

# **CAPITOLO 8**

## **LEGGE DI FARADAY**

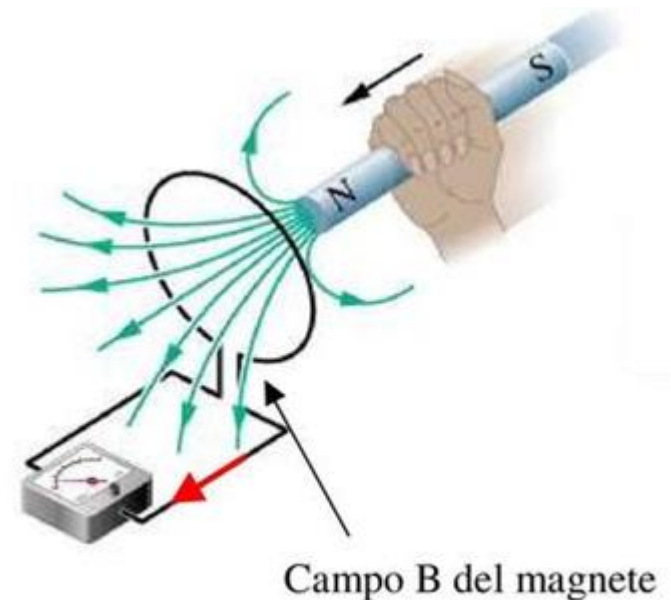
# 8.1 Induzione elettromagnetica

Abbiamo visto nei precedenti come **le cariche siano origine sia di campi elettrici che di campi magnetici**. A parte questa connessione tra i due campi a livello di statica apparentemente non vi è nessuna connessione.

**Gli esperimenti di Faraday e di Henry** misero in evidenza che in situazioni variabili nel tempo il collegamento emerge.

## 1° ESPERIMENTO

Sappiamo che una spira percorsa da corrente e immersa in un campo magnetico è soggetta ad un momento torcente. Proviamo ad immaginare una situazione simmetrica ovvero una spira (senza corrente) soggetta a momento torcente ed immersa in campo magnetico. Quando si muove che succede?



Ci dovremmo aspettare una situazione simmetrica ovvero comparirà una corrente nella spira. Il teorema che spiega questa situazione è descritto dalla legge di Faraday.

# 8.1 Induzione elettromagnetica

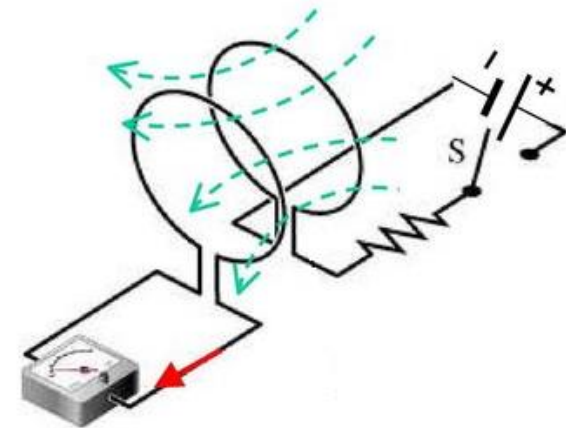
Le osservazioni stabiliscono che:

- c'è corrente solo se c'è **un moto relativo tra spira e magnete**;
- un movimento **più veloce fornisce una corrente più intensa**;
- il **verso della corrente** dipende anche dal segno del polo magnetico che si muove (tra i due poli la situazione si inverte)

Questa corrente che compare nella spira si chiama **corrente indotta** e attribuiamo la corrente ad una f.e.m. nel circuito che chiameremo **f.e.m. indotta**

## 2° ESPERIMENTO

Un secondo esperimento riguarda due spire vicine tra loro una delle quali è collegata ad un generatore di f.e.m. tramite un interruttore. Appena colleghiamo la spira, **se la corrente è variabile con il tempo si osserva una f.e.m. indotta** sull'altra spira. Viceversa se la corrente è stazionaria non c'è f.e.m. indotta.



# 8.2 Legge dell'induzione di Faraday

La legge di Faraday spiega le precedenti osservazioni mettendo in relazione la quantità di linee di campo (ovvero il flusso) del campo magnetico che attraversano la spira e in particolare **la variazione nel tempo** di questa quantità con la f.e.m. indotta.

Definiamo il **flusso del campo magnetico** attraverso una superficie di area  $\Sigma$  (che è quella di una spira) come  $\phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma}$ . La legge di Faraday afferma che la f.e.m. indotta in una spira è uguale alla derivata temporale, cambiata di segno, del flusso magnetico attraverso la spira.

## Legge di Faraday

$$\varepsilon = - \frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

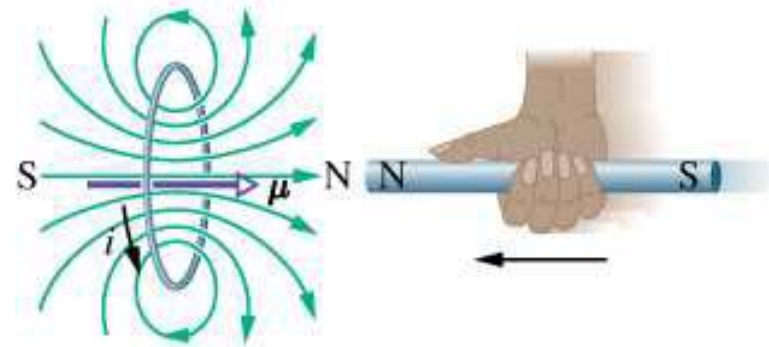
Questa variazione si può ottenere in diversi modi che producono sempre una variazione di flusso nel tempo:

- varia  $\vec{B}$  con il tempo;
- varia l'area della spira o la parte di area immersa in  $\vec{B}$ ;
- varia l'orientazione della spira rispetto a  $\vec{B}$ .

# 8.3 Legge di Lenz

La corrente indotta dalla spira ha un verso tale che il campo magnetico generato dalla stessa corrente indotta si oppone alla variazione di campo magnetico che l'ha prodotta.

La **legge di Lenz** è quella che motiva il segno meno, ed è dovuta al principio di **conservazione dell'energia**. Infatti se per assurdo non fosse così (ovvero la corrente indotta fosse favorevole) allora il campo magnetico dovuto alla corrente indotta sarebbe esattamente parallelo al centro della spira a quello esterno.



Ma una spira percorsa da corrente è equivalente ad un dipolo magnetico, quindi in questo caso la spira attirerebbe a sé il magnete accelerandolo e quindi con un aumento di energia cinetica. Se così fosse avremmo una **violazione della conservazione dell'energia**. Pertanto nella realtà la situazione è quella in figura

# 8.4 Origine della f.e.m. indotta

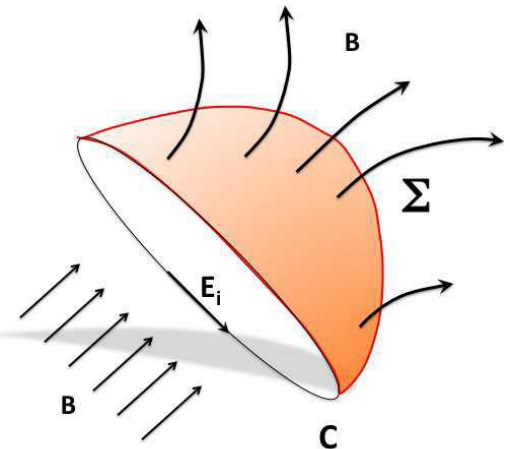
Esplicitiamo la legge di Faraday per evidenziare meglio il legame tra  $\vec{E}_i$  e  $\vec{B}$ :

$$\varepsilon_i = - \frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

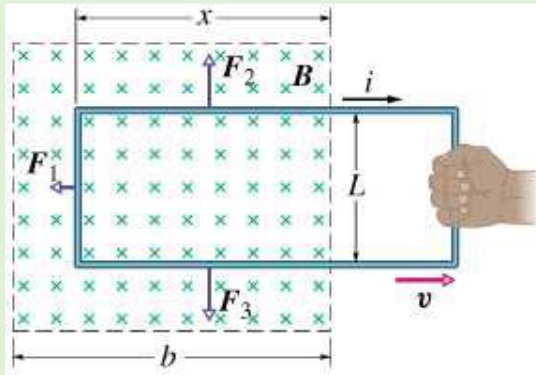
$$\varepsilon_i = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \widehat{u}_n d\Sigma$$

dove in base alle considerazioni fatte per il flusso di  $\vec{B}$  nel precedente capitolo,  $\Sigma$  è una qualunque superficie che si appoggi alla linea  $C$ .

Il significato visuale può essere compreso da questa figura: la circuitazione è calcolata sulla curva  $C$  su cui troviamo un campo indotto  $\vec{E}_i$ , sulla superficie  $\Sigma$  troviamo un flusso di campo magnetico  $\vec{B}$  legato con il campo elettrico  $\vec{E}_i$  (non conservativo).



## Esercizio 8.1



Supponiamo una spira rettangolare inizialmente immersa in una regione con un campo magnetico  $\vec{B}$  costante ed uniforme. Ad un certo momento la spira viene trascinata fuori dalla regione ad una velocità costante  $\vec{v}$ . Qual è la forza necessaria a muovere la spira a velocità costante?

## Esercizio 8.2

Una spira circolare è immersa in una zona in cui è presente un campo magnetico variabile nel tempo  $\vec{B}(t)$ . Determinare l'espressione del campo elettrico indotto  $\vec{E}_i$ .

## Esercizio 8.3

Abbiamo una spira rettangolare di larghezza  $L = 3 \text{ m}$  e altezza  $H = 2 \text{ m}$ . Il campo magnetico  $\vec{B}$  è variabile e non uniforme con espressione  $\mathbf{B} = 4 \text{ t}^2 \mathbf{x}^2$  ed entrante nel foglio. Quali sono modulo e direzione della f.e.m. indotta per  $\mathbf{t} = 0.1 \text{ s}$ ?

## 8.5 Generatore di corrente alternata

Consideriamo una spira rettangolare che ruoti con **velocità angolare**  $\omega$  attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. All'istante  $t$  generico la spira forma un angolo  $\theta$  con la direzione del campo magnetico  $\vec{B}$  per cui il flusso

$$\phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \widehat{u}_n d\Sigma = B\Sigma \cos\theta = B\Sigma \cos(\omega t)$$

per cui la **f.e.m. indotta** dalla sua rotazione è

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} = \omega B\Sigma \sin(\omega t)$$

la **f.e.m. indotta** quindi ha una **variazione sinusoidale** con una **pulsazione** coincidente con la **velocità angolare**.



## 8.6 Legge di Felici

Se una spira di resistenza  $R$  viene mossa in un campo magnetico in essa scorre corrente data

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

Se allora vogliamo calcolare la carica che è complessivamente fluita nella spira tra due istanti di tempo dobbiamo integrare:

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i dt = -\frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\phi(\vec{B})}{dt} dt = -\frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} d\phi(\vec{B}) = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$$

relazione che è detta **legge di Felici**. In altre parole la carica che è fluita non dipende dalla specifica legge con cui varia il flusso ma solo dalla variazione complessiva. La legge permette una semplice misura di flussi o di campi magnetici.

# 8.7 Autoinduzione

Qualunque circuito  $C$  percorso da corrente produce un campo magnetico  $\vec{B}$  che si può dedurre utilizzando la **legge di Ampere-Laplace**. Il flusso di questo campo è ovviamente anche concatenato a sé stesso, per cui in questi casi si parla di **autoflusso** e quindi sarà dato da:

$$\phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \widehat{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma} \left( \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \widehat{u}_r}{r^2} \right) \cdot \widehat{u}_n d\Sigma$$

dove  $\Sigma$  è una qualunque superficie (aperta) che abbia  $C$  come contorno.

Di conseguenza  $\phi(\vec{B})$  è dipendente dalla  $i$  del circuito per cui possiamo scrivere complessivamente:

$$\phi(\vec{B}) = Li$$

ed  $L$  viene detto il **coefficiente di autoinduzione** o **induttanza**.

Notare che nel calcolo di  $L$  se la spira ha  $N$  avvolgimenti il flusso va moltiplicato per  $N$ .

**L'unità di misura dell'induttanza** nel SI è il **Henry (H)** per cui

$$1 H = \frac{1 \text{ Weber}}{1 \text{ Ampere}}$$

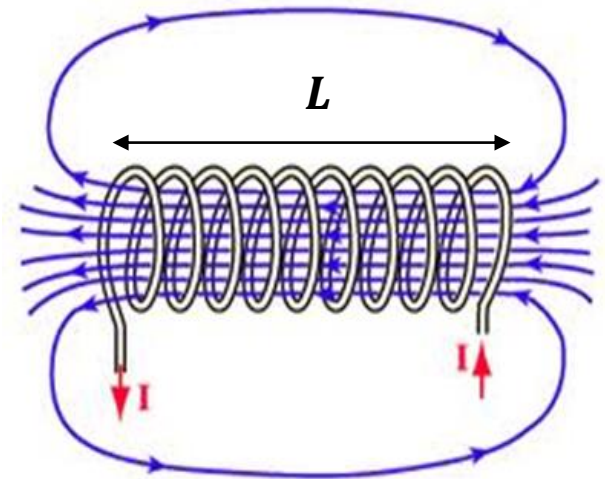
# 8.8 Induttanza di un solenoide

Per un solenoide il campo magnetico  $\vec{B}$  è diretto lungo l'asse e vale in modulo

$$B = \mu_0 n i$$

Supponendo che sia composto da  $N$  spire, detta  $\Sigma$  la sua sezione trasversale e  $l$  la sua lunghezza complessiva, il flusso del campo magnetico  $\vec{B}$  sarà pari al flusso di una singola spira moltiplicato per le  $N$  spire

$$N\phi(B) = NB\Sigma = (nl)\mu_0 n i \Sigma = Li$$



## Induttanza di un solenoide

$$L = \mu_0 n^2 l \Sigma$$

L'induttanza dipende solo dalle **caratteristiche geometriche** del solenoide

# 8.9 Circuiti RL

Quando la corrente in un circuito non è costante, si ha **una variazione nel tempo dell'autoflusso del campo magnetico**, e quindi nel circuito compare una f.e.m. indotta governata dalla **legge di Faraday-Lenz**:

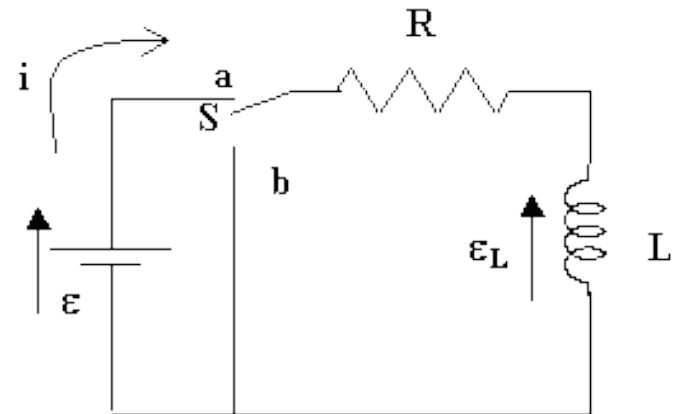
$$\varepsilon_L = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

Il dispositivo che possiede un valore di  $L$  è detto **induttore**.

Un prototipo di questo è il solenoide ed il simbolo dell'induttore



Un **circuito RL** sarà composto da una resistenza  $R$  e da un induttore  $L$  in serie con una batteria. Supponiamo di inserire un interruttore che, alla sua chiusura, consente il passaggio della corrente nella maglia.



# 8.9 Circuiti RL

Nel circuito abbiamo inizialmente l'interruttore staccato, quindi  $i = 0$ . Appena colleghiamo tramite l'interruttore, il circuito R-L, la corrente aumenta e l'induttanza risponde con una **f.e.m. autoindotta**  $\mathcal{E}_L$ .

Applicando la **seconda legge di Kirchhoff** alla maglia:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = Ri$$

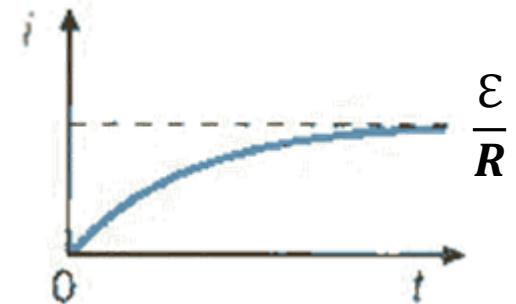
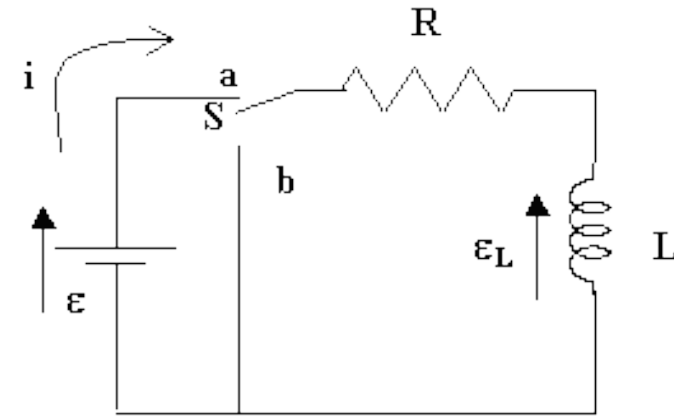
Poiché abbiamo visto che  $\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}$ :  $\mathcal{E} - L \frac{di}{dt} - Ri = 0$

che è un'equazione differenziale simile a quella del circuito RC. La soluzione è

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

la costante  $\tau = \frac{L}{R}$  è detta **costante di tempo induttiva**

La corrente parte da un valore nullo per arrivare lentamente al valore a regime. **Una volta raggiunto il valore di regime, il circuito diventa puramente resistivo.**



# 8.9 Circuiti RL

L'equazione della maglia:

$$\varepsilon = L \frac{di}{dt} + Ri$$

si può utilizzare per vedere la potenza erogata: infatti moltiplichiamo ambo i membri per la corrente  $i$  otteniamo

$$P = \varepsilon i = Li \frac{di}{dt} + Ri^2 = P_L + P_R$$

Quindi la potenza immagazzinata nell'induttore sarà

$$P_L = Li \frac{di}{dt}$$

pertanto l'energia immagazzinata  $U_L$  sarà

$$P_L = \frac{dU_L}{dt}$$

da cui:

$$dU_L = P_L dt = Lidi$$

## 8.9 Circuiti RL

Se integriamo sull'intero processo (da  $i = 0$  al valore finale di  $i$ ) si ottiene che

$$U_L = \int_0^i dU_L = \int_0^i L i di = \frac{1}{2} L i^2$$

che è l'energia immagazzinata nell'induttore e necessaria a creare il campo magnetico al suo interno. Dal momento che nei solenoidi il campo magnetico è interno al solenoide, possiamo trovare l'espressione della densità di energia.

Sostituendo l'espressione trovata per l'induttanza :

$$L = \mu_0 n^2 l \Sigma$$

e quella per il campo magnetico di un solenoide:

$$B = \mu_0 n i$$

La densità di energia all'interno di un solenoide è pari a:

$$u_L = \frac{U_L}{l \Sigma} = \frac{1}{2 l \Sigma} \mu_0 n^2 l \Sigma \frac{B^2}{n^2 \mu_0^2} = \frac{B^2}{2 \mu_0}$$

# 8.10 Legge di Ampere-Maxwell

Nel vuoto, il campo magnetico  $\vec{B}$  obbedisce alla legge di Ampere:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_c$$

con  $i_c$  la corrente concatenata alla linea  $C$  su cui è calcolata la circuitazione di  $\vec{B}$ :

Abbiamo visto che una situazione limite avviene nel circuito RC quando si carica il condensatore, situazione per la quale abbiamo visto è necessario definire la **corrente di spostamento**

$$i_s = \epsilon_0 \frac{d\phi(\vec{E})}{dt}$$

Mettendo insieme questa considerazione si arriva alla **legge di Ampere-Maxwell**:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left( i_c + \epsilon_0 \frac{d\phi(\vec{E})}{dt} \right)$$

che stabilisce come i campi magnetici possano essere prodotti sia da **correnti di conduzione** che da **variazioni temporali di flusso di campo elettrico**.



# 8.11 Equazioni di Maxwell

Ragionando proprio sulla simmetria matematica delle equazioni ad uno scambio dei campi  $\vec{E}$  con  $\vec{B}$ , Maxwell intuì l'esistenza delle equazioni che completavano la descrizione dei fenomeni elettro-magnetici estendendole alle situazioni dinamiche nel tempo. Le equazioni di Maxwell in forma integrale sono le seguenti:

Legge di Gauss per  $\vec{E}$   $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$

Legge di Gauss per  $\vec{B}$   $\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0$

Legge di Faraday  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$

Legge di Ampere-Maxwell  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left( i_c + \epsilon_0 \frac{d\phi(\vec{E})}{dt} \right)$

# 8.11 Equazioni di Maxwell

La simmetria delle equazioni è ancora più evidente quando consideriamo la situazione nel vuoto, in assenza di sorgenti fisiche, ovvero di cariche e correnti di conduzione ( $q = 0, i_c = 0$ ):

Legge di Gauss per  $\vec{E}$   $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0$

Legge di Gauss per  $\vec{B}$   $\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0$

Legge di Faraday  $\oint_C \vec{E} \cdot \vec{ds} = - \frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$

Legge di Ampere-Maxwell  $\oint_C \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi(\vec{E})}{dt}$

# 8.11 Equazioni di Maxwell

Risolvendole, si ottiene la legge con cui i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  si propagano nel vuoto.

La soluzione è descritta da **un'onda che trasporta con sé i campi elettrici e magnetici.**

Parleremo pertanto di **onda elettromagnetica** la quale (per il solo fatto di avere i campi elettrici e magnetici) trasporta energia.

Dalla soluzione di queste equazioni si può determinare la velocità di propagazione dell'onda elettromagnetica nel vuoto e questa risulta pari a:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{1.2566 \cdot 10^{-6} \frac{m \cdot kg}{s^2 A^2} \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{s^4 A^2}{m^3 kg}}} = 299792 \frac{m}{s}$$

che è la **velocità di propagazione della luce nel vuoto c.**

Dalla risoluzione delle equazioni di Maxwell si derivano le relazioni tra i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  e le leggi dell'ottica, che costituiscono le basi **della teoria ondulatoria della luce.**