conduttore.



(b)

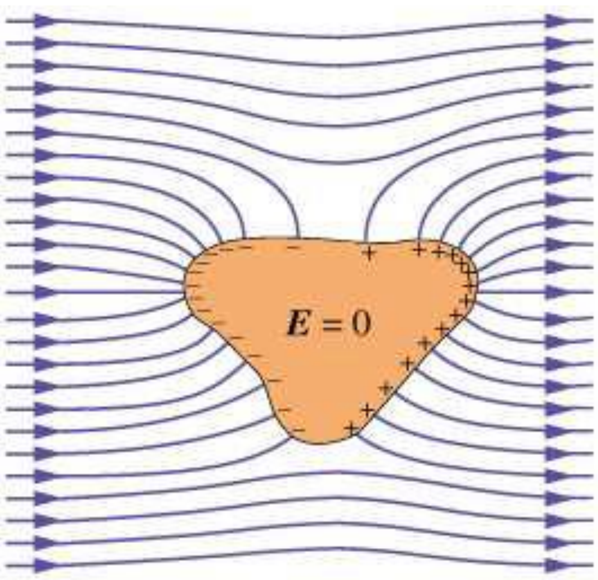
Abbiamo che

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

con $\sigma = \frac{q}{A}$ la densità di carica per unità di superficie.

4.2 Potenziale elettrico di un conduttore isolato

Il conduttore anche scarico immerso in un campo elettrico esterno, lo distorce e forza ad avere le condizioni precedenti, sfruttando la mobilità delle cariche. Questo discende dal fatto che le cariche del conduttori sono mobili e si risistemano per adattarsi al campo elettrico esterno. Il fenomeno viene detto di **induzione** e le cariche che si sono manifestate sulla superficie del conduttore che rimane complessivamente con la stessa carica iniziale se era isolato (vedi figura), vengono dette **cariche indotte**



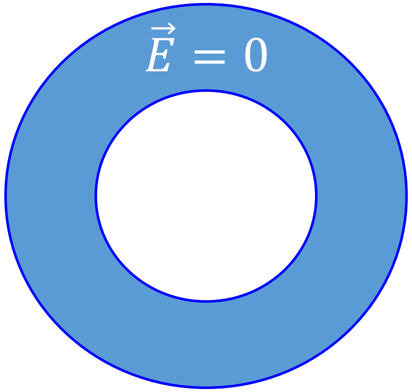
Come conseguenza delle precedenti considerazioni anche **quando più conduttori vengono collegati tra loro, essi si portano tutti allo stesso potenziale**

4.3 Conduttore cavo, schermo elettrostatico

Consideriamo un **conduttore cavo**.

Abbiamo detto che il campo elettrico all'interno del conduttore è nullo e sulla parete interna della cavità non ci possono essere cariche.

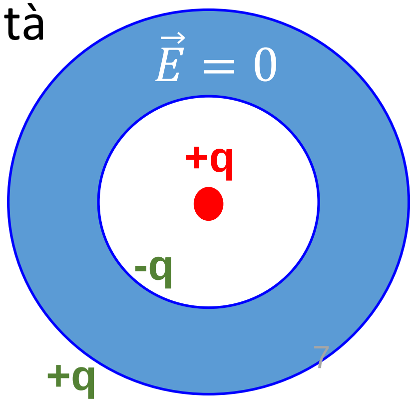
Entrambe le condizioni restano valide anche se deposito cariche sulla parete esterna del conduttore



Consideriamo il caso in cui nella cavità del conduttore inizialmente neutro inserisco una **carica +q** (senza appoggiarla alle pareti della cavità):

si verifica che la parete interna della cavità per induzione completa manifesta una carica pari a **-q** e ovviamente sulla superficie esterna del conduttore (che rimane con la sua carica complessiva inziale pari a zero) si manifesta **+q**. Anche questo fatto si spiega completamente con il teorema di Gauss e le proprietà dei conduttori.

Proprio questo esempio ci suggerisce che la carica nella cavità produce un campo all'interno della cavità, diventa nullo nel conduttore e all'esterno poi riprende il comportamento del campo elettrico dovuto alla carica. Questo effetto viene detto **schermo elettrostatico** e agisce anche al contrario (con un campo esterno al conduttore)



4.4 Capacità e condensatore

Abbiamo visto che nel calcolo del potenziale di un qualunque oggetto di carica Q bisogna effettuare l'integrale esteso al suo volume

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{dq}{r}$$

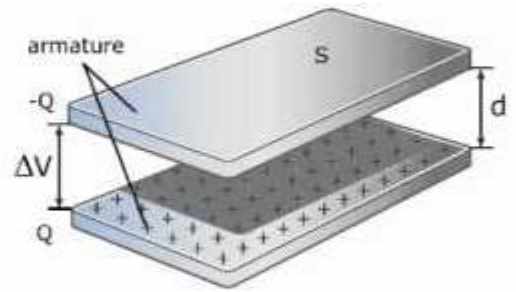
da cui possiamo dedurre che

$$q \propto V$$

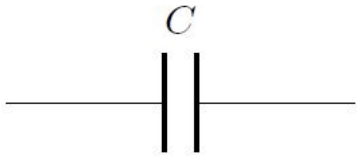
In altri termini possiamo stabilire una equazione del tipo **Q = C · V** e la costante di proporzionalità ***C*** è detta **capacità elettrica**.

La capacità dipende solo dalla forma dell'oggetto (o degli oggetti) carichi.

I condensatori sono costituiti da due conduttori che vengono chiamati **armature** e distanziati tra loro. Il condensatore tipico è il condensatore piano ad armature parallele: le armature sono piane di area **S**, parallele e distanti **d** tra loro.



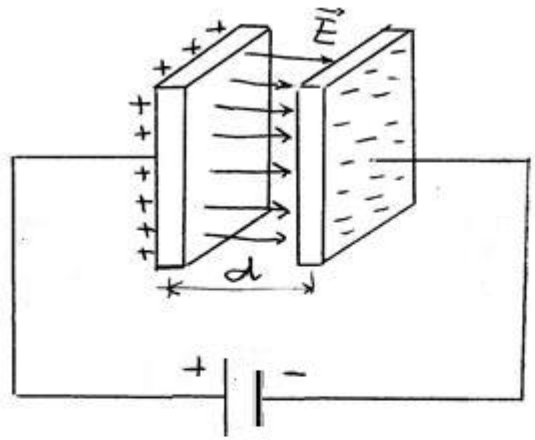
Il condensatore si dice essere carico se le sue armature sono cariche con la stessa carica ma di segno opposto.



4.4 Capacità e condensatore

La **capacità**, definita prima, è allora data per il condensatore come $\boldsymbol{C = \frac{Q}{|\Delta V|}}$ o semplicemente $\boldsymbol{C = \frac{Q}{V}}$ avendo indicato con **Q** la carica positiva e **V** la differenza di potenziale tra l'armatura positiva e negativa (che è positiva).
La capacità si misura in **Farad**:

$$\boldsymbol{1F = \frac{1C}{1V}}$$



Carica del condensatore

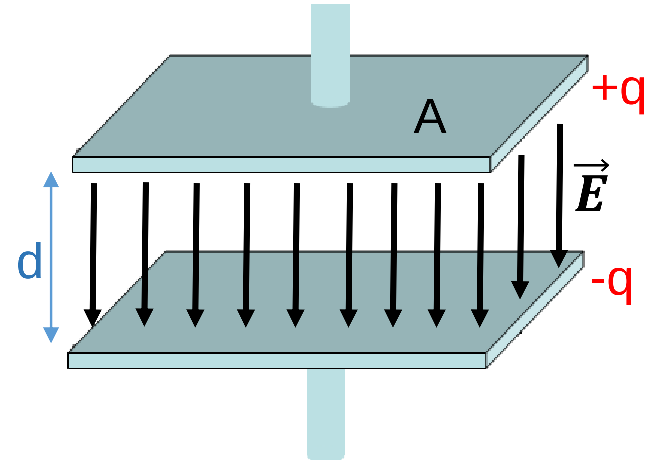
La procedura di carica si può immaginare che avvenga tramite un agente esterno che chiameremo **batteria**, che trasferisce, collegandola al condensatore cariche da una armatura all'altra.

In questo modo se togliamo una carica **+Q** ad un'armatura questa si troverà priva di questa carica ovvero con carica **–Q** che viene trasferita all'altra armatura, che di conseguenza si troverà carico con carica **+Q**.

4.5 Condensatore piano

Poiché l'armatura è una superficie equipotenziale, le linee di campo sono tutte perpendicolari al piano e il campo elettrico è costante:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} = \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{\varepsilon_0 A}}$$



Per il calcolo della differenza di potenziale tra le armature usiamo la definizione:

$$\boldsymbol{V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = Ed = \frac{qd}{\varepsilon_0 A}}$$

da cui calcolare la capacità di un condensatore piano:

$$\boldsymbol{C = \frac{q}{V_+ - V_-} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$

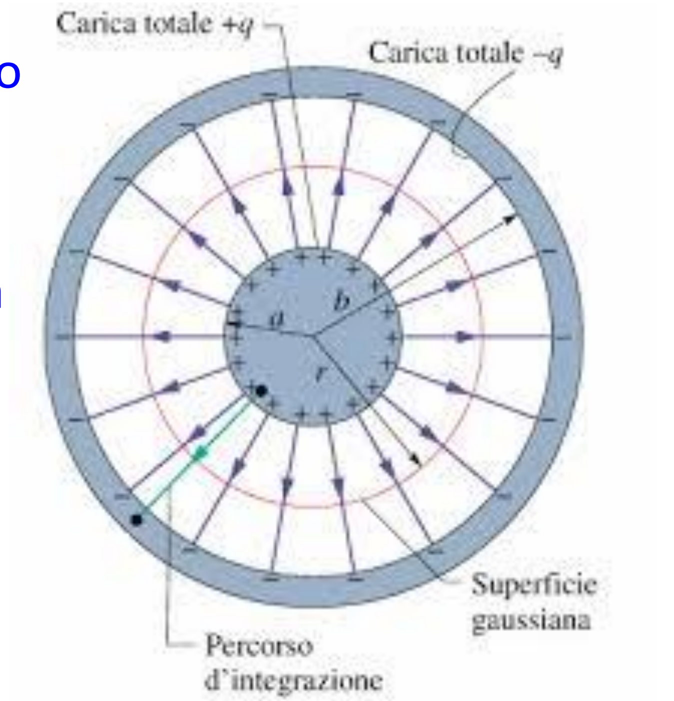
notare che la capacità dipende solo dalla geometria

Capacità di un condensatore piano

$$\boldsymbol{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$

4.6 Condensatore cilindrico

La figura mostra la sezione di un condensatore cilindrico di lunghezza **L** e raggi **a** (interno) e **b** (esterno). La simmetria del campo in questo caso è cilindrica.



Determiniamo il campo elettrico applicando il **teorema di Gauss**. Scegliamo una superficie gaussiana cilindrica di raggio **r (a < r < b)**

$$\boldsymbol{\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma = E \oint_{\Sigma} d\Sigma = E(2\pi r L) = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

da cui $\boldsymbol{E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r L}}$

Per il calcolo della differenza di potenziale tra le armature usiamo la definizione:

$$\boldsymbol{V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r L} dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

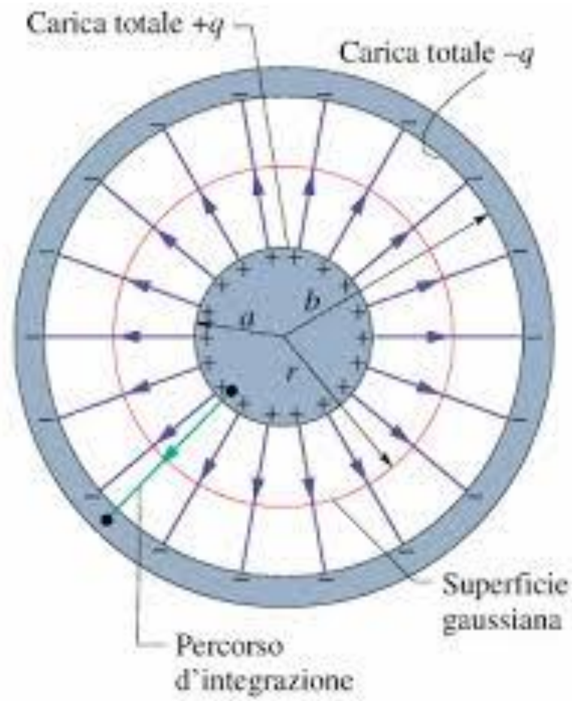
da cui calcolare la capacità di un condensatore cilindrico:

$$\boldsymbol{C = \frac{q}{V_+ - V_-} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{ln\left(\frac{a}{b}\right)}}$$

notare che la capacità dipende solo dalla geometria

4.7 Condensatore sferico

La stessa figura di prima si può pensare come sezione di un condensatore sferico.



Determiniamo il campo elettrico applicando il **teorema di Gauss**. Scegliamo una superficie gaussiana sferica di raggio **r (a < r < b)**

$$\boldsymbol{\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma = E \oint_{\Sigma} d\Sigma = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

da cui $\boldsymbol{E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

Per il calcolo della differenza di potenziale tra le armature usiamo la definizione:

$$\boldsymbol{V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}}$$

da cui calcolare la capacità di un condensatore sferico:

$$\boldsymbol{C = \frac{q}{V_+ - V_-} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}}$$

notare che la capacità dipende solo dalla geometria

4.7 Condensatore sferico

Abbiamo determinato la capacità di un condensatore sferico.

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

Come detto all'inizio la capacità si può definire a partire da un singolo conduttore isolato. Se abbiamo un singolo conduttore isolato a forma sferica possiamo ricavarne la capacità riscrivendo l'espressione del condensatore sferico e mandando ad ∞ l'altra armatura:

$$C = \lim_{b\to\infty} 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} = \lim_{b\to\infty} 4\pi\varepsilon_0 \frac{a}{1-\frac{a}{b}} = 4\pi\varepsilon_0 a$$

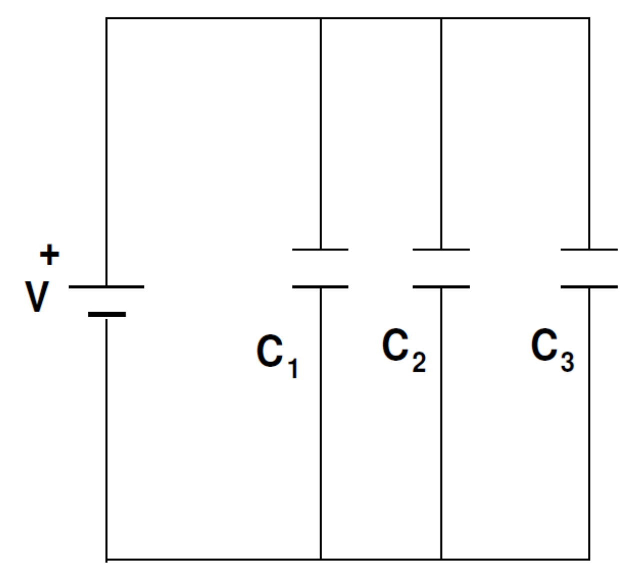
Capacità di una sfera carica

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

4.8 Condensatori in parallelo

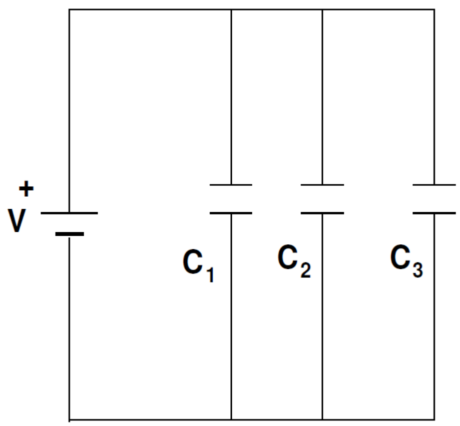
Chiameremo circuito un collegamento tramite conduttori di più elementi. Quando in un circuito sono presenti due o più condensatori, interessa conoscere qual è il valore equivalente di capacità , ovvero trovare il **condensatore equivalente** che sostituito al posto dei condensatori nel circuito, presenti stessa carica, differenza di potenziale e capacità (stesse grandezze elettriche).

I condensatori sono collegati in **parallelo** quando la differenza di potenziale di ognuno di essi è la stessa ed è uguale a quella del loro insieme.



Affinché la sostituzione dell'insieme dei condensatori in parallelo con uno equivalente non produca alterazioni al circuito, esso dovrà avere la stessa differenza di potenziale e carica pari alla somma delle cariche di ciascuno dei condensatori.

4.8 Condensatori in parallelo



Quindi considerando il circuito in figura:

$$q_1 = C_1 V \qquad q_2 = C_2 V \qquad q_3 = C_3 V$$

di conseguenza la carica totale sarà:

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)V$$

un condensatore equivalente deve presentare stessa q e V ovvero:

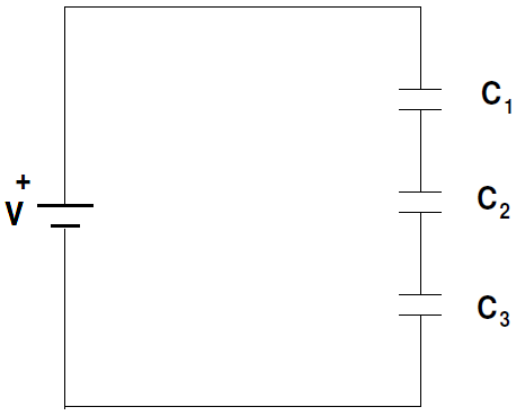
$$Q = C_{eq} V = (C_1 + C_2 + C_3)V$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

Capacità equivalente di n condensatori in parallelo

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

4.9 Condensatori in serie



I condensatori sono in serie quando la differenza di potenziale **V** è applicata all'insieme di tutti i condensatori e su ciascuno di essi vi è la stessa carica **q**. La differenza di potenziale (ddp) è in questo caso la somma delle ddp di ciascun condensatore.

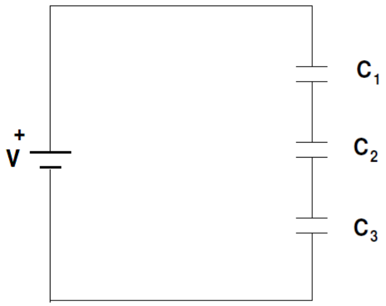
Perchè la carica deve essere la stessa?

Questo lo possiamo capire solo partendo da condensatori tutti scarichi. Nel momento in cui colleghiamo la serie ad una batteria questa muove una carica **+q** (per esempio dal condensatore 3 della figura) dall'armatura in basso (che rimane con carica **-q**).

Questa armatura per induzione provoca sull'armatura opposta (che è sempre un conduttore) una carica di segno opposto (**+q**)

Però il conduttore tra 2 e 3 era neutro inizialmente, per cui se l'armatura superiore del 3 ha segno **+q** l'altro lato del conduttore (che è l'armatura inferiore di 2) avrà carica **-q**, e così via.

4.9 Condensatori in serie



Come deve essere il **condensatore equivalente**? Esso dovrà avere carica **q** (la stessa di tutti i condensatori) e ddp pari alla somma delle ddp.

Le ddp sono: $V_1 = \frac{q}{C_1}$ $V_2 = \frac{q}{C_2}$ $V_3 = \frac{q}{C_3}$

La differenza di potenziale ai capi dei tre condensatori sarà la somma dei

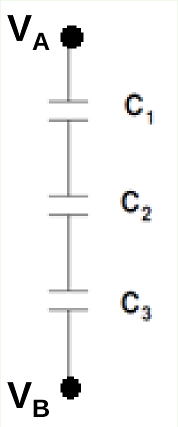
$$V = V_1 + V_2 + V_3 = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) = \frac{q}{C_{eq}}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Capacità equivalente di n condensatori in serie

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

Esercizio 4.1



3 condensatori sono collegati in serie con una d.d.p. complessiva ai capi della serie pari a $\mathbf{V_B - V_A}$ = 100 V ed una capacità equivalente della serie pari a 100 pF. Calcolare i 3 valori $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{C_3}$ affinché tra $\mathbf{V_A}$ e $\mathbf{C_1}$ vi siano 50 V e tra $\mathbf{V_A}$ e $\mathbf{C_2}$ vi siano 70 V.

4.10 Energia immagazzinata in un condensatore

Per caricare un condensatore occorre un agente esterno che compia lavoro per trasferire cariche sulle armature del condensatore. Per valutare questo lavoro fissiamo un momento qualsiasi dell'operazione di carica del condensatore e supponiamo vi sia sul condensatore a questo istante una carica **q'**. Se vogliamo trasferire sul condensatore una ulteriore carica **dq'** dobbiamo fare del lavoro, e dal momento che sul condensatore ci sarà una ddp pari a $V' = q'\,C$ il lavoro sarà:

$$dL = dq'V' = \frac{q'dq'}{C}$$

Pertanto il lavoro complessivo per caricare il condensatore (da 0 alla carica **Q** finale):

$$L = \int dL = \int_0^Q \frac{q'dq'}{C} = \frac{Q^2}{2C}$$

Questo lavoro (esterno) per la conservazione dell'energia è immagazzinato nel condensatore come energia potenziale:

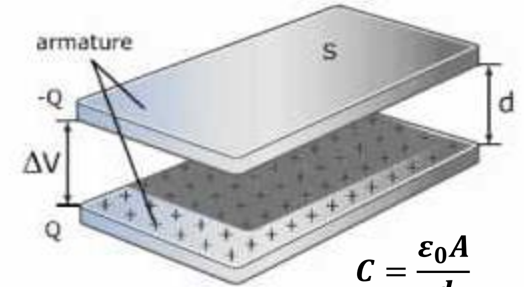
$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$$

4.10 Energia immagazzinata in un condensatore

Con quale meccanismo è conservata l'energia?
L'energia è stata immagazzinata in forma di campo elettrico all'interno del condensatore:

Dal momento che il campo elettrico è solo all'interno del condensatore allora possiamo considerare l'energia all'interno del condensatore e calcolare di conseguenza la **densità volumetrica di energia u**.

$$u = \frac{U}{Sd} = \frac{CV^2}{2Sd} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$



$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

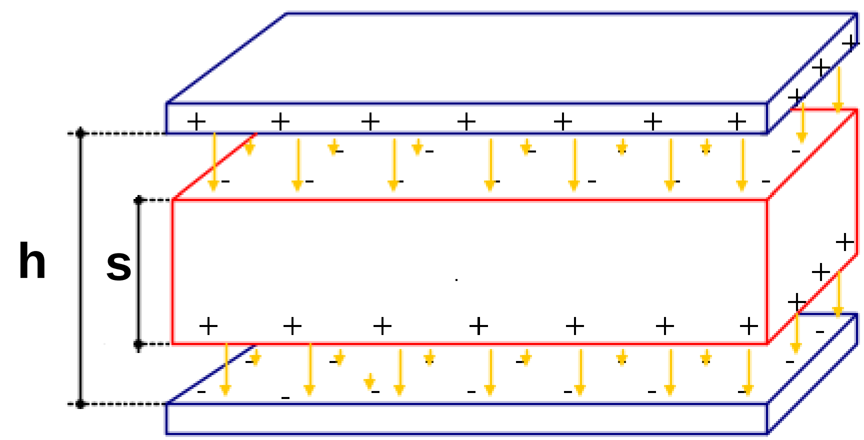
Da cui si vede il legame diretto tra la densità di energia elettrostatica e la presenza del campo.
Questo risultato si estende dicendo che quando c'è un campo E la densità di energia presente è:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

4.11 Condensatore con lastra conduttrice

Se consideriamo un condensatore piano di capacità C_0, con d.d.p. V_0 e carico con densità di carica σ_0 si avrà tra le armature un campo elettrico pari a $E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ e se la distanza tra le armature è **h** si avrà che: $V = \frac{q_0}{C_0} = E_0 h$

Se adesso inseriamo una lastra conduttrice di spessore **s < h** tra le armature si ha che il conduttore inserito presenterà per induzione sulle due facce una carica uguale e opposta a quella dell'armatura cui si affaccia (senza che si tocchino)



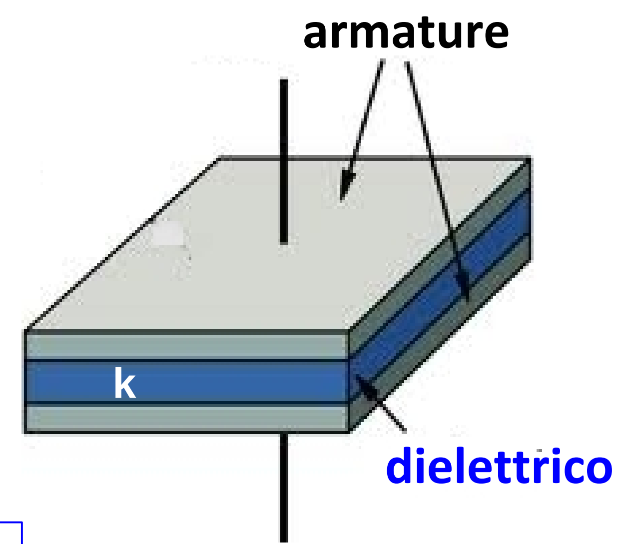
il potenziale complessivo si riduce a

$$V = E_0(h - s) < V_0$$

indipendentemente dalla posizione della lastra

4.12 Condensatore con dielettrici

Se invece tra le armature di un condensatore inseriamo un dielettrico anche in questo caso si osserva una riduzione del potenziale ma di entità inferiore e cosa più importante le cariche che si manifestano anche nel dielettrico non possono muoversi da esso.



Se allora inseriamo un dielettrico che occupi l'intero spazio tra le armature si trova il potenziale diminuisce di un fattore pari a:

$$k = \frac{V_0}{V_k}$$

k è detto **costante dielettrica relativa del materiale**

$$\boxed{\begin{array}{l} k = 1 \text{ aria e vuoto} \\ k > 1 \text{ tutti gli altri dielettrici} \end{array}}$$

Inoltre ogni materiale ha un valore massimo di differenza di potenziale che si può applicare superato il quale il materiale viene perforato da una scarica elettrica. A questo valore di potenziale corrisponde un massimo valore di campo elettrico detto **rigidità dielettrica**.

4.12 Condensatore con dielettrici

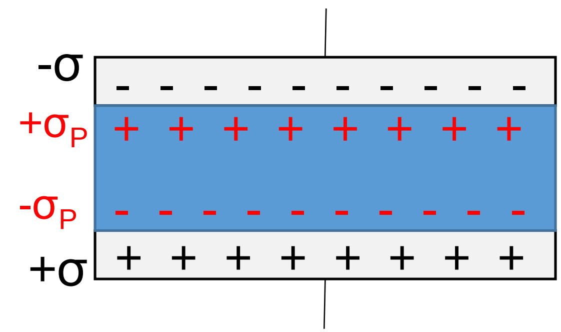
Assumendo che il campo elettrico nell'inserimento è rimasto uniforme la diminuzione l'introduzione della costante dielettrica implica questo:

$$E_k = \frac{V_k}{h} = \frac{V_0}{kh} = \frac{E_0}{k} = \frac{\sigma_0}{k\varepsilon_0}$$

l'attenuazione del campo elettrico si può riscrivere $E_0 - E_k = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_0}{k\varepsilon_0} = \frac{k-1}{k}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$

così il campo elettrico E_k all'interno del condensatore:

$$E_k = E_0 - (E_0 - E_k) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{k-1}{k}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$



La quantità $\frac{k-1}{k}\sigma_0$ ha le dimensioni di una carica, e la indichiamo come σ_P

$$E_k = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_P}{\varepsilon_0}$$

che ci indica che nel dielettrico si sommano i campi dovuti alle cariche sulle armature (E_0) e quelle dovute alle cariche nel dielettrico ($\frac{\sigma_P}{\varepsilon_0}$) e ci indica la relazione tra le cariche nel dielettrico dovute alla **polarizzazione** e le cariche sulle armature.

4.12 Condensatore con dielettrici

Di conseguenza la capacità del condensatore nel complesso è aumentata

$$C_k = \frac{q_0}{V_k} = k\frac{q_0}{V_0} = kC_0$$

Ricordando che per tutti condensatori (piano, cilindrico, sferico) si ha che:

$$C_0 \propto \varepsilon_0$$

deduciamo che la presenza di un dielettrico che occupi interamente lo spazio tra le armature ha l'effetto complessivo di "scalare" la costante dielettrica

$$\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon = k\varepsilon_0$$

e la costante ε viene detta **costante dielettrica assoluta del dielettrico**.

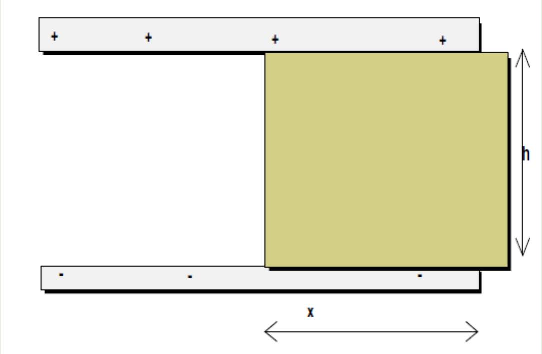
Il ragionamento fatto quindi ci permette di ricalcolare le capacità per le altre geometrie di condensatori cambiando semplicemente la costante dielettrica e di ritrovare il risultato relativo alla densità di energia elettrostatica che troveremo essere:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

Esercizio 4.2

All'interno di un condensatore le cui armature distano **h**, viene inserita una lastra dielettrica (costante dielettrica relativa **k**) di spessore **s < h**, avente la stessa area delle armature del condensatore. Calcolare la capacità del condensatore.

Esercizio 4.3



Supponiamo di cominciare ad inserire una lastra dielettrica che tutto lo spessore **h** del condensatore piano, ma questa volta abbiamo iniziato ad inserire il dielettrico solo di un tratto **x**. Calcolare la forza **F** con cui la lastra è risucchiata tra le armature quando il condensatore è mantenuto collegato ad un generatore di d.d.p. costante **V** tra le armature.

Esercizio 4.4

Tra le lamine di area **$S = 115\ cm^2$** di un condensatore piano, distanti **$d = 1.24\ cm$**, viene inserito un dielettrico di spessore **$b = 0.78\ cm$** e costante dielettrica relativa **$\varepsilon_r = 2.61$**. Prima dell'inserimento il condensatore è stato caricato a **$V = 85.5\ V$** e tenuto isolato. Qual è la d.d.p. dopo l'inserimento del dielettrico?

Esercizio 4.5

Due conduttori sferici **C_1** e **C_2**, cavi e molto sottili, concentrici e di raggi **$R_1 = 10\ cm$** e **$R_2 = 20\ cm$** sono sostenuti da un supporto isolante. La carica **$q_1 = -20\ nC$** viene trasferita su **C_1** e la carica **$q_2 = +50\ nC$** su **C_2**. Calcolare la **ΔV** tra **C_1** e **C_2**. Successivamente un conduttore sferico **C_3** di raggio **$R_3 = 5\ cm$**, anch'esso sospeso ad un supporto isolante, ma molto lontano dai primi due, viene collegato con un conduttore a **C_2**. Calcolare il potenziale **V** rispetto a ∞ di **C_2** e **C_3**.