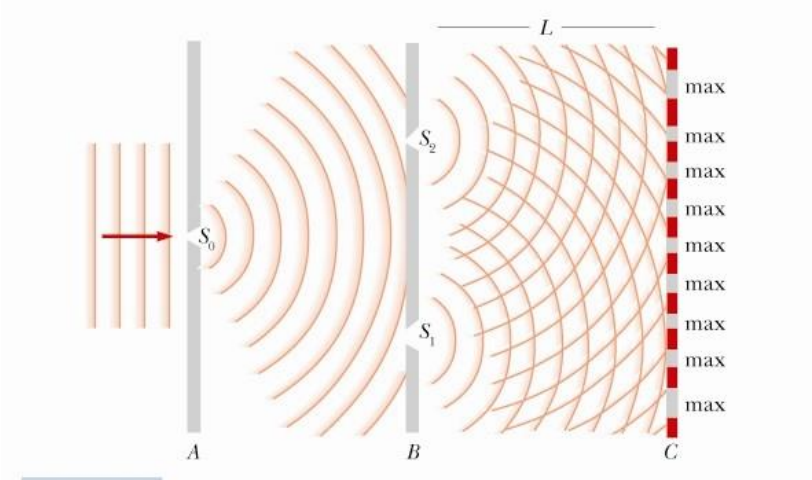
CAPITOLO 6

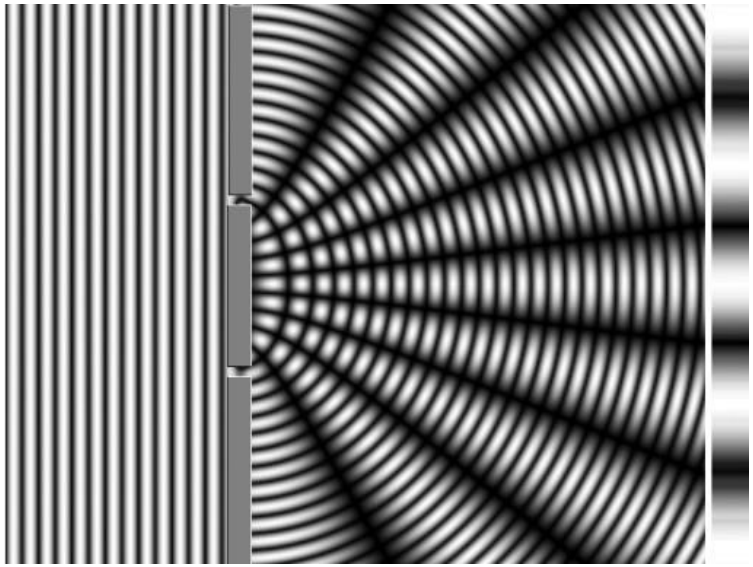
Interferenza

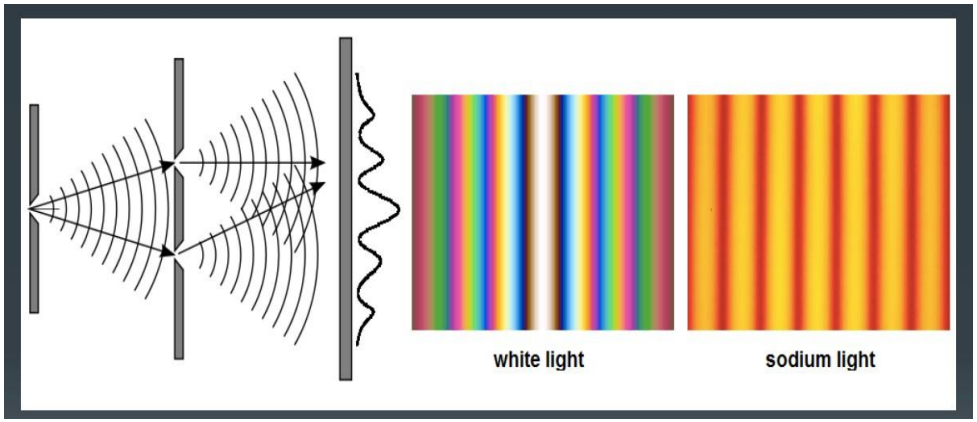
Doppia fenditura



Costruzione di Huygens-Fresnel per due fenditure

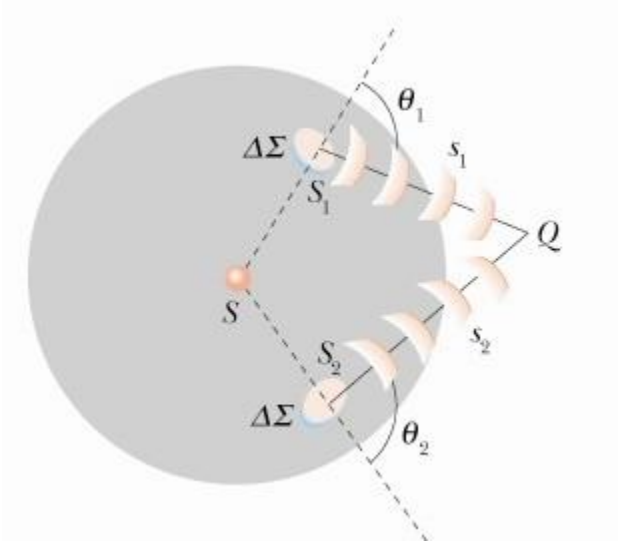
Le sorgenti S_1 ed S_2 hanno la stessa fase iniziale perché appartengono allo stesso fronte d'onda.





Formazione sullo schermo di frange chiare (interferenza costruttiva) alternate a frange scure (interferenza distruttiva)

Sorgenti coerenti

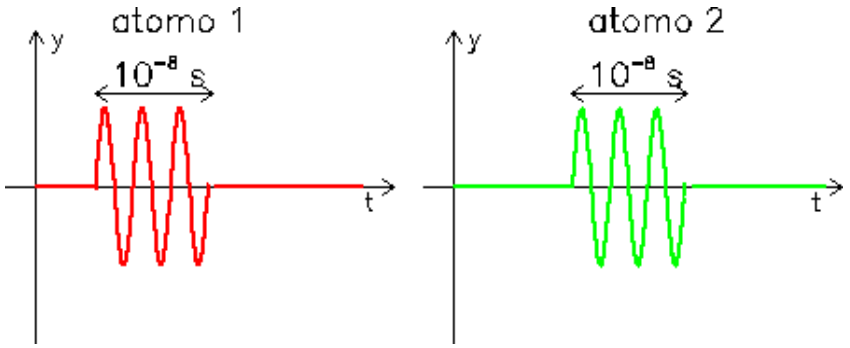


Per il principio di Huygens-Fresnel S_1 ed S_2 hanno la stessa fase iniziale perché appartengono allo stesso fronte d'onda.

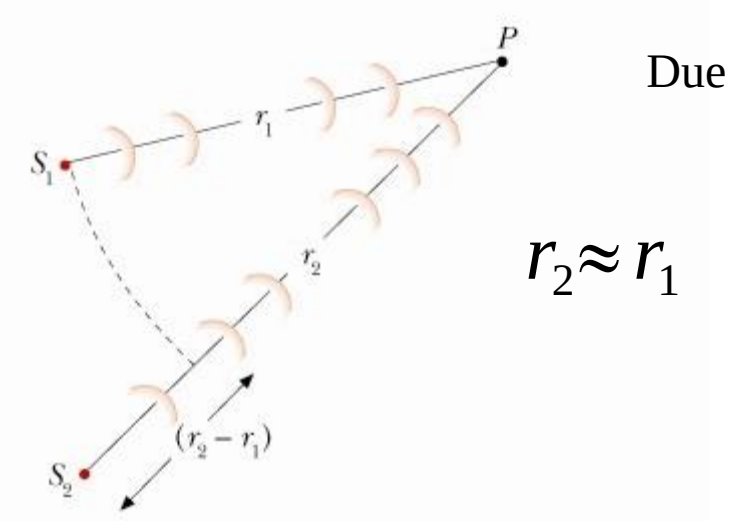
Nel punto P la differenza di fase fra le onde è

$$\delta = k(r_2 - r_1)$$

Con le sorgenti ordinarie non si rileva nessune effetti di interferenza perché emettono in genere onde luminose non coerenti. Gli atomi emettono degli impulsi luminosi molto brevi, in modo non correlato.



Sorgenti coerenti



$$r_2 \approx r_1$$

Due sorgenti puntiformi di onde sferiche

$$E_1(x,t) = E_0 \cos(kr_1 - \omega t + \varphi_1)$$

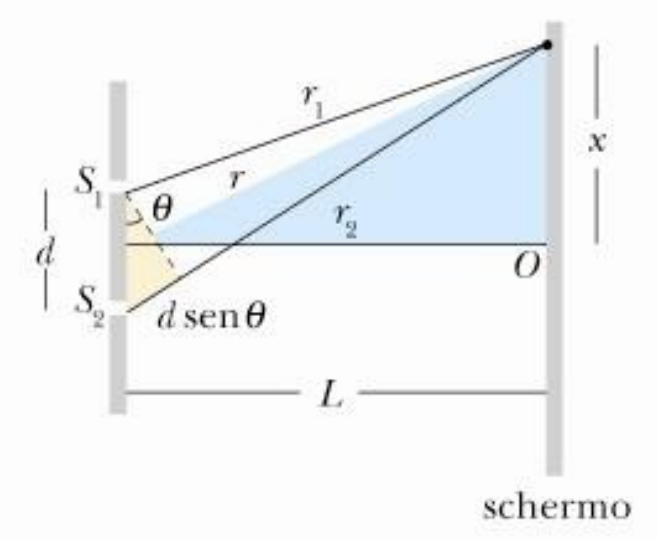
$$E_2(x,t) = E_0 \cos(kr_2 - \omega t + \varphi_2)$$

Nel punto P la differenza di fase fra le onde è

$$\delta = k(r_2 - r_1) + (\phi_2 - \phi_1)$$

Se la differenza di fase è costante nel tempo in ogni punto P, le sorgenti si dicono coerenti

Doppia fenditura



$$\delta = k(r_2 - r_1)$$

se $r >> d \Rightarrow r_2 - r_1 = d\, sen\theta$

$$\delta = kd\, sen\theta = \frac{2\pi}{\lambda} d\, sen\theta$$

Si avrà un massimo quando la differenza di percorso è un multiplo intero della lunghezza d'onda

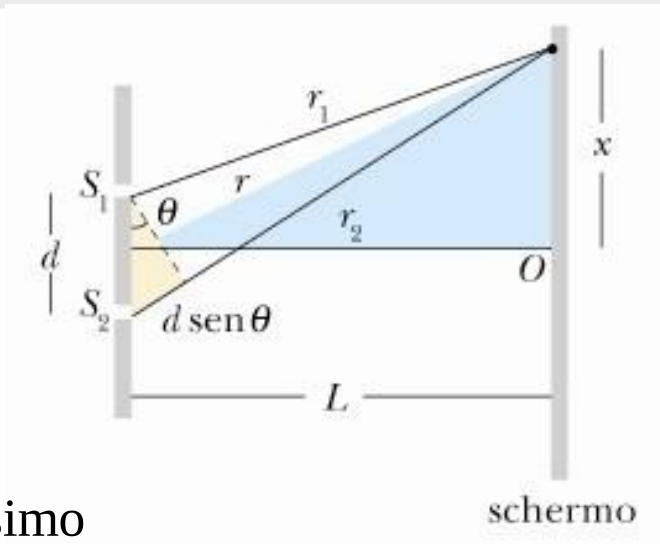
$$\delta = 2m\pi \qquad d\, sen\theta = m\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Si avrà un minimo quando la differenza di percorso è un multiplo semi intero della lunghezza d'onda

$$\delta = (2m+1)\pi \qquad d\, sen\theta = (2m+1)\lambda/2 \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Doppia fenditura

se $L >> d \quad \Rightarrow \quad sen\theta = tg\theta = \frac{x}{L}$



$\theta(\text{rad}) = m\lambda / d$

$x = m\lambda L / d$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

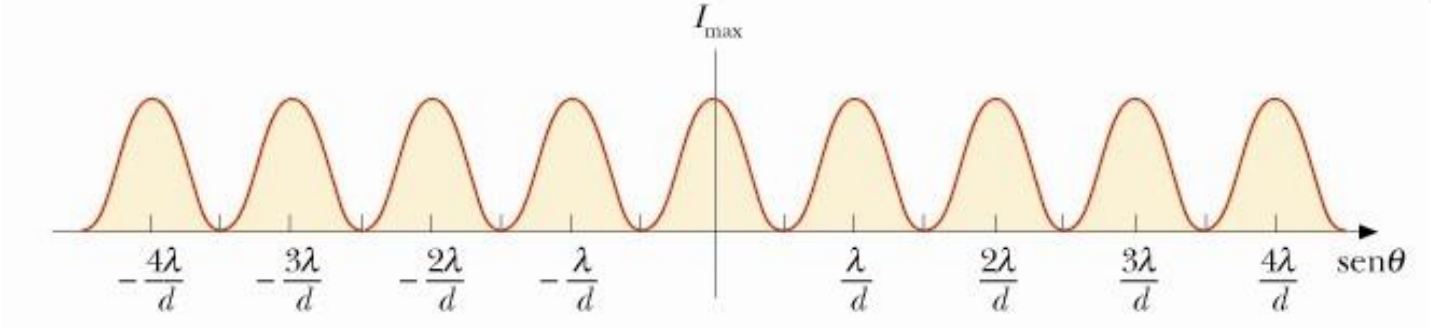
Massimo

Minimo

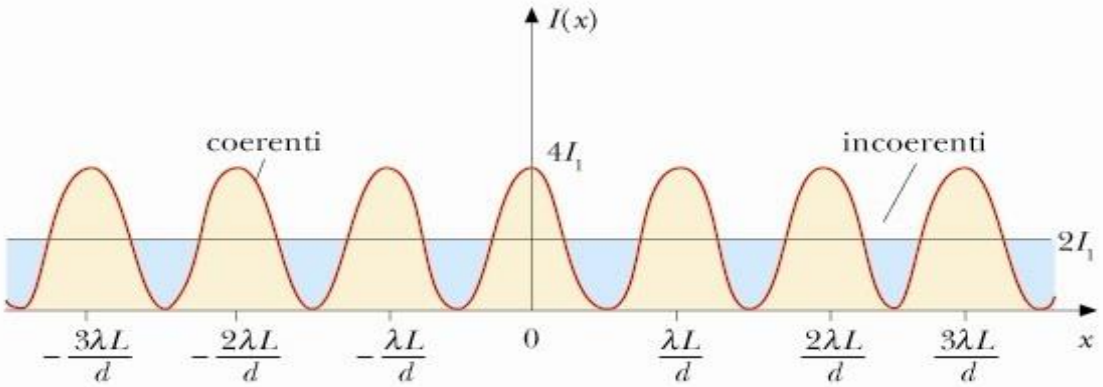
$\theta = (2m+1)\lambda / 2d$

$x = (2m+1)\lambda L / 2d$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



Doppia fenditura



La *frangia centrale è* quella corrispondente ad *m*=0

Si definisce *passo dei massimi* la distanza misurata sullo schermo tra i centri di due frange chiare

$$p = \frac{\lambda L}{d}$$

Nel caso le onde viaggiano in un mezzo con indice di rifrazione *n*, va considerato il percorso ottico

$$n\, d\, sen\theta$$

Massimi

$$\theta = m\lambda / nd$$

$$x = m\lambda L / nd$$

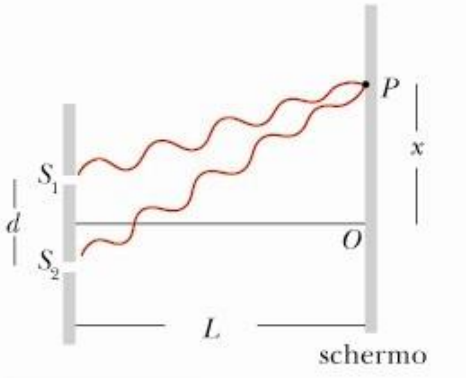
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Minimi

$$\theta = (2m+1)\lambda / 2nd$$

$$x = (2m+1)\lambda L / 2nd$$

Metodo dei fasori



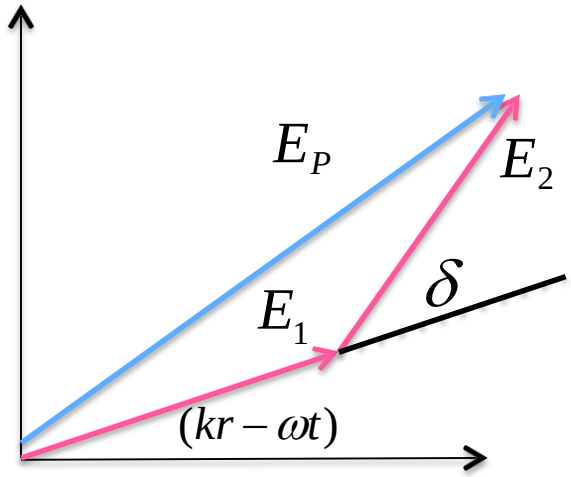
$$E_1(r,t) \approx E_0 \cos(kr - \omega t)$$

$$E_2(r,t) \approx E_0 \cos(kr - \omega t + \delta)$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d\, sen\theta$$

$$\vec{E}_P(x,t) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$(E_P)^2 = (E_0)^2 + (E_0)^2 + 2(E_0)^2 \cos\delta$$



$$I_P = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0 I_0}\cos\delta$$

$$I_P = 2I_0(1 + \cos\delta)$$

Si avrà interferenza costruttiva in corrispondenza di differenza di cammini multipli interi della lunghezza d'onda

$$I_{max} = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0 I_0} = 4I_0$$

Si avrà interferenza distruttiva in corrispondenza di differenza di cammini multipli semi interi della lunghezza d'onda

$$I_{min} = I_0 + I_0 - 2\sqrt{I_0 I_0} = 0$$

Formule di bisezione

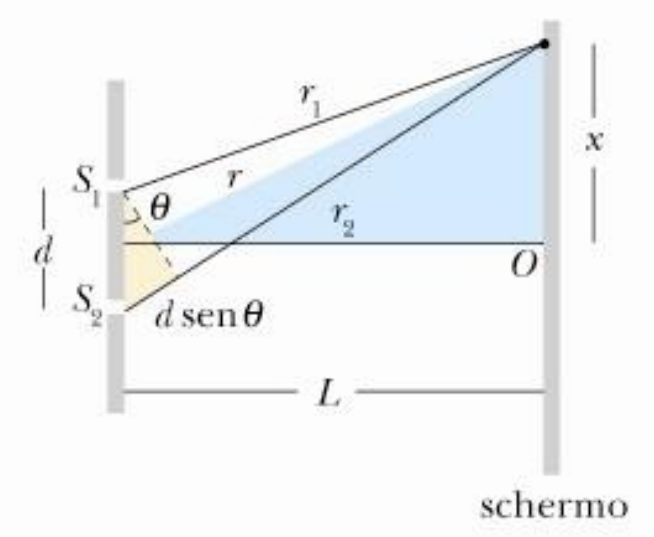
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \\ \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \end{cases}$$

$$I_P = 2I_0\,(1+\cos\delta) \rightarrow I_P = 4I_0\cos^2\delta/2$$

Intensità

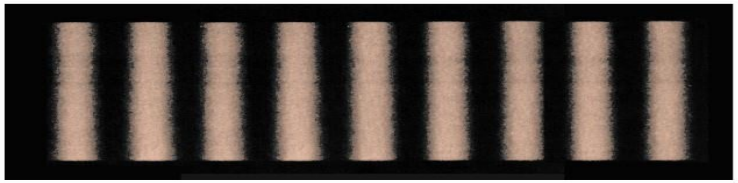


$$I_P = 4I_0 \cos^2 \delta/2 \qquad \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d\,sen\theta$$

$$I_P = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi d\, sen\theta}{\lambda}$$

se $L >> d \quad \Rightarrow \quad sen\theta = tg\theta = \frac{x}{L}$

$$I_P = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi d x}{\lambda L}$$



Per sorgenti incoerenti

$$I_P = 4I_0 < \cos^2 \frac{\pi d x}{\lambda L} >= 4\, I_0 \frac{1}{2} = 2I_0$$

Intensità

Possiamo ottenere i massimi e minimi anche studiando la funzione **intensità**

$$I_P = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi d x}{\lambda L}$$

Si avrà interferenza costruttiva (massimi) per

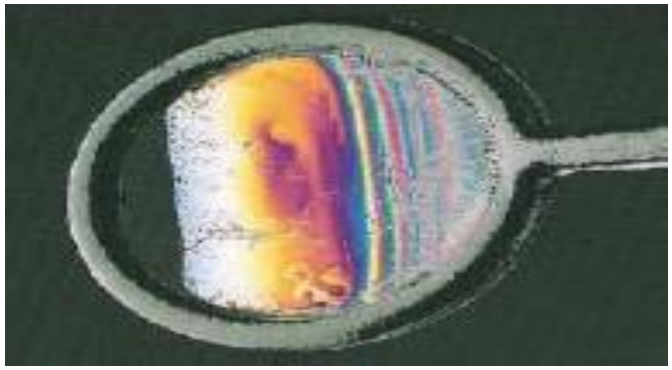
$$\cos^2 \frac{\pi d x}{\lambda L} = 1 \qquad \frac{\pi d x}{\lambda L} = m\pi \qquad x = \frac{m\lambda L}{d}$$

Si avrà interferenza distruttiva (minimi) per

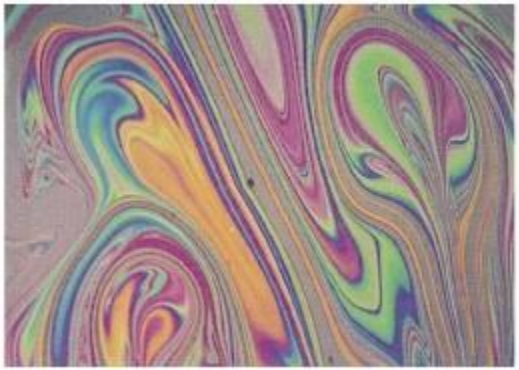
$$\cos^2 \frac{\pi d x}{\lambda L} = 0 \qquad \frac{\pi d x}{\lambda L} = (2m+1)\frac{\pi}{2} \qquad x = \frac{(2m+1)\lambda L}{2d}$$

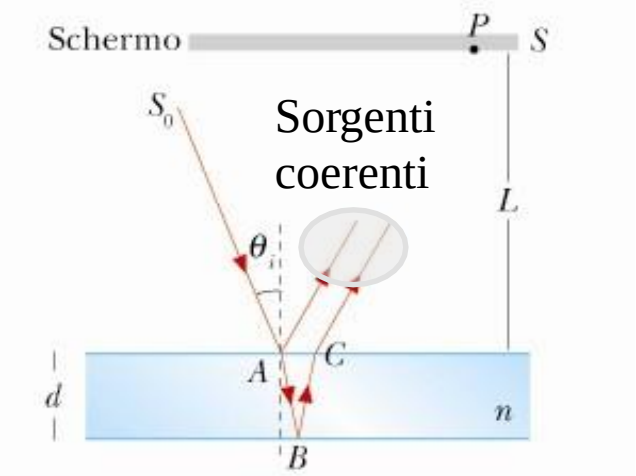
Lamine sottili

Bolla di sapone

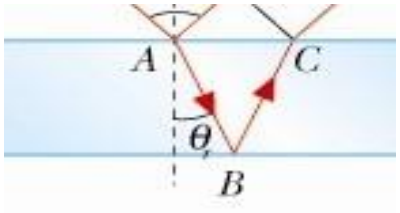


Macchia di olio





Differenza di fase dovuto al cammino ottico

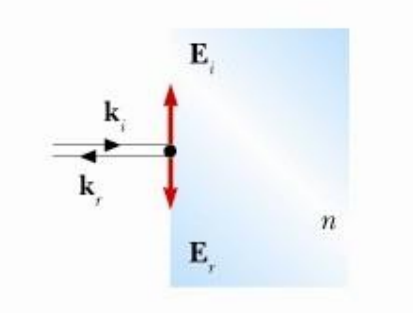


$$\delta = k\,(r_2 - r_1)$$

$$\delta = 2n\,k\,d\cos\theta_r$$

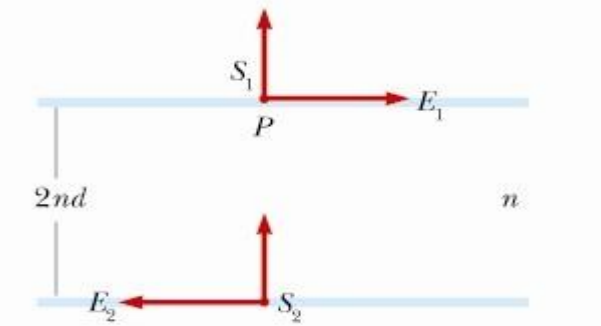
Lamine sottili

Differenza di fase dovuta alla riflessione sulla prima superficie della lamina



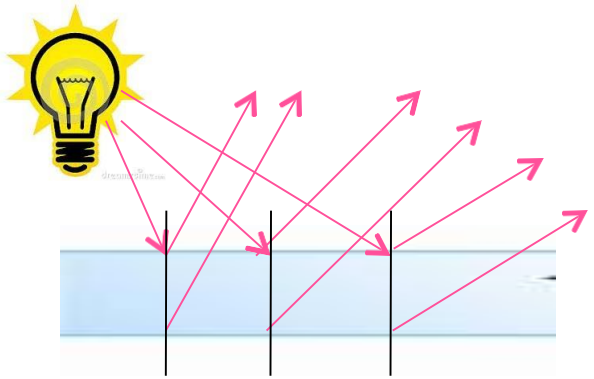
$$\delta = -\pi$$

E' come se si siano due sorgenti virtuali con una differenza di fase

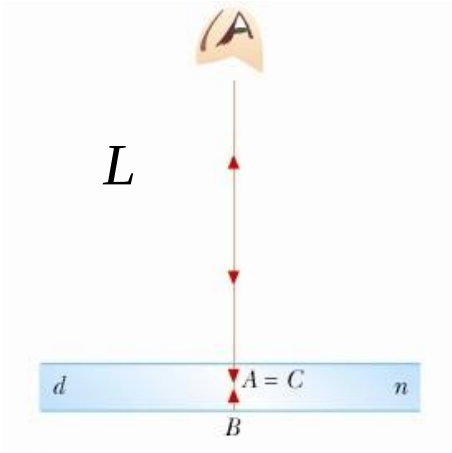


$$\delta = 2n\,k\,d\cos\theta_r - \pi$$

Per sorgenti, tuttavia, estese non si nota nessuna figura di interferenza



Lamine sottili



Per incidenza normale

$$\delta = 2n\,k\,d - \pi \qquad \delta = \frac{4\pi n\,d}{\lambda} - \pi$$

Se lo schermo è a distanza L >> d, si osservano massimi e minimi

Massimi

$$\delta = 2m\pi$$

$$d = (2m+1)\lambda/4n$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots$$

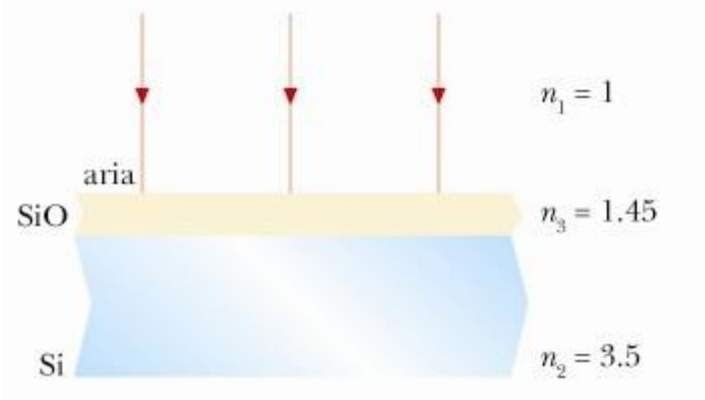
Minimi

$$\delta = (2m+1)\pi$$

$$d = (m+1)\lambda/2n$$

Lo spessore della lamina per osservare interferenza costruttiva deve essere pari a multipli interi dispari di $\lambda/4n$. Lo spessore della lamina per osservare interferenza distruttiva deve essere pari a multipli interi di $\lambda/2n$

Strati antiriflettenti



I raggi riflessi alla superficie superiore e inferiore della lamina di spessore *d* subiscono entrambi uno sfasamento di π. All'osservatore le due onde giungono sfasate per la sola differenza di cammino ottico

$$\delta = 2kn_3 d = \frac{4\pi n_3 d}{\lambda}$$

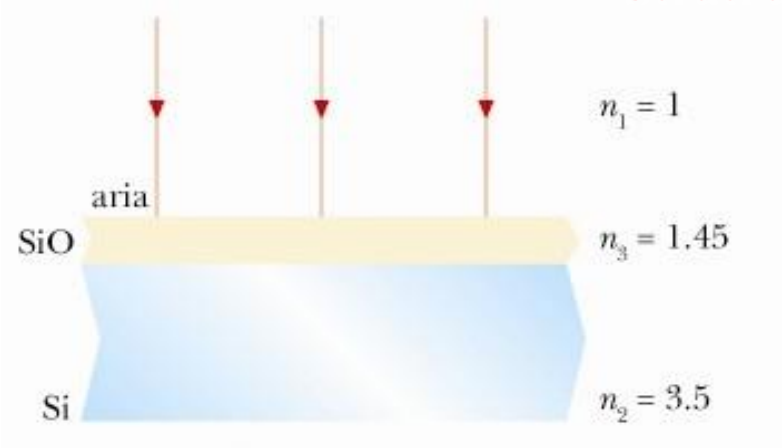
La condizione di minimo è $\delta = (2m+1)\pi$ $\quad d = (2m+1)\lambda / 4n_3$

Spessore minimo dell'ossido (n = 1.45) in grado di produrre riflessone minima per l = 550 nm (massimo dello spettro solare)

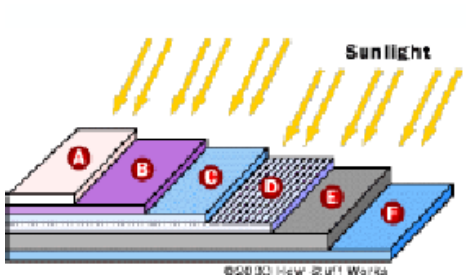
$$d = \lambda / 4n_3$$

$$d = 0.095\ \mu\text{m}$$

Strati antiriflettenti



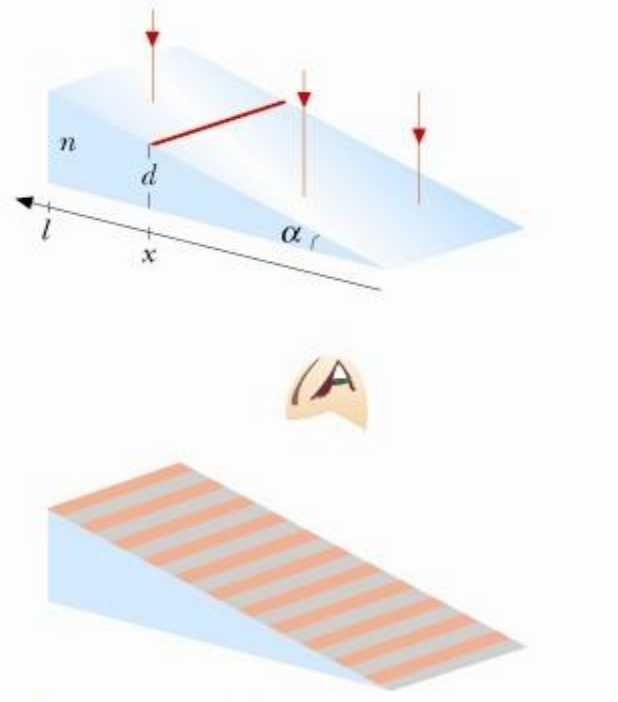
Gli strati antiriflettenti vengono usati in applicazioni particolari come nelle lenti degli obiettivi delle macchine fotografiche, telecamere, e nelle celle solari di silicio dove è necessario produrre riflessione minima per lunghezze d'onda solari in modo da aumentarne l'efficienza



in cui i vari strati sono:
a- superficie esterna di vetro
b- strato antiriflesso
c- griglia di contatto superiore
d- silicio di tipo n
e- silicio di tipo p
f- contatto posteriore

Lamine sottili

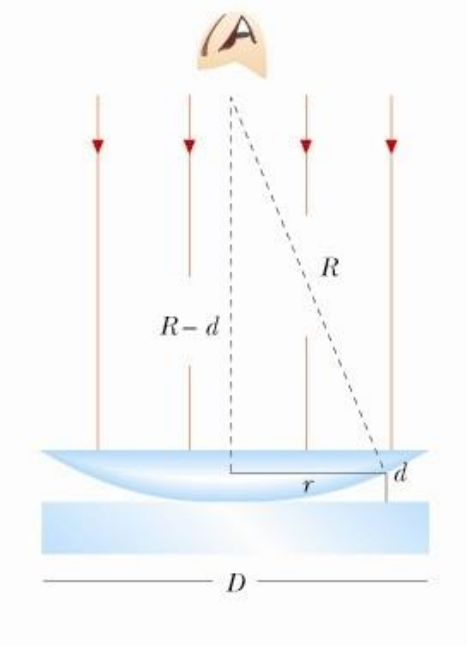
Cuneo sottile

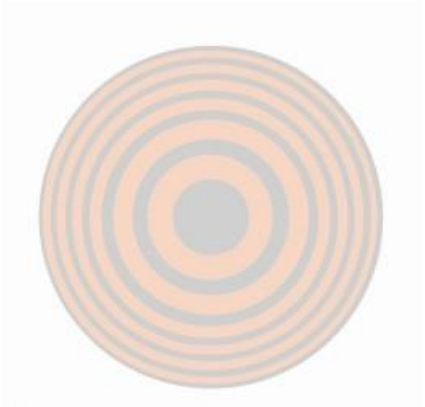


$$x_{max} = (2m+1)\lambda / 4\alpha$$

$$x_{min} = m\lambda / 2n\alpha$$

Anelli di newton

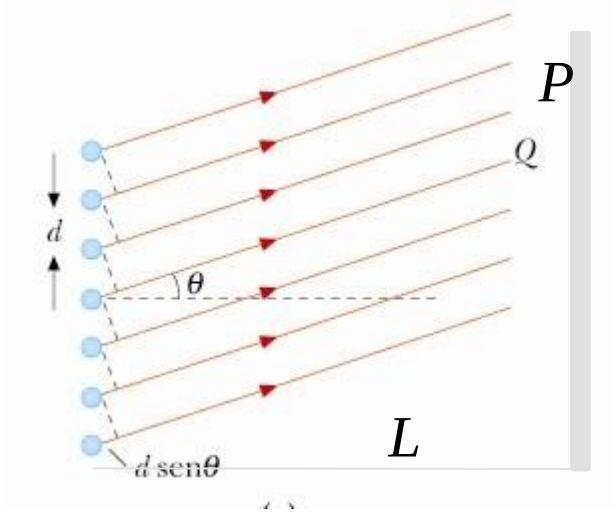




$$r_{max} = \sqrt{(2m+1)R\lambda / 2n}$$

$$r_{min} = \sqrt{mR / n}$$

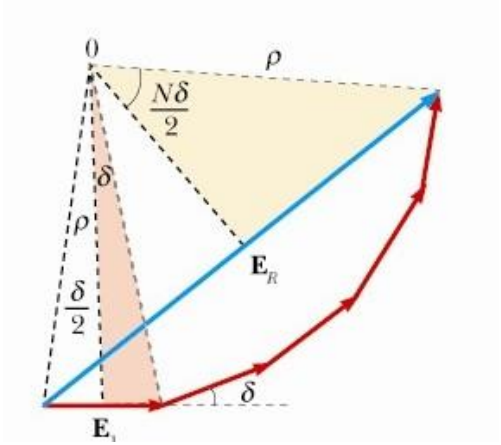
N sorgenti



I cammini delle onde prodotte da ogni fenditura risulteranno essere paralleli ed inclinati di un generico angolo θ rispetto la normale alla linea contenente le sorgenti

$$\delta = kd\,sen\theta = \frac{2\pi}{\lambda} d\,sen\theta \qquad L >> (N\text{-}1)d$$

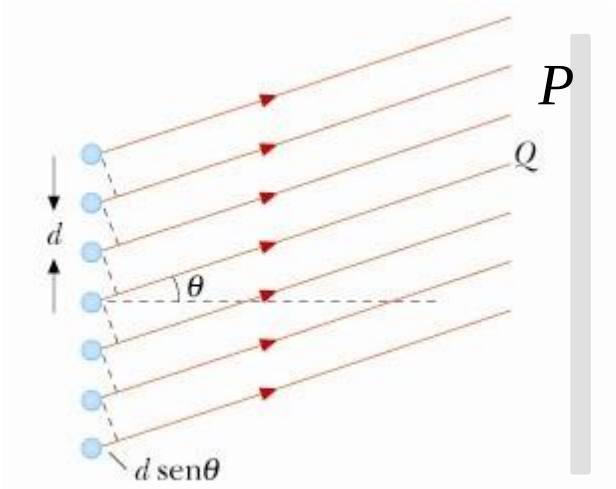
$$E_1 = E_0 e^{i(kr_1 - \omega t)} \qquad E_2 = E_0 e^{i(kr_2 - \omega t)} \qquad \ldots\ldots \qquad E_N = E_0 e^{i(kr_N - \omega t)}$$



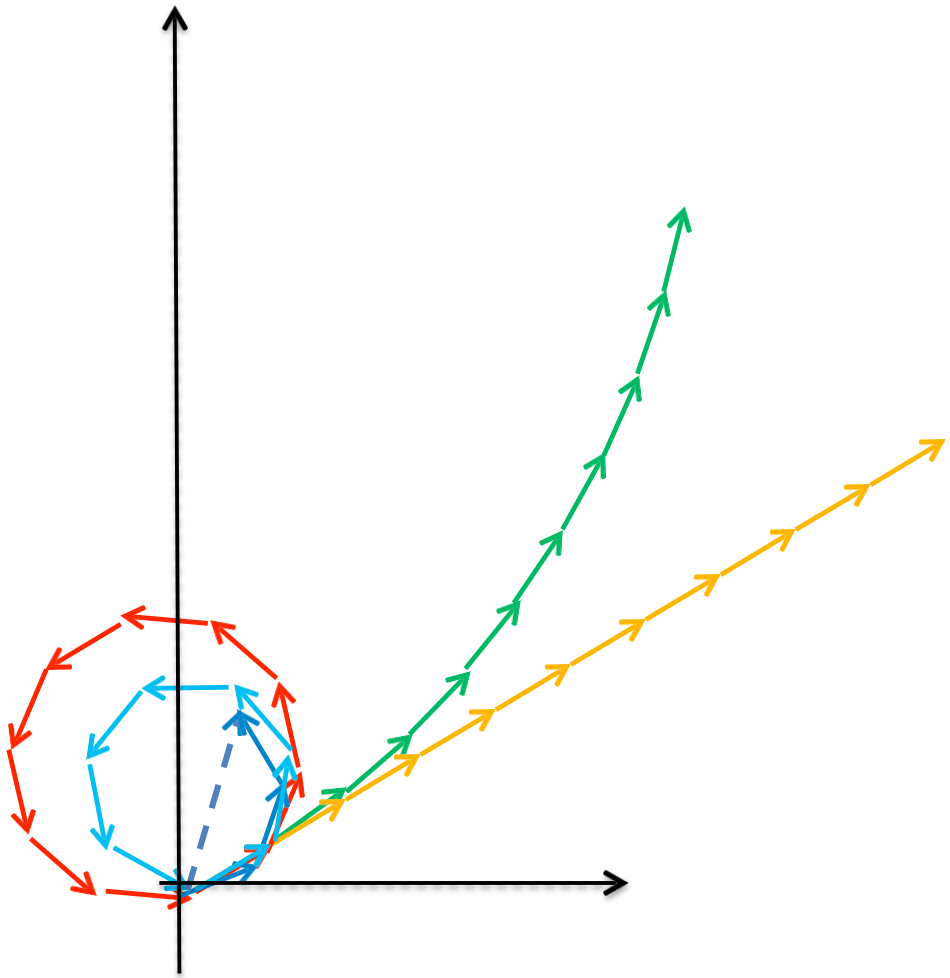
$$E_R = E_0 e^{i(kr_1 - \omega t)} + E_0 e^{i(kr_2 - \omega t)} + \ldots + E_0 e^{i(kr_N - \omega t)}$$

$$\frac{I_R}{I_1} = \left(\frac{sen N\delta/2}{sen \delta/2} \right)^2 \qquad I_R(\theta) = I_1 \left(\frac{sen \frac{N\pi\, dsen\theta}{\lambda}}{sen \frac{\pi dsen\theta}{\lambda}} \right)^2$$

N sorgenti



$$\delta = kd\ sen\theta = \frac{2\pi}{\lambda} d\, sen\theta$$



N sorgenti

$$I_R(\theta) = I_1 \left(\frac{sen\ \frac{N\pi\, d sen\theta}{\lambda}}{sen\ \frac{\pi d sen\theta}{\lambda}} \right)^2$$

Nell'intervallo $0 < \theta < \pi/2$ l'intensità risultante presenta un massimo principale ogni qual volta si annulla il denominatore

Massimi principali

$$sen\ \frac{\pi d sen\theta}{\lambda} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi d sen\theta}{\lambda} = m\pi, \qquad sen\,\theta = m\,\lambda / d$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Quindi

$$I_R(\theta = mass) = I_1 \left(\frac{senN\pi m}{sen\pi m} \right)^2$$

$$I_{max} = N^2 I_1$$

N sorgenti

$$I_R(\theta) = I_1 \left(\frac{sen\ \frac{N\pi\, d sen\theta}{\lambda}}{sen\ \frac{\pi d sen\theta}{\lambda}} \right)^2$$

L'intensità risultante è minima quando si annulla il numeratore di $I_R(\theta)$

Minimi

$$\frac{N\pi d sen\theta}{\lambda} = m'\pi \qquad sen\theta = m'\frac{\lambda}{Nd}$$

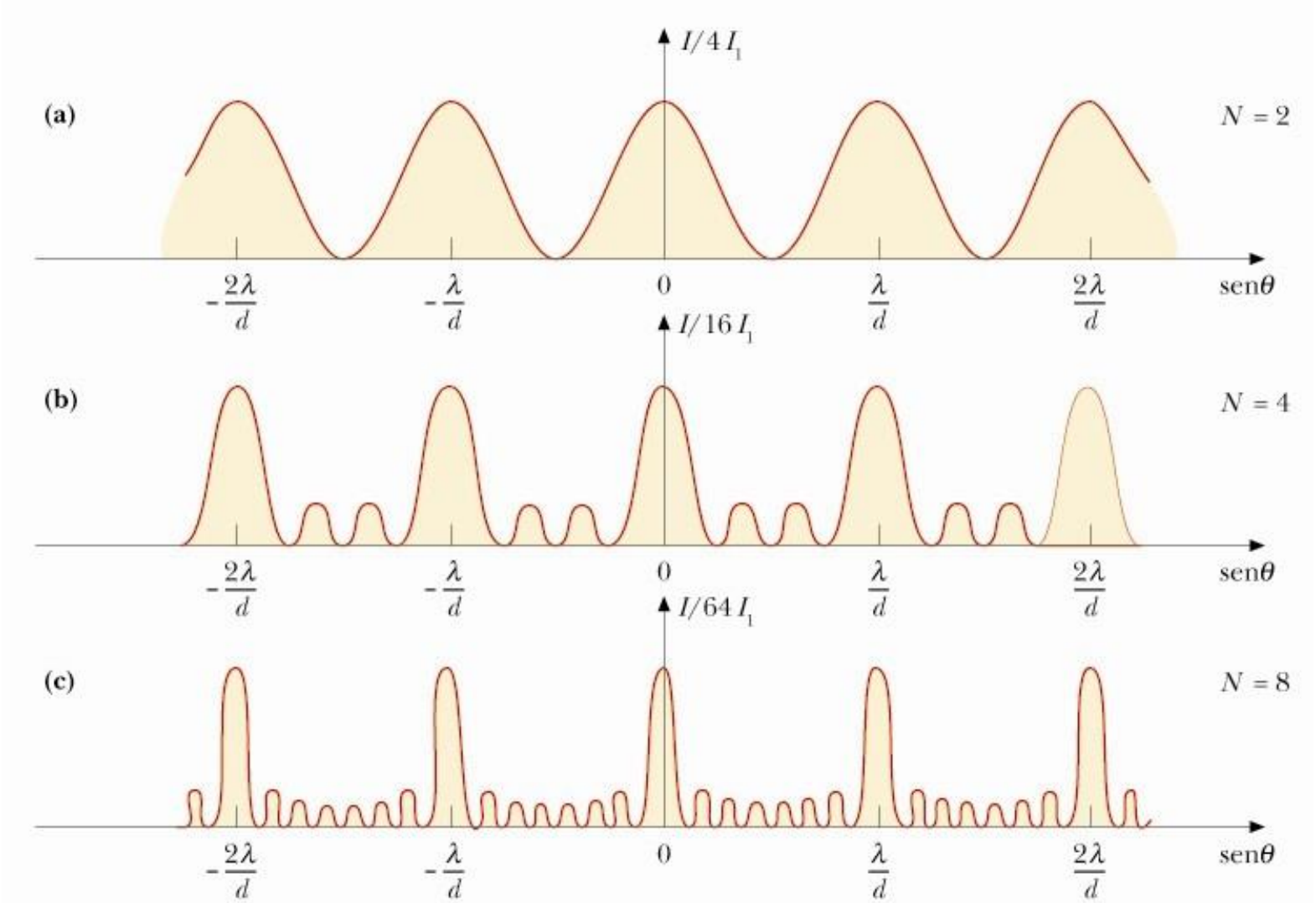
$$m' = 1, 2, ..., N-1, N, N+1, ..., 2N-1, 2N, 2N+1, ...$$

Si esclude m' = 0 perché corrisponde al massimo centrale

Si esclude m' =N, 2N, 3N .. per cui si hanno i massimi principali

Tra due massimi principali l'intensità risultante presenta N-1 minimi d'intensità (I_R=0)

N sorgenti


I/4 I1
(a)
N = 2
-2λ/d
-λ/d
0
λ/d
2λ/d
senθ
I/16 I1
(b)
N = 4
-2λ/d
-λ/d
0
λ/d
2λ/d
senθ
I/64 I1
(c)
N = 8
-2λ/d
-λ/d
0
λ/d
2λ/d
senθ

N sorgenti

$$I_R(\theta) = I_1 \left(\frac{sen\ \frac{N\pi\, dsen\theta}{\lambda}}{sen\ \frac{\pi dsen\theta}{\lambda}} \right)^2$$

Poiché la funzione $I_R(\theta)$ è sempre positiva si deduce che tra due minimi deve un esistere massimo secondario. I massimi secondari si ottengono quando il numeratore di $I_R(\theta)$ vale 1

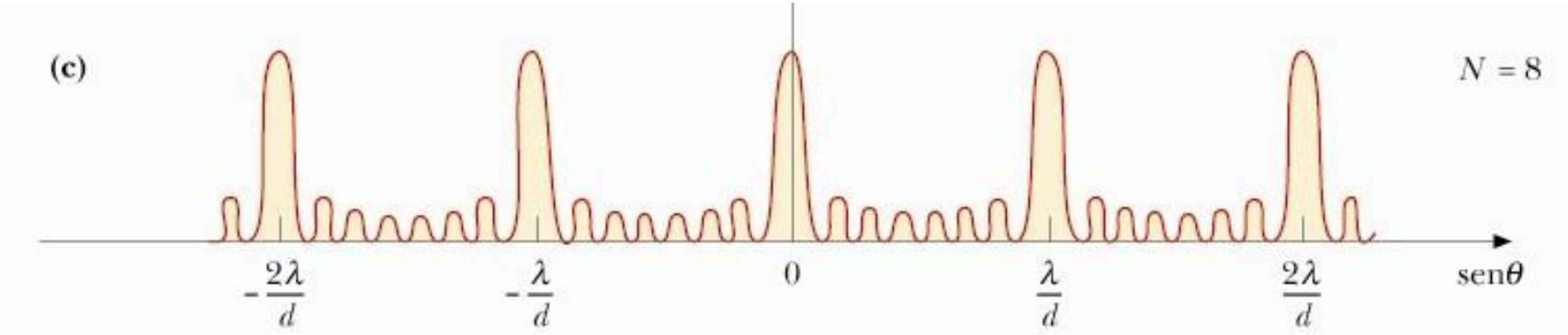
Massimi secondari

$$\frac{N\pi dsen\,\theta}{\lambda} = (2m'' + 1)\frac{\pi}{2} \qquad sen\,\theta = (2m'' + 1)\frac{\lambda}{2Nd}$$

$$m' = 1, 2, \ldots, N-2,\quad N-1,\quad N,\quad N+1, \ldots, 2N-1,\quad 2N,\quad 2N+1, \ldots$$

Si esclude m" = 0 perché cade nella regione del massimo centrale
Si esclude m" = N-1 perché cade nella regione del primo massimo
Si esclude m" = N perché cade nella regione del primo massimo

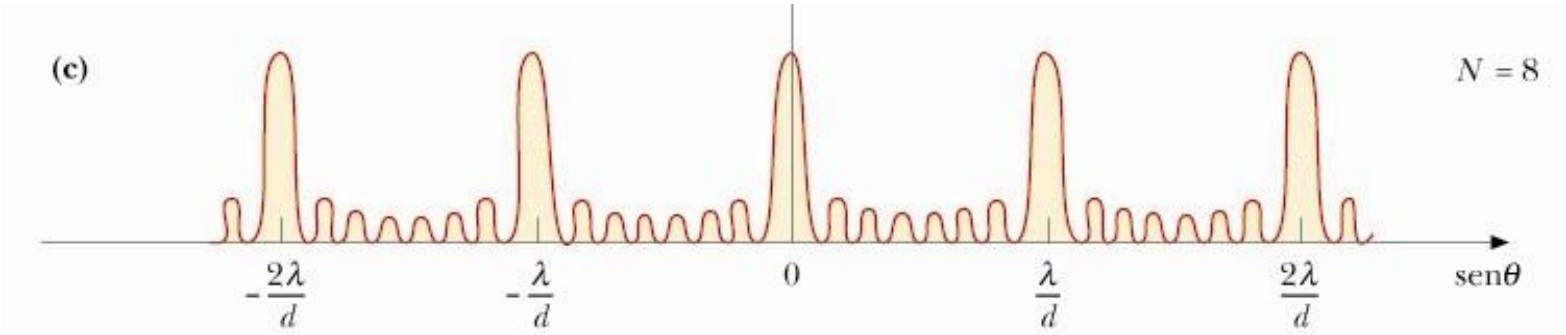
N sorgenti



Tra due massimi principali l'intensità risultante presenta N-2 massimi secondari di intensità pari a

$$I_m = \frac{I_1}{\left[sen \frac{(2m''+1)\pi}{2N} \right]^2} \qquad I_m = \frac{I_{Max}}{N^2 \left[sen \frac{(2m''+1)\pi}{2N} \right]^2}$$

N sorgenti



L'ampiezza angolare dei massimi principali diminuisce all'aumentare di N.
Si può calcolare come distanza fra due minimi adiacente al massimo

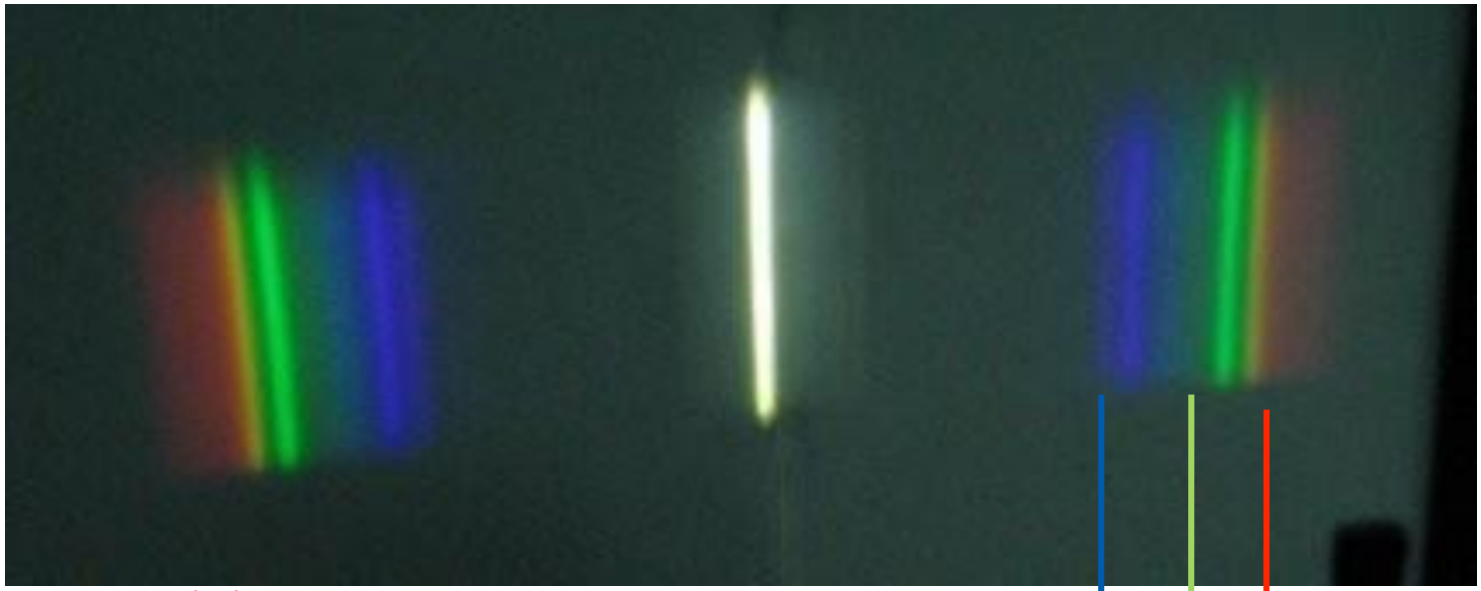
$$sen\,\theta = m'\frac{\lambda}{Nd} \xrightarrow{m'=1} \Delta(sen\,\theta) = \frac{2\lambda}{Nd}$$

All'aumentare del numero di sorgenti l'ampiezza angolare diventa più piccola

$$\Delta(sen\,\theta) = \frac{2\lambda}{Nd} = \cos\theta\,\Delta\theta = \frac{2\lambda}{Nd} \qquad \Delta\theta = \frac{2\lambda}{\cos\theta\, Nd}$$

N sorgenti

Massimi principali $\quad sen\theta = m\frac{\lambda}{d} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



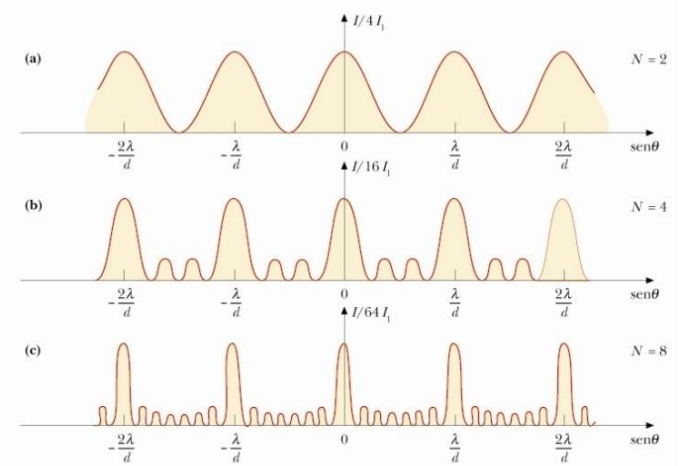
$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{\cos\theta\, Nd}$$

$$sen\theta = 0$$

$$sen\theta = \frac{\lambda_1}{d}$$

$$sen\theta = \frac{\lambda_2}{d}$$

$$sen\theta = \frac{\lambda_3}{d}$$



Principali caratteristiche dell'interferenza prodotta da N sorgenti coerenti:

•La posizione dei massimi principali è determinata dal rapporto λ/d e non da N

•l'intensità dei massimi principali cresce con N secondo la legge $I_R=I_{max}=N^2I_1$

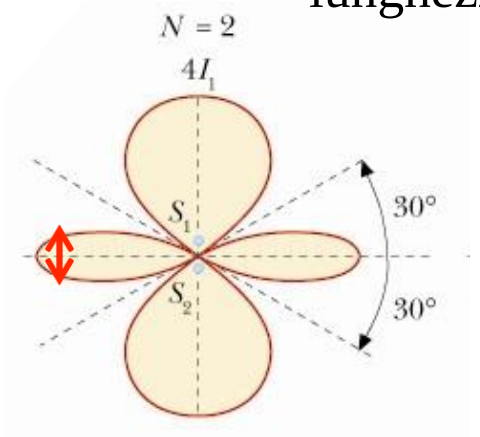
•La distanza tra due minimi adiacenti al massimo vale $2\lambda/Nd$ e diminuisce all'aumentare del numero delle sorgenti

•L'ampiezza angolare dei massimi principali diminuisce all'aumentare di N

•Tra due massimi principali vi sono $N-1$ minimi e $N-2$ massimi secondari

N= 2

Interferenza di due antenne che emettono in fase alla lunghezza d'onda λ con potenza P_0



$d = \lambda$

Massimi per $sen\theta = m\frac{\lambda}{d}, m = 0,1$

$\theta = 0^o, \quad \theta = 90^o$

Minimi per $sen\theta = (2m+1)\lambda/2d$ $\theta = 30^o$

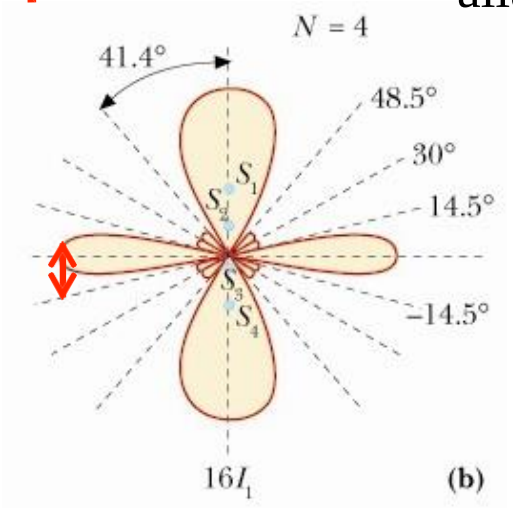
Ad una certa distanza r ciascuna antenna emette con $I_0 = P_0 / 4\pi r^2$

e l'intensità totale vale $I_P = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi d\, sen\theta}{\lambda} = 4I_0 \cos^2(\pi\, sen\theta)$

Inoltre $E = \sqrt{2Z_0 I}$

N= 4

Interferenza di quattro antenne che emettono in fase alla lunghezza d'onda λ con potenza P_0



d = λ

Massimi principali ancora per

$$sen\theta = m\frac{\lambda}{d},\ m = 0,1$$

$$\theta = 0^o,\quad \theta = 90^o$$

Nei massimi principale $I_P = 16I_0$

Minimi per $sen\theta = m'\frac{\lambda}{Nd} = m'\frac{1}{N}$ $m' = 1,2,3,4$

$$\theta = 14.5^o,\ 30.0^o,\ 48.5^o$$

N= 4

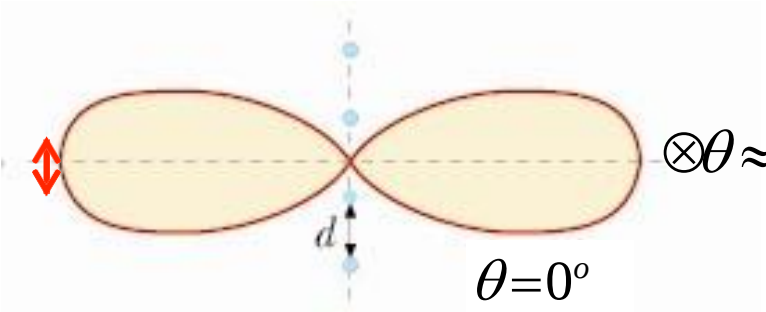
Interferenza di quattro antenne che emettono in fase alla lunghezza d'onda λ, ma separate da una distanza $d = \lambda/4$

Massimi principali per

$$sen\theta = m\frac{\lambda}{d} \qquad \lambda > d$$

Solo $m = 0$ e quindi $\theta = 0^o$

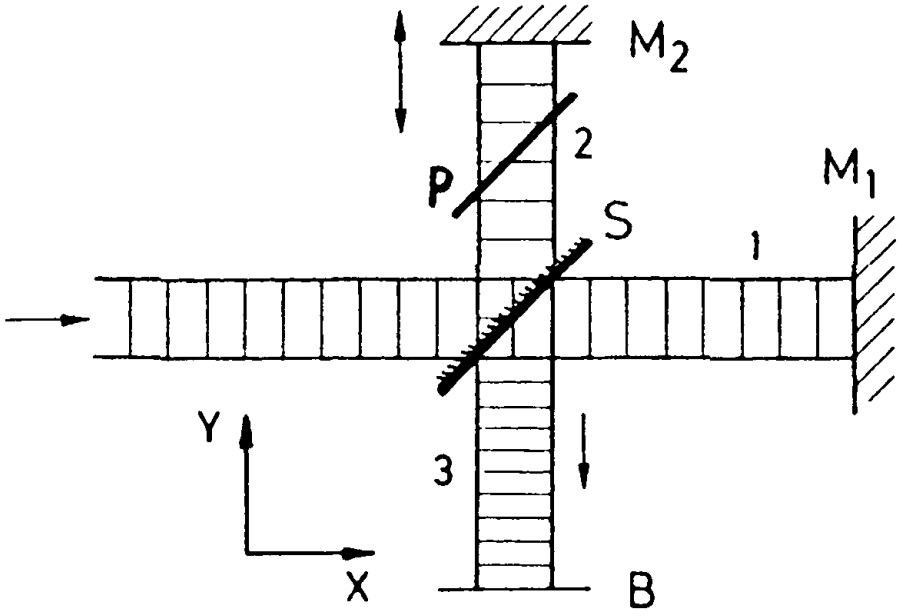
Tutta la potenza è concentrata in una direzione

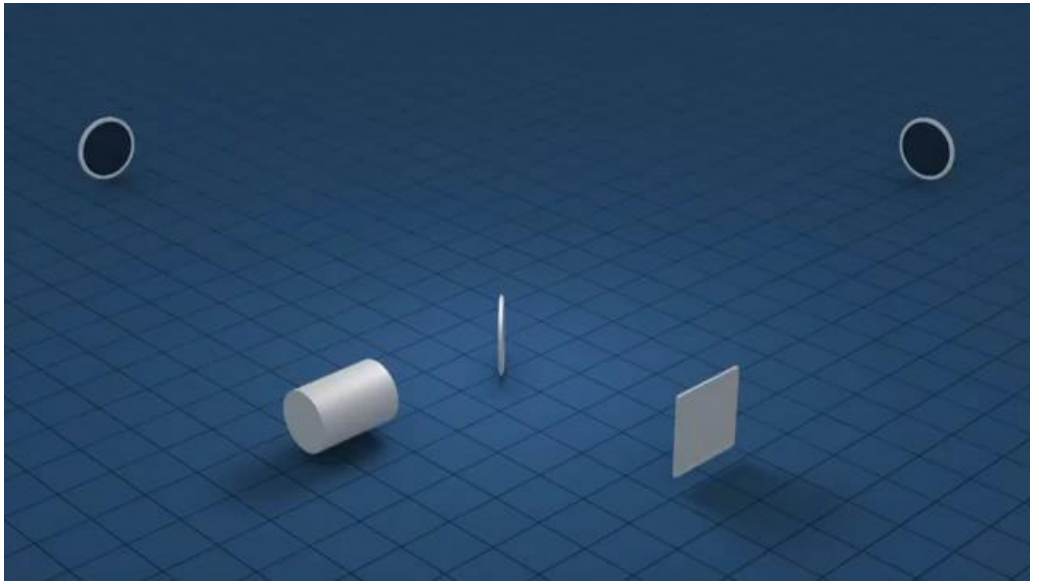


$$\otimes\theta \approx \frac{2\lambda}{Nd} = 2\ (rad)$$

Inteferometro di Michelson

Il principio base di un interferometro di Michelson è illustrato in Figura:





Un'onda piana incidente è divisa in due onde parziali da un beam-splitter S (con riflettività R e trasmittanza T):

$$E = A_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

$$E_1 = A_1 e^{i(\omega t - kx + \phi_1)}$$

$$E_2 = A_2 e^{i(\omega t - ky + \phi_2)}$$

Se il beam-splitter ha assorbimento trascurabile, allora $R + T = 1$ e le ampiezza A_1 e A_2 sono determinate dalle relazioni:

$$\begin{cases} A_1 = \sqrt{R} A_0 \\ A_0^2 = A_1^2 + A_2^2 \end{cases}$$

Dopo essere riflesse agli specchi piani M_1 e M_2, i due fasci parziali vengono sovrapposti nel piano di osservazione B. L'ampiezza delle due onde nel piano B sarà: $\sqrt{RT} A_0$ poiché ogni onda sarà trasmessa e riflessa una volta dalla superficie del beam-splitter S. La differenza di fase tra le due onde sarà:

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2(SM_1 - SM_2) + \Delta\phi$$

dove $\Delta\phi$ tiene conto di una differenza di fase aggiuntiva che potrebbe essere causata dalle riflessione.

L'ampiezza complessa totale del campo di radiazione nel piano B sarà:

$$E = \sqrt{RT}A_0 e^{i(\omega t+\phi_0)}\left(1+e^{i\phi}\right)$$

Il rivelatore ottico posto in B non riuscirà a seguire le oscillazioni rapide del campo di radiazione alla frequenza ω e pertanto misurerà un'intensità media nel tempo $\bar{I}$ pari a:

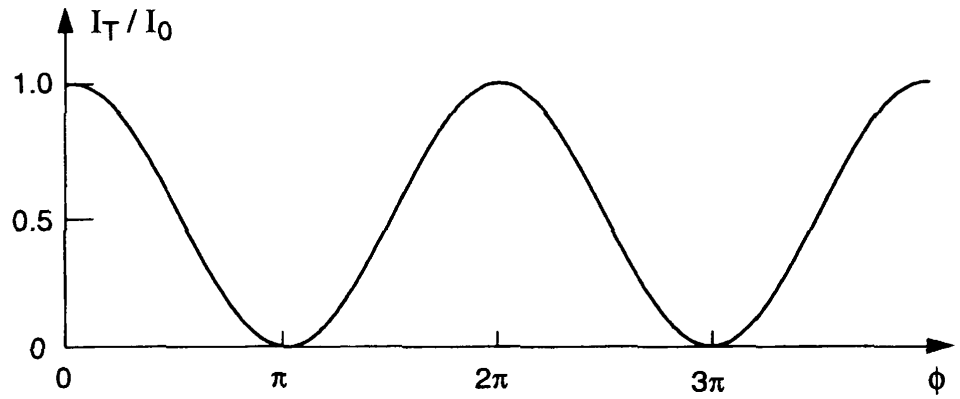
$$\bar{I} = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 A_0^2 RT\left(1+e^{i\phi}\right)\left(1+e^{-i\phi}\right) = c\varepsilon_0 A_0^2 RT(1+cos\phi) = \frac{1}{2}I_0(1+cos\phi)$$

con $R = T = \frac{1}{2}$ e $I_0 = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 A_0^2$

Se lo specchio M_2 è montato su un carrello e si muove di una quantità Δy, la differenza di cammino ottico cambia di $\Delta s = 2\Delta y$ e la differenza di fase di $2\pi\frac{\Delta s}{\lambda} = 4\pi\frac{\Delta y}{\lambda}$.

Inteferometro di Michelson

La figura seguente mostra l'intensità $I_T(\phi)$ nel piano B in funzione di ϕ per un'onda monocromatica incidente.



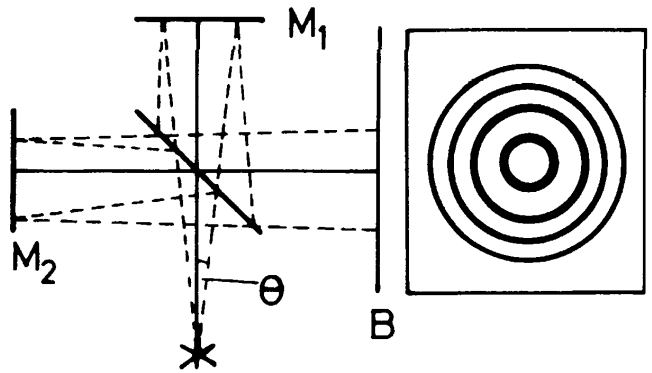
Per i massimi d'intensità a $\phi = 2m\pi$ $(m = 0,1,2 \dots)$ l'intensità trasmessa I_T è uguale all'intensità incidente I_0. , che vuol dire che la trasmissione dell'interferometro è $T_I = 1$ per $\phi = 2m\pi$.

Nei punti di minimo a $\phi = (2m + 1)\pi$, l'intensità trasmessa è 0, che vuol dire che l'onda piana incidente è tutta riflessa indietro alla sorgente.

Questo ci permette di dire che un interferometro può essere usato o come filtro spettrale per la luce trasmessa o come riflettore spettrale.

Inteferometro di Michelson

Per fasci di luce divergenti, la differenza di cammino tra due onde dipende dall'angolo di inclinazione:

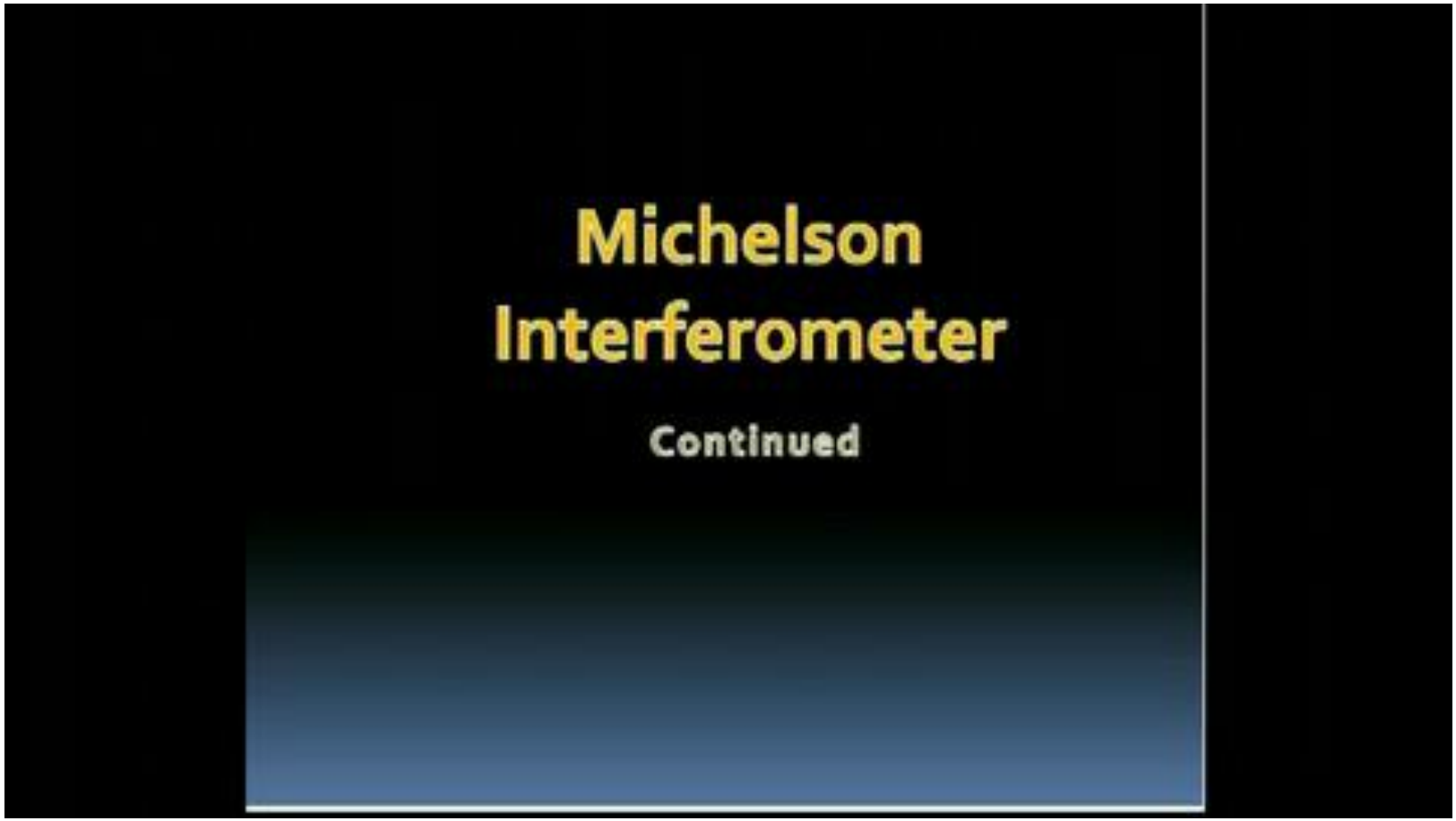


Nel piano B si formerà una figura di interferenza a frange circolari, concentriche all'asse di simmetria del sistema. Muovendo lo specchio M_2, li diametro degli anelli cambierà. In ogni caso, l'intensità distribuita su una piccola apertura seguirà approssimativamente la funzione $I_T(\phi)$ della figura precedente.

L'interferometro di Michelson può essere usato anche per effettuare misure assolute della lunghezza d'onda, contando il numero N di massimi in B quando lo specchio M_2 si muove lungo una distanza nota Δy. In tal caso, la lunghezza d'onda λ sarà data da:

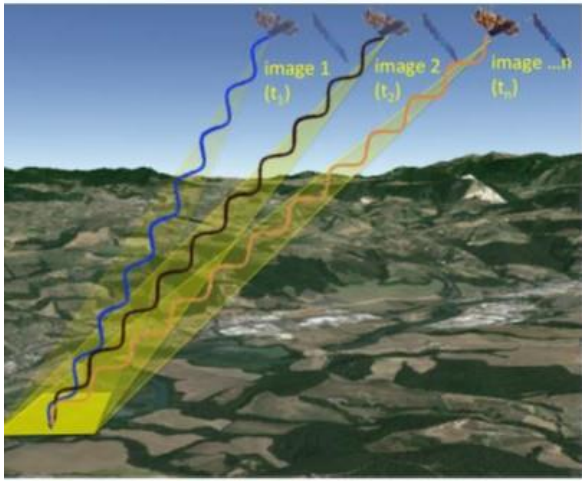
$$N \cdot 2\pi = 4\pi \frac{\Delta y}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\Delta y}{N}$$

Inteferometro di Michelson

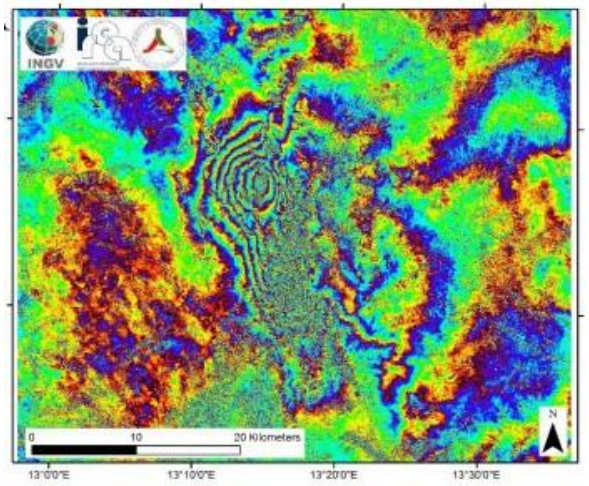


Interferometria satellitare con radar, Syntetic Aperture Radar, SAR)

Il segnale elettromagnetico emesso dal satellite, viene “riflesso” dalla superficie terrestre e catturato dal sensore.

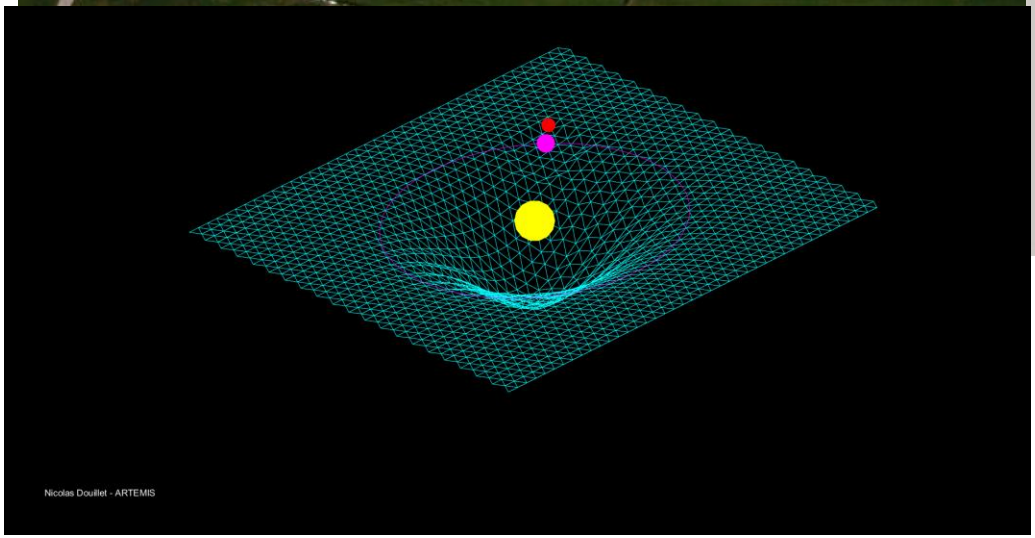


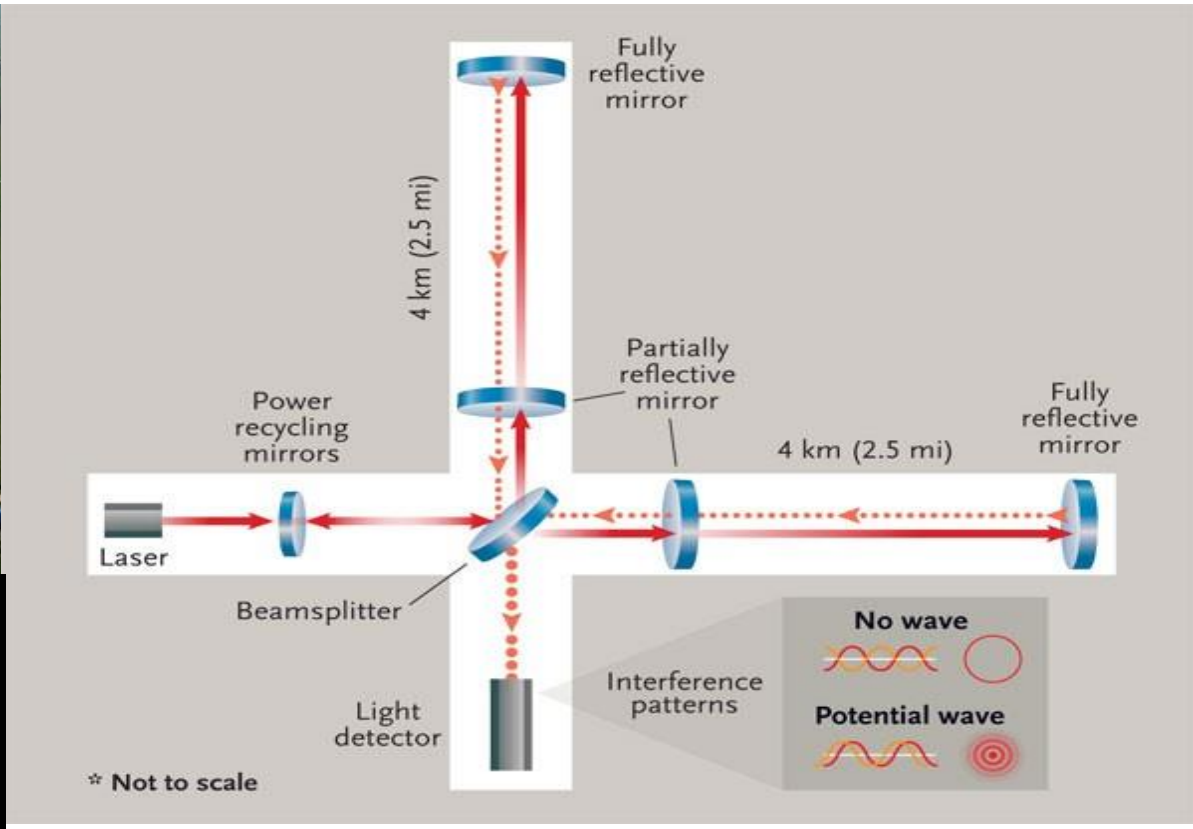
Una coppia di immagini radar acquisite dal satellite dalla medesima posizione producono un interferogramma, cioè una mappa di spostamento espressa in termini di differenze di fase, tra le due immagini radar.



Ogni ciclo, o frangia, rappresenta uno spostamento della superficie terrestre lungo la linea di vista del satellite di mezza lunghezza d’onda del segnale emesso.

Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO)





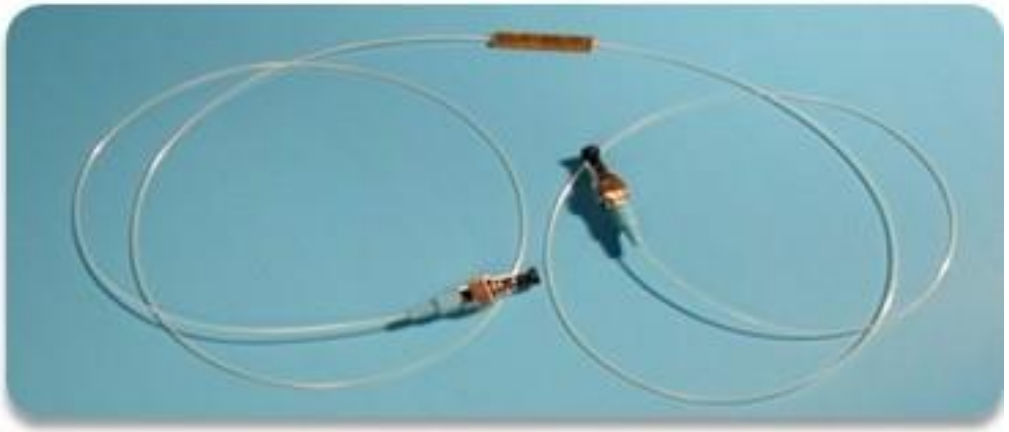
$$\frac{\Delta L}{L} \approx 10^{-18}$$

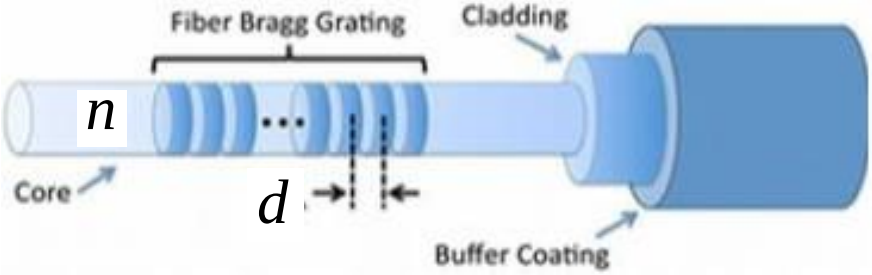
Fibre ottiche

Alta velocità di trasmissione

Assenza d'interferenze elettro-magnetiche e quasi totale assenza di rumore

Il segnale che viaggia nelle fibre ottiche per telecomunicazione è centrato intorno a 1550 nanometri (1.55 micron). Questa lunghezza corrisponde ad un minimo dell'attenuazione nella propagazione del segnale nella fibra. E' una lunghezza d'onda non visibile trattandosi di un infrarosso vicino.





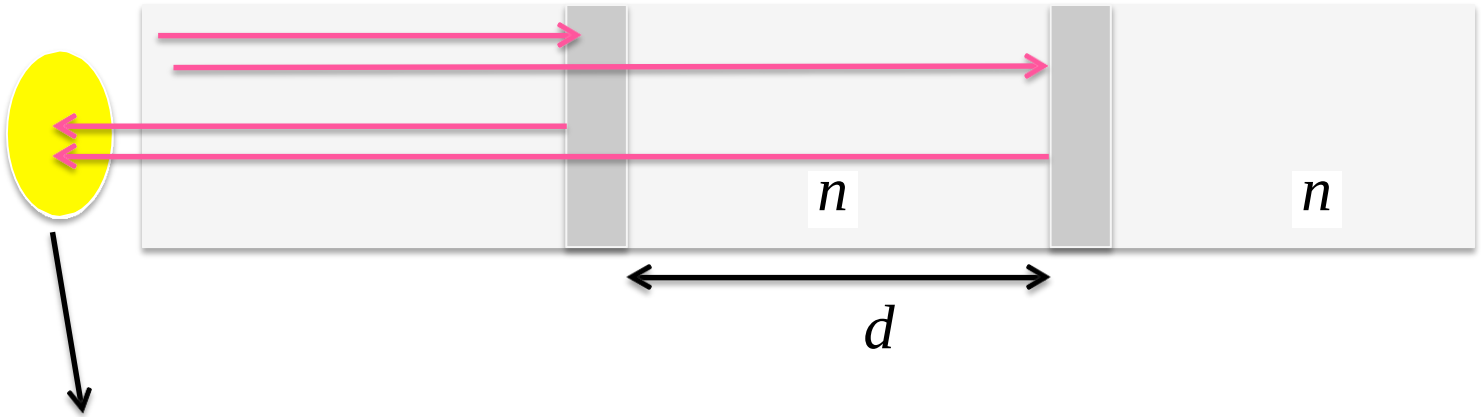
Fiber Bragg Grating

Nella parte più interna di una fibra, viene realizzata una variazione periodica e piccolissima dell'indice di rifrazione. Il periodo di questa variazione è circa 0.5 micron. La lunghezza della zona trattata è solitamente di 1 cm e quindi risulta costituita da circa 20000 cambiamenti di indice di rifrazione.

Reticolo di Bragg

Nella zona con indice di rifrazione *n* viene riflessa la lunghezza d'onda

$$\lambda_B = 2nd$$



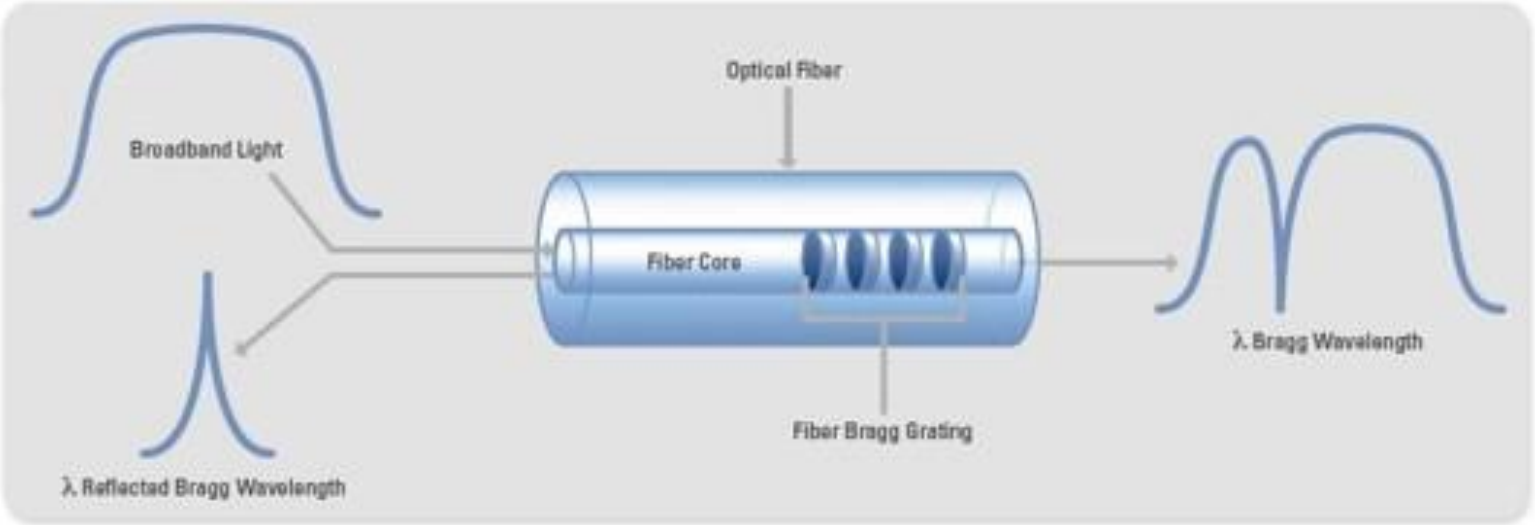
Interferenza costruttiva se

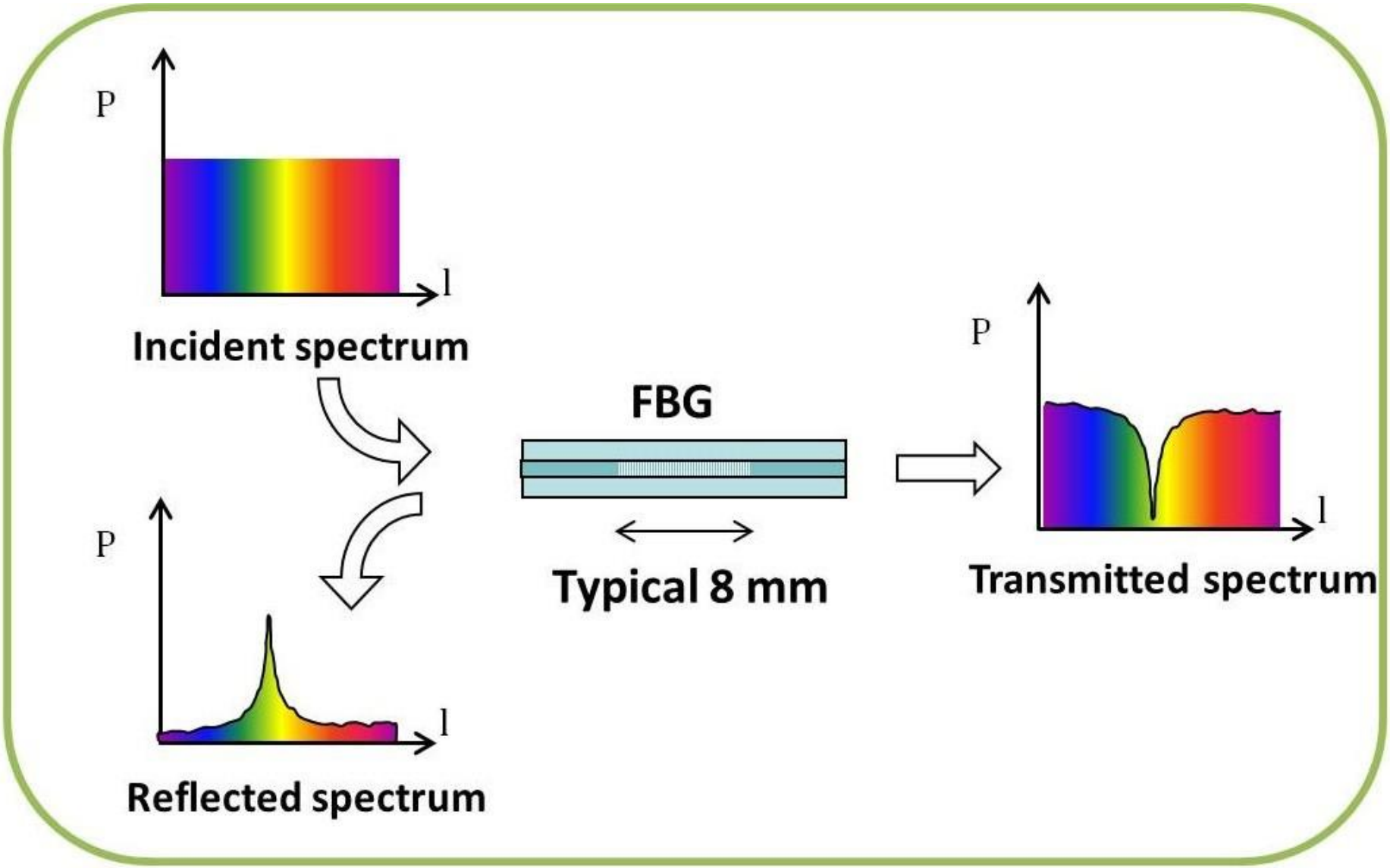
$$2nd = m\lambda, \qquad m = 1, 2, ...$$

Per $m = 1$

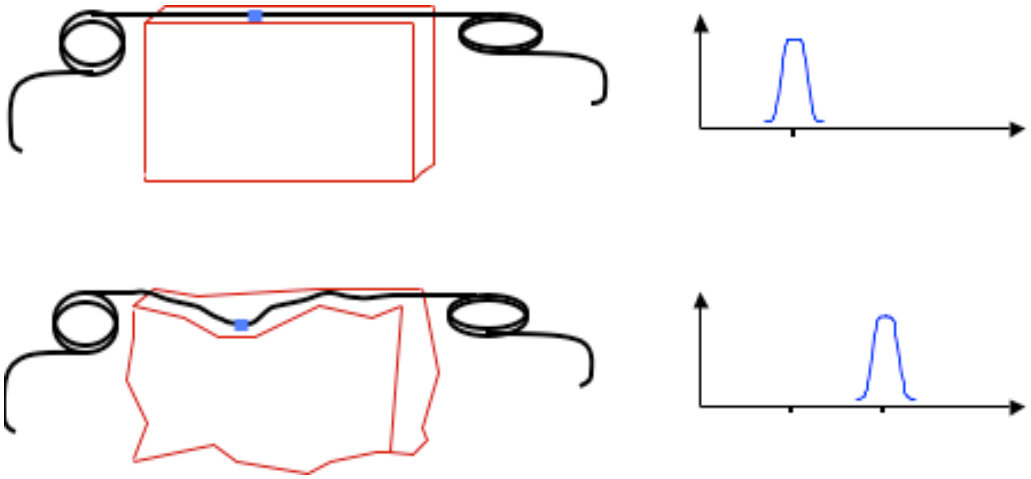
$$\lambda_B = 2nd$$

Quando il segnale viaggia nella fibra arrivato nella zona del reticolo di Bragg può, a seconda della sua frequenza essere trasmesso, essere riflesso all'indietro o uscire dalla fibra. Le FBG dunque possono agire come filtri e selezionare una particolare frequenza presente sul segnale ed estrarla (riflessione indietro) dalle altre.




P
l
Incident spectrum
FBG
Typical 8 mm
P
l
Transmitted spectrum
P
l
Reflected spectrum

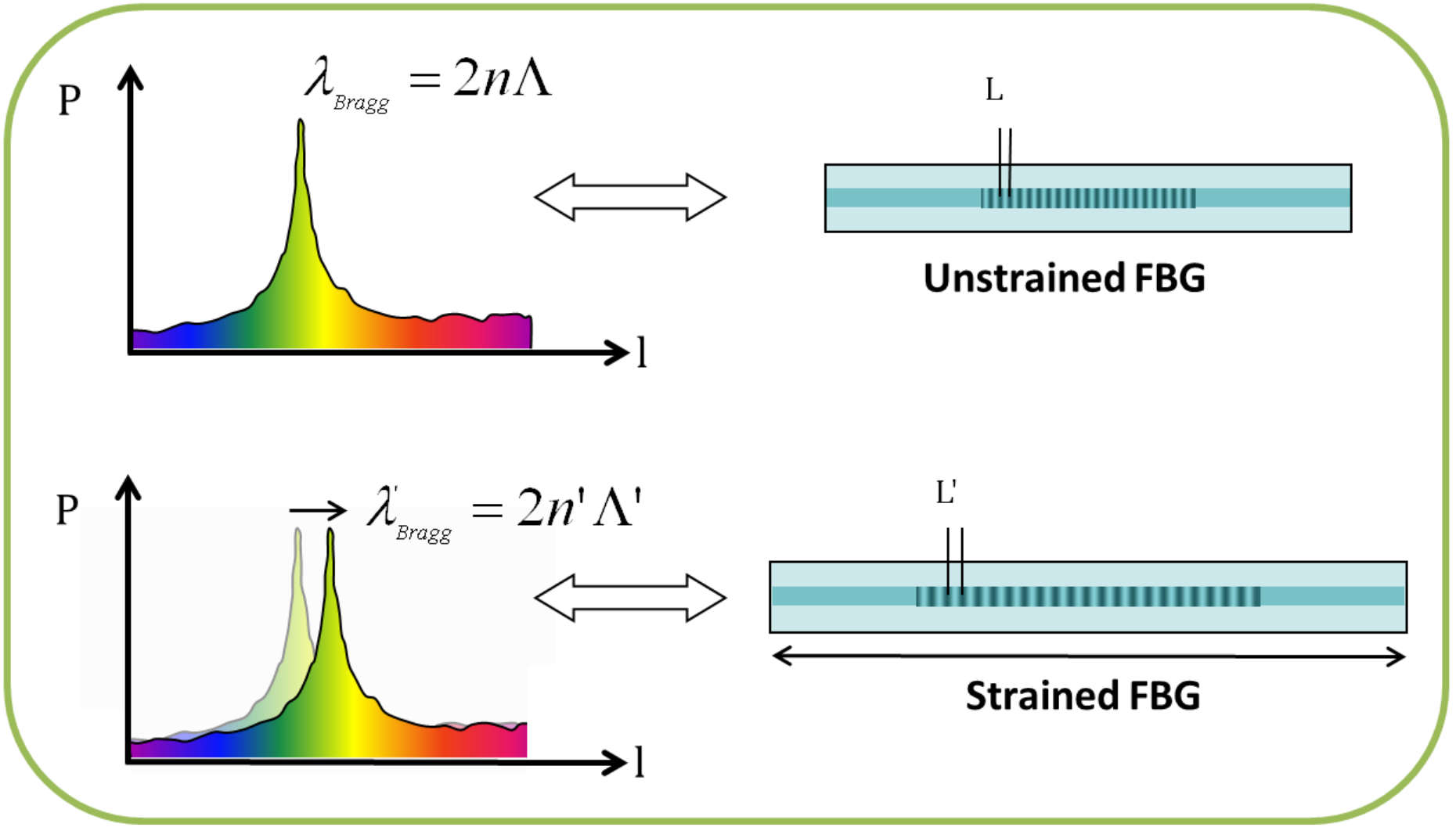
Una fibra con reticolo di Bragg puòi essere utilizzata come sensore (FBG) per misurare le deformazioni e conseguentemente gli sforzi delle strutture dove essa è incollata o inserita. Se la parte della fibra con il reticolo è incollata o inserita in una struttura, la deformazione della stessa comporterà una deformazione del reticolo e, quindi, un cambiamento della lunghezza d'onda riflessa

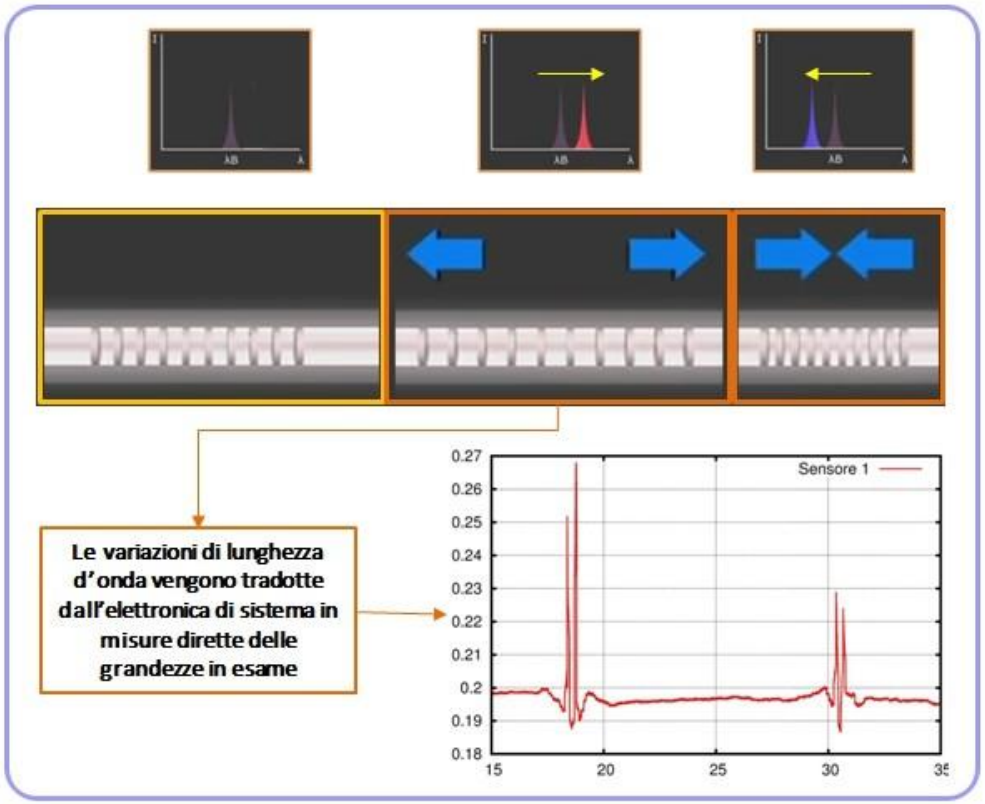


Estensione/Compressione della fibra – Il reticolo cambia la sua geometria e la diffrazione generata è caratterizzata da una lunghezza d'onda della luce variata rispetto a quella centrale caratteristica dello specifico sensore.

Applicazioni: ingegneria civile, aereonautica, misure di posizione

Interferenza





I sensori FBG sono anche sensibili alla temperatura ΔT che provoca un cambiamento nella lunghezza d'onda di Bragg, $\Delta\lambda_B$. La traslazione relativa della lunghezza d'onda di Bragg, $\Delta\lambda_B / \lambda_B$, a causa di una variazione di temperatura è data approssimativamente da:

$$\frac{\Delta\lambda_B}{\lambda_B} = \alpha\Delta T$$

Il coefficiente α dipende dalla fibra