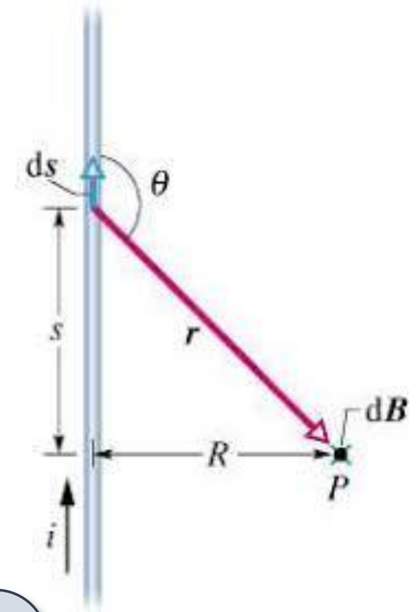
CAPITOLO 7

TEOREMA DI AMPERE

7.1 Prima legge elementare di Laplace

Le correnti generano i campi magnetici.



Per calcolare il campo magnetico prodotto da un filo percorso da corrente dobbiamo usare una procedura simile a quella della legge di Coulomb e sapere qual è la forza elementare in un punto nello spazio dovuta ad un elemento di filo percorso da corrente. Possiamo considerare un filo qualunque percorso da corrente i ed individuare un elemento $d\vec{s}$ (tangente al filo ed orientato secondo la corrente).

Prima legge elementare di Laplace

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{s} \times \widehat{u_r}}{r^2}$$

La quantità μ_0 è detta permeabilità magnetica del vuoto ed ha valore $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\ T \cdot m/A$ o anche esprimibile in H/m (henry/metro).

Prima Legge elementare di Laplace ha un andamento come $1/r^2$ come la legge di Coulomb.

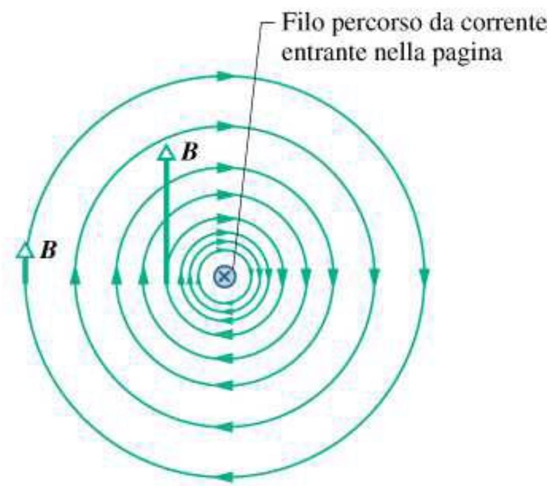
7.1 Prima legge elementare di Laplace

Per un circuito finito di conseguenza si avrà:

Legge di Ampere-Laplace

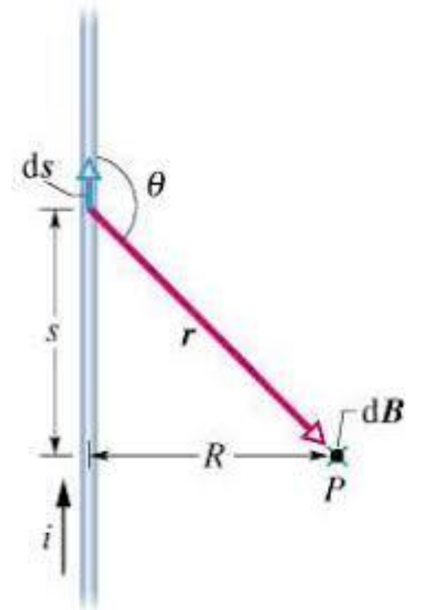
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \widehat{u_r}}{r^2}$$

Le linee del campo magnetico si avvolgono attorno al filo con tante linee concentriche al filo e percorrenza secondo la regola della mano destra: Afferriamo idealmente il filo con il pollice puntato secondo la direzione della corrente nel filo. Il verso di rotazione stabilito dalle altre dita indica il verso delle linee del campo magnetico generato dal filo Questo vale anche per i singoli elementi infinitesimi.



7.2 Legge di Biot-Savart

Applichiamo la legge di Ampere ad un filo rettilineo indefinito per calcolare il campo magnetico che genera.



Consideriamo un generico elemento $d\vec{s}$ del filo. La prima legge elementare di Laplace ci dice che il campo magnetico infinitesimo generato nel punto P vale:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \widehat{u_r}}{r^2}$$

Svolgendo il prodotto vettoriale

$$d\vec{s} \times \widehat{u_r} = sen\theta ds$$

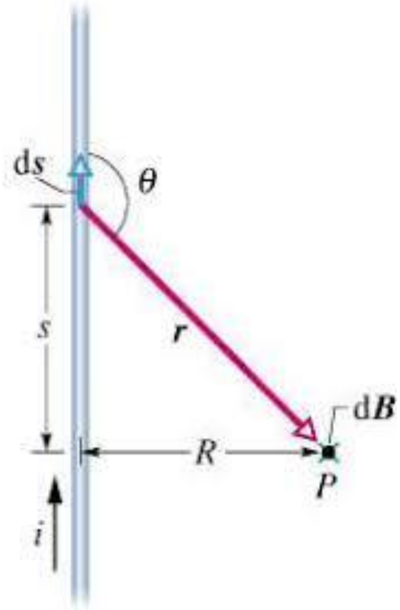
La direzione di $d\vec{B}$ è perpendicolare al piano della figura e per ogni tratto $d\vec{s}$, $d\vec{B}$ ha la stessa direzione e verso per cui possiamo direttamente integrare per ottenere il risultato.

Osserviamo inoltre che la metà inferiore del filo e quella superiore a partire dal punto P danno contributi tra loro uguali se il filo è infinito.

7.2 Legge di Biot-Savart

Pertanto possiamo dire che:

$$\boldsymbol{B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int \frac{sen\theta ds}{r^2}}$$



Le variabili $\boldsymbol{ds}$ e $\boldsymbol{sen\theta}$ sono collegate tra loro:

$$\boldsymbol{R = rsen(\pi - \theta) = rsen\theta}$$

da cui:

$$\boldsymbol{\frac{1}{r^2} = \frac{sen^2\theta}{R^2}}$$

Per quanto riguarda l'elemento infinitesimo $\boldsymbol{ds}$:

$$\boldsymbol{R = s \cdot tg(\pi - \theta)}$$

$$\boldsymbol{S = r \cdot ctg(\pi - \theta)}$$

da cui:

$$\boldsymbol{ds = \frac{Rd\theta}{sen^2\theta}}$$

7.2 Legge di Biot-Savart

Sostituendo:

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{Rd\theta}{sen^2\theta}\frac{sen^2\theta}{R^2}sen\theta$$

che diventa:

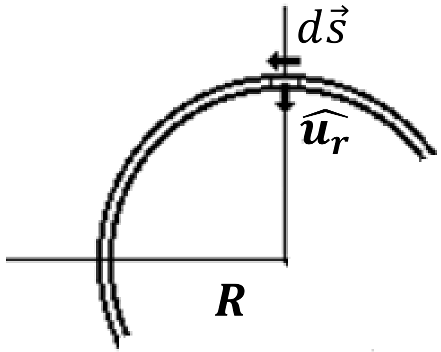
$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{R}sen\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

Legge di Biot-Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\widehat{u_\theta}$$

7.2 Legge di Biot-Savart

Se il filo `e piegato ad arco e consideriamo il campo risultante nel centro di questo arco abbiamo che dalla figura l’angolo tra $d\vec{s}$ e $\widehat{u_r}$ è 90° per cui abbiamo che:



$$d\vec{s} \times \widehat{u_r} = ds$$

La prima legge elementare di Laplace nel centro dell’arco diventa:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds}{R^2}$$

Tale valore è lo stesso sia come modulo che come direzione e verso per tutti gli elementi infinitesimi per cui abbiamo che nel centro di curvatura del filo si ha

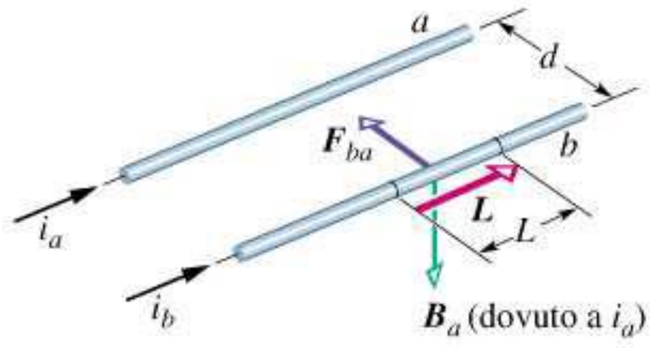
$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_0^{\phi}\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_0^{\phi}\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{Rd\phi}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\phi}{R}$$

Nel caso l’arco sia in realtà una spira circolare allora il campo magnetico risultante al centro della spira ha direzione perpendicolare al piano della spira e modulo pari a

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{2\pi}{R} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}$$

7.3 Forza tra due conduttori paralleli

Poiché un filo percorso da corrente ed immerso in un campo magnetico risente di una forza di Lorentz, allora anche due fili paralleli percorsi da corrente interagiscono tra loro, in quanto ognuno di essi genera un campo magnetico e tramite questo producono una forza di Lorentz sull'altro filo.



Consideriamo il caso in cui i due fili sono paralleli ed infiniti, allora calcoliamo il campo magnetico del filo a nella posizione del filo b che è distante d dall'altro.
Il campo sarà:

$$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}$$

La forza di Lorentz prodotto da questo campo sarà:

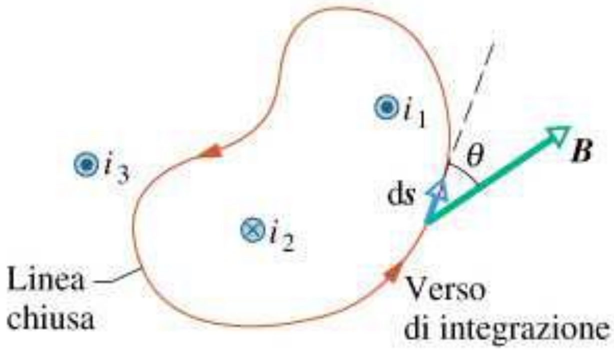
$$F_{ba} = \left| i_b \vec{L} \times \overrightarrow{B_a} \right| = \frac{\mu_0 i_a i_b L}{2\pi d}$$

Possiamo anche vedere l'effetto che il secondo filo produce sul primo e troveremo che la forza in modulo è la stessa (il verso è opposto).

Se le correnti sono concordi e parallele la forza è attrattiva mentre se le correnti sono discordi e parallele la forza è repulsiva.

7.4 Legge di Ampere

Consideriamo dei fili percorsi da corrente e un percorso chiuso. Le correnti che si trovano all'interno del percorso chiuso dono dette **correnti concatenate**. La **legge di Ampere** stabilisce che la circuitazione di $\vec{B}$ lungo un percorso chiuso è pari alla somma delle correnti concatenate al percorso stesso.



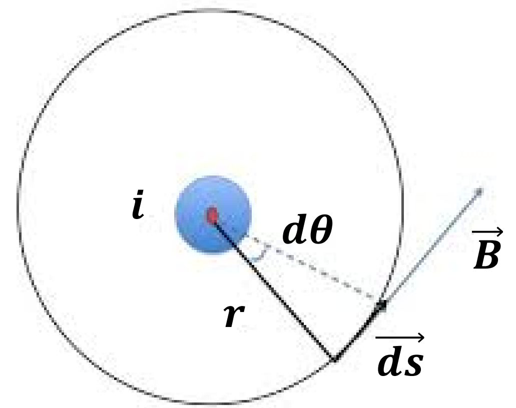
Legge di Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_0 \sum_k i_{conc,k}$$

In realtà non sappiamo il valore di $\vec{B}$ ma sappiamo comunque che è nel piano della figura quindi $\vec{B} \cdot \vec{ds} = B ds \cos\theta$. Nel fare l'integrale attribuiamo un verso di $\vec{B}$ concorde a quello di integrazione (da noi stabilito), effettuiamo l'integrale, e poi diamo un segno alle correnti (secondo membro) in modo da considerare positive le correnti che sono concordi (secondo l'avvitamento della mano destra) alla direzione nel percorso di integrazione e negative se discordi.

7.4 Legge di Ampere

Consideriamo innanzitutto la situazione del filo rettilineo indefinito e percorso da corrente i (uscente). Le linee di campo in questo caso sono circonferenze concentriche che si avvitano con orientazione antioraria. Se $\overrightarrow{ds}$ è un elemento del tratto di linea di campo allora il prodotto scalare



$$\vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} ds = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\theta$$

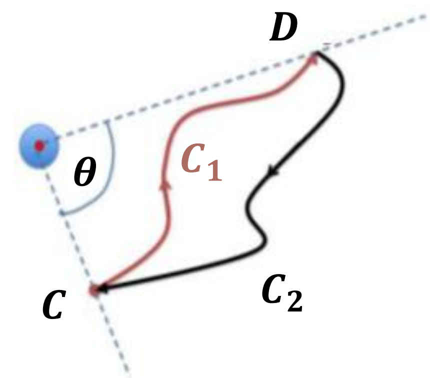
con $d\theta$ l'angolo sotteso dal vettore $\overrightarrow{ds}$. Di conseguenza anche per un tratto finito di circonferenza si avrà che:

$$\int_C^D \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_C^D d\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \theta$$

con θ l'angolo sotteso dall'arco **CD**. Dal ragionamento deriva quindi che qualunque sia la forma della curva da C a D il risultato dell'integrale **dipende solo dall'angolo sotteso** dalle due semirette che dal centro del filo uniscono C e D ed il segno che dipende solo dal fatto che la percorrenza è concorde o discorde al verso indicato dalle linee di campo magnetico.

7.4 Legge di Ampere

Consideriamo il caso in figura:



$$\int_{C_1} \vec{B} \cdot \vec{ds} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\theta \qquad \int_{C_2} \vec{B} \cdot \vec{ds} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi}\theta$$

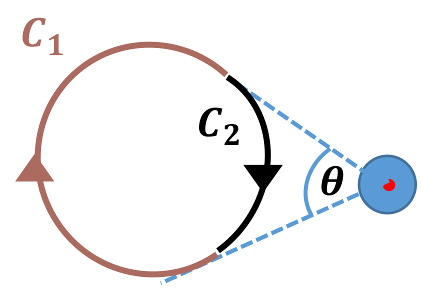
Valutiamo adesso l'integrale calcolato su una linea chiusa. Distinguiamo due casi:

1. La linea di integrazione concatena la corrente (cioè ci gira intorno)

$$\theta = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{B} \cdot \vec{ds} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} 2\pi = \mu_0 i$$

2. La linea di integrazione NON concatena la corrente

Si può sottendere la curva sotto un angolo θ che individua 2 punti C e D (le tangenti alla curva) e in base alla precedente considerazione si ottiene



$$\oint \vec{B} \cdot \vec{ds} = \int_{C_1} \vec{B} \cdot \vec{ds} + \int_{C_2} \vec{B} \cdot \vec{ds} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} - \frac{\mu_0 i}{2\pi}\theta = 0$$

Come conseguenza del teorema di ampere, dato che la circuitazione di $\vec{B}$ è diversa da zero, **il campo $\vec{B}$ non è conservativo**

Esercizio 7.1

Utilizzare il teorema di Ampere per ricavare il campo magnetico prodotto da un filo rettilineo infinito, per ottenere la legge di Biot-Savart.

Esercizio 7.2

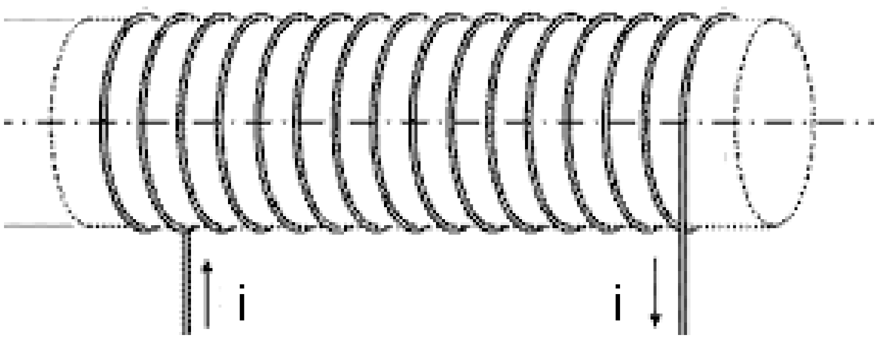
Un cilindro di lunghezza indefinita e raggio **R** è percorso da una corrente di intensità **i** avente densità omogenea su tutta la sezione del cilindro. Determinare il campo magnetico all'interno del cilindro.

Esercizio 7.3

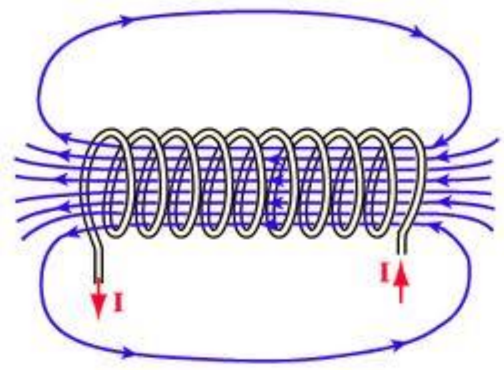
In un cilindro cavo di raggi interni **a = 2 cm** ed esterno **b = 4 cm** scorre una corrente uscente rispetto al piano della figura con densità di corrente non uniforme secondo la legge $j = cr^2$ con $\mathbf{c = 3.0 \cdot 10^6}$ **A/m**^{4} ed **r** in metri. Quanto vale $\vec{B}$ in un punto distante **3 cm** dal centro?

7.5 Campo magnetico di un solenoide

Il solenoide ideale è costituito da un lungo filo avvolto a forma di spirale attorno ad un supporto cilindrico, e le varie spire sono strettamente addossate l'una all'altra.



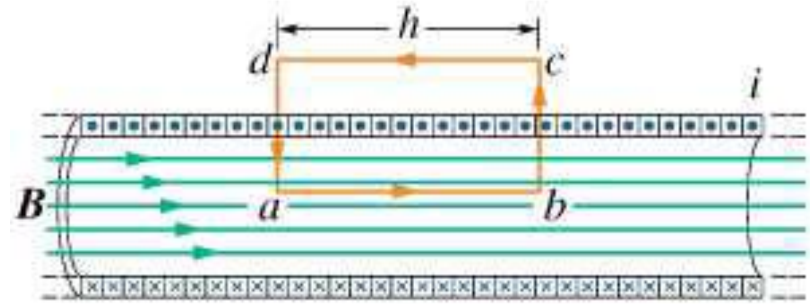
Assumiamo che la lunghezza del solenoide sia molto grande (o comunque molto più grande del suo diametro). Nel caso ideale queste spire sono così vicine tra loro da formare un continuo e come visibile in figura in questa situazione il campo magnetico tende a disporsi secondo l'asse orizzontale del solenoide stesso.



Inoltre se il solenoide è di lunghezza infinita e le spire sono strettamente addossate non vi sono linee di campo che possono uscire dal solenoide.

7.5 Campo magnetico di un solenoide

Analizziamo una sezione trasversale di questo solenoide. Possiamo allora scegliere un percorso rettangolare ABCD e applicare il teorema di Ampere:



$$\oint \vec{B}\cdot\vec{ds} = \int_a^b \vec{B}\cdot\vec{ds} + \int_b^c \vec{B}\cdot\vec{ds} + \int_c^d \vec{B}\cdot\vec{ds} + \int_d^a \vec{B}\cdot\vec{ds} = \mu_0 i_{conc}$$

Analizziamo i singoli termini

$$\int_b^c \vec{B}\cdot\vec{ds} = \int_d^a \vec{B}\cdot\vec{ds} = 0$$ perché il percorso e $\vec{B}$ sono ortogonali tra loro

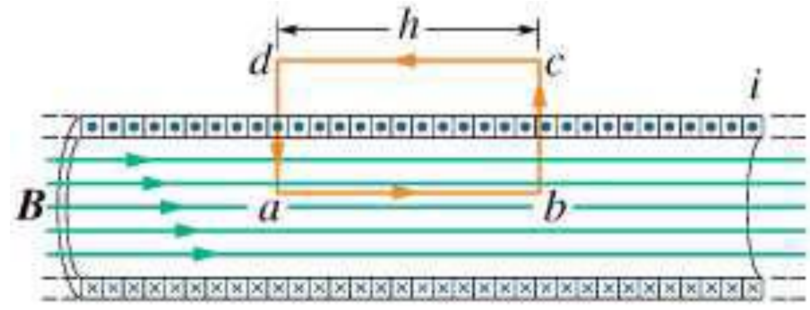
$$\int_c^d \vec{B}\cdot\vec{ds} = 0$$ perché $\vec{B} = 0$ all'esterno del solenoide

Quindi:

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{ds} = \int_a^b \vec{B}\cdot\vec{ds} = Bh = \mu_0 i_{conc}$$

7.5 Campo magnetico di un solenoide

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_a^b \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = Bh = \mu_0 i_{conc}$$



La corrente concatenata è la somma delle correnti delle spire intrecciate al percorso per cui indicando con n il numero di spire per unità di lunghezza

$$i_{conc} = nhi$$

Da cui:

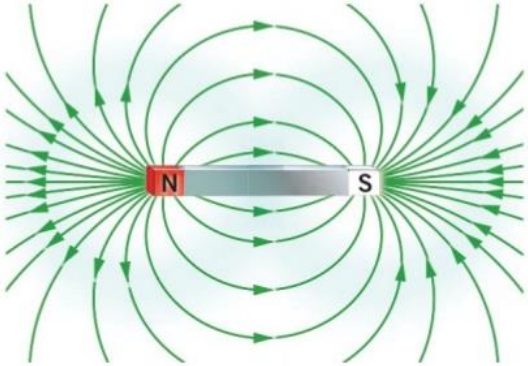
Campo magnetico all'interno di un solenoide

$$B = \mu_0 n i$$

dove i è la corrente che entra nel filo del solenoide.

7.6 Legge di Gauss per il campo magnetico

Come abbiamo visto nei vari esempi le linee di campo di $\vec{B}$ si richiudono sempre, di conseguenza qualunque superficie chiusa consideriamo il flusso entrante nella superficie equivale quello uscente per cui si avrà :



Legge di Gauss per il campo magnetico

$$\Phi(\vec{B}) = \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma = 0$$

La legge di Gauss per il campo magnetico impone che il flusso di $\vec{B}$ attraverso qualunque superficie chiusa è sempre nullo.

La forma locale di conseguenza è $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ che equivale a imporre la **non esistenza dei monopoli magnetici**.