CAPITOLO 6

CAMPI MAGNETICI

6.1 Introduzione

Come una bacchetta elettrizzata produce attorno a se un campo elettrico $\vec{E}$ così possiamo dire che un magnete produce un campo vettoriale che chiamiamo campo magnetico $\vec{B}$. Le osservazioni sperimentali sui magneti però mostrano delle differenze: si osserva che ogni magnete ha **due poli diversi** (detti positivo e negativo) ma a differenza del caso elettrico non esistono poli magnetici (monopoli) isolati. Questo comporta una differente natura del campo magnetico, anche se la definizione operativa ripercorre le stesse metodologie usate per evidenziare il campo elettrico. Si osserva comunque che correnti o cariche in moto in un campo magnetico sono soggette a forze magnetiche. Per cui potremo utilizzare queste per tracciare la presenza dei campi magnetici e definire le linee di campo magnetico.

Più precisamente Oersted nell'800 dimostrò con i suoi esperimenti come un ago magnetico fosse deviato dalla presenza di correnti e che anzi utilizzando limatura di ferro si potesse avere evidenza delle linee di campo (magnetico) generate da fili percorsi da corrente. Infatti in seguito Ampere dimostrò che le interazioni magnetiche sono manifestazioni delle interazioni tra cariche in movimento e di conseguenza per spiegare il comportamento dei magneti permanenti bisognerà ipotizzare correnti microscopiche o correnti amperiane, ipotesi sostanzialmente verificata dalle misure successive.

6.2 Forza di Lorentz

Non esistendo una carica magnetica non possiamo usare esattamente la stessa procedura utilizzata per definire il campo elettrico. Diciamo più esattamente che un sistema di cariche in moto genera in una regione di spazio un campo magnetico che indichiamo con $\vec{B}$. Tuttavia a sua volta un'altra carica elettrica in moto in un campo magnetico risente di una forza magnetica. Quindi possiamo utilizzare questa carica in movimento come carica di prova, vedere che tipo di forza agisce e risalire al campo magnetico.

Si osserva sperimentalmente che la forza agente su una carica **q** in moto con velocità costante $\vec{v}$ in un campo magnetico $\vec{B}$ è perpendicolare alla velocità e si può esprimere come:

Forza di Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

in modulo è pari a $qvB\sin\theta$ con θ l'angolo tra il vettore $\vec{v}$ ed il vettore $\vec{B}$.

6.2 Forza di Lorentz

Conseguenza di questa espressione è che **la forza di Lorentz è sempre perpendicolare sia a $\vec{v}$ che a $\vec{B}$**. La forza, in altre parole, non ha mai una componente tangenziale alla traiettoria quindi è sempre **centripeta** e compie **sempre lavoro nullo**

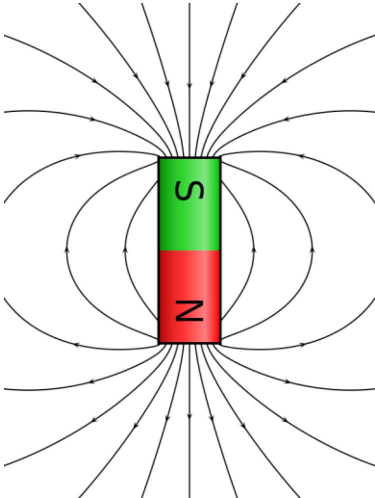
$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = 0$$

e dal **teorema lavoro-energia cinetica** discende che l'energia cinetica non cambia.

L'unità di misura del campo magnetico nel SI è il **Tesla (T)** per cui

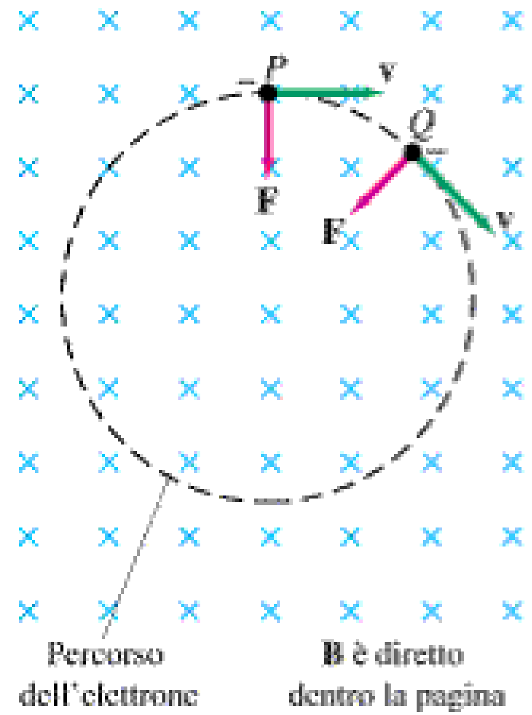
$$1\,T = \frac{1\,Newton}{1\,Coulomb \cdot \frac{m}{s}} = \frac{1\,Newton}{1\,Ampere \cdot m}$$

Anche il campo magnetico si rappresenta con linee di campo. Definiamo come polo Nord (positivo) di un magnete il polo da cui escono le linee di campo magnetico (in modo da avere una completa analogia con il campo elettrico) e sud (o negativo) l'altro. Abbiamo inoltre che poli di segno uguale si respingono e di segno opposto si attraggono.



6.2 Forza di Lorentz

Come abbiamo detto la forza di Lorentz è centripeta quindi se la velocità iniziale della particella non ha una componente parallela al campo magnetico la forza devia continuamente la particella che si muoverà quindi descrivendo una circonferenza ed il **moto è circolare**. Dalla seconda Legge di Newton abbiamo quindi che



$$qvB = ma_c = m\frac{v^2}{r}$$

da cui risolvendo si ha il **raggio di curvatura**:

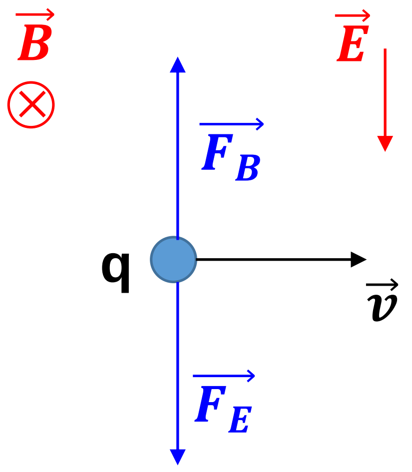
$$r = \frac{mv}{qB}$$

ed il **periodo di rotazione**: $$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi mv}{vqB} = \frac{2\pi m}{qB}$$

In generale invece se c'è una iniziale componente della velocità in direzione del campo magnetico, questa componente non viene modificata ed il moto risultante è **elicoidale**.

6.2 Forza di Lorentz

Sia il campo $\vec{E}$ che $\vec{B}$ comportano delle forze su cariche in moto. Se i due campi hanno direzioni perpendicolari tra loro si dicono *incrociati*. Quando una carica attraversa una regione con campi incrociati siamo nelle condizioni per avere delle forze agenti parallele tra loro e in condizioni opportune anche nulle.



Infatti se abbiamo anche $\vec{v}$ perpendicolare a $\vec{B}$ (che è perpendicolare ad $\vec{E}$) allora

$$F_B = qvB$$

$$F_E = qE$$

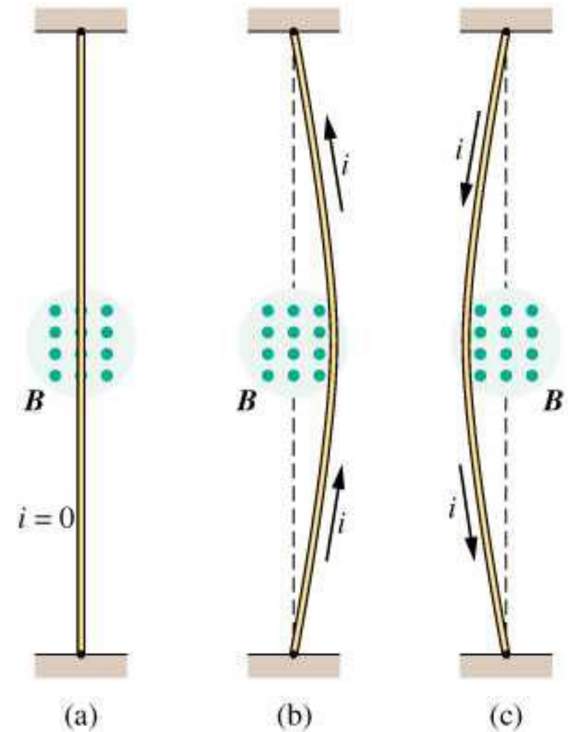
per cui se i due campi sono regolati in modo che queste due forze siano uguali in modulo

$$qvB = qE \quad \Rightarrow \quad v = \frac{E}{B}$$

i campi incrociati permettono quindi di misurare la velocità di una carica elettrica.

6.3 Seconda legge elementare di Laplace

La corrente nei conduttori è dovuta come abbiamo visto al moto degli elettroni e abbiamo visto che $\vec{j} = -ne\vec{v_d}$ da cui ciascuno degli elettroni risentirà di una forza di Lorentz, quando il filo è immerso in un campo magnetico e trasmetterà al reticolo l'interazione come mostrato in figura.



La forza su ogni elettrone sarà:

$$\vec{F} = -q\vec{v_d} \times \vec{B}$$

per cui in un tratto infinitesimo **ds** del filo conduttore avente sezione **Σ** si ha che la forza complessiva (**n** densità volumetrica di elettroni):

$$d\vec{F} = n\Sigma ds\vec{F} = -(\Sigma ds)ne\vec{v_d} \times \vec{B} = (\Sigma ds)\vec{j} \times \vec{B} = i\vec{ds} \times \vec{B}$$

Seconda legge elementare di Laplace

$$d\vec{F} = i\vec{ds} \times \vec{B}$$

6.3 Seconda legge elementare di Laplace

Per cui su un filo conduttore di forma qualunque si ottiene:

$$\vec{F} = \int_C i\overrightarrow{ds} \times \vec{B}$$

esteso cioè seguendo la forma del filo dal punto P al Q considerato. Nel caso in cui $\vec{B}$ è costante ed il filo rettilineo questa diventa semplicemente

$$\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$$

Forza che risente un filo rettilineo percorso da corrente immerso in un campo magnetico uniforme

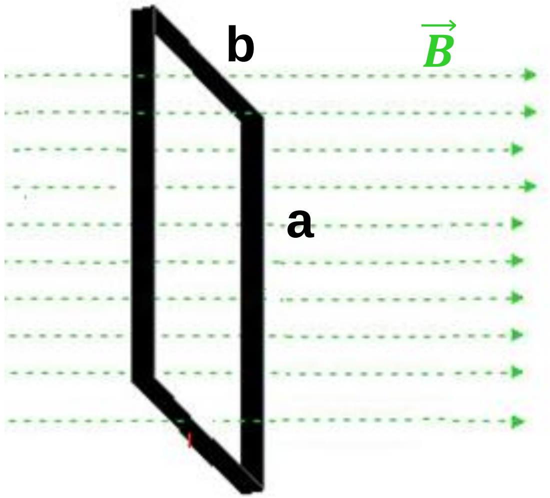
$$\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$$

ed infine quando $\vec{B}$ è costante ed il filo curvo ma in un piano allora si può verificare che il risultato diventa:

$$\vec{F} = i\overrightarrow{PQ} \times \vec{B}$$

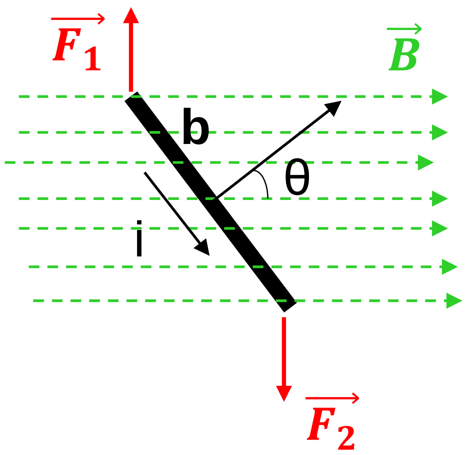
6.4 Momenti torcenti su circuiti piani

Consideriamo una spira rettangolare percorsa da corrente ed immersa in un campo magnetico. Ogni segmento della spira è soggetta ad un forza magnetica. Di conseguenza bisogna determinare sia la risultante delle forze, ma anche la risultante dei momenti. Se la spira è libera di ruotare su un asse le forze sono uguali tra loro ma costituiscono una coppia danno luogo cioè ad un momento di forze.



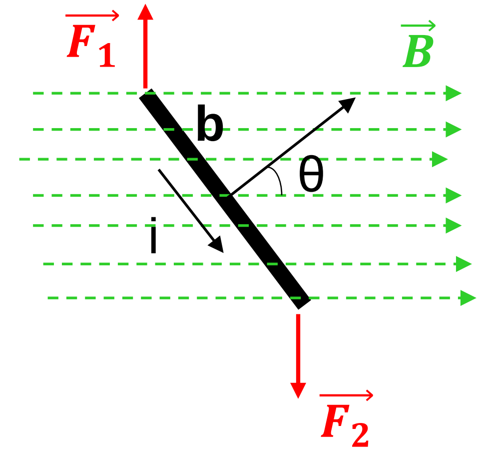
Considerando la spira rettangolare di lati **a** e **b** (vista dall'alto in figura è visibile li lato di lunghezza **b**) abbiamo che le forze $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ agenti sui lati verticali **a** hanno modulo pari a: (nota che il lato **a** sarà sempre ortogonale a $\vec{B}$)

$$F_1 = F_2 = iaB$$



6.4 Momenti torcenti su circuiti piani

mentre le forze $\overrightarrow{F_3}$ e $\overrightarrow{F_4}$ agenti sui lati orizzontali **b** hanno modulo pari a:
(nota che le forze $\overrightarrow{F_3}$ e $\overrightarrow{F_4}$ saranno sempre parallele al lato **a**)



$$F_3 = F_4 = ibBsen(90° - \theta) = ibBcos\theta$$

Se la spira può solo ruotare rispetto all'asse ortogonale alla figura e passante per il suo centro, le forze $\overrightarrow{F_3}$ e $\overrightarrow{F_4}$ avranno momento nullo perché parallele all'asse, e quindi il **momento totale delle forze** sarà:

$$\tau = F_1 \frac{b}{2} sen\theta + F_2 \frac{b}{2} sen\theta = iaBbsen\theta$$

il prodotto ***Σ = ab*** rappresenta l'area della spira per cui possiamo dire che

$$\tau = i\Sigma Bsen\theta$$

relazione che vale per qualunque spira piana, e l'angolo **θ** è l'angolo tra la normale alla spira (o il vettore superficie orientata della spira) ed il campo magnetico.

6.4 Momenti torcenti su circuiti piani

Se la spira è fatta di N avvolgimenti sovrapposti la relazione di prima va moltiplicata per N.

Poiché la relazione trovata è simile a quella trovata per il dipolo elettrico, possiamo definire il **momento di dipolo magnetico**

$$\vec{m} = i\Sigma\widehat{u_n}$$

con $\widehat{u_n}$ versore normale alla spira, per ritrovare l'espressione

Momento torcente di una spira

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

esattamente come per il dipolo elettrico nel campo elettrico.

L'espressione dedotta è in realtà valida per un circuito di forma qualunque, basta calcolarsi il momento magnetico della spira.

6.4 Momenti torcenti su circuiti piani

Infine supponiamo di considerare la situazione in cui la spira possa ruotare e indichiamo con **I** il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione e mettiamo nella situazione di equilibrio ($\vec{m}$ e $\vec{B}$ paralleli) che perturbiamo di un piccolo angolo **θ**.

Abbiamo:

$$\tau = -mBsen\theta = -mB\theta = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

da cui troviamo l'equazione di moto armonico:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

con:

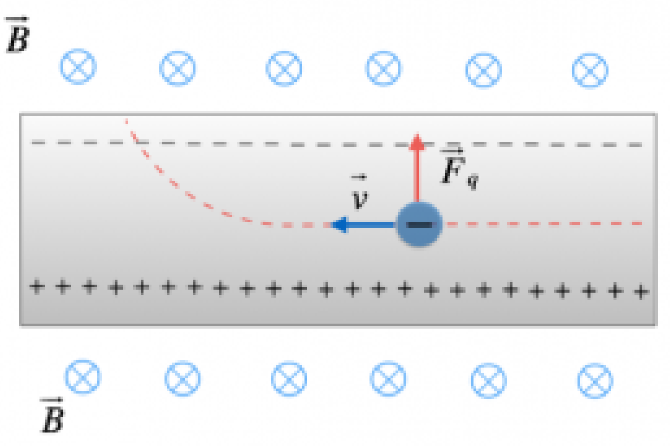
$$\omega = \sqrt{\frac{mB}{I}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{i\Sigma B}}$$

che permette quindi di misurare B tramite misure di oscillazioni di una spira.

6.5 Effetto Hall

Se abbiamo una lamina conduttrice percorsa da corrente ed immersa in campo magnetico come in figura, abbiamo che le cariche in movimento risentono di una forza di Lorentz che le devia.

Nel caso di un conduttore, sono gli elettroni in movimento ad essere spostati verso l'alto.



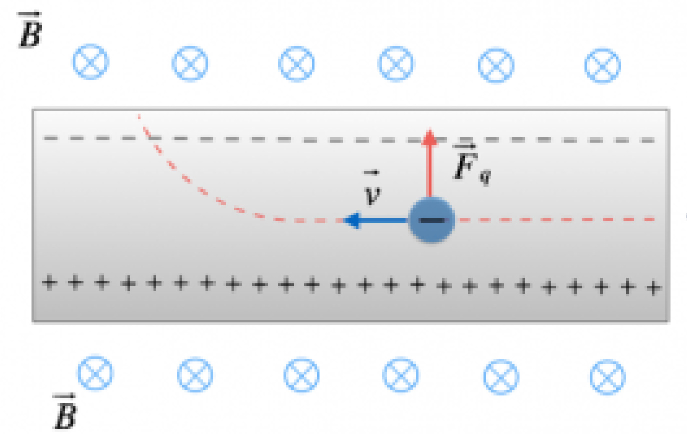
Col passare del tempo questo spostamento provoca un accumulo di cariche negative verso l'alto e di conseguenza cariche positive verso il basso. Si determina in questo modo un **campo elettrostatico** che va dal basso verso l'alto che sulle altre cariche negative in movimento provoca una forza dall'alto verso il basso (**qE** con il segno meno della carica) quindi opposta a quella di Lorentz.

Avremo ad un certo momento una situazione di equilibrio delle due forze:

$$eE = ev_d B$$

ovvero: $$E = v_d B$$

6.5 Effetto Hall



Dalla definizione di densità di corrente:

$$j = \frac{i}{A} = nev_d$$

dove **A** è la sezione della lamina. Quindi il campo elettrico **E** diventa:

$$E = \frac{iB}{neA}$$

Se indichiamo con **l** lo spessore e **d** la larghezza della lamina allora possiamo ancora dire che tra i due lati della lamina vi è una d.d.p. pari a ***V = Ed***:

$$\frac{V}{d} = \frac{iB}{neld} \Rightarrow B = \frac{nelV}{i} \quad \text{oppure} \quad n = \frac{Bi}{Vle}$$

a seconda di quale quantità è incognita. Le sonde ad effetto Hall vengono utilizzate per misurare campi magnetici tramite la prima delle relazioni, in altri casi invece sapendo B possiamo determinare la concentrazione dei portatori maggioritari nel conduttore ed il loro segno (dal segno del potenziale tra i due lati).