CAPITOLO 1

Campi elettrici e magnetici nel vuoto e nella materia

Riepilogo

Condizioni stazionarie

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

Condizioni non stazionarie

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

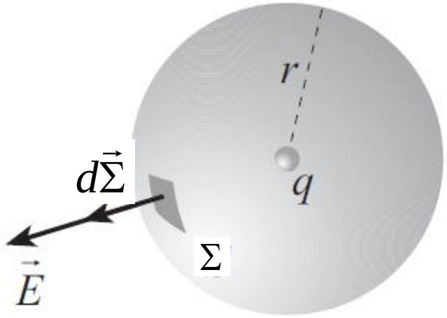
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\delta}{\delta t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma}$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt})$$

Flusso del campo di una carica puntiforme

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}\hat{u}_r}$$

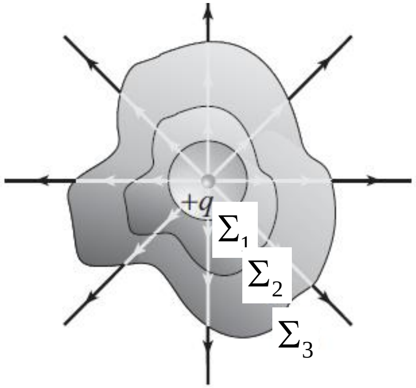


$$d\Phi_E = \vec{E}\cdot d\vec{\Sigma} = Ed\Sigma$$

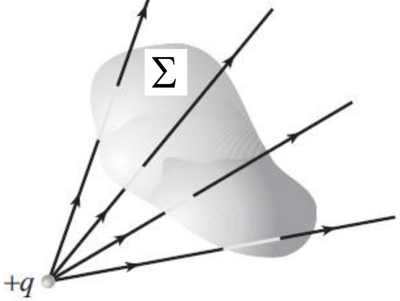
$$\Phi_E = \oint Ed\Sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{1}{r^2}d\Sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}4\pi r^2$$

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

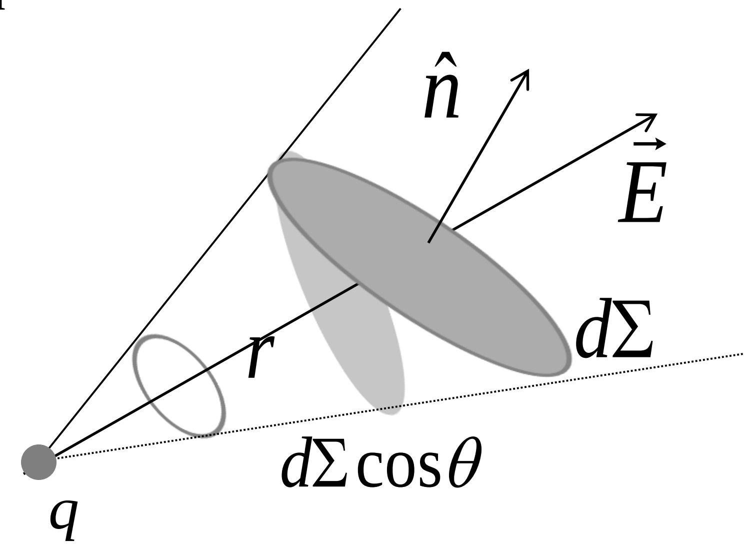
Il flusso totale non dipende dalla superficie



Se la carica è esterna, il flusso totale è nullo



Definizione di angolo solido sotto cui è vista
una superficie dΣ :



$$d\Omega = \frac{d\Sigma\cos\theta}{r^2} = \frac{d\Sigma_\perp}{r^2}$$

$$d\Phi_E = \vec{E}\cdot d\vec{\Sigma} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{u}_r\cdot\hat{n}d\Sigma$$

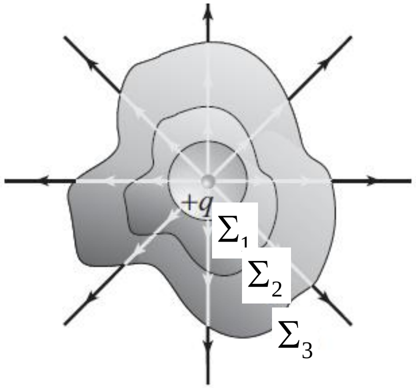
$$d\Phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q d\Sigma\cos\vartheta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q d\Omega$$

$$\Phi(E) = \oint d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\Omega$$

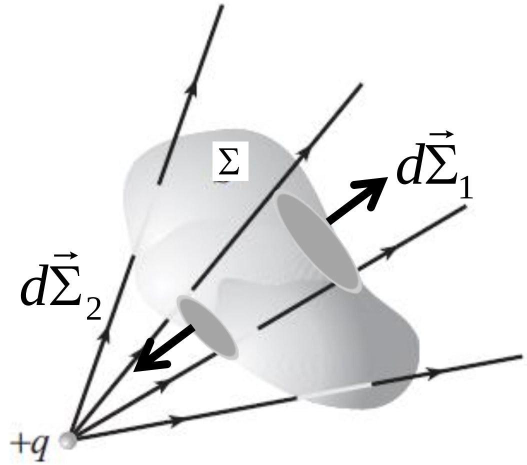
Se la carica è interna a Σ

$$\Phi(E) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_\Sigma d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

steradianti



Se la carica è esterna a Σ, ogni cono elementare intercetta due superfici $d\Sigma_1$, $d\Sigma_2$



$$d\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot d\vec{\Sigma}_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

$$d\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot d\vec{\Sigma}_2 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

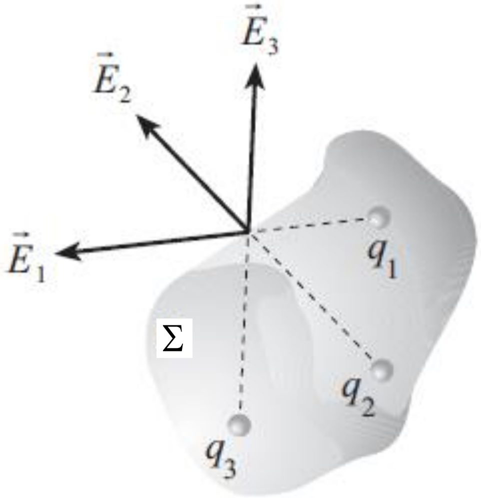
$$\Phi(E) = \oint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

Legge di Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

q è interna alla superficie chiusa considerata

Se il campo è prodotto da più cariche puntiformi, per il principio di sovrapposizione:



$$d\Phi_E = (\sum_i \vec{E}_i) \cdot d\vec{\Sigma} = \sum_i (\vec{E}_i \cdot d\vec{\Sigma}) = \sum_i d\Phi_i$$

$$\Phi_E = \oint_S \sum_i d\Phi_i = \sum_i \oint_S d\Phi_i = \sum_i \Phi_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i$$

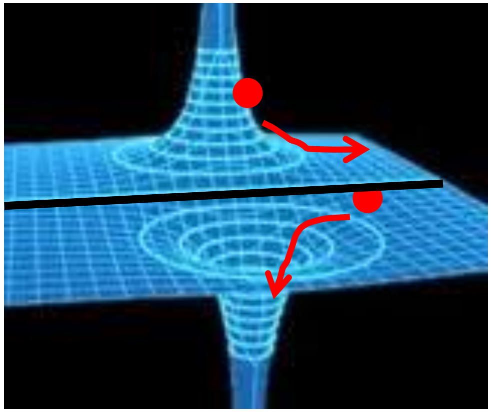
Teorema di GAUSS: Il flusso del campo E attraverso una superficie qualsiasi chiusa è uguale alla somma algebrica delle cariche contenute entro la superficie, comunque siano distribuite, divisa per ε_0

Il potenziale elettrostatico

$$V_r = \frac{W_{r\to\infty}}{q} = \int_A^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

Lavoro per unità di carica di prova

$V > 0$

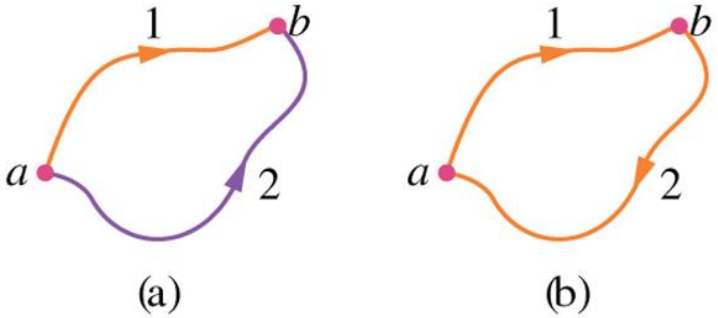


$V < 0$

Potenziale $V = \frac{W}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$

Espressione valida solo se $U_\infty = 0$

In generale $\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$ $\rightarrow$ $\Delta U = U_B - U_A = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s}$



Il lavoro effettuato da una forza conservativa su un percorso chiuso è nullo

$$W_{A\to A} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

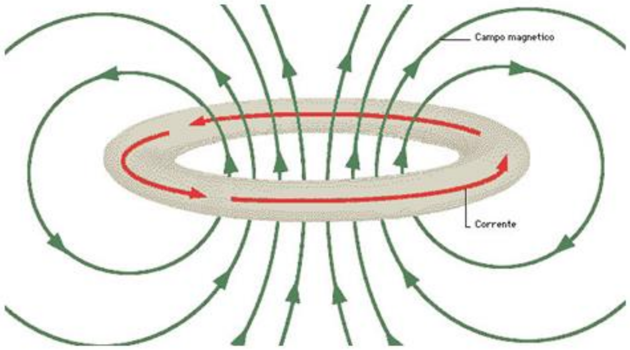
$$\Delta V_{A\to A} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

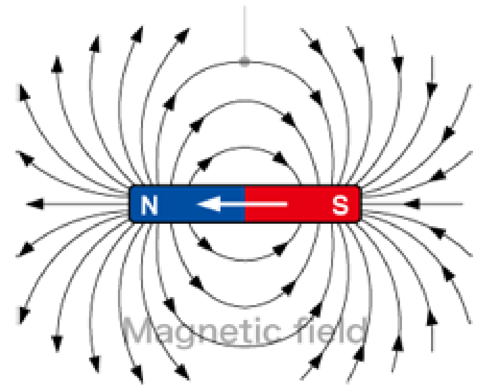
Il campo elettrostatico è conservativo

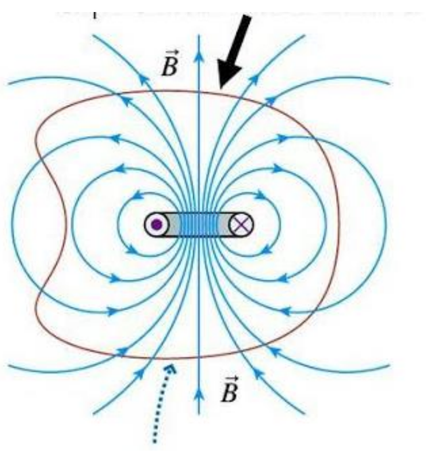
Circuitazione

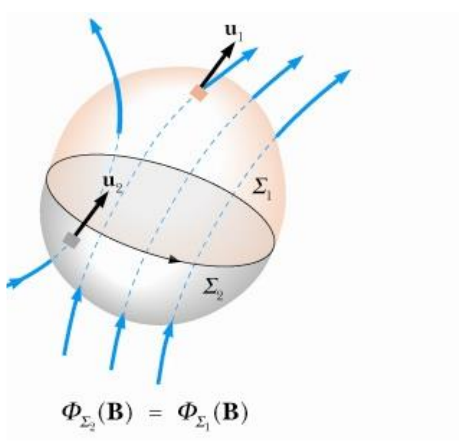
La legge di Gauss per il campo magnetico

Le linee del campo B sono sempre chiuse





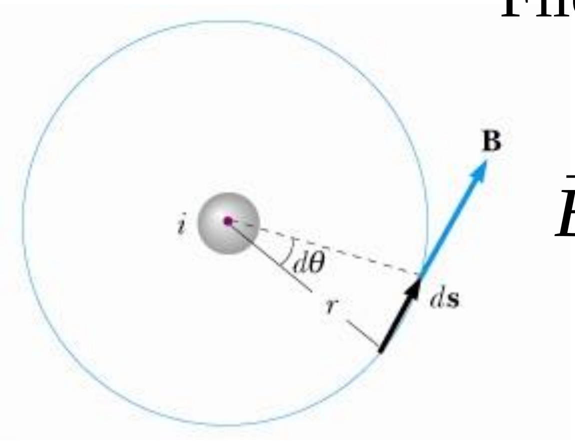




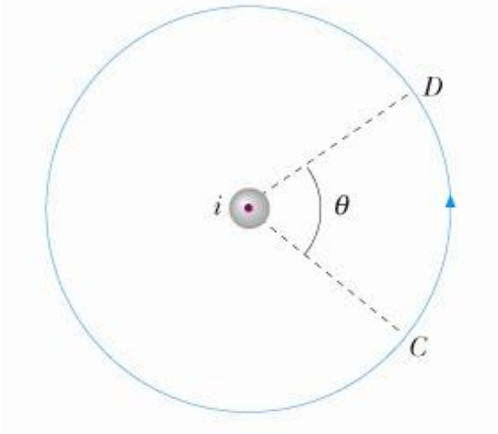
$$\Phi_B = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma}$$

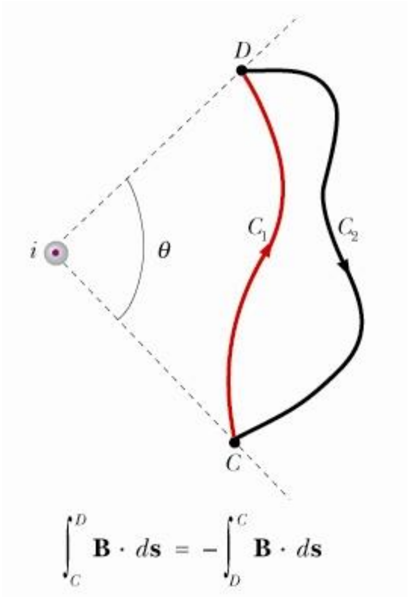
$$\phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

Filo rettilineo indefinito



$$\vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}ds = \frac{\mu_0 i}{2\pi}d\theta$$

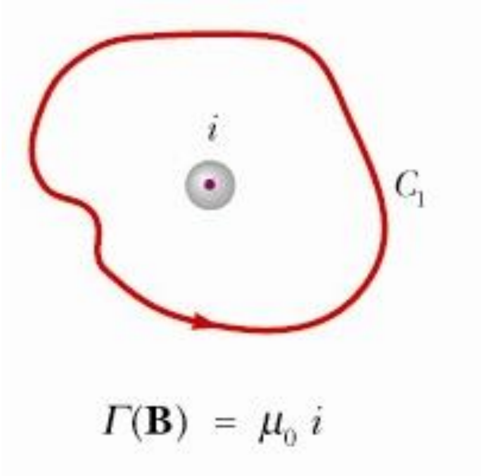




$$\int_C^D \vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_C^D d\theta = \frac{\mu_0 i\theta}{2\pi}$$

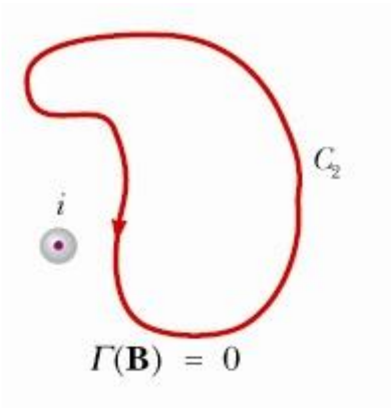
Il risultato dipende solo dall'angolo

Per una linea chiusa che contiene la corrente



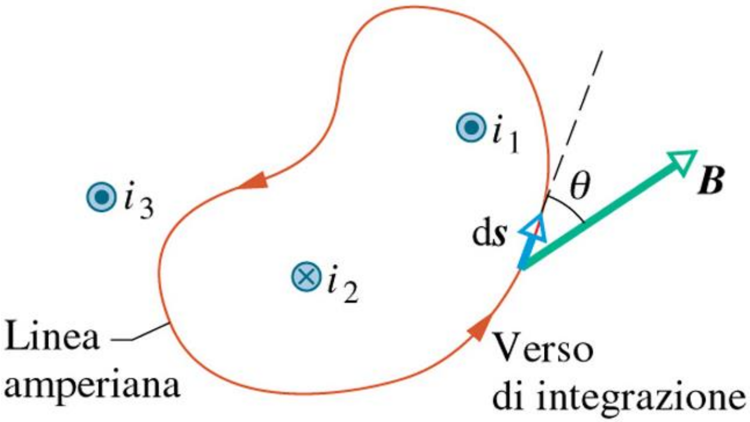
$$\Gamma = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\theta = \mu_0 i$$

Per una linea chiusa che non contiene la corrente



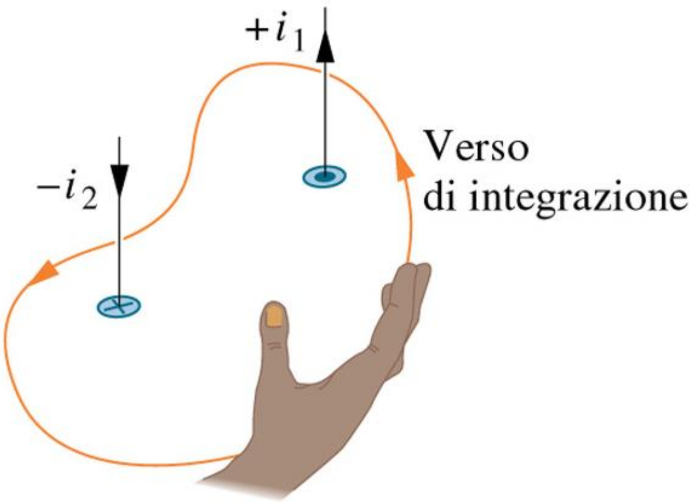
$$\Gamma = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

Per una linea chiusa che contiene più correnti



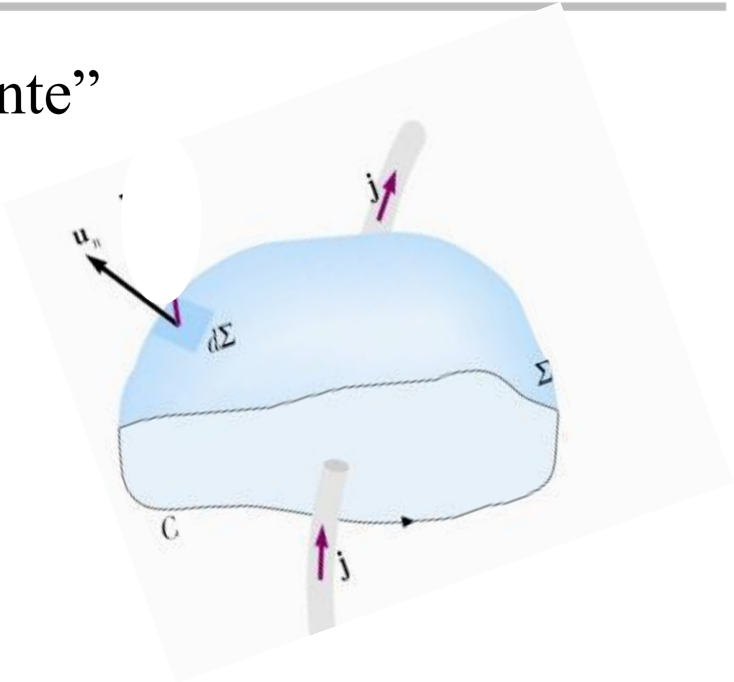
$$\Gamma = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (i_1 - i_2)$$

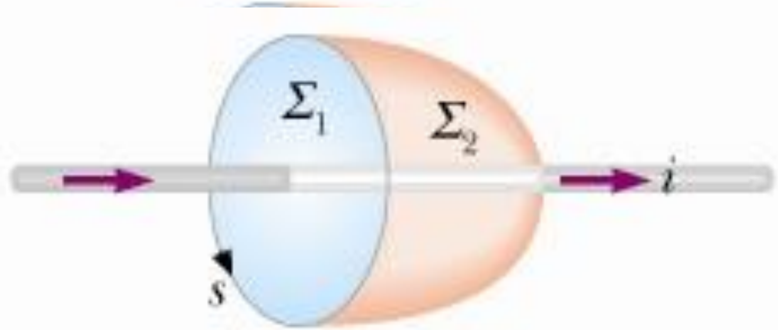
$$\Gamma = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{concatenate}$$



Utilizzando il vettore “densità di corrente”

$$\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i = \mu_0 \int_\Sigma \vec{J}\cdot d\vec{\Sigma}$$





Σ è una qualunque superficie che si appoggia sulla linea *s*

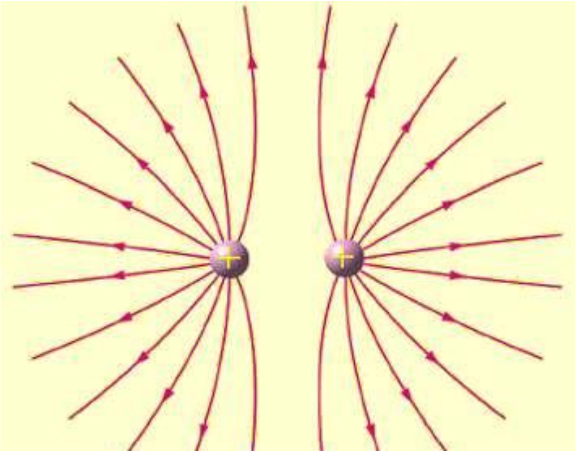
La legge di Ampere

$$\Gamma_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

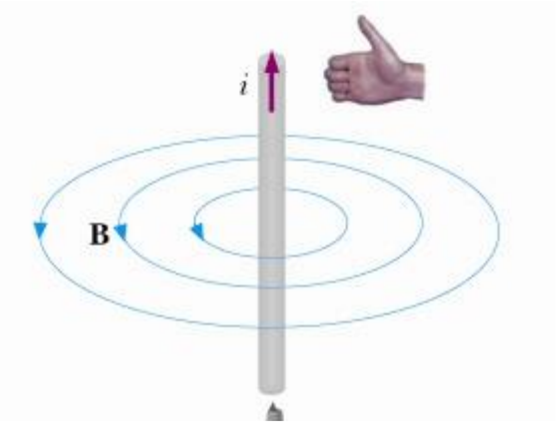
Il campo elettrostatico è conservativo

$$\Gamma_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

Il campo magnetico non è conservativo



Linee aperte



Linee chiuse

Riepilogo

Condizioni stazionarie

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

Condizioni non stazionarie

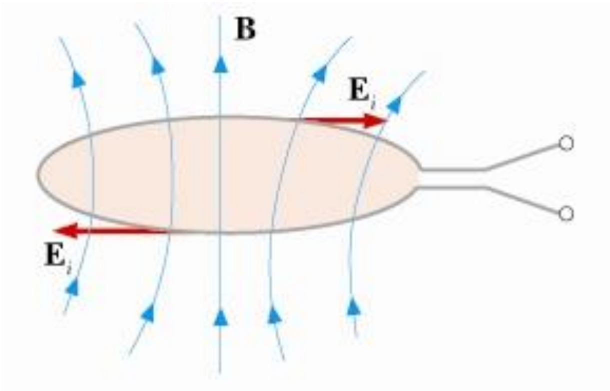
$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}\right)$$

Forza elettromotrice indotta

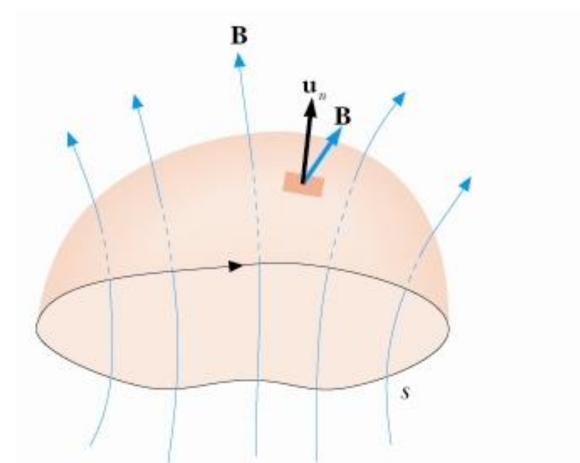


$$e_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \Phi(B) = \int_\Sigma \vec{B}\cdot d\vec{\Sigma}$$

$$i = \frac{e_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Campo elettrico indotto non conservativo

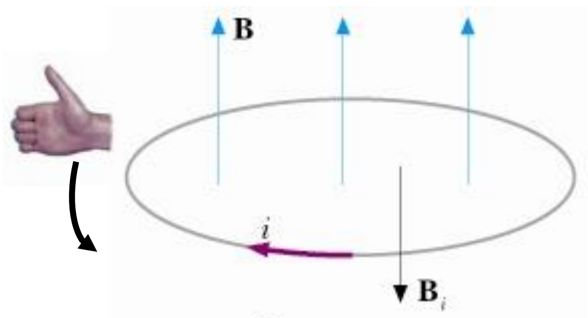
$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = e_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

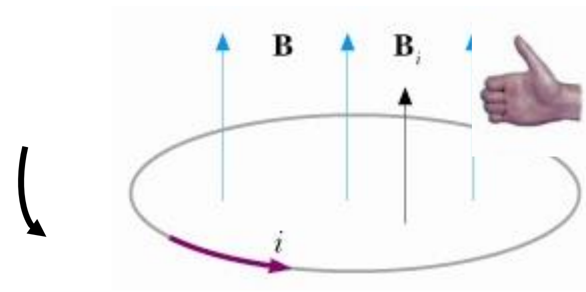


$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_\Sigma \vec{B}\cdot d\vec{\Sigma} = -\int_\Sigma \left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)\cdot d\vec{\Sigma}$$

La legge di Lentz

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$





$$\frac{d\Phi_B}{dt} > 0$$

$$\varepsilon_i < 0$$

L'effetto della f.e.m. indotta è sempre tale da opporsi alla variazione di flusso che l'ha generata.

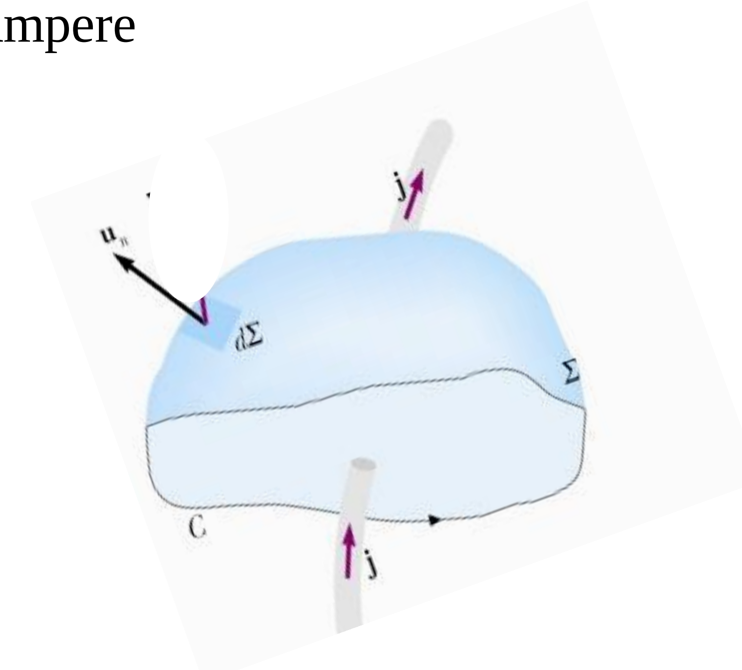
$$\frac{d\Phi_B}{dt} < 0$$

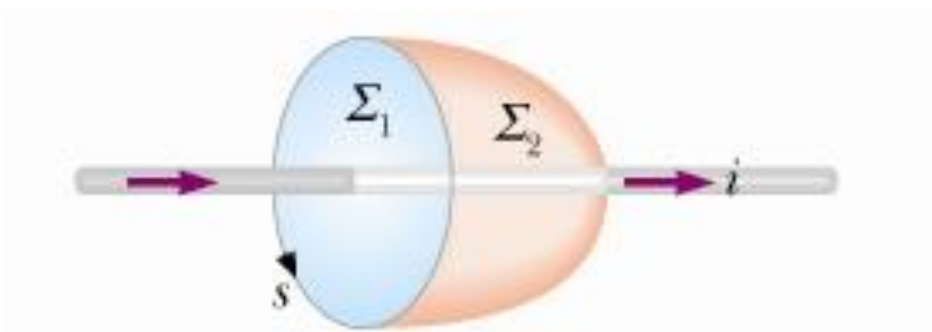
$$\varepsilon_i > 0$$

$$[Volt] = \left[\frac{Weber}{\sec}\right]$$

Ricordiamo la Legge di Ampere

$$\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i = \mu_0 \int_\Sigma \vec{J}\cdot d\vec{\Sigma}$$





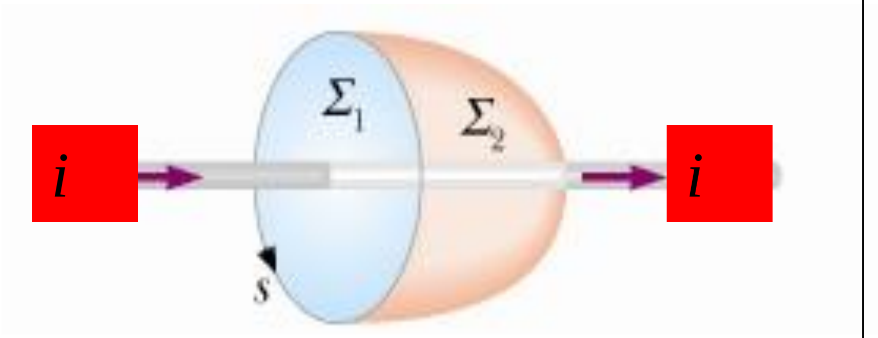
Σ è una qualunque superficie che si appoggia sulla linea *s*

Su una superficie chiusa

$$\oint_\Sigma \vec{J}\cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

Legge di Ampere Maxwell

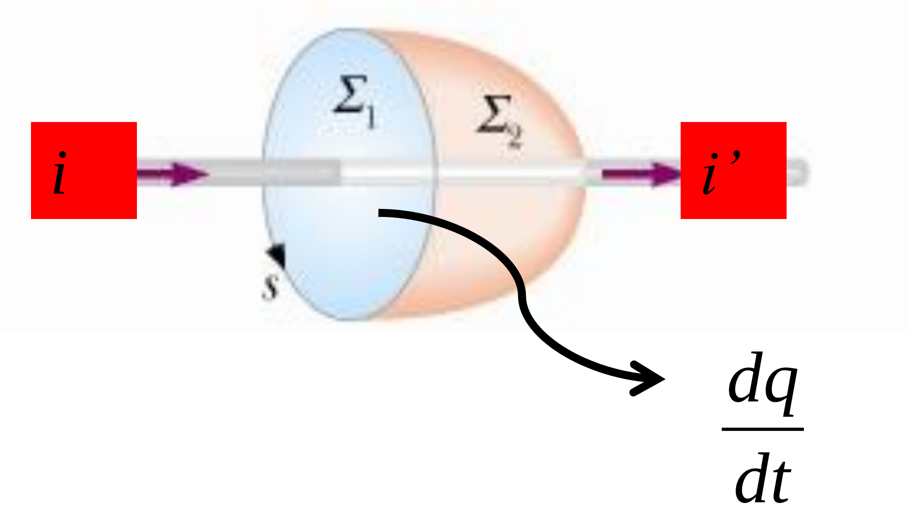
Condizioni stazionarie



Su una superficie chiusa

$$\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

Condizioni NON stazionarie



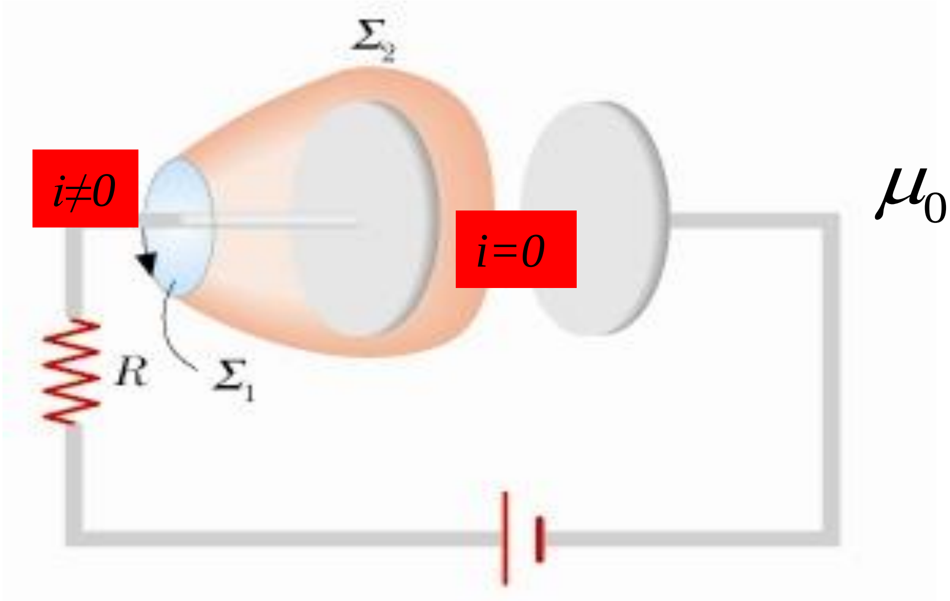
Su una superficie chiusa

$$\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma} = -\frac{dq}{dt}$$

Equazione di continuità

Consideriamo il seguente circuito in condizioni NON stazionarie

$$\mu_0 \int_{\Sigma_1} \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma} = i$$



$$\mu_0 \int_{\Sigma_2} \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

Quindi sulla superficie chiusa $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$

$$\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma} \neq 0$$

Legge di Ampere Maxwell

Equazione di continuità

$$\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma} = -\frac{dq}{dt}$$

Legge di Gauss

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{dq}{dt} = \varepsilon_0 \oint_{\Sigma} \frac{d\vec{E}}{dt} \cdot d\vec{\Sigma} = -\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma}$$

$$\oint_{\Sigma} \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

Su una superficie chiusa

$$\vec{J}_{Tot} = \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right)$$

Legge di Ampere Maxwell

$$\vec{J}_{Tot} = \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right)$$

Densità di corrente stazionaria

Densità di corrente di spostamento $\vec{J}_s = \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$

Corrente di spostamento

$$i_s = \oint_{\Sigma} \vec{J}_s \cdot d\vec{\Sigma} = \varepsilon_0 \oint_{\Sigma} \frac{dE}{dt} \cdot d\vec{\Sigma} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Nuova formulazione della legge di Ampere

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (i + i_s) = \mu_0 (i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt})$$

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \vec{J}_{Tot} \cdot d\vec{\Sigma} = \mu_0 \int_{\Sigma} \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \cdot d\vec{\Sigma}$$

Condizioni non stazionarie

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\int_{\Sigma} (\frac{d\vec{B}}{dt}) \cdot d\vec{\Sigma}$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

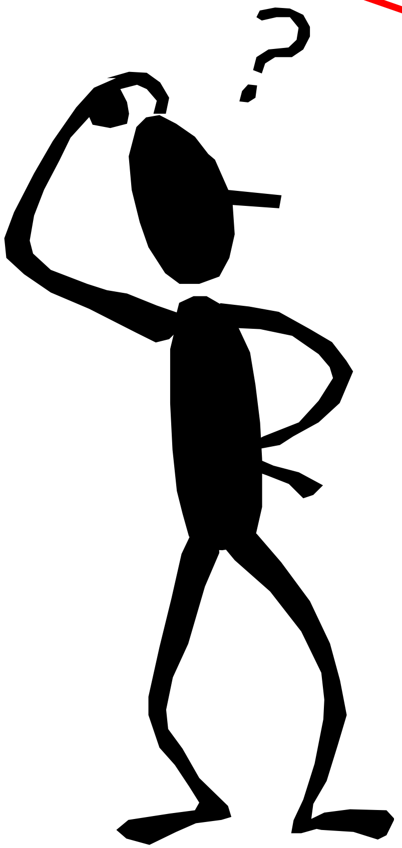
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt})$$

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \cdot d\vec{\Sigma}$$

Operatore nabla

Introduzione

L'operatore ∇ (*nabla*), utile nell'analisi dei campi scalari e vettoriali, è definito come:



$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{u}_z$$

Analizziamo di seguito le operazioni che si possono eseguire mediante l'uso dell'operatore ∇

Funzione scalare della posizione $f\,(x, y, z)$ con le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{u}_x \quad \frac{\partial f}{\partial y}\hat{u}_y \quad \frac{\partial f}{\partial z}\hat{u}_z$$

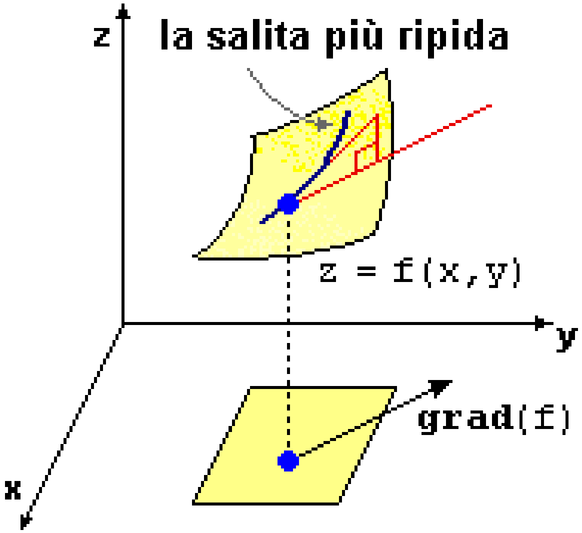
Possiamo costruire in ogni punto dello spazio un vettore le cui componenti x, y, z siano uguali alle rispettive derivate parziali. Questo vettore viene chiamato "*gradiente*" di f

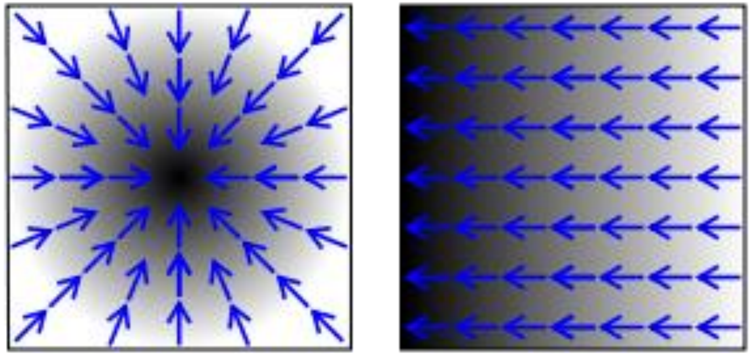
$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{u}_z$$

grad f ci dice come varia la funzione f nell'intorno di un punto. La sua componente lungo x è la derivata parziale di f rispetto ad x e fornisce una misura della rapidità con cui varia f quando ci si muove lungo l'asse x.

Gradiente

Per esempio per una funzione di due sole variabili, *x* e *y*, vi sarà una direzione lungo la quale un breve passo ci porterà più in alto che un passo della stessa lunghezza in qualsiasi altra direzione. Il modulo della funzione gradiente è la pendenza misurata lungo quella direzione.





Gradiente

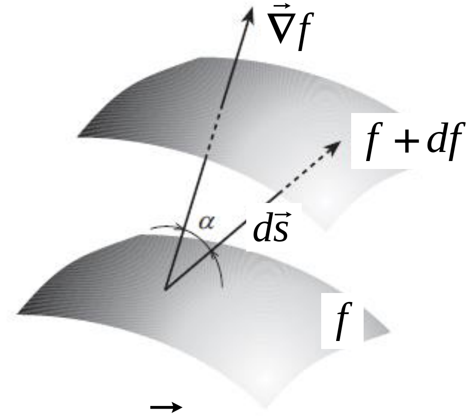
Infatti

$$d\vec{s}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \quad \Rightarrow \quad df = (\vec{\nabla} f)\cdot d\vec{s}$$

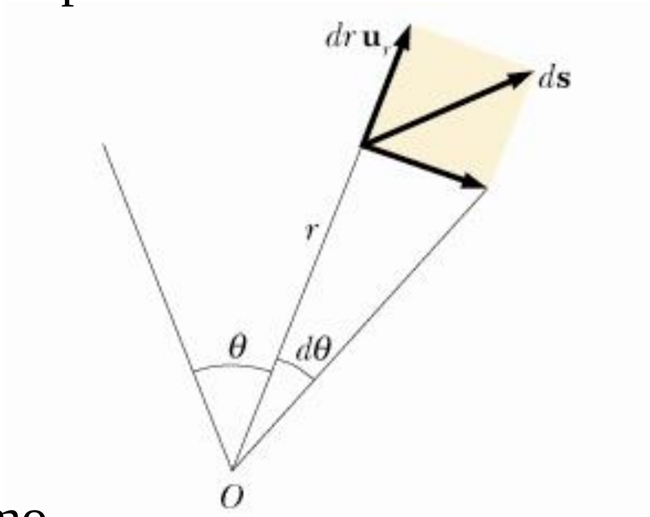
$$\vec{\nabla} f$$

$$df = (\vec{\nabla} f)\cdot d\vec{s} \qquad df = \left|\vec{\nabla} f\right| \cos\alpha \, ds$$



La variazione della funzione è massima nella direzione di $\vec{\nabla} f$

In coordinate polari



$$d\vec{s} = (dr)\hat{u}_r + (rd\theta)\hat{u}_\theta$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{r\partial \theta}(rd\theta)$$

Se definiamo

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{u}_\theta$$

Gradiente in coordinate polari

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{u}_\theta$$

E quindi $df = (\vec{\nabla} f) \cdot d\vec{s}$

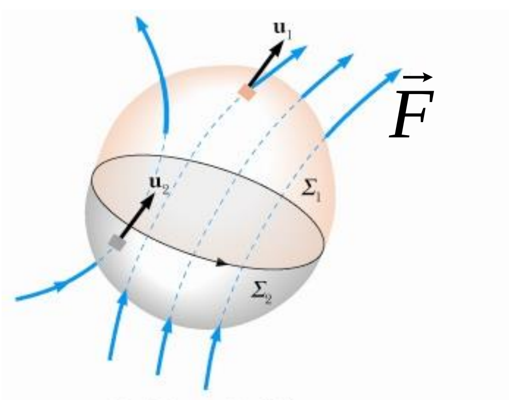
Divergenza

L'operatore "*nabla*" può anche applicato ad una funzione vettoriale

$$\vec{F} = F_x \hat{u}_x + F_y \hat{u}_y + F_z \hat{u}_z \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Il risultato è uno scalare e si chiama" *divergenza*"

$$div\,\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$



Teorema della divergenza

$$\oint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{\tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) d\tau$$

Flusso del vettore ***F*** attraverso una superficie chiusa

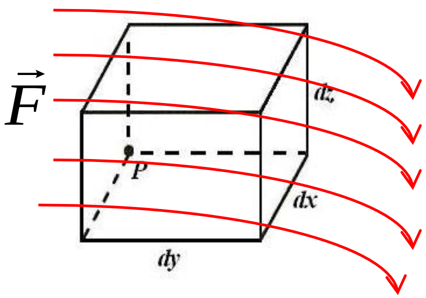
Integrale della divergenza di **F** sul volume racchiuso dalla superficie

Operatore nabla

Divergenza

$$\oint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{\tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) d\tau$$

Per un volume infinitesimo



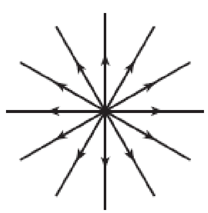
$$\vec{F} \cdot d\vec{\Sigma} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) d\tau$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) = \frac{1}{d\tau} \vec{F} \cdot d\vec{\Sigma}$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \vec{F} \cdot d\vec{\Sigma}$$

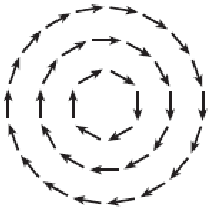
La divergenza di un vettore ***F*** può essere interpretata come il flusso dello stesso vettore per unità di volume attraverso una superficie chiusa molto piccola. Rappresenta quindi una proprietà locale del vettore

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \neq 0$$



$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) = 0$$

Campo solenoidale



$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{u}_\theta$$

Gradiente

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta)$$

Divergenza

Coordinate sferiche

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{u}_\theta$$

Gradiente

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta sen\theta)$$

Divergenza

Rotore

$$\vec{F} = F_x \hat{u}_x + F_y \hat{u}_y + F_z \hat{u}_z$$

Definiamo

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Il risultato è un vettore e si chiama ”*rotore*”

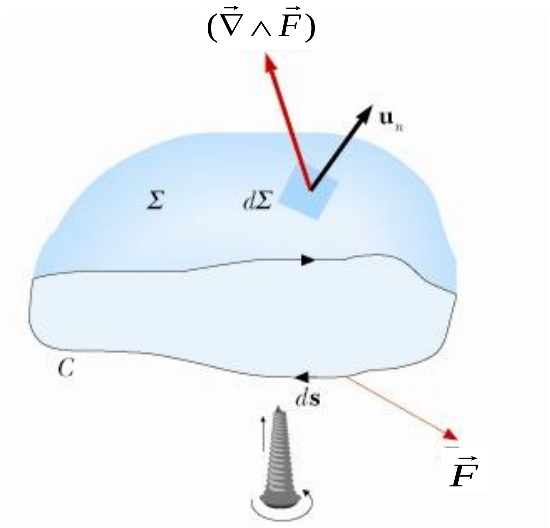
$$rot\,\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{u}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{u}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{u}_z$$

Rotore

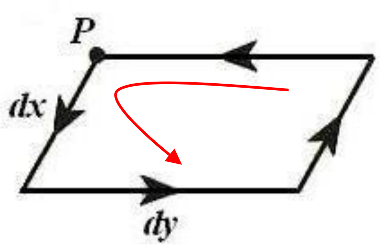
Teorema di Stokes

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_\Sigma (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot d\vec{\Sigma}$$

Circuitazione di ***F*** Flusso del (*rot* ***F***)



Per una superficie infinitesima



$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot d\vec{\Sigma}$$

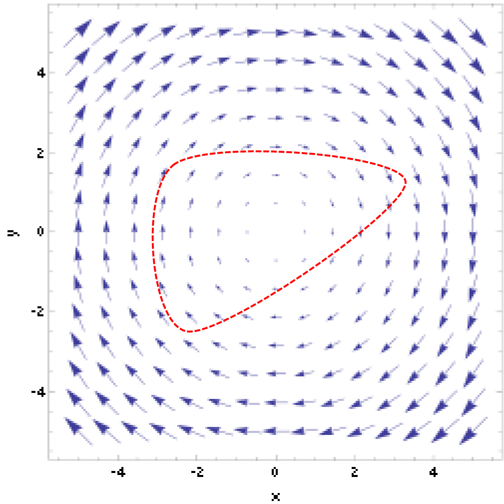
$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) = \frac{1}{d\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{s} \qquad (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) = \lim_{\Sigma \to 0} \frac{1}{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Il rotore di un vettore ***F*** può essere interpretato come la circuitazione dello stesso vettore per unità di superficie su una linea chiusa molto piccola. Rappresenta quindi una proprietà locale del vettore

Rotore

Campo rotazionale

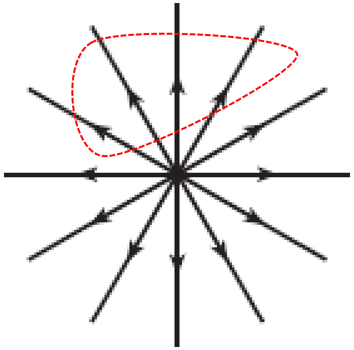
$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \neq 0$$



Circuitazione $\neq 0$

Campo irrotazionale

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) = 0$$



Circuitazione $= 0$

Quindi se *f* indica una funzione scalare ed ***F*** un campo vettoriale, HA senso calcolare

rot (grad *f*)	div (grad *f*)	div (rot **F**)	grad (div **F**)
$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f)$	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f)$	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{F})$	$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$
Vettore	Scalare	scalare	vettore

NON ha senso calcolare

rot (div ***F***)	grad (rot ***F***)
$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$	$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F})$

Se *f ed* ***F*** *sono* derivabili due volte

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) = 0$$

Combinazione di operatori vettoriali

Divergenza del gradiente (Laplaciano) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}f)=\nabla^2$

Rotore del gradiente $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}f)=0$

Divergenza del rotore $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})=0$

Rotore del rotore $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})-\nabla^2\vec{F}$

Alcune proprietà

Identità vettoriali generiche [modifica | modifica wikitesto]

Triplo prodotto [modifica | modifica wikitesto]

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

da cui si ha

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

ed in particolare

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$$

Alcune proprietà

Proprietà degli operatori vettoriali [modifica | modifica wikitesto]

Proprietà distributiva [modifica | modifica wikitesto]

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$
$$\nabla \cdot (\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$$
$$\nabla \times (\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$$

Proprietà del prodotto scalare [modifica | modifica wikitesto]

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

Proprietà del prodotto vettoriale [modifica | modifica wikitesto]

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$$
$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

Prodotto tra scalari e vettori [modifica | modifica wikitesto]

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$
$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = \nabla f \cdot \mathbf{A} + f\nabla \cdot \mathbf{A}$$
$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = \nabla f \times \mathbf{A} + f\nabla \times \mathbf{A}$$

Consideriamo il valore di V in due punti vicini, (x, y , z) e ($x+dx$, $y+dy$, $z+dz$): la variazione di V, passando dal primo al secondo, è:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

In generale $\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$ e quindi $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s}$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},\; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y},\; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

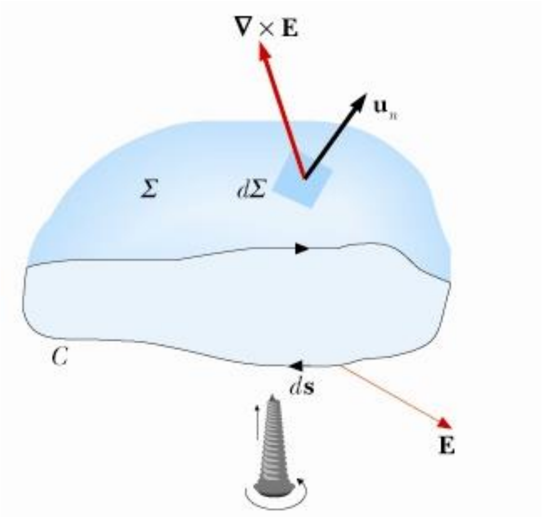
$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\vec{E} = -grad\, V$$

Inoltre

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$ **Il campo elettrostatico è conservativo**

Teorema di Stokes



$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_\Sigma (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{\Sigma}$$

Allora deve essere

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = 0$$

$$rot\,\vec{E} = 0$$

Legge di Gauss

$$\Phi(E) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\tau} \rho d\tau$$

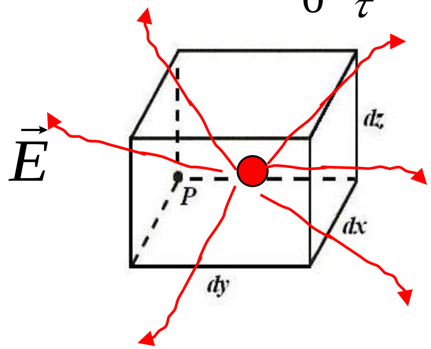
Teorema della divergenza

$$\Phi(E) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{\tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d\tau$$

Dunque

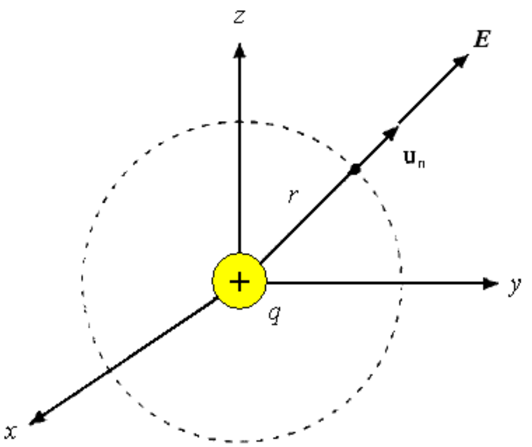
$$\int_{\tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\tau} \rho d\tau \quad \Longrightarrow \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$div\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$



Il flusso dipende localmente dalla densità di carica all'interno del volumetto

Si calcoli la divergenza nel punto generico (x, y, z) per il campo prodotto da una carica puntiforme q posizionata nel punto ($0,0,0$)



$$E_x(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\left[(x)^2+(y)^2+(z)^2\right]^{3/2}}$$

$$E_y(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{\left[(x)^2+(y)^2+(z)^2\right]^{3/2}}$$

$$E_z(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left[(x)^2+(y)^2+(z)^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left(y^2+z^2-2x^2\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left(r^2-3x^2\right)$$

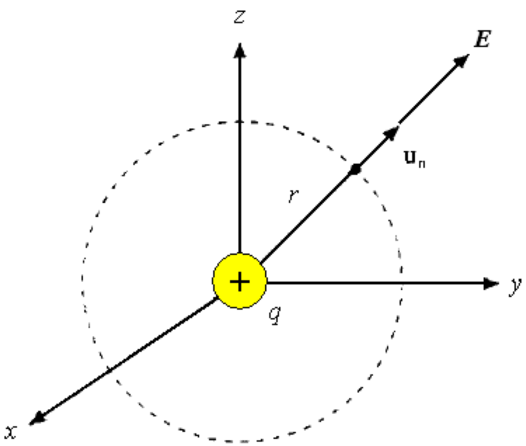
$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left(x^2+z^2-2y^2\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left(r^2-3y^2\right)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left(x^2+y^2-2z^2\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left(r^2-3z^2\right)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = 0$$

Si calcoli la divergenza nel punto generico (x, y, z) per il campo prodotto da una carica puntiforme q posizionata nel punto ($0,0,0$)

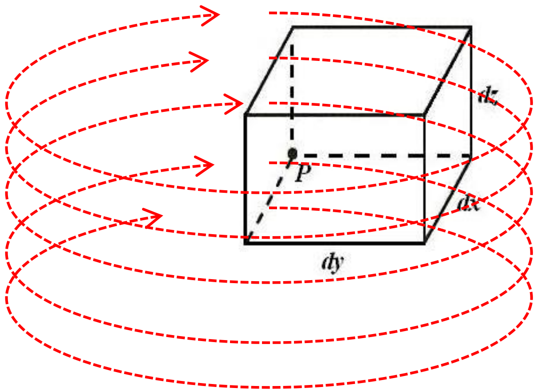


$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad q = artg\,\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$E_r(r,q) = \frac{q}{4pe_0}\frac{1}{r^2} \qquad E_q(r,q) = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(E_\theta sen\theta)$$

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = 0$$



Non esistono monopoli magnetici

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$$

$$div\, \vec{B} = 0$$

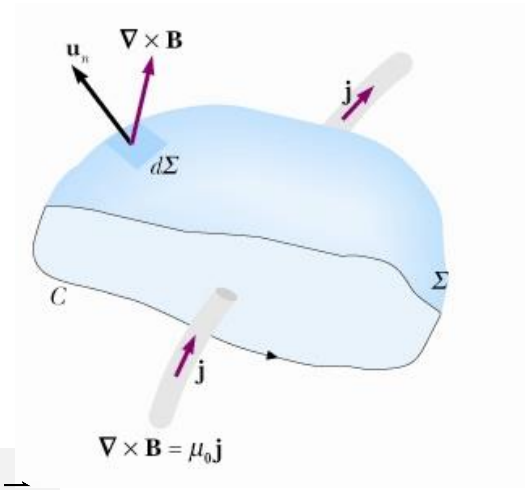
Campo solenoidale

Legge di Ampere

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i = \mu_0 \int_\Sigma \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma}$$

Teorema di Stokes

$$\int_\Sigma (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\Sigma} = \mu_0 \int_\Sigma \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma}$$



$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \vec{J}$$

$$rot\, \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Condizioni stazionarie

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \rho / \varepsilon_0$$

$$div\, \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = 0$$

$$rot\, \vec{E} = 0$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$$

$$div\, \vec{B} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \vec{J}$$

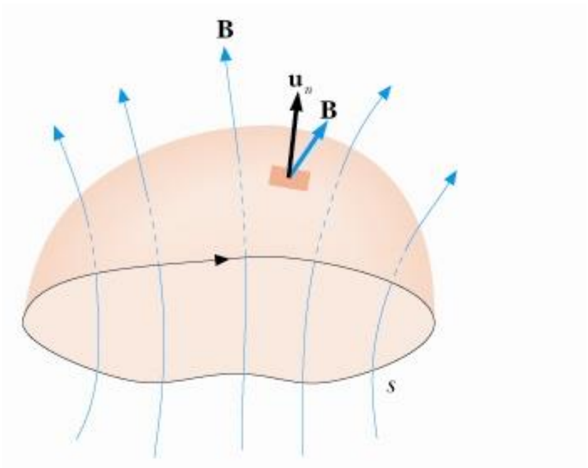
$$rot\, \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\vec{E} = -grad\, V$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Faraday Lentz



$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi(B)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma}$$

Teorema di Stokes

$$\int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{\Sigma} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma}$$

$$\int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{\Sigma} = -\int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{\Sigma}$$

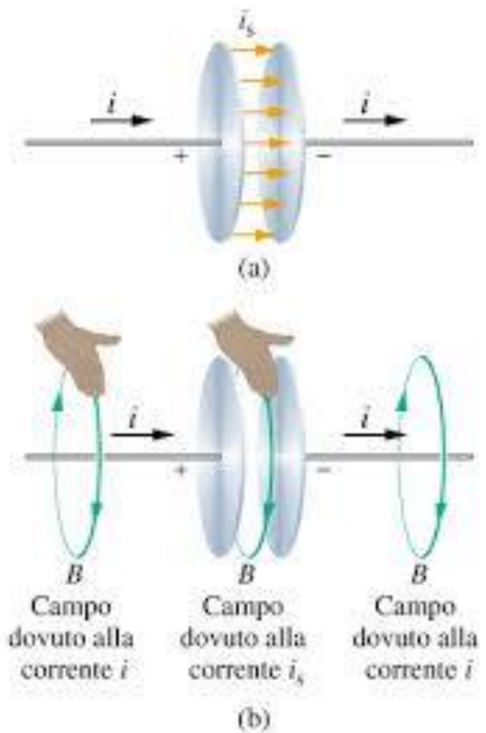
$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ampere Maxwell

$$\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_\Sigma \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{\Sigma}$$

Teorema di Stokes



$$\int_\Sigma (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\Sigma} = \mu_0 \int_\Sigma \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{\Sigma}$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$rot\, \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Condizioni non stazionarie

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \rho / \varepsilon_0$$

$$div\, \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$$

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{\Sigma}$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$rot\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$$

$$div\, \vec{B} = 0$$

$$\oint_{s} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{\Sigma}$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$rot\, \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

In presenza di sorgenti

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = \rho/\varepsilon_0$$

$$div\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) = 0$$

$$div\,\vec{B} = 0$$

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$rot\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

Nel vuoto

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = 0$$

$$div\,\vec{E} = 0$$

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) = 0$$

$$div\,\vec{B} = 0$$

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$rot\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = 0 \qquad (\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) = 0$$

$$div\,\vec{E} = 0 \qquad div\,\vec{B} = 0$$

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad rot\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} = c^2$$

Conservazione della carica

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Applichiamo ad ambo i membri l'operatore divergenza

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \longrightarrow \oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma} = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

In presenza di sorgenti

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = \rho/\varepsilon_0$$

$$div\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) = 0$$

$$div\,\vec{B} = 0$$

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$rot\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

Nel vuoto

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = 0$$

$$div\,\vec{E} = 0$$

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

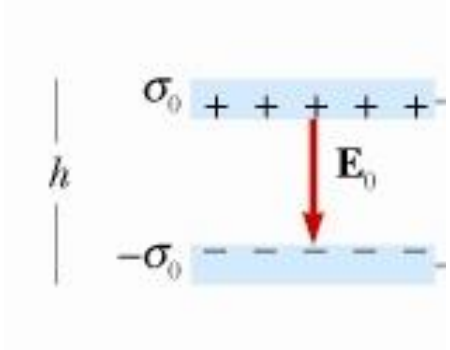
$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) = 0$$

$$div\,\vec{B} = 0$$

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

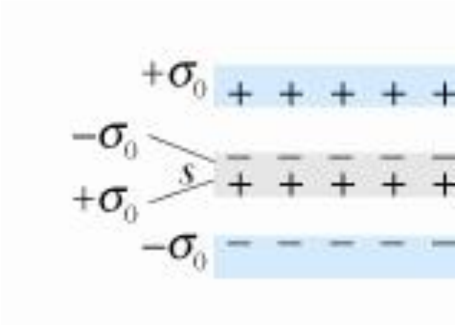
$$rot\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Ricordiamo che …

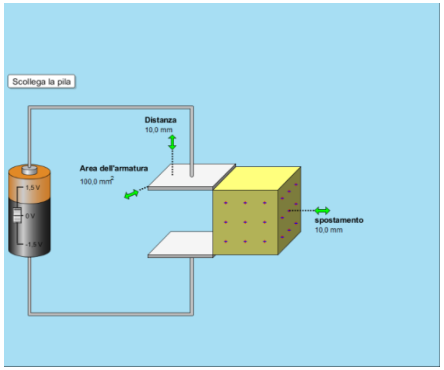


$$\Delta V_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} h \qquad E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

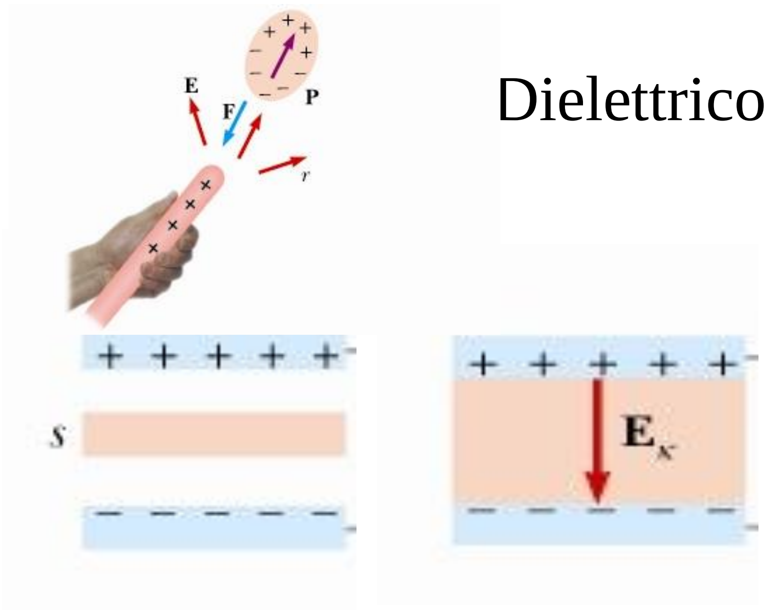
Se inseriamo nel condensatore una lastra di materiale conduttore



$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \qquad \Delta V = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(h-s) < \Delta V_0$$



Indipendemente dalla posizione della lastra



Dielettrico: materiale non conduttore (gomma, vetro, polistirolo..)

Se inseriamo nel condensatore una lastra di materiale dielettrico, ΔV diminuisce

$$\Delta V < \Delta V_0$$

Consideriamo il caso il cui tutto il condensatore sia riempito con dielettrico

$$\Delta V_\kappa < \Delta V_0 \qquad \kappa = \frac{\Delta V_0}{\Delta V_\kappa} > 1$$

$$E_\kappa = \frac{\Delta V_\kappa}{h} = \frac{\Delta V_0}{\kappa h} = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{\sigma_0}{\kappa \varepsilon_0}$$

κ "costante dielettrica relativa"

κ anche "permittività elettrica"

La variazione del campo elettrico dovuto alla presenza del dielettrico è:

$$E_0 - E_\kappa = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_0}{\kappa\varepsilon_0} = \frac{\kappa - 1}{\kappa}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

$$E_0 - E_\kappa = \frac{\chi}{1+\chi}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

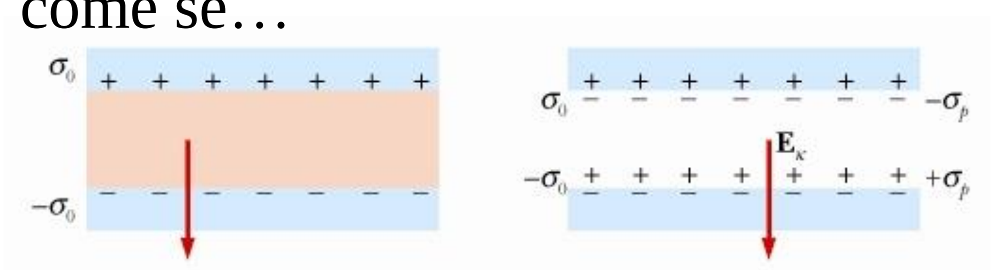
con $\chi = \kappa - 1$

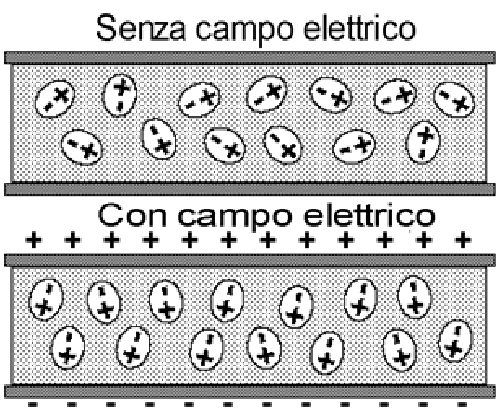
suscettività elettrica

$$E_\kappa = E_0 - \frac{\kappa - 1}{\kappa}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\frac{\kappa - 1}{\kappa}\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

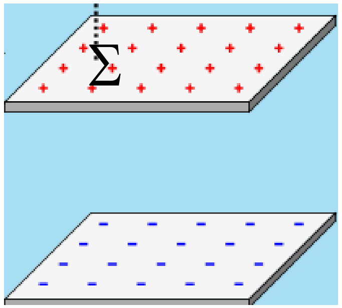
$$E_\kappa = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_P}{\varepsilon_0}$$

E' come se…



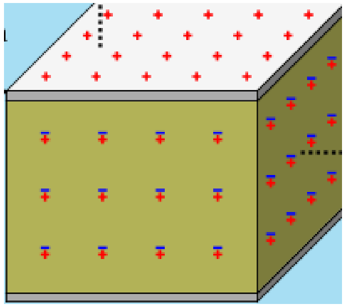


h



$$\Delta V = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} h$$

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h}$$

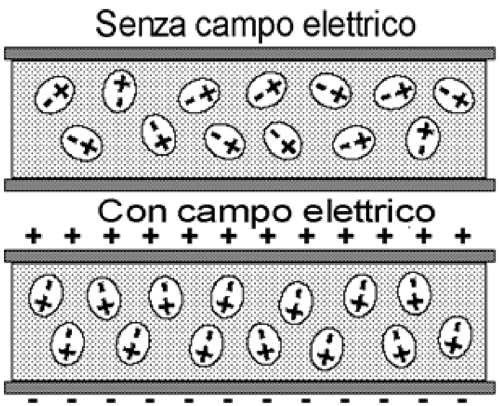


$$\Delta V_\kappa = \frac{\sigma_0}{\kappa \varepsilon_0} h$$

$$C_\kappa = \frac{\kappa \varepsilon_0 \Sigma}{h} = \kappa C_0$$

Se $\varepsilon = k\varepsilon_o$ $\quad C_\kappa = \frac{\varepsilon \Sigma}{h}$

ε costante dielettrica assoluta

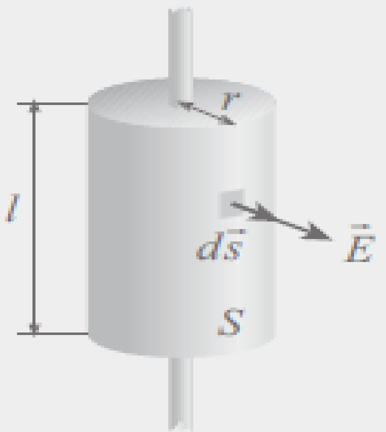


Mezzo	Costante dielettrica relativa e_r
Aria	1.00059
Idrogeno	1.00026
Acqua	ca. 80
Etanolo	25
Etere etilico	1.352
Petrolio	2.1
Vetro comune	5 ÷ 10
Plexiglas	3.40
Mica	8
Ebanite	2
Paraffina	2.1
Glicerolo	42.6

Tutti i risultati ottenuti nel vuoto sono validi in presenza di dielettrico

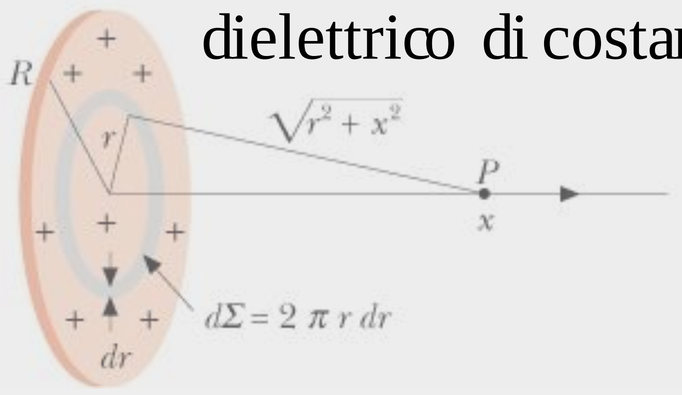
$$\varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon = k\varepsilon_o \quad \text{oppure} \quad \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_o$$

dielettrico di costante κ

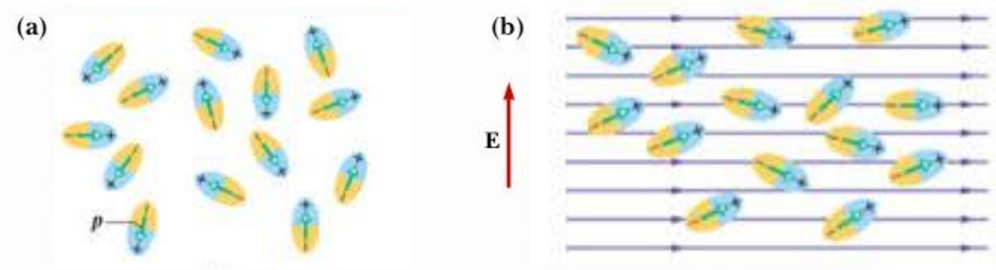


$$E = \frac{1}{2\pi\kappa\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

dielettrico di costante κ

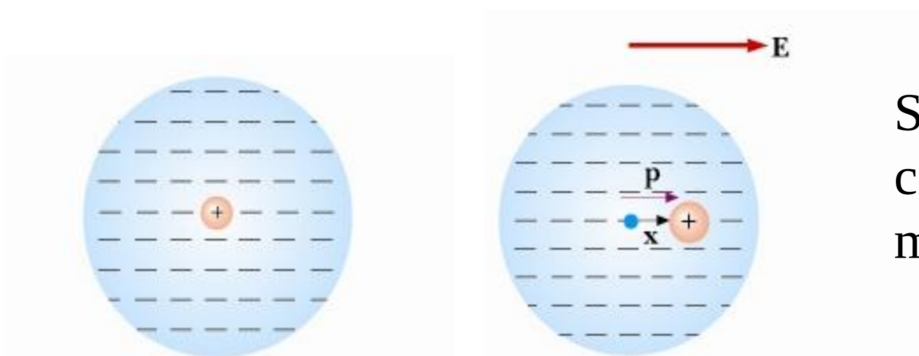


$$E_x = \frac{\sigma}{2\kappa\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)$$



$E = 0 \;,\; \langle \mathbf{p} \rangle = 0$ $\qquad$ $\langle \mathbf{p} \rangle \parallel \mathbf{E}$

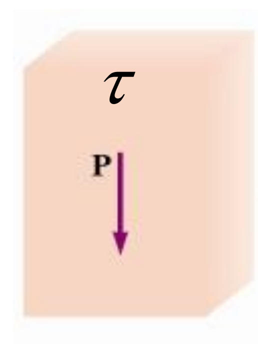
Sostanze polari: presentano un momento di dipolo intrinseco. I dipoli si allineano in presenza di campo esterno



$\mathbf{p}_a = 0$ $\qquad$ $\mathbf{p}_a = Ze\,\mathbf{x}$

Sostanze non polari: sotto l'azione di un campo esterno, un atomo assume un momento di dipolo

Volume



N atomi

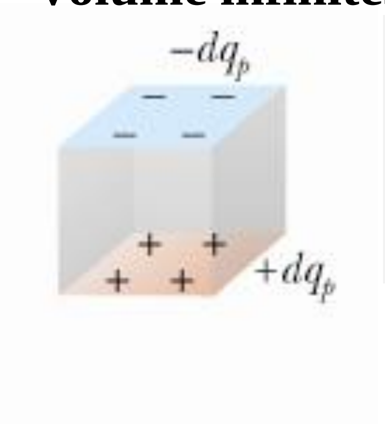
$$n = \frac{N}{\tau} \quad \text{atomi/m}^3$$

$\langle \vec{p}_{\rm i} \rangle$ momento di dipolo medio

$\vec{p} = N \langle \vec{p}_i \rangle$ momento di dipolo totale

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{\tau} = n \langle \vec{p}_i \rangle$$ vettore "polarizzazione"

Volume infinitesimo



$$dp = h\,dq_p = h\frac{dq_p}{dS}dS$$

$$dp = s_p h\,dS$$

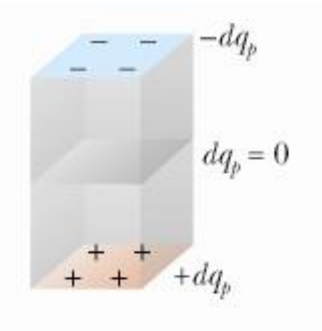
Dalla definizione $p = Pt$

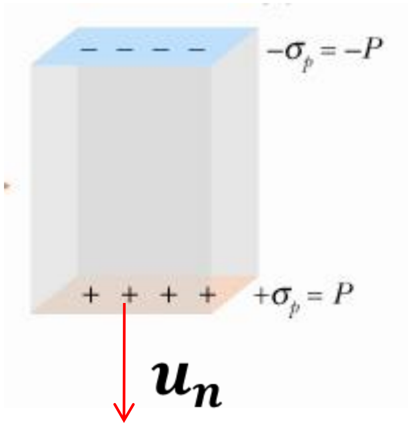
$$dp = Ph\,dS$$

$$P = \sigma_p$$

$$[P] = \left[\frac{Coulomb \cdot m}{m^3}\right], \quad [\sigma_p] = \left[\frac{Coulomb}{m^2}\right]$$

Sull'intero volume

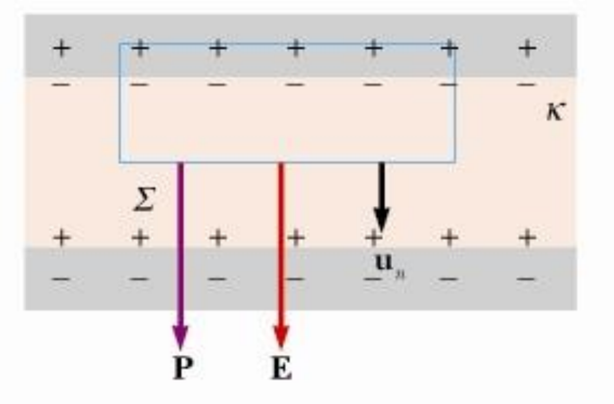




Carica di polarizzazione solo sulle faccce del dielettrico. Questa carica non è libera.

$$\sigma_p = \left|\vec{P}\right|$$

In generale $\quad \boldsymbol{\sigma_p = P \cdot u_n}$



Applichiamo la Legge di Gauss

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q_l - q_p}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_0 \vec{E}\cdot d\vec{\Sigma} = dq_l - dq_p$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 \vec{E}\cdot d\vec{\Sigma} = dq_l - \vec{P}\cdot d\vec{\Sigma} \Rightarrow (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})\cdot d\vec{\Sigma} = dq_l$$

$$\Downarrow$$

$$\oint (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})\cdot d\vec{\Sigma} = q_l$$

Vettore Induzione Dielettrica

$$\vec{D} = (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})$$

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{\Sigma} = q_l$$

Per la maggior parte dei dielettrici (detti lineari)

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\kappa - 1)\vec{E} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

Campo all'interno del dielettrico

Dipende dal materiale

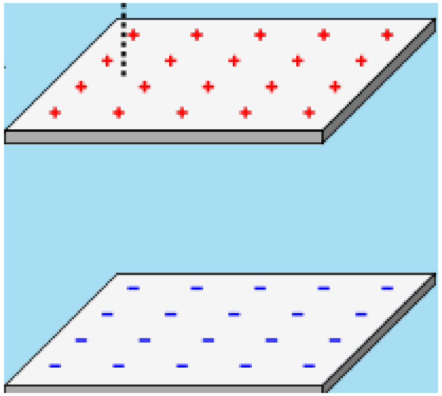
$$\vec{D} = (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

Inoltre $D = \varepsilon_0 \kappa E = \varepsilon_0 \kappa \dfrac{E_0}{\kappa} = \varepsilon_0 \kappa \dfrac{\sigma_l}{\varepsilon_0 \kappa} = \sigma_l$

$$\vec{D} = \sigma_l \hat{u}_n$$

$$[D] = \left[\frac{Coulomb}{m^2}\right]$$

Vettore Induzione Dielettrica

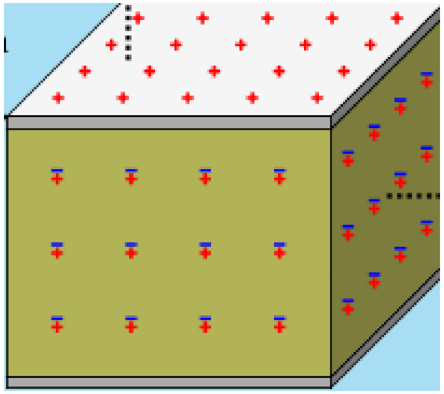


Nel vuoto

$$\vec{P} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E}_0$$

Dielettrico



$$\vec{P} = \varepsilon_0 (\kappa - 1)\vec{E} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

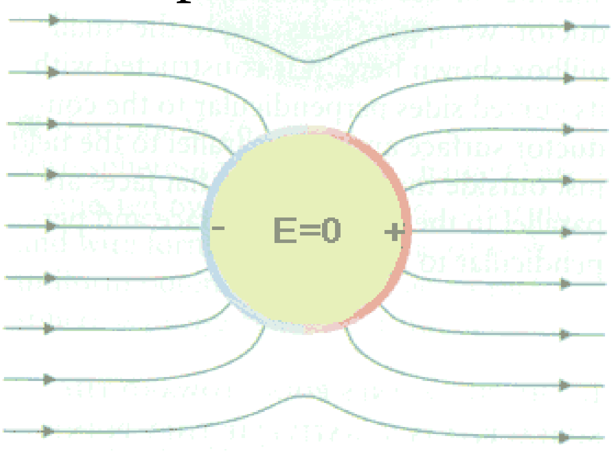
Vettore Induzione Dielettrica

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\kappa - 1)\vec{E} \qquad \vec{P} = \varepsilon_0(\kappa - 1)\frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \varepsilon_0(\kappa - 1)\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\kappa} = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa}\vec{D}$$

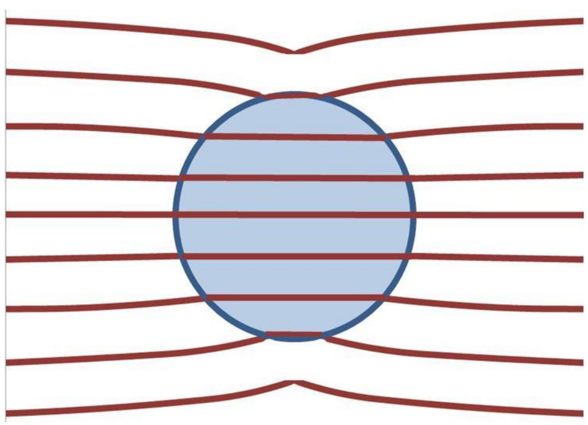
$$\vec{D} = \varepsilon_0\kappa\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{P} = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa}\vec{D}; \qquad \sigma_p = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa}\sigma_l$$

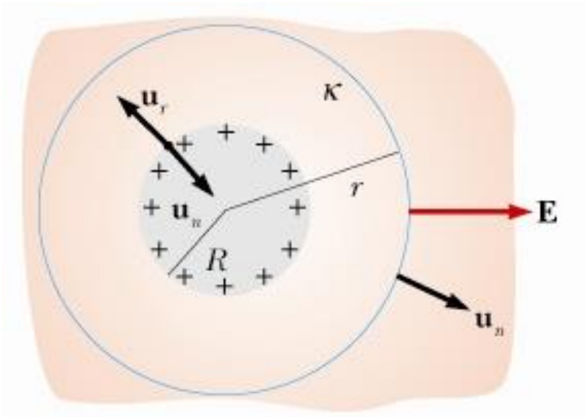
Linee di campo in un conduttore



Linee di campo in un dielettrico



Sfera conduttrice con carica q_l immersa in un dielettrico omogeneo

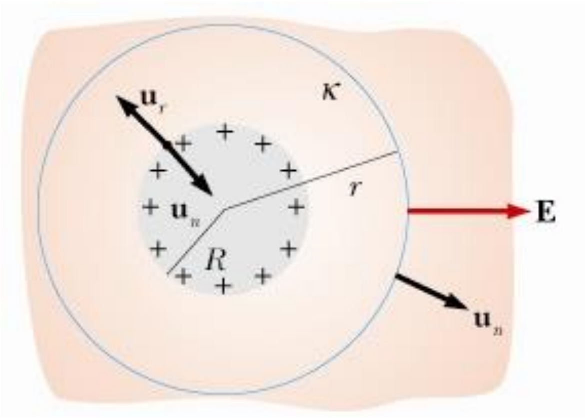


Calcoliamo il vettore D su una superficie sferica di raggio r

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{\Sigma} = q_l \qquad \vec{D} = \frac{q_l}{4\pi r^2}\hat{u}_r$$

Da $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ otteniamo $\vec{E} = \dfrac{q_l}{4\pi\kappa\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r$

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\kappa-1)\vec{E} \qquad \vec{P} = \frac{(\kappa-1)}{\kappa}\frac{q_l}{4\pi r^2}\hat{u}_r$$



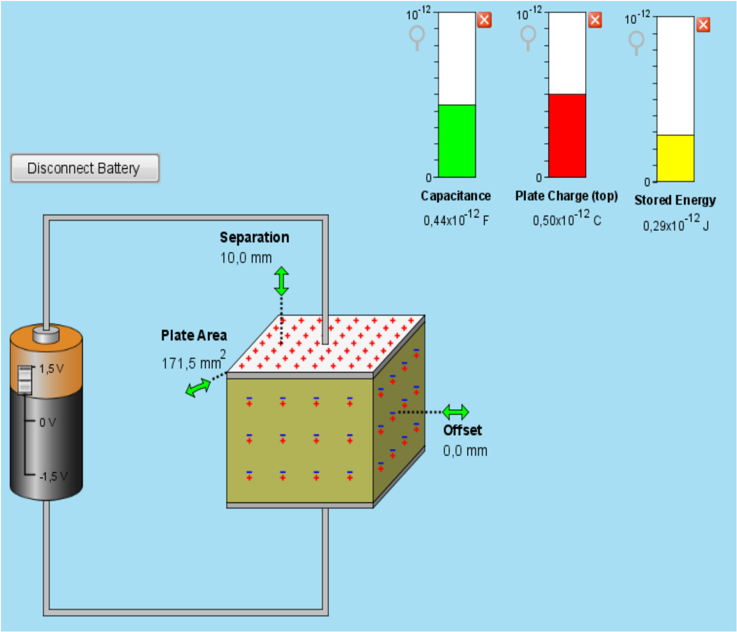
Sulla superficie del dielettrico

$$\vec{P}(R) = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} \frac{q_l}{4\pi R^2} \hat{u}_r$$

$$\sigma_p = -\frac{(\kappa - 1)}{\kappa} \sigma_l$$

$$q_p = -\frac{(\kappa - 1)}{\kappa} q_l$$

Energia immagazzinata



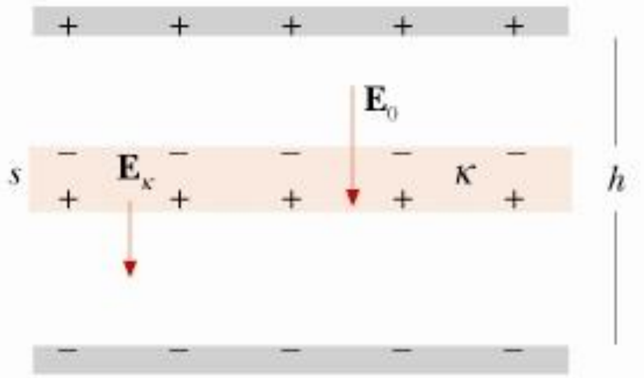
$$U_C = \frac{1}{2}\kappa C_0 V^2$$

$$U_C = (\frac{1}{2}\kappa\varepsilon_0 E^2)\cdot(\Sigma h)$$

$$u_C = \frac{1}{2}\kappa\varepsilon_0 E^2$$

$$u_C = \frac{1}{2}\varepsilon\, E^2 = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon}$$

Quale è la capacità equivalente di questo sistema?

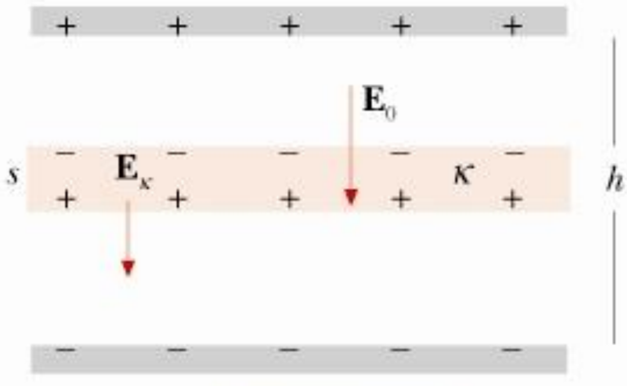


$$V = \int_0^h \vec{E} \cdot d\vec{h} = E_0(h-s) + E_\kappa s$$

$$V = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(h-s) + \frac{\sigma_0}{\kappa\varepsilon_0}s$$

$$V = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\left(h - \frac{\kappa-1}{\kappa}s\right)$$

$$V = \frac{\sigma_0\Sigma}{\varepsilon_0\Sigma}\left(h - \frac{\kappa-1}{\kappa}s\right)$$



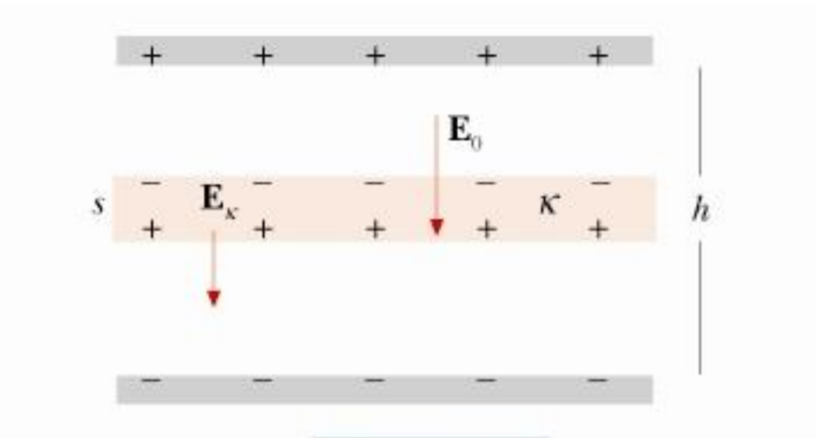
$$V = \frac{\sigma_0 \Sigma}{\varepsilon_0 \Sigma}\left(h - \frac{\kappa - 1}{\kappa} s\right)$$

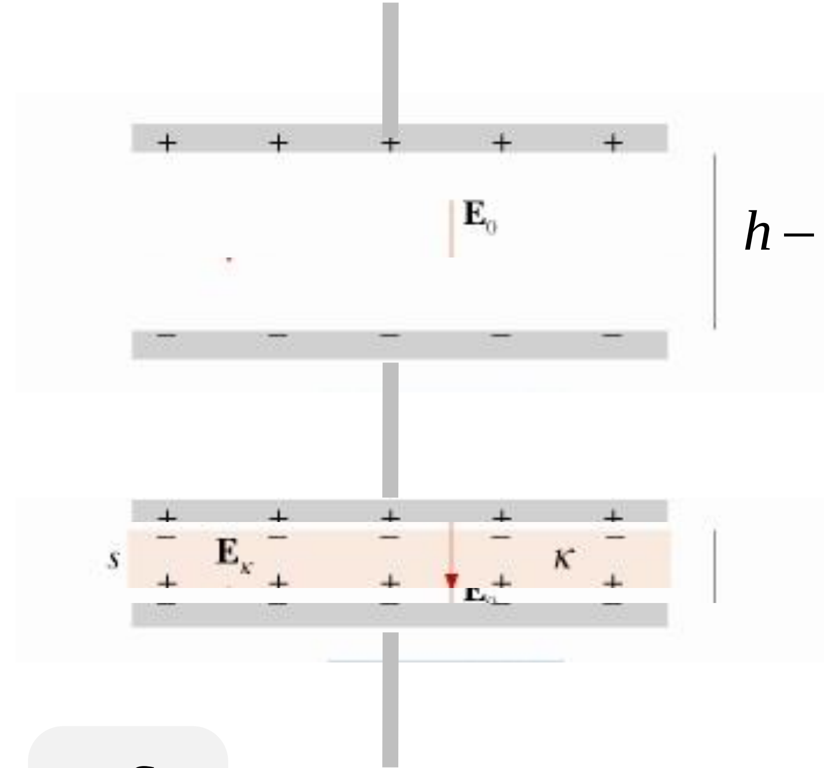
$$\frac{1}{C} = \frac{V}{q_l} = \frac{V}{\sigma_0 \Sigma} = \frac{1}{\varepsilon_0 \Sigma}\left(h - \frac{\kappa - 1}{\kappa} s\right)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{h - s}{\varepsilon_0 \Sigma} + \frac{s}{\varepsilon_0 \kappa \Sigma}$$

Zona senza dielettrico

Zona con dielettrico

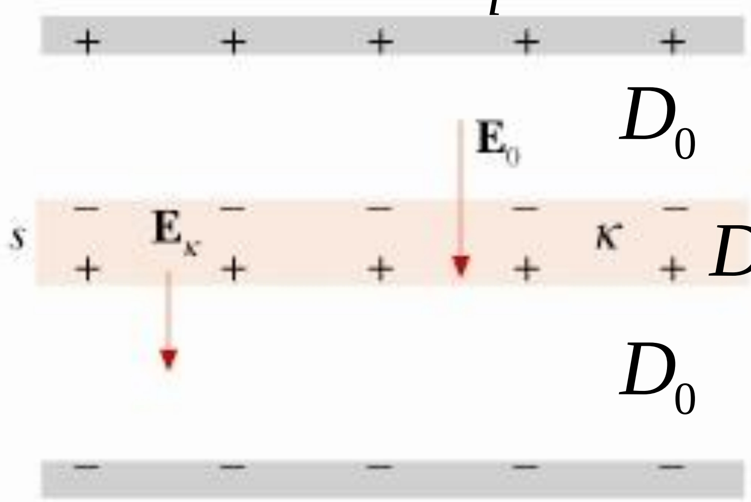




$$\frac{1}{C} = \frac{h-s}{\varepsilon_0 \Sigma} + \frac{s}{\varepsilon_0 \kappa \Sigma}$$

Vettori *D*, *E* e carica di polarizzazione

$+\sigma_l$



$-\sigma_l$

D_0 D_κ D_0

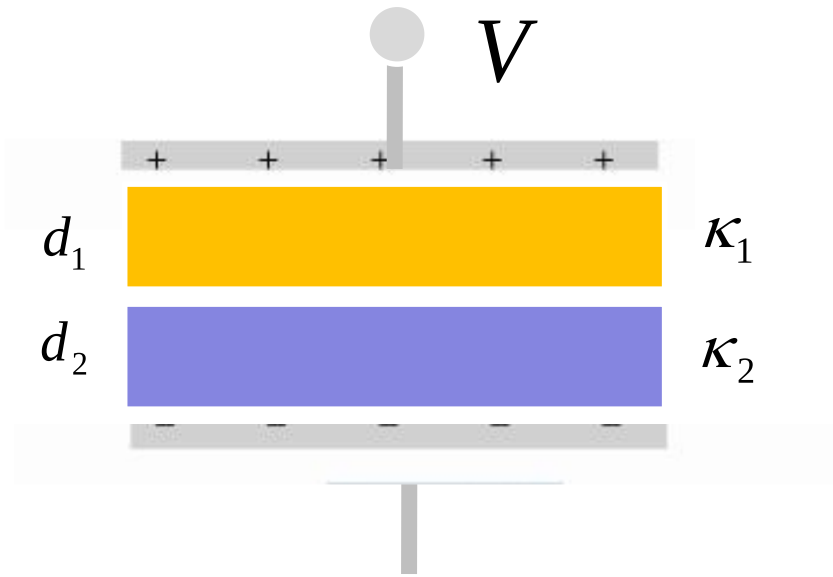
$$D_\kappa = D_0$$

$$D_0 = D_\kappa = \sigma_l$$

$$E_0 = \sigma_l / \varepsilon_0$$

$$E_\kappa = D_\kappa / \kappa\varepsilon_0 = \sigma_l / \kappa\varepsilon_0$$

$$\vec{P} = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa}\vec{D}; \qquad \sigma_p = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa}\sigma_l$$



$$D_1 = D_2$$

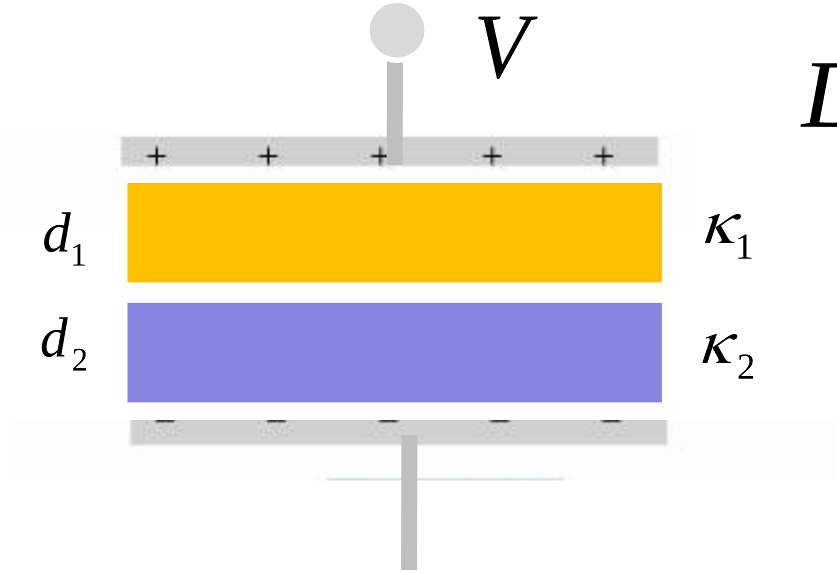
$$\varepsilon_0\kappa_1 E_1 = \varepsilon_0\kappa_2 E_2$$

$$E_1 / E_2 = \kappa_2 / \kappa_1$$

$$V = \int_0^{d_1+d_2} \vec{E}\cdot d\vec{h} = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

$$E_1 = \kappa_2 V / (\kappa_2 d_1 + \kappa_1 d_2)$$

$$D = \varepsilon_0 \kappa_1 \kappa_2 V / (\kappa_2 d_1 + \kappa_1 d_2)$$



$$D = \varepsilon_0 \kappa_1 \kappa_2 V / (\kappa_2 d_1 + \kappa_1 d_2)$$

$$\sigma_l = D$$

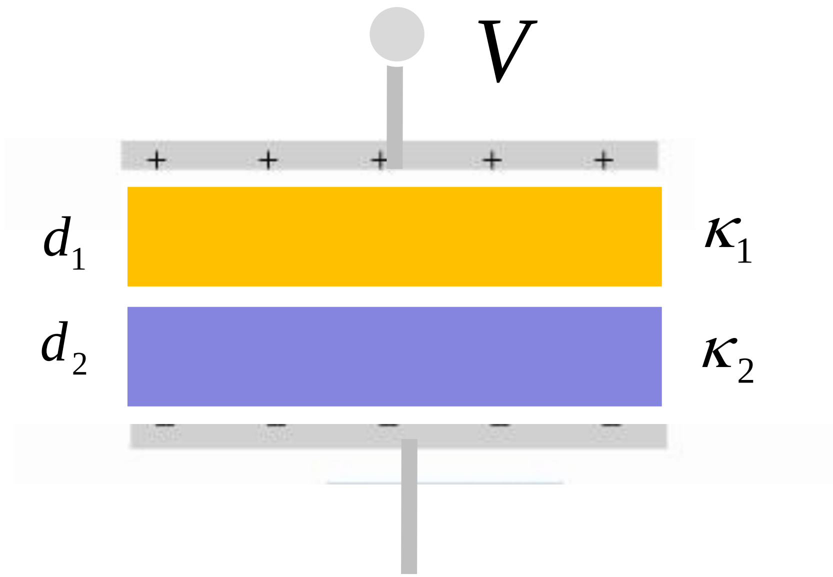
$$\sigma_p = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} \sigma_l$$

$$\sigma_{p_1} = \frac{(\kappa_1 - 1)}{\kappa_1} \sigma_l$$

$$\sigma_{p_2} = \frac{(\kappa_2 - 1)}{\kappa_2} \sigma_l$$

Sulla superficie di separazione fra i dielettrici

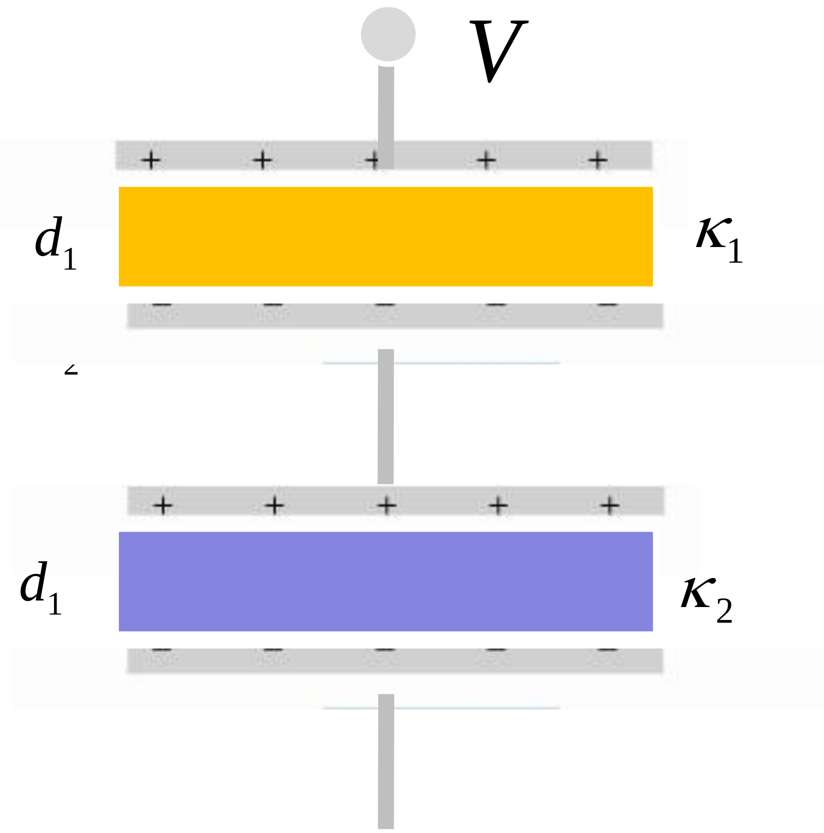
$$\sigma_p = \sigma_{p_1} - \sigma_{p_2}$$



$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

$$V = \frac{\sigma_l \Sigma}{\varepsilon_0 \Sigma}\left(\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{C}} = \frac{V}{q} = \frac{1}{\varepsilon_0 \Sigma}\left(\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2}\right) = \boxed{\frac{d_1}{\varepsilon_0 \Sigma \kappa_1}} + \boxed{\frac{d_2}{\varepsilon_0 \Sigma \kappa_2}}$$

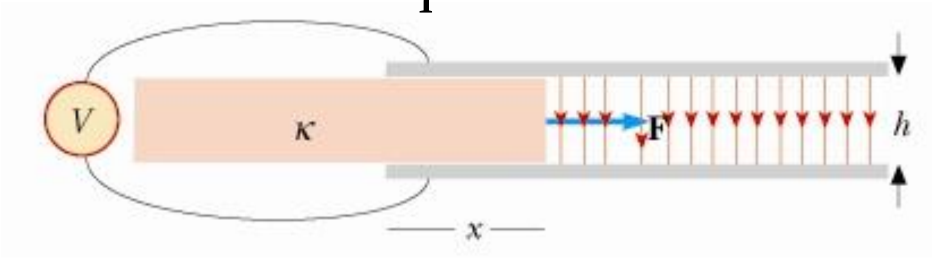


$$\frac{1}{C} = \frac{d_1}{\varepsilon_0 \Sigma \kappa_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 \Sigma \kappa_2}$$

Lavoro della forza di risucchio

Potenziale costante

Armatura quadrata di lato *l*



$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 \kappa}{h} lx + \frac{\varepsilon_0 l(l - x)}{h}$$

$$dC(x) = \frac{\varepsilon_0 l(\kappa - 1)}{h} dx$$

$$U_C(x) = \frac{1}{2} V^2 C(x)$$

$$dU_C(x) = \frac{1}{2} V^2 dC$$

$$dC(x) > 0$$

$$dU_C > 0$$

Il generatore deve sposare la carica sulle armature e compie quindi il lavoro

$$dq = VdC$$

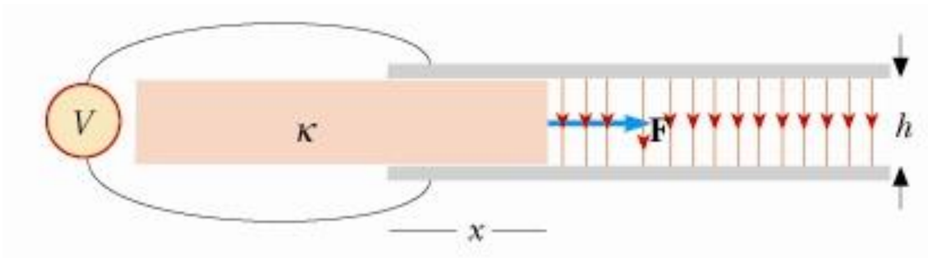
$$dW_{Gen} = Vdq = V^2 dC$$

Ed il resto dell'energia??

$$dW_{Gen} = dW_{lastra} + dU_C$$

Lavoro della forza di risucchio

Potenziale costante



$$dW_{lastra} = Fdx = dW_{Gen} - dU_C$$

$$Fdx = \frac{1}{2}V^2 dC$$

$$F = \frac{\varepsilon_0 l(\kappa - 1)V^2}{2h}$$

Anche

$$F = -\frac{dU_{Tot}}{dx}$$

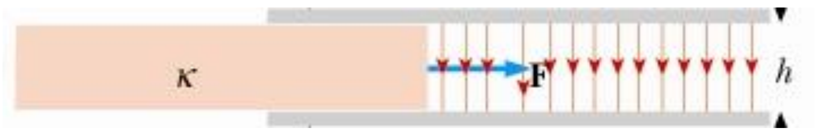
$$dU_{Tot} = dU_{Gen} + dU_C = -V^2 dC + \frac{1}{2}V^2 dC$$

$$F = -\frac{dU_{Tot}}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}V^2 dC\right)$$

$$F(x) > 0$$

Lavoro della forza di risucchio   Carica costante

Armatura quadrata di lato *l*



$$C(x)=\frac{\varepsilon_0\kappa}{h}lx+\frac{\varepsilon_0 l(l-x)}{h}$$

$$dC(x)=\frac{\varepsilon_0 l(\kappa-1)}{h}dx$$

$$U_C(x)=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(x)}$$

$$dU_C(x)=-\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2(x)}dC$$

$$dU_C(x)<0$$

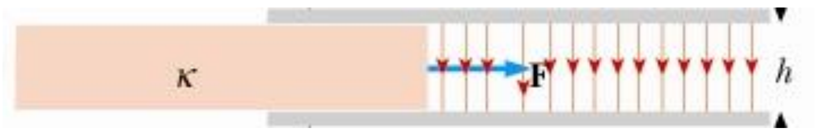
$$dW=Fdx=-dU_C$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2(x)}dC/dx$$

$$F(x)>0$$

Lavoro della forza di risucchio Carica costante

Armatura quadrata di lato *l*



Anche in questo caso

$$F = -\frac{dU_{Tot}}{dx}$$

Ma $dU_{Tot} = dU_C$

E quindi

$$F = -\frac{dU_C}{dx} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2(x)} dC/dx$$

5.2 Un condensatore piano, con armature quadrate di area $\Sigma = 400\ \mathrm{cm}^2$ distanti $d = 2$ mm, è riempito per metà da mica ($\kappa_1 = 5$) e per metà da paraffina ($\kappa_2 = 2$). Calcolare la capacità del condensatore. Se viene applicata una d.d.p. $V = 2 \cdot 10^3$ V tra le armature calcolare la densità di carica sulle armature, la densità di carica di polarizzazione sulle superficie del dielettrico, l'energia elettrostatica del condensatore.

5.3 A due condensatori piani di capacità $C_1 = 500$ pF e $C_2 = 1000$ pF, connessi in serie, è collegato un generatore che mantiene una d.d.p. costante $V = 400$ V. Una lastra di dielettrico, con costante dielettrica relativa $\kappa = 4$, viene inserita in C_1 così da riempirlo completamente. Calcolare la variazione della carica di C_2, la variazione della d.d.p. ai capi di C_1, la carica di polarizzazione su ciascuna faccia del dielettrico, l'energia fornita dal generatore nel processo.

5.4 Due condensatori di capacità $C_1 = 200$ pF e $C_2 = 1000$ pF sono connessi in parallelo e caricati a una d.d.p. $V_0 = 400$ V. Successivamente lo spazio tra le armature di C_1 viene completamente riempito di acqua distillata ($\kappa = 80$). Calcolare la variazione della carica di C_1, la variazione della d.d.p. ai capi di C_2, la carica di polarizzazione sulle facce del dielettrico, la variazione di energia elettrostatica del sistema.

5.5 Due condensatori piani eguali, aventi armature quadrate di lato $l = 20$ cm distanti $h = 5$ mm, sono connessi a due generatori che mantengono una d.d.p. $V_1 = 500$ V ai capi del primo e $V_2 = 1000$ V ai capi del secondo. Una lastra di dielettrico, di dimensioni $20 \cdot 20 \cdot 0.5\ \text{cm}^3$, densità $\rho = 1.5 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$ e costante dielettrica relativa $\kappa = 5$, può scorrere senza attrito tra le armature, mantenendo sempre un estremo dentro un condensatore e uno dentro l'altro. Calcolare il tempo impiegato dalla lastra per compiere un tratto $x = 5$ cm se al tempo $t = 0$ è ferma e la densità di carica di polarizzazione sulla lastra.

5.6 Un condensatore piano, avente armature verticali di area $\Sigma = 500 \text{ cm}^2$ distanti $d = 1$ cm, è collegato ad un generatore di d.d.p. $V = 10^3$ V. Una lastra di dielettrico, di spessore $h = 0.6$ cm e costante dielettrica relativa $\kappa = 4$, è inserita tra le armature ed è addossata a quella carica negativamente. All'armatura positiva è appesa tramite un filo sottile isolante, una pallina di massa $m = 10^{-3}$ kg e carica $q_0 = 5 \cdot 10^{-9}$ C, che rimane in equilibrio con il filo ad angolo θ rispetto alla verticale. Calcolare il valore del campo elettrico che agisce sulla pallina, dell'angolo θ di equilibrio, della carica presente sulle armature e della carica di polarizzazione presente sulla superficie del dielettrico.

Vettore Induzione Dielettrica

$$\vec{D} = (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\left|\vec{D}\right| = \sigma_l$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{\Sigma} = q_l$$

Teorema della divergenza

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = \rho_l$$

$$div\, \vec{D} = \rho_l$$

$$\vec{P} = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} \vec{D}$$

Applicando l'operatore ***div***

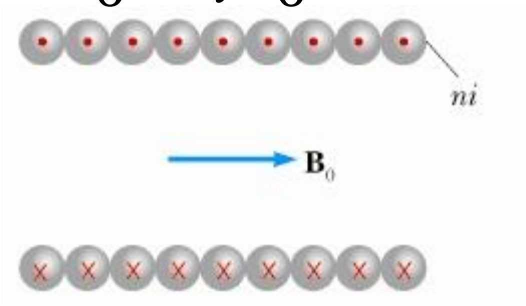
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$$

In assenza di cariche libere

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$$

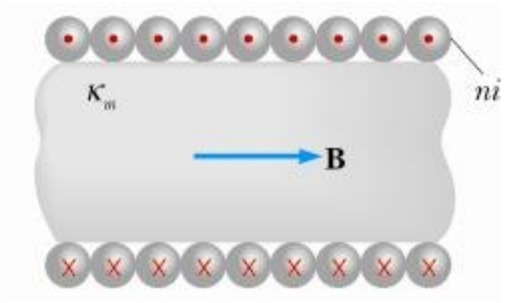
Solenoide ideale

$$B_0 = \mu_0 n i$$



$$\frac{B}{B_0} = \kappa_m$$

Inseriamo un materiale nel solenoide



κ_m Permeabilità magnetica relativa

$$B = \kappa_m B_0 = \kappa_m \mu_0 n i$$

$\mu = \kappa_m \mu_0$ Permeabilità magnetica assoluta

$$\boxed{B = \mu n i}$$

Solenoide ideale in presenza di un materiale

$$B = \mu n i$$

Tutte le leggi della magnetostatica valgono anche nei materiali

$$\mu_0 \Rightarrow \mu$$

$$\vec{B} = \frac{\mu i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2}$$

$$B_{filo} = \frac{\mu i}{2\pi R} \hat{u}_\phi$$

$$\Gamma = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu i_{concatenate}$$

La variazione di campo dovuta alla presenza del mezzo è:

$$\Delta B = B - B_0 = (k_m - 1)\, B_0$$

$$\chi_m = (\kappa_m - 1)$$ Suscettività magnetica

Possiamo riscrivere il campo totale come:

$$B = B_0 + \Delta B = B_0 + \chi_m B_0$$

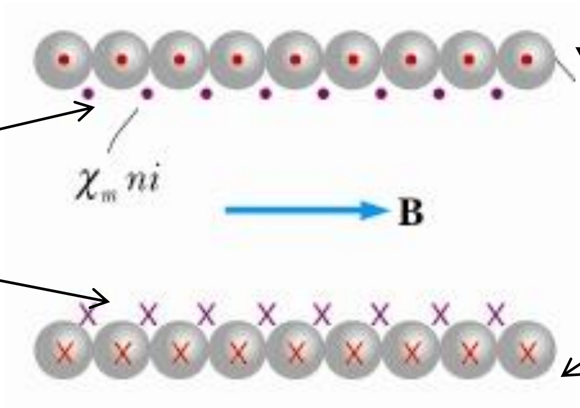
$$B = \mu_0 n i + \mu_0 \chi_m n i$$

Contributo della corrente di conduzione

Contributo del mezzo

E' come se….

$c_m ni$



ni

…. si sviluppassero delle correnti aggiuntive nel materiale (correnti amperiane)

Campo di magnetizzazione
Dipende dal materiale

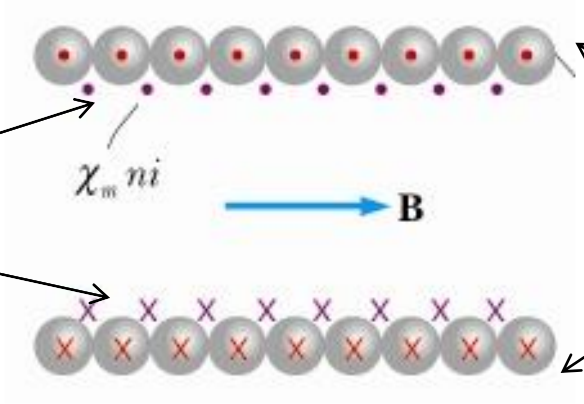
$$\mathrm{M} = \chi_m ni$$

Campo magnetico esterno
Dipende dalla corrente nel solenoide

$$\mathrm{H} = ni$$

E' come se….

$c_m ni$



ni

Campo di magnetizzazione

$$\mathrm{M} = \chi_m ni$$

Campo magnetico esterno nel vuoto

$$\mathrm{H} = ni$$

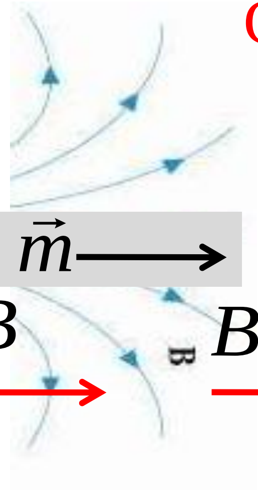
Campo magnetico nel materiale

$$B = \mu_0 ni + \mu_0 \chi_m ni$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{\mathrm{M}} = \chi_m \vec{H}$$

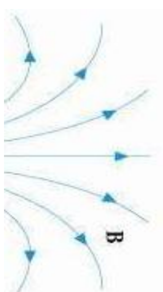
Campo magnetico non uniforme



$\vec{m} \longrightarrow$

B $\qquad$ $B - dB$

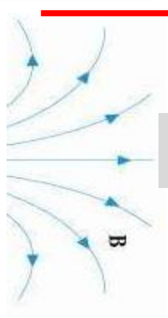
$$F_{\mathrm{T}} = m \frac{dB}{dx}$$



$\vec{m} \longrightarrow$

$$\frac{dB}{dx} < 0 \qquad m > 0 \qquad F_{\mathrm{T}} < 0$$

x

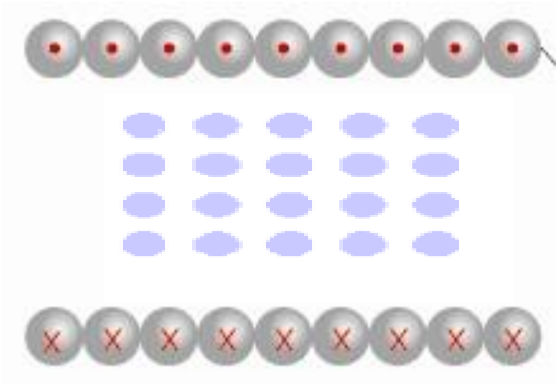


$\vec{m} \longleftarrow$

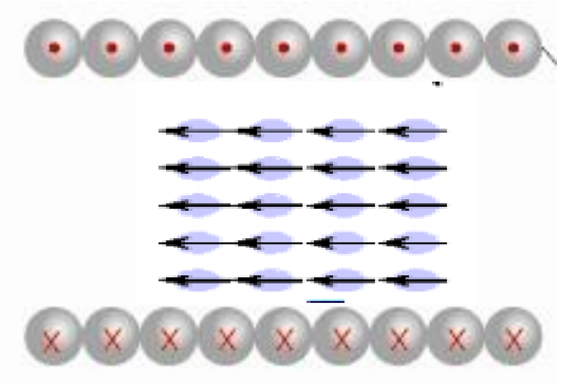
$$\frac{dB}{dx} < 0 \qquad m < 0 \qquad F_{\mathrm{T}} > 0$$

Sostanze diamagnetiche

$i = 0$



$i > 0$



Gli atomi e le molecole non presentano nessun momento di dipolo magnetico intrinseco

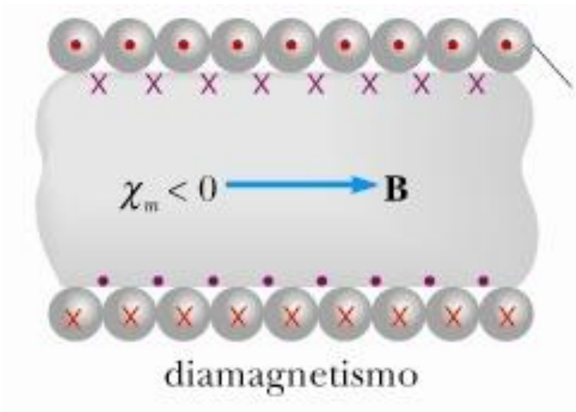
Sotto l'azione di un campo esterno, si sviluppano dei dipoli magnetici orientati in verso opposto al campo esterno

Sostanze diamagnetiche

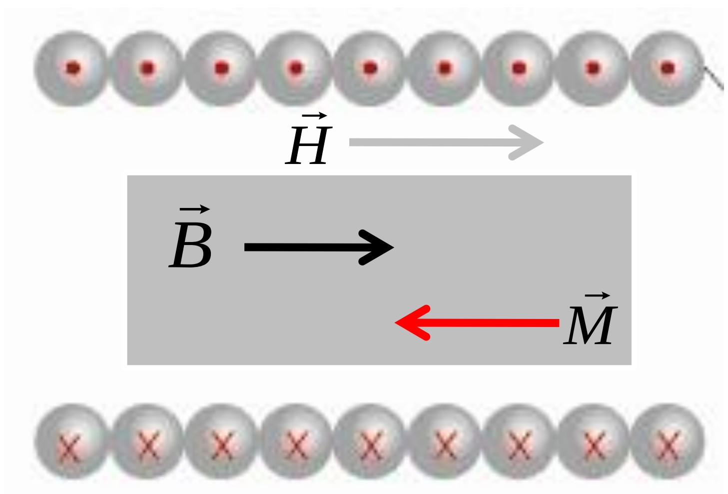
$\kappa_m < 1 \quad \chi_m < 0$

$$\frac{B}{B_0} < 1$$

Il campo totale diminuisce



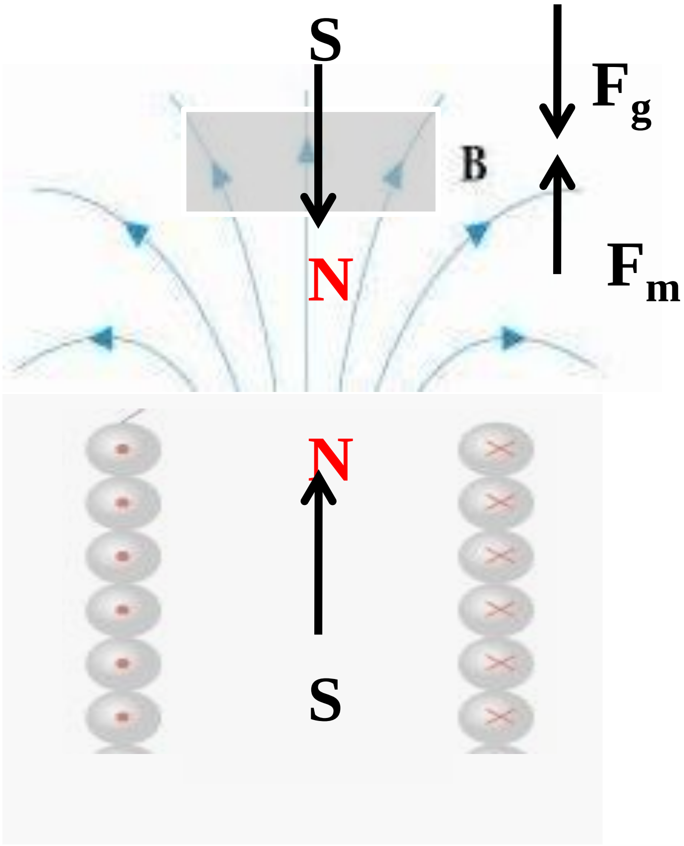
Correnti amperiane opposte alla corrente di conduzione

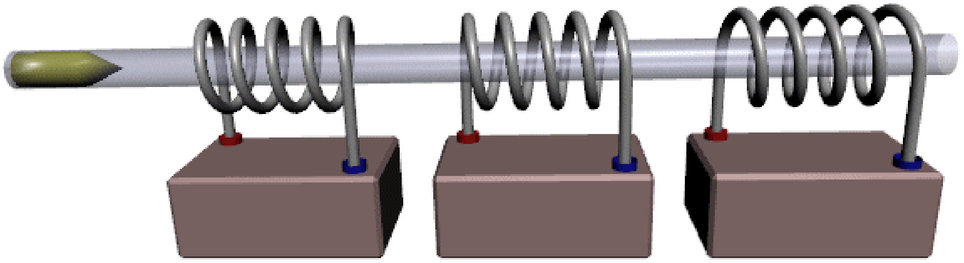


Il materiale sente una forza verso destra verso le zone più deboli del campo

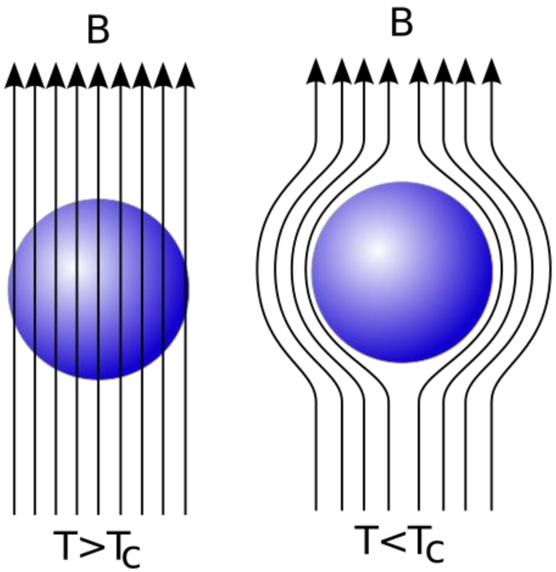
Sostanza	μ_r
Acqua e Rame	0.99999
Argento	0.99998
Bismuto	0.99982
Mercurio	0.99997

Levitazione magnetica





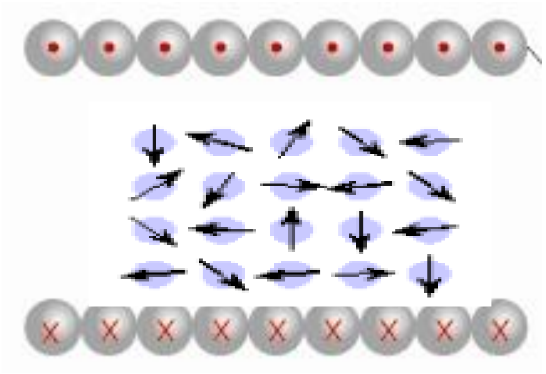
I superconduttori assumono resistenza nulla al passaggio di corrente elettrica al di sotto di una certa temperatura.



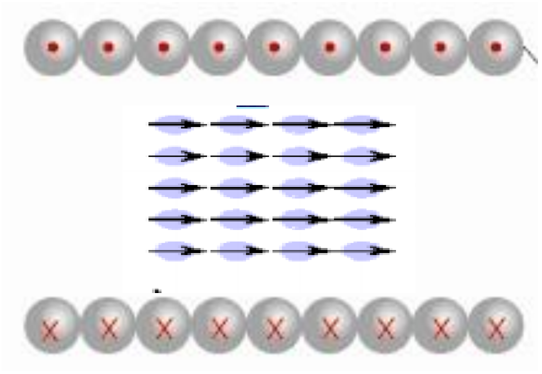
Quando un superconduttore viene immerso in un campo magnetico di intensità inferiore ad un certo valore critico, esso manifesta un diamagnetismo perfetto ($\chi_m = -1$) espellendo il campo magnetico dal suo interno. (Effetto Meissner).

Sostanze paramagnetiche/ferromagnetiche

$i = 0$



$i > 0$

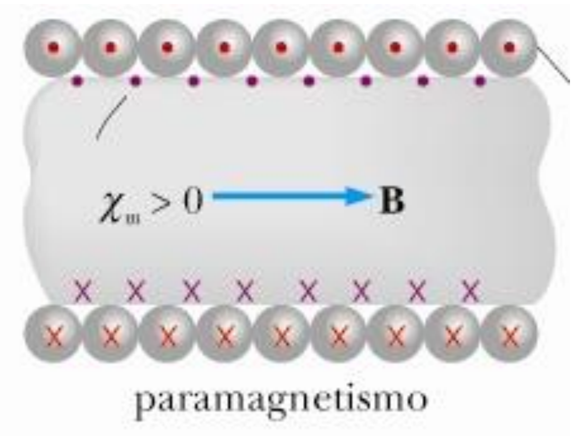


Gli atomi e le molecole hanno un momento di dipolo magnetico intrinseco

Sotto l'azione di un campo esterno, tutti i dipoli magnetici si orientano

Sostanze paramagnetiche

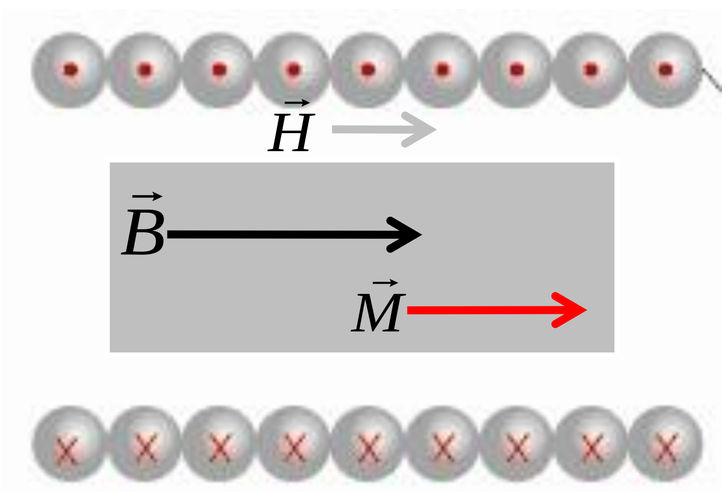
$$\kappa_m > 1 \quad \chi_m > 0$$



$$\frac{B}{B_0} > 1$$

Il campo totale aumenta

Correnti amperiane concordi alla corrente di conduzione

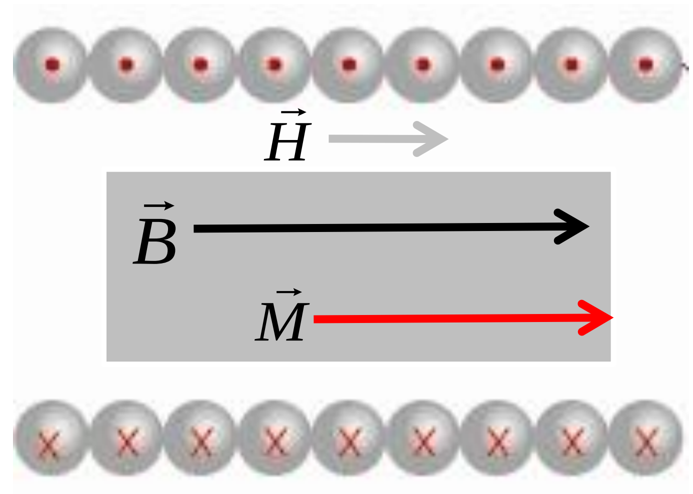


Il materiale sente una forza verso sinistra, verso le zone più intense del campo

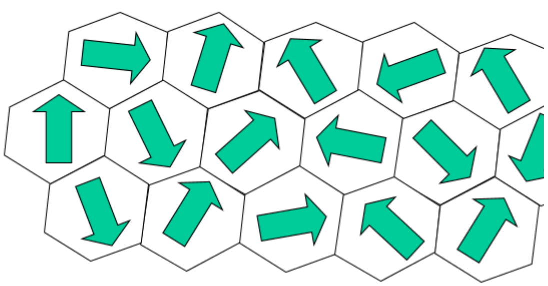
Sostanza	μ_r
Alluminio	1.00002
Aria	1.0000004
Platino	1.00033
Ossigeno gassoso	1.00133

$$\kappa_m >> 1$$

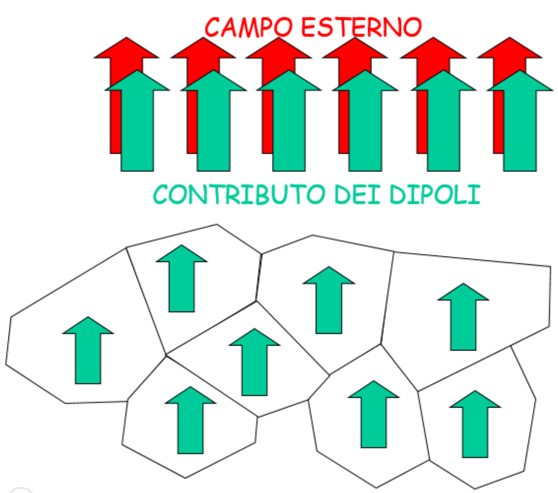
Sono costituite da «domini» di Weiss con momento di dipolo intrinseco



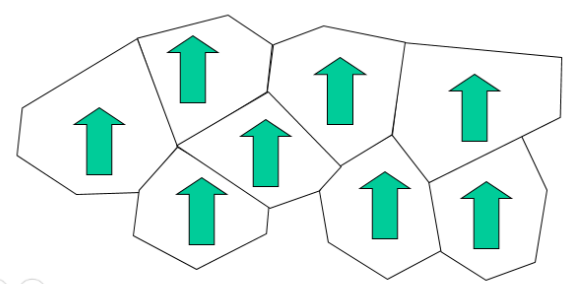
$$\vec{H} = 0$$

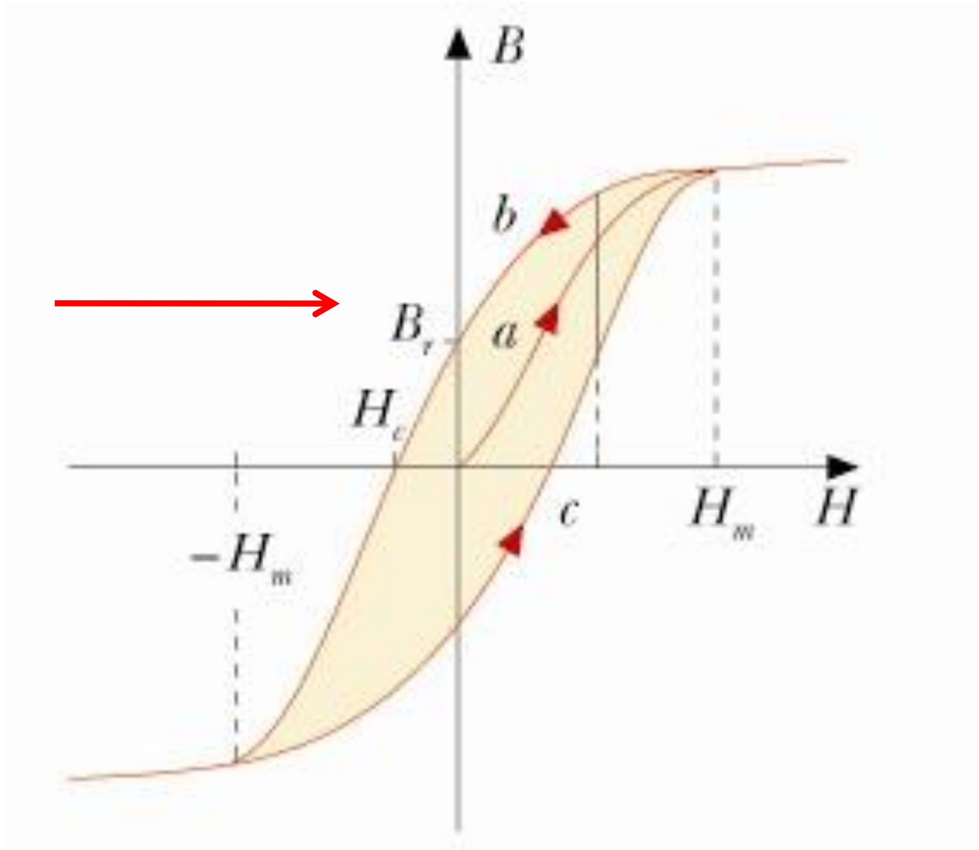


$$\vec{H} > 0$$



$$\vec{H} = 0$$





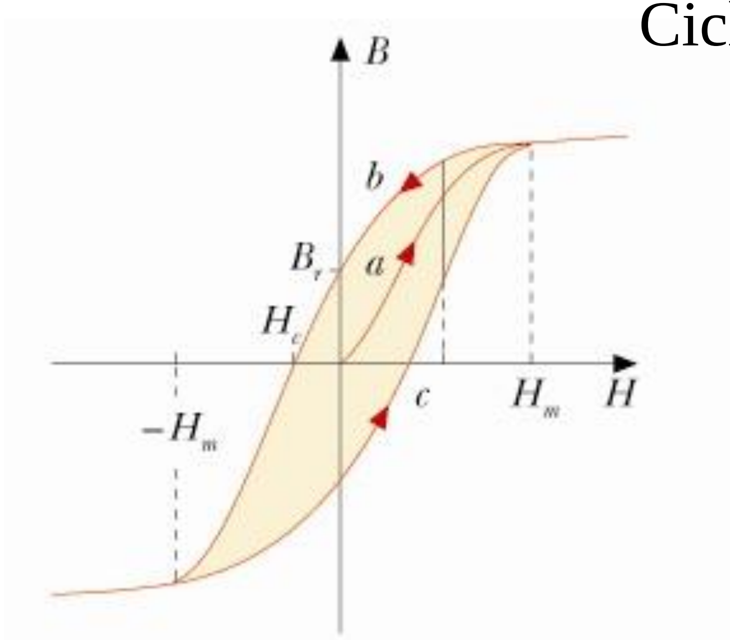
$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

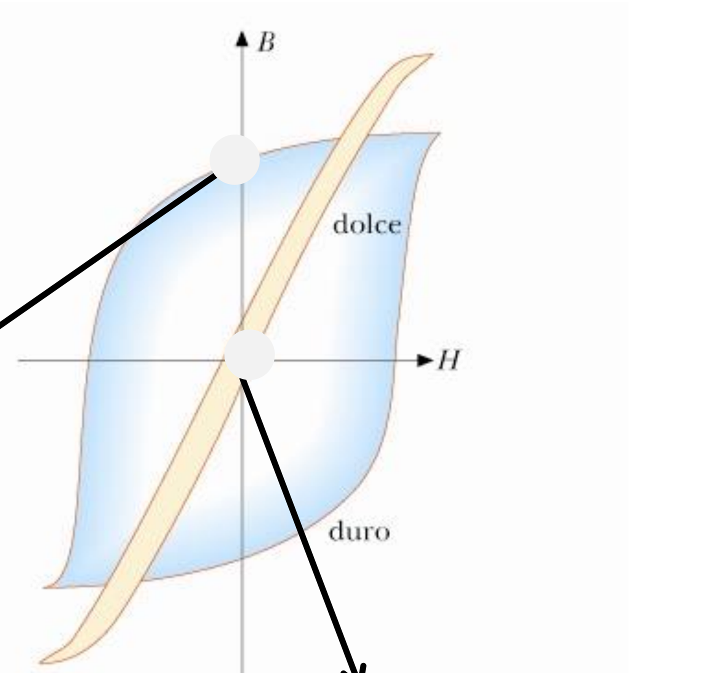
$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$$

Anche se si spengono le correnti, resta una magnetizzazione residua e quindi un campo magnetico

Sostanze ferromagnetiche

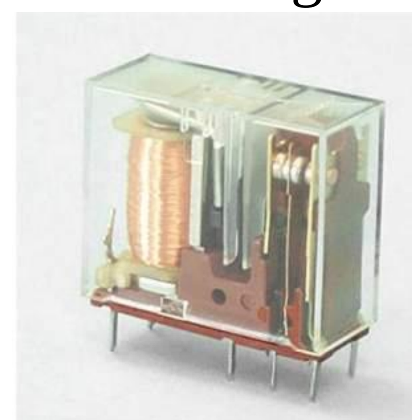
Ciclo di isteresi

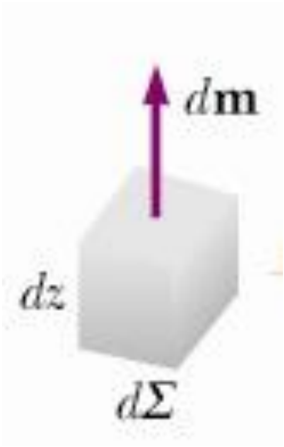




Elettromagneti

Magneti permanenti

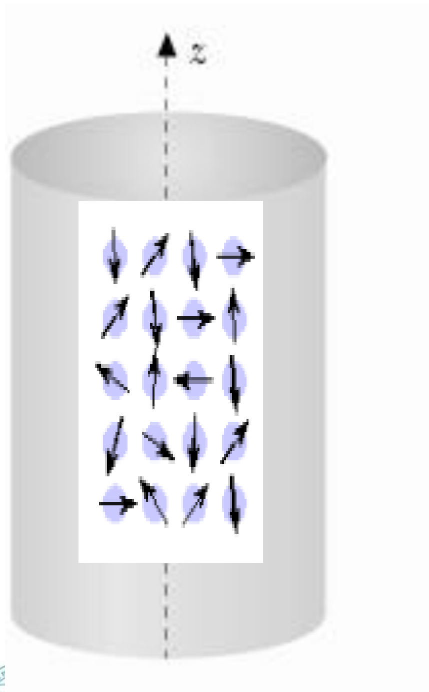




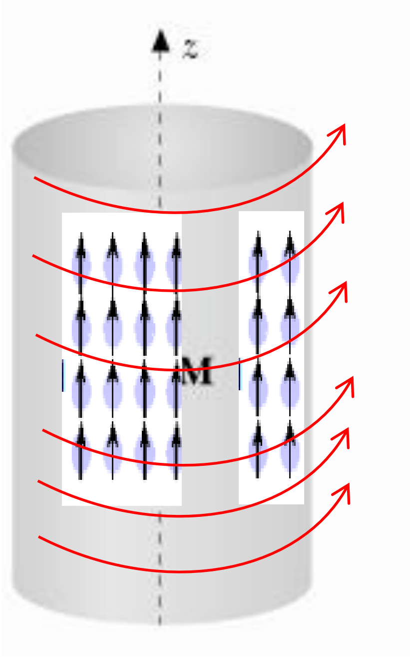
Materiale magnetico

E’ come se fosse costituito da tanti piccoli dipoli magnetici orientati a caso

$$\vec{M} = \frac{\sum d\vec{m}}{Vol}$$



Se inseriamo il materiale all’interno di un solenoide su cui scorre una corrente *i*, il materiale si magnetizza e si produce lo stesso effetto di una corrente addizionale $c_m ni$ che scorre sulla superficie

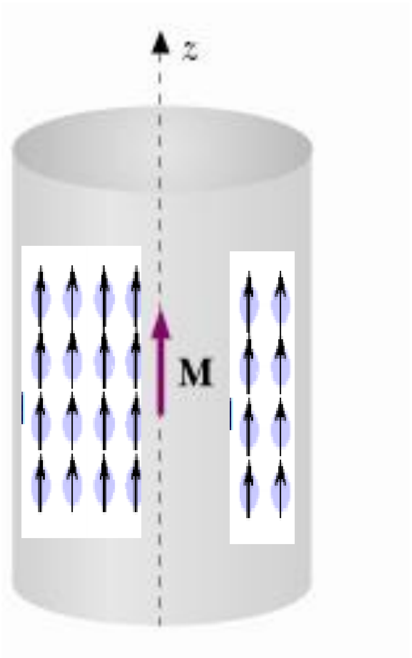


$$\mathbf{M} = \chi_m n i \qquad [M] = \left[\frac{Ampere}{m}\right]$$

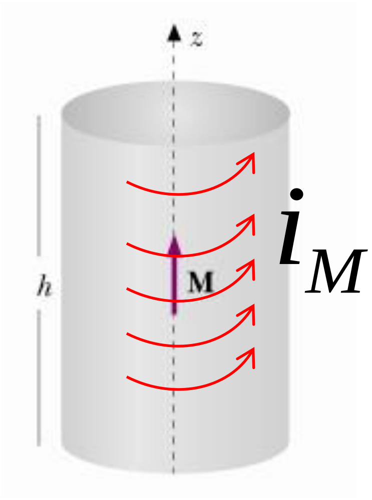
Magneti permanenti

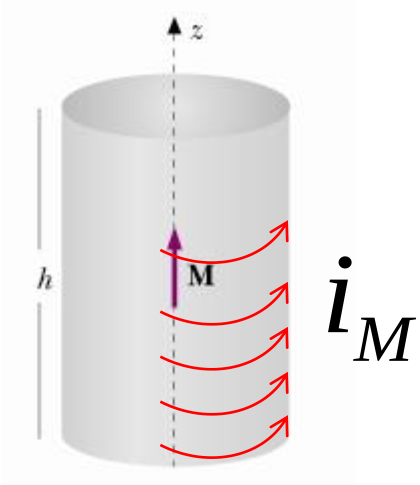
Sono costituito da tanti piccoli dipoli magnetici già naturalmente allineati

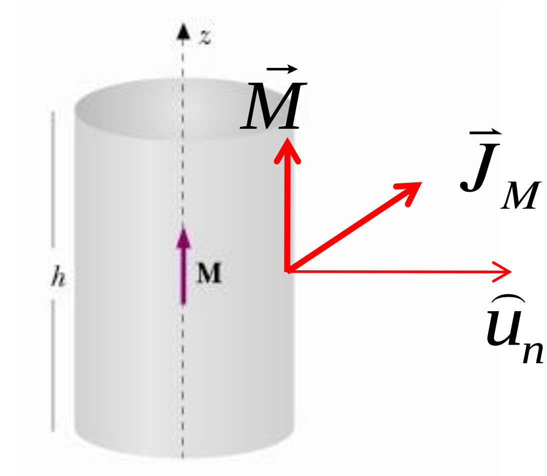
$$\vec{M} = \frac{\sum d\vec{m}}{Vol}$$



E' come la superficie del magnete fosse percorsa da una corrente di magnetizzazione i_M







Si trova che la densità lineare di corrente Amperiane $\mathbf{J}_M$ è uguale a

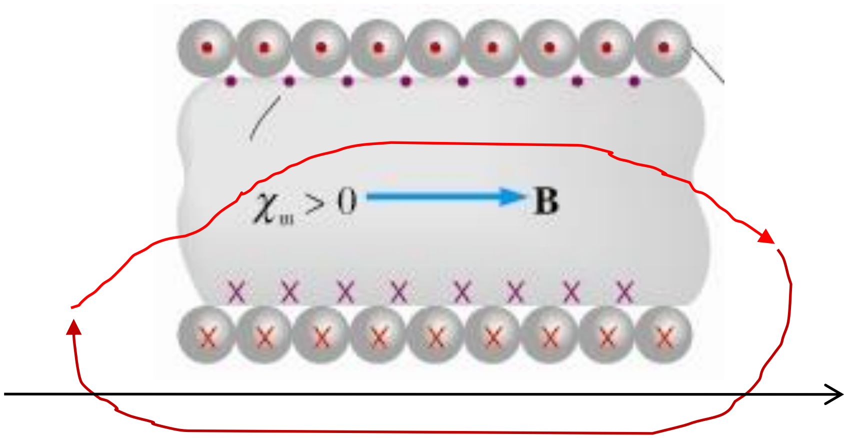
$$\vec{J}_M = \vec{M} \wedge \hat{u}_n \qquad \left|\vec{J}_M\right| = \left|\vec{M}\right|$$

E quindi la corrente superficiale è

$$i_M = \int_0^h M\, dz \qquad M = \frac{i_M}{h}$$

In generale

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \wedge \vec{M}$$



$$\vec{M} = \text{costante all'interno}$$

$$\vec{M} = 0 \text{ all'esterno}$$

$$\oint \vec{M} \cdot d\vec{s} = \int_0^h M\, dz = i_M$$

Riscriviamo la legge di Ampere in presenza di mezzi magnetizzati

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (i + i_M) = \mu_0 i + \mu_0 \oint \vec{M} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0(i + i_M) = \mu_0 i + \mu_0 \oint \vec{M}\cdot d\vec{s}$$

cioè

$$\oint (\vec{B} - \mu_0 \vec{M})\cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

Definiamo

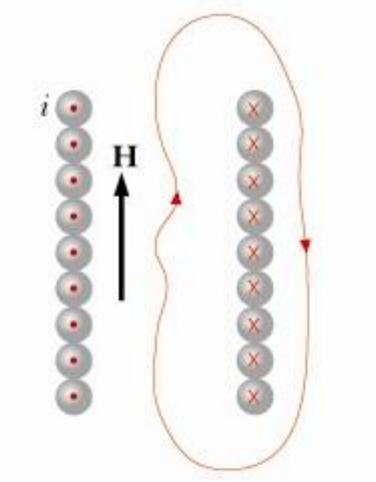
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \qquad \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

Otteniamo

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{s} = i$$

La circuitazione del vettore **H** dipende solo dalle correnti nel solenoide e non dal materiale

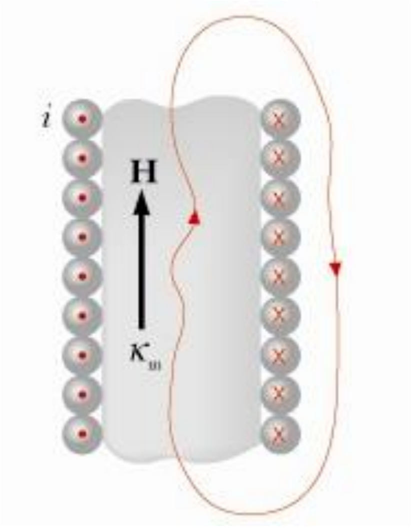
Nel vuoto



$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

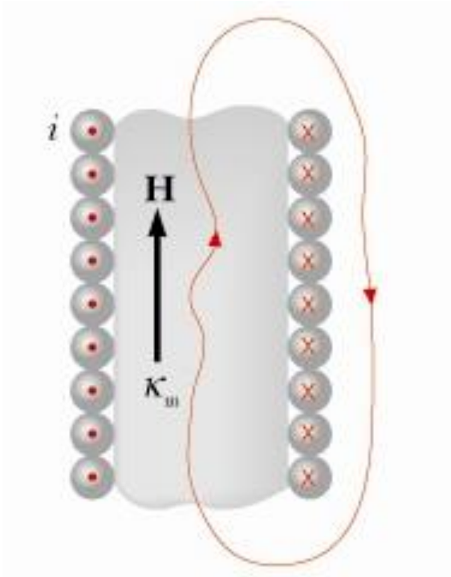
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Nel materiale magnetico



$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \qquad \vec{M} = \chi_m ni = \chi_m \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \kappa_m \vec{H} = \mu \vec{H}$$



$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = i$$

Applicando il teorema di Stokes

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) = J$$

$$rot\,\vec{H} = J$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = \rho$$

$$div\, \vec{D} = \rho$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$rot\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

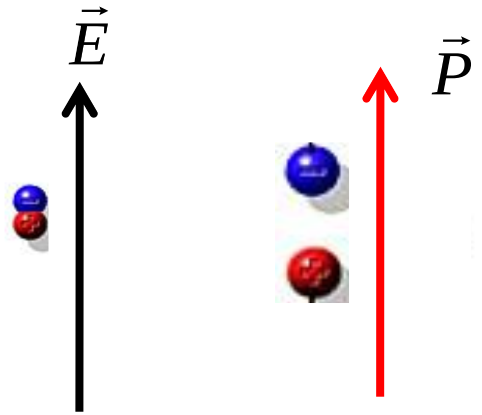
$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$$

$$div\, \vec{B} = 0$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) = \vec{J}$$

$$rot\, \vec{H} = \vec{J}$$

Manca il contributo al campo magnetico delle correnti di polarizzazione



La polarizzazione di un materiale dielettrico produce una corrente

$$d\vec{p} = q\,d\vec{s}$$

$$d\vec{P} = N\,d\vec{p} = Nq\,d\vec{s}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = Nq\frac{d\vec{s}}{dt} = Nq\vec{v} = \vec{J}_P$$

Densità di corrente polarizzazione

Definiamo

$$\vec{J}_D = \vec{J}_S + \vec{J}_P = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$$

$$\vec{J}_D = \frac{\partial(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})}{\partial t} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Consideriamo la circuitazione e di **B** con tutti i possibili contribuiti

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_M + \vec{J}_D)$$

J Corrente libera

$\mathbf{J}_M$ Corrente di magnetizzazione

$\mathbf{J}_D$ Corrente di spostamento e di polarizzazione

Ricordando che $\vec{J}_M = \vec{\nabla} \wedge \vec{M}$

$$\Rightarrow \quad (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 (\vec{J} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{M}) + \vec{J}_D)$$

e $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ $\Rightarrow$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) = (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})$$

Equazioni di Maxwell nella materia

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = \rho$$
$$div\,\vec{D} = \rho$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$$
$$div\,\vec{B} = 0$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$
$$rot\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Nel vuoto

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

Nel materiale

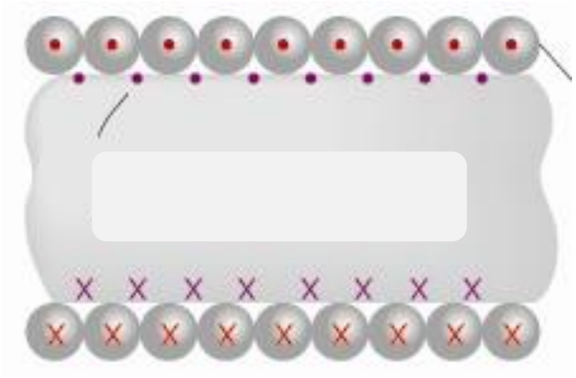
$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{\Sigma} = q_l$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{H} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = i_l$$

Un esempio



$L = 10 \ \text{cm}$

$n = 2000$

$\text{i} = 10 \, \text{mA}$

$\mu_r = 1200$

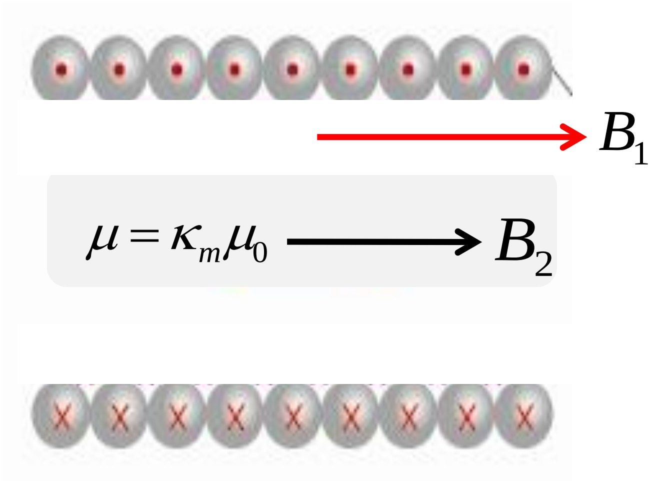
Determinare la magnetizzazione del materiale

All'interno del materiale $B = \mu n i$ $\qquad \mu = \kappa_m \mu_0$

Inoltre dalle legge di Ampere

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = i = Ni = nLi \qquad H = ni$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = 2.4 \cdot 10^5 \ \text{A/m}$$



All'interno del solenoide

$$H = ni$$

$$B_1 = \mu_0 H = \mu_0 ni$$

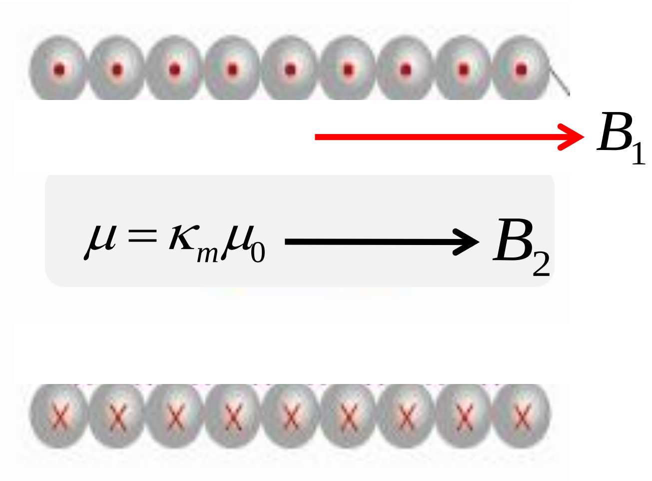
$$B_2 = \mu_0 k_m H = \mu_0 k_m ni = k_m B_1$$

All'interno del materiale

$$M = \chi_m H = \chi_m ni$$

Sulla superficie del materiale scorre la densità di corrente amperiana

$$j_{s,m} = M = \chi_m ni$$



Sulla superficie del materiale scorre la densità di corrente amperiana

$$\vec{j}_{s,m} = \vec{M} \wedge \hat{u}_n \qquad j_{s,m} = \chi_m n i$$

χ_m positiva $\quad B_2 \geq B_1$

χ_m negativa $\quad B_1 \geq B_2$

Per un materiale ferromagnetico

$$\chi_m = 10^2 \quad , \quad B_2 = 10^2 B_1$$