Elementi di Circuito

- I circuiti elettrici sono costituiti da fili conduttori, generatori, resistori, condensatori e altri elementi di circuito collegati tra loro.

- Si suppone che gli elementi di circuito ideali, se non sono resistori, abbiano resistenza interna nulla.

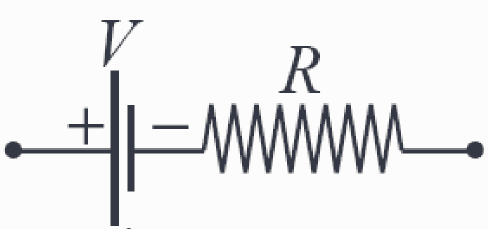
Un filo conduttore ideale ha resistenza nulla (come se fosse superconduttore), così come un generatore ideale o un condensatore ideale hanno resistenza interna nulla.

- *Al contrario, gli elementi di circuito reali hanno sempre una resistenza non nulla (a meno che non si tratti di fili superconduttori).*

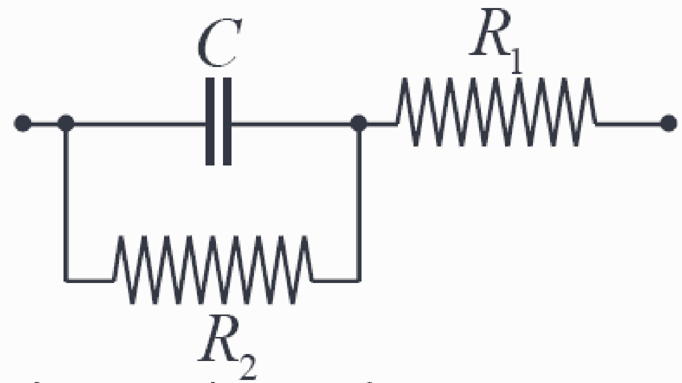
- *Tuttavia gli elementi di circuito reali possono essere spesso schematizzati utilizzando elementi ideali.*

Per esempio spesso si può schematizzare un elemento reale come un elemento ideale collegato in serie a una resistenza ideale.

schema di filo conduttore reale



schema di generatore reale



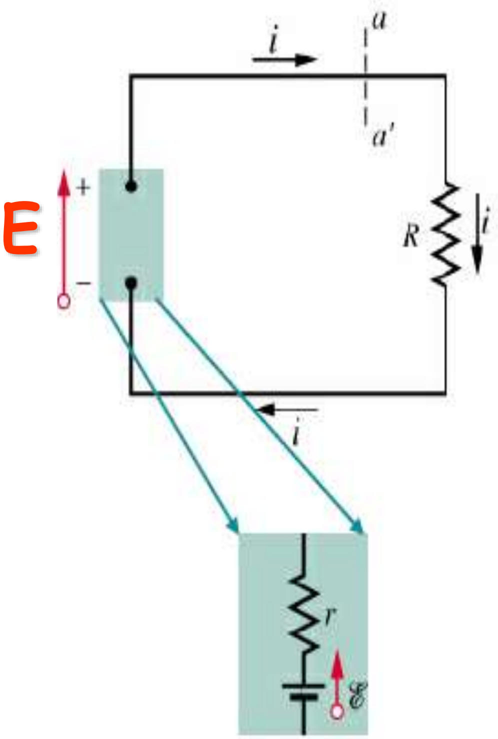
schema di condensatore reale

Generatori di Forza Elettromotrice

F.E.M.

Per mantenere una corrente in un conduttore occorre ***un dispositivo*** *che, compiendo del lavoro sui portatori di carica,* ***mantiene una differenza di potenziale costante*** *nel circuito. Questo dispositivo viene chiamato* ***generatore di f.e.m*** *ed è capace di generare una forza elettromotrice (f.e.m.)* **E.**

Un generatore di fem e' un qualunque dispositivo capace di convertire qualche altra forma di energia in lavoro contro il campo elettrico (pompa di cariche).

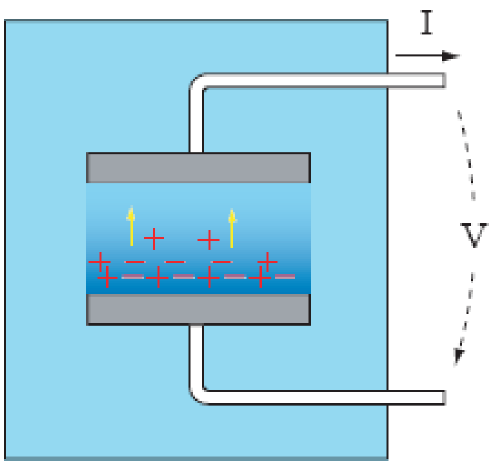


Esempi comuni sono la batteria, in cui il lavoro e' svolto dalle reazioni chimiche, le celle fotovoltaiche (luce solare), celle a combustibile, dinamo… Tutti, benché differenti, compiono lavoro sui portatori di carica per mantenere costante da ddp. (I generatori di fem reali hanno una piccola resistenza interna)

Esempi di Generatori F.E.M.

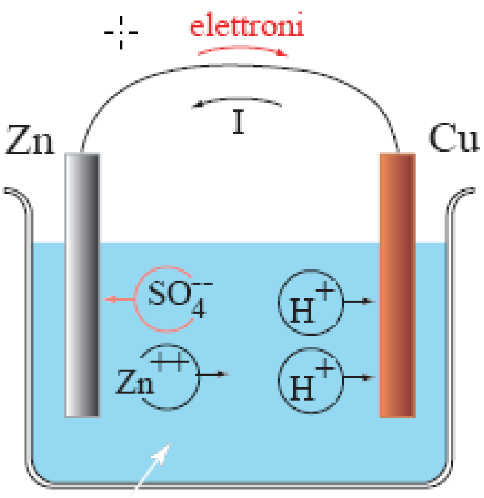
Schema di cella chimica

La soluzione di elettrolita contiene, con concentrazione maggiore in basso, ioni positivi e negativi.
La mobilità degli ioni positivi è maggiore.



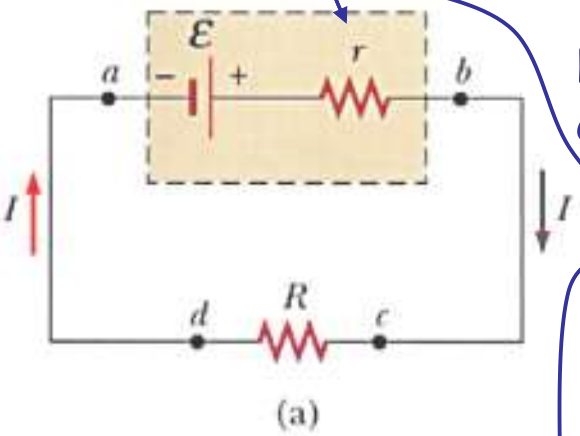
Pila di Volta

(Non reversibile.
Perde velocemente di efficacia per effetti di polarizzazione sull'elettrodo di rame)



Lavoro, energia e F.E.M.

Il generatore mantiene una d.d.p. maggiore sul polo con carica + e la f.e.m è rappresentata da una freccia che va dal - al +.

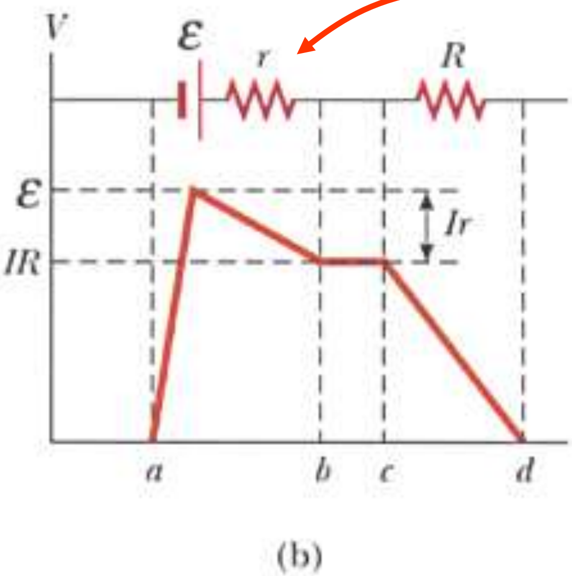


(a)

Definiamo come f.e.m. del generatore il lavoro per unita di carica ovvero:

$$\mathcal{E} = \frac{dL}{dq}$$

la cui unità di misura è il Volt



(b)

Nei generatori di f.e.m. ideali non si hanno resistenze interne che ostacolano il movimento di carica da un polo all'altro. Nella realtà invece qualunque batteria ha una resistenza interna dovuta agli ostacoli interni alla batteria. **Indicheremo per questi generatori reali la presenza della resistenza interna collocandola in serie ad un generatore ideale.**

Calcolo della corrente in circuiti

Metodo della conservazione dell'energia

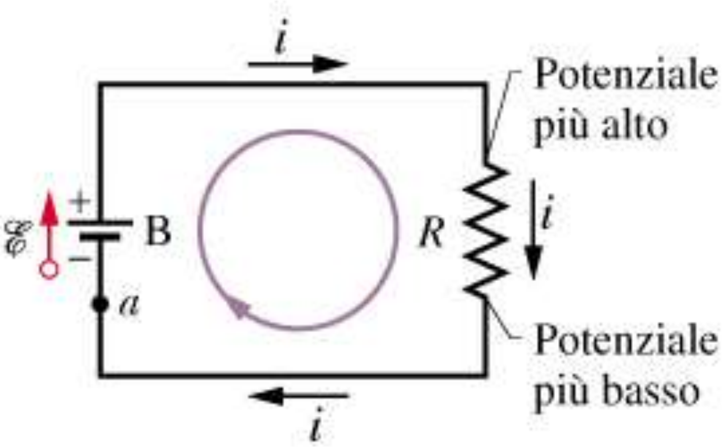
Un dispositivo che muove una carica dq in un circuito compie una lavoro pari a

$$dL = \mathcal{E} \cdot dq$$

Ovvero

$$\mathcal{E} \cdot i \cdot dt = i^2 \cdot R \cdot dt$$

In base al principio di conservazione dell'energia, il lavoro fatto è pari all'energia dissipata sulla resistenza per effetto Joule, per cui



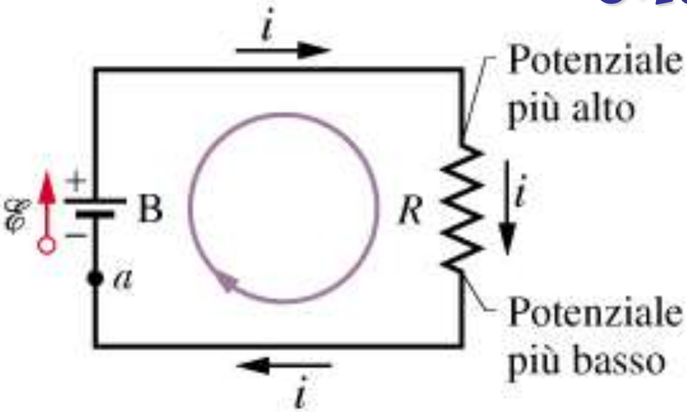
$$dL = \mathcal{E} \cdot i \cdot dt$$

$$\boxed{\mathcal{E} = i \cdot R}$$

La quantità $i \cdot R$ è l'energia trasferita dalla batteria alle cariche in movimento

Calcolo della corrente in circuiti

Metodo del Potenziale



Partendo da un qualunque punto del circuito e **facendo un giro completo** (un percorso chiuso di collegamenti tra elementi elettrici si chiama maglia) si deve trovare che **la somma delle d.d.p. deve essere nulla.**

Legge delle maglie: la somma algebrica delle differenze di potenziale in un circuito chiuso in un giro completo è nulla (seconda legge di Kirchhoff)

Applicando questa procedura partendo dal polo negativo (indicato con A) con verso orario (il risultato non cambia cambiando il verso di percorrenza) abbiamo che

$$\boxed{V_A + \mathcal{E} - Ri = V_A \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = Ri}$$

Regola della resistenza: se si passa attraverso una resistenza nel verso della corrente la variazione di potenziale è *-i·R*; nel verso opposto è invece i·R

Regola della f.e.m: se si passa attraverso un generatore di f.e.m. ideale nella direzione della freccia della f.e.m (ovvero dal polo – al polo + internamente al generatore) la variazione di potenziale è $+\mathcal{E}$, nella direzione opposta invece e - $\mathcal{E}$

Altri circuiti a maglia singola

Applichiamo quanto detto al circuito in figura nel quale il generatore di f.e.m. è con resistenza interna r vediamo quale è il suo effetto.

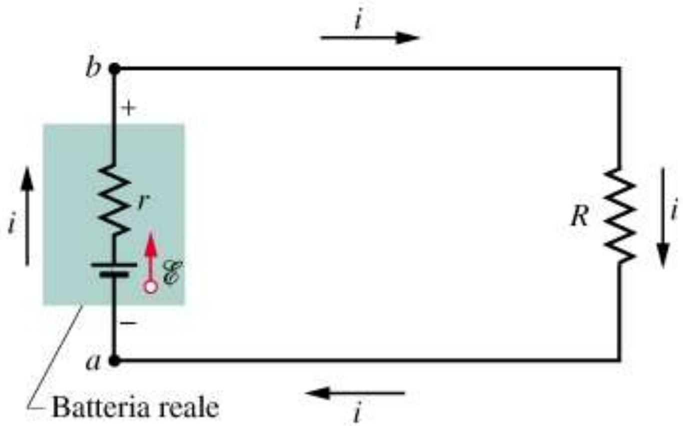
Applichiamo la legge delle maglie e otteniamo

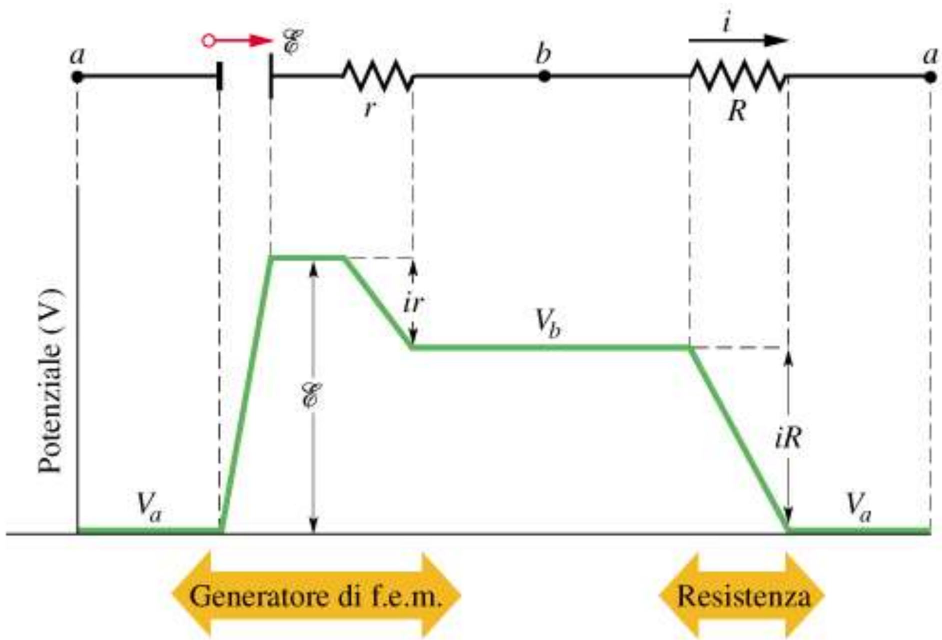
$$\mathcal{E} - i \cdot r - i \cdot R = 0$$

$$\boxed{i = \frac{\mathcal{E}}{r + R}}$$

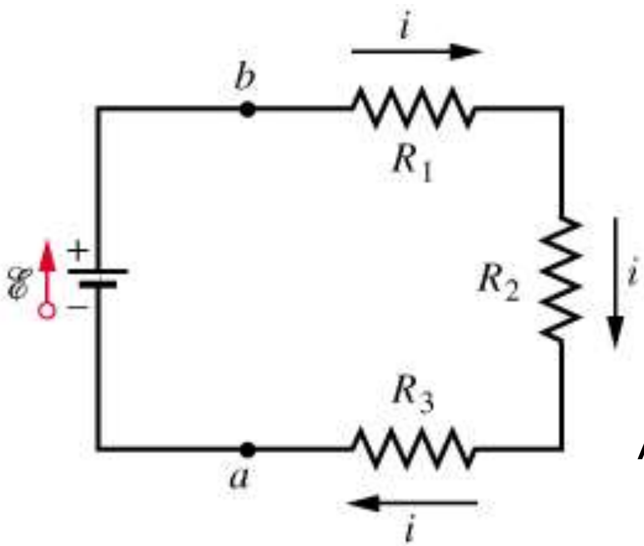
nel caso in cui la resistenza interna non c'è abbiamo la semplice relazione

$$r = 0 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R}$$





Resistenze in serie



(a)

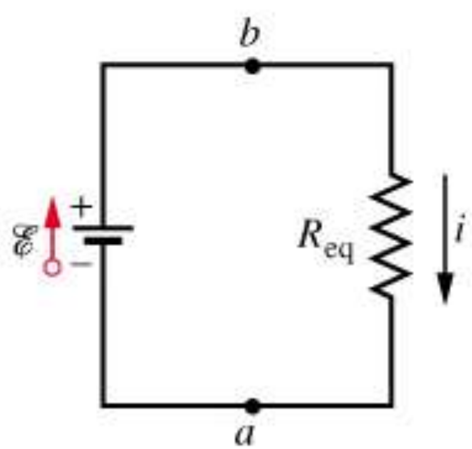
Applicando una d.d.p. alle estremità delle resistenze in serie **esse saranno attraversate dalla stessa corrente**, non potendoci essere accumulo di carica in un punto e la somma delle d.d.p. ai capi di ognuna di esse è la d.d.p. di tutta la catena

Ai capi delle tre resistenze, per la legge di Ohm, si avrà:

$$V_1 = R_1 i \quad V_2 = R_2 i \quad V_3 = R_3 i$$

ovvero $\mathcal{E} = V_1 + V_2 + V_3 = \left(R_1 + R_2 + R_3\right) \cdot i$

Legge delle maglie: la somma algebrica delle d.d.p. rilevate su un circuito chiuso è nulla



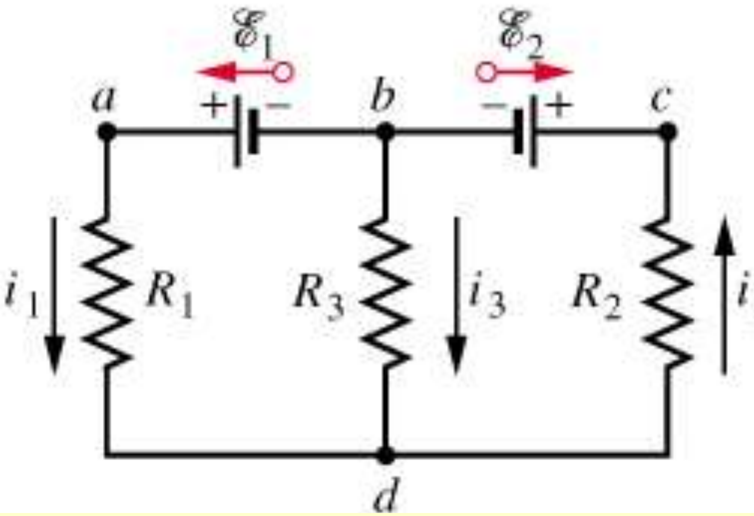
(b)

La resistenza equivalente di più resistenze in serie in una maglia e' la somma algebrica delle resistenze.

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

in generale si ha: $\boxed{R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i}$

Circuiti a più maglie



Nei circuiti a più maglie identifichiamo i **nodi** che sono **i punti del circuito nel quale convergono almeno 3 tratti di conduttore** differenti, e i **rami** che sono **tratti di collegamenti tra due nodi**. Per risolvere questi circuiti si usano:

Le due leggi di Kirchhoff:

1. ***Legge dei nodi o prima legge di Kirchhoff:*** *la somma delle correnti che entrano in un nodo deve essere uguale alla somma delle correnti che escono.*
2. ***Legge delle maglie o seconda legge di Kirchhoff:*** *la somma algebrica delle differenze di potenziale in un circuito chiuso (maglia) in un giro completo è nulla*

In base a queste leggi il circuito fornisce tre equazioni da mettere a sistema:

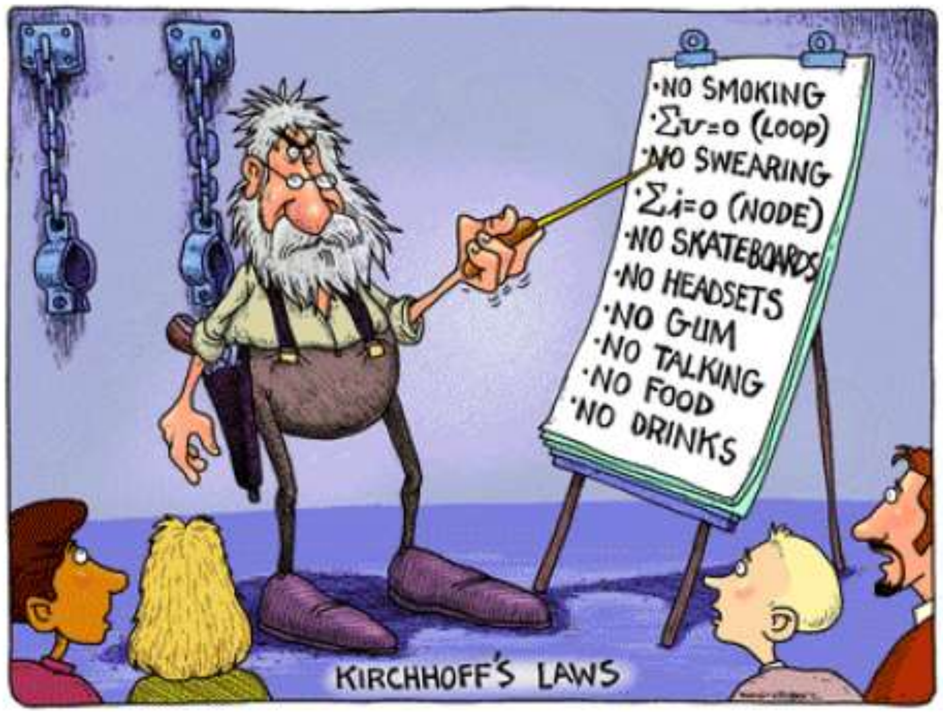
maglia bad (a sinistra) in senso antiorario: $\mathcal{E}_1 - i_1 R_1 + i_3 R_3 = 0$

maglia bcd (a destra) in senso antiorario da c: $\mathcal{E}_2 - i_3 R_3 - i_2 R_2 = 0$

nodo b $i_2 = i_1 + i_3$

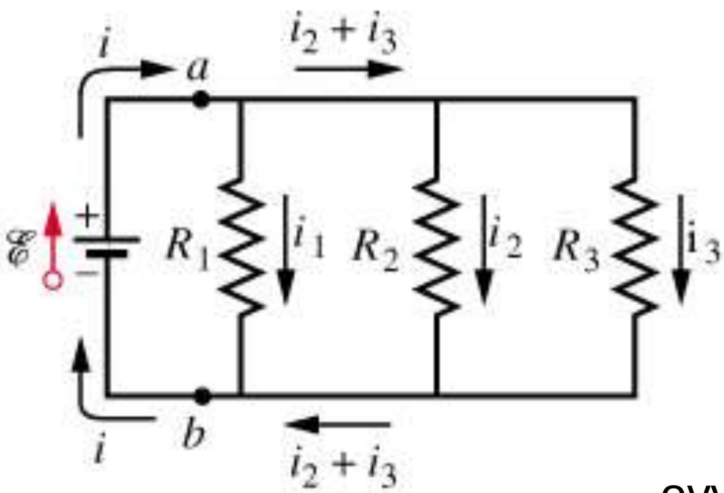
Legge dei nodi: la somma delle correnti che entrano in un **nodo** (punti in cui maglie si incrociano) deve essere uguale alla somma delle correnti che escono.

Leggi di Kirkoff



Legge delle maglie: la somma algebrica delle ddp rilevate su un circuito chiuso e' nulla.

Resistenze in parallelo



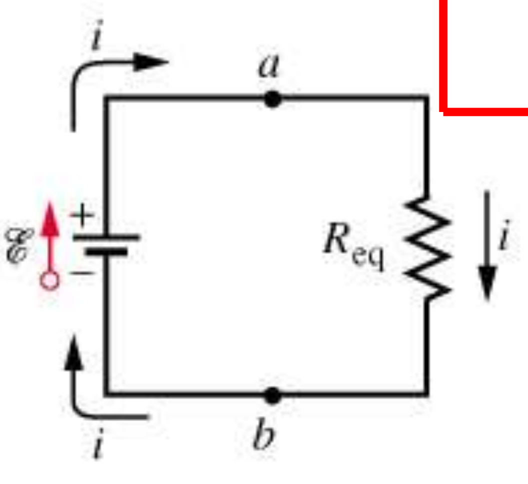
(a)

Applicando una d.d.p. alle estremità delle resistenze in parallelo **esse saranno sottoposte alla stessa d.d.p.**, e non potendoci essere accumulo di carica in un punto la somma delle correnti che attraversano ognuna di esse è pari alla corrente totale erogata dal generatore

Per la legge di Ohm, si avrà: $$i_i = \frac{V}{R_1} \quad i_2 = \frac{V}{R_2} \quad i_3 = \frac{V}{R_3}$$

ovvero

$$\mathrm{i} = i_1 + i_2 + i_3 = \mathcal{E} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}}$$



(b)

Legge dei nodi: la somma delle correnti entranti in un **nodo** è pari a quella delle correnti uscenti.

La resistenza equivalente di più resistenze in parallelo e' l'inverso della somma degli inversi delle resistenze.

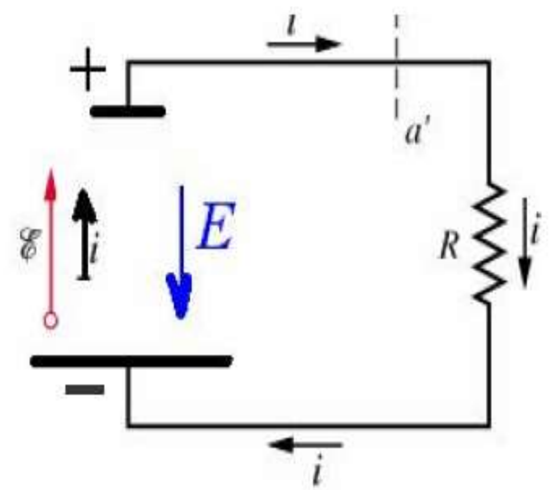
$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1}$$

in generale si ha:

$$\boxed{R_{eq} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \right)^{-1}}$$

Potenza, Potenziale e F.E.M.

Il generatore di f.e.m. in un circuito fornisce potenza trasferendo (trasformando) energia e fornendola ai portatori di carica. La potenza *P* netta trasferita e':



$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{d(qV)}{dt} = \frac{dq}{dt}V = i(t)\cdot V$$

L = lavoro del generatore
i(t) = corrente nel circuito
V = d.d.p. ai capi del generatore

Se il generatore ha una resistenza interna *r* si ha:

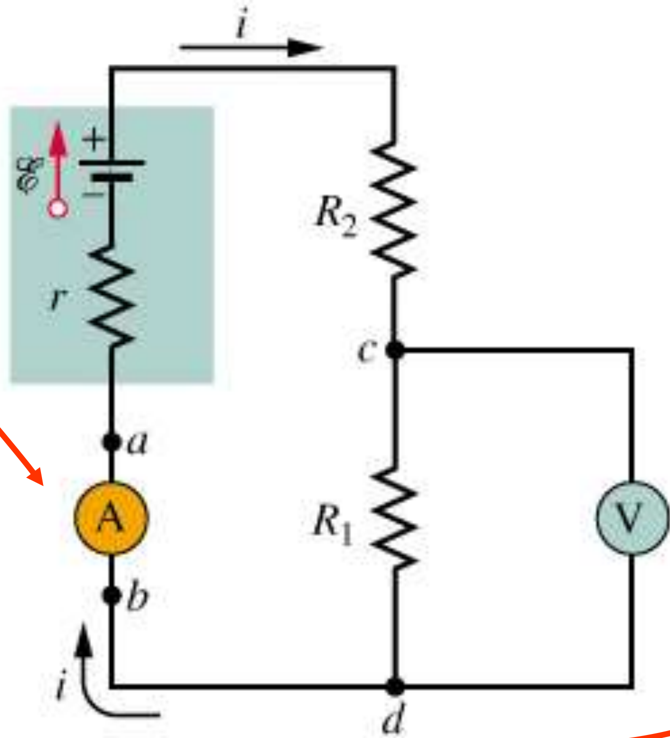
$$P = i(t)\cdot\left(\mathcal{E} - i\cdot r\right) = i\cdot\mathcal{E} - i^2 r \Rightarrow P = P_r + P_{fem}$$

Il termine $P_r = i^2 r$ rappresenta la potenza dissipata internamente al generatore

Il termine $P = i\cdot V$ rappresenta la **potenza totale** che il generatore eroga sia sotto forma di corrente elettrica, sia sotto forma di dissipazione termica interna

Amperometri e Voltmetri

Chiamiamo amperometro lo strumento che misura le correnti in un circuito. Per misurare una corrente deve essere necessariamente inserito in serie al circuito in modo da intercettare la corrente, ma continuando a farla scorrere nel circuito.



Per poter essere strumenti di misura precisi è necessario che:
la resistenza interna di un amperometro sia più piccola possibile mentre
la resistenza interna di un Voltmetro deve essere più elevata possibile.
Perché ?

Voltmetro è invece lo strumento per misurare le d.d.p., va inserito in parallelo al circuito e tra i due punti di cui si vuole misurare la d.d.p.

Elettrodotti

- Come mai si utilizzano elettrodotti ad alta tensione (100-500 kV) per distribuire l'energia elettrica su grandi distanze?

- Per essere usata dagli utilizzatori l'energia elettrica deve essere comunque trasformata in bassa tensione.

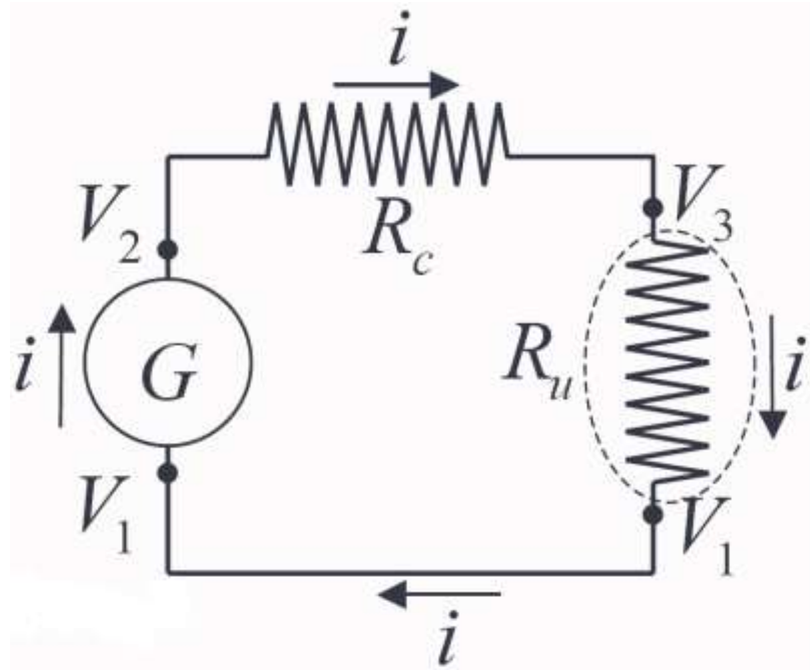
- Non sarebbe stato più semplice trasferire direttamente energia elettrica a 220 V?

Elettrodotti (II)

- La scelta è motivata dalla riduzione della dissipazione dell'energia elettrica sui cavi per effetto Joule.

- Consideriamo il circuito equivalente in figura. Abbiamo schematizzato l'apparecchio utilizzatore con una resistenza che dissipa calore.

- Tale schematizzazione funziona sia nel caso in cui l'utilizzatore trasforma effettivamente l'energia elettrica in calore (stufa, lampada a incandescenza, ecc) sia nel caso in cui l'utilizzatore trasforma l'energia elettrica in altre forme di energia (p.es. in energia meccanica, nel caso di un motore elettrico).



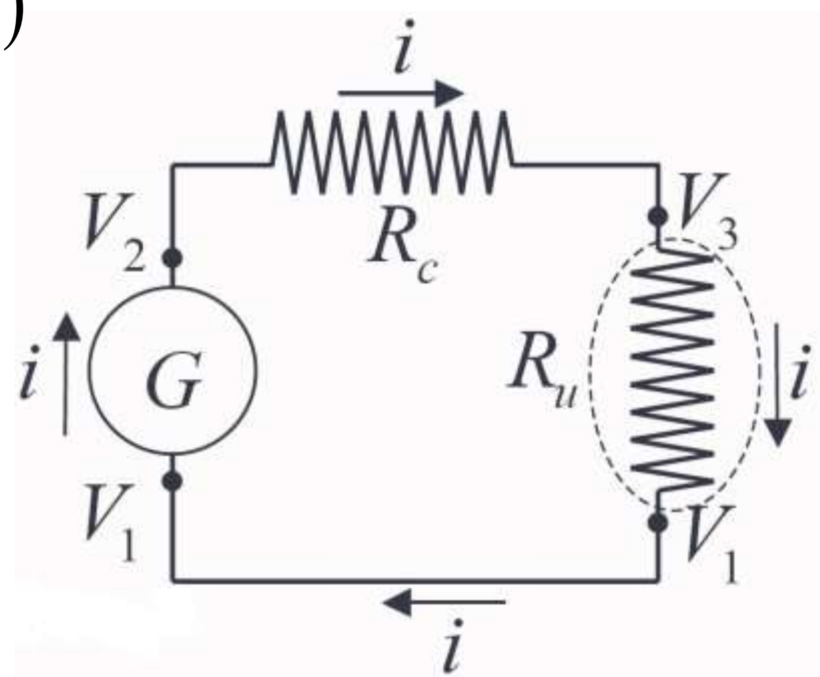
Elettrodotti (III)

- Sia R_u la resistenza interna dell'apparecchio utilizzatore e R_c la resistenza dei cavi.

- Due parametri sono fissati: la Potenza P_u consumata dall'utilizzatore e la resistenza R_c dei cavi.

La potenza P_u consumata dall'utilizzatore si può scrivere:

$$P_u = R_u i^2 = (V_3 - V_1)^2 / R_u = i \cdot (V_3 - V_1)$$



- Dalla espressione segue che, per fornire la potenza fissata P_u all'utilizzatore, potremo usare indifferentemente intense correnti a piccola differenza di potenziale o piccole correnti a grande differenza di potenziale.

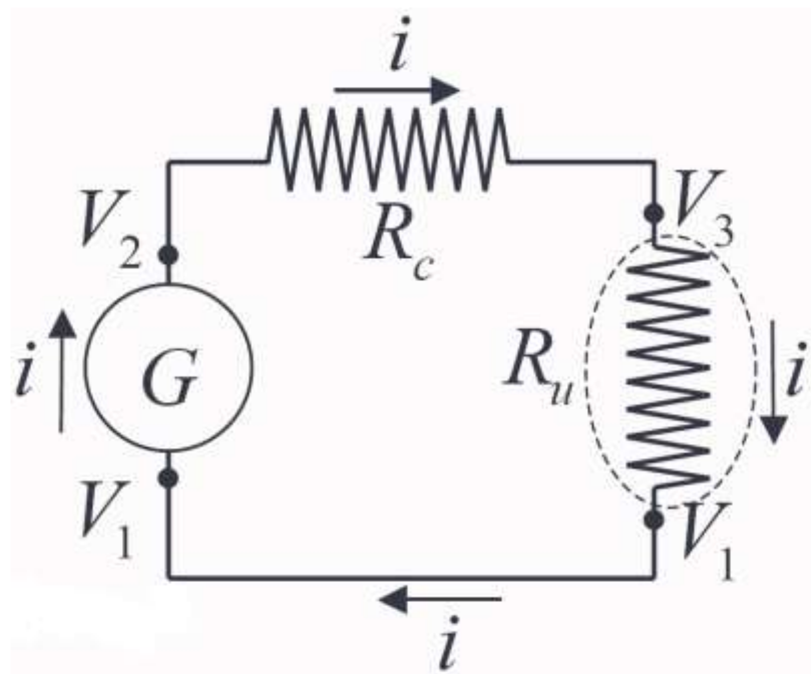
Elettrodotti (IV)

- Ma la corrente *i* che scorre nell'utilizzatore scorre anche nei cavi e causa la dissipazione nei cavi della potenza:

$$P_c = R_c i^2 = (V_2 - V_3)^2 / R_c = i \cdot (V_2 - V_3)$$

- R_c è fissata, mentre $V_2 - V_3$ varia al variare di *i* (diminuisce al crescere di *i*). Conviene quindi riferirsi alla I espressione che ci dice che la potenza dissipata lungo i cavi è proporzionale al quadrato dell'intensità di corrente.

Per ridurre la dissipazione lungo i cavi conviene perciò scegliere piccole correnti a grande differenza di potenziale piuttosto che correnti intense a piccola differenza di potenziale.



Circuiti RC: Carica di un condensatore

Consideriamo il circuito in figura e supponiamo che, inizialmente il deviatore si trovi nella posizione 0. Supponiamo poi che a un certo istante, **t = 0**, il deviatore venga commutato nella posizione **1**.

Come varia nel tempo la corrente *i* che scorre nel circuito? Come variano nel tempo le differenze di potenziale ΔV_R e ΔV_C?

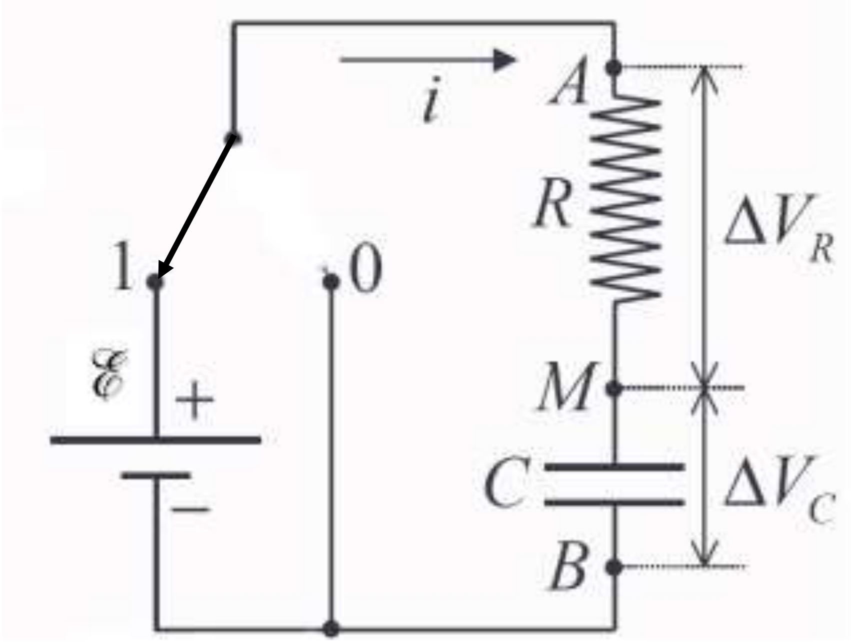
Osserviamo innanzitutto che, per la legge di Ohm:

$$\boxed{\Delta V_R(t) = R \cdot i(t)}$$

Inoltre, per la definizione di capacità:

$$\boxed{\Delta V_C(t) = \frac{Q(t)}{C}}$$

Se all'istante *t* = 0 il condensatore è scarico si ha *Q* (0) = 0.



Circuiti RC: Carica di un condensatore II

Detta $\mathcal{E}$ la forza elettromotrice del generatore (cioè la differenza di potenziale ai suoi capi quando esso non eroga corrente), si ha:

$$\mathcal{E} = \Delta V_R + \Delta V_C = R \cdot i(t) + \frac{Q(t)}{C}$$

Derivando si ottiene l'equazione differenziale:

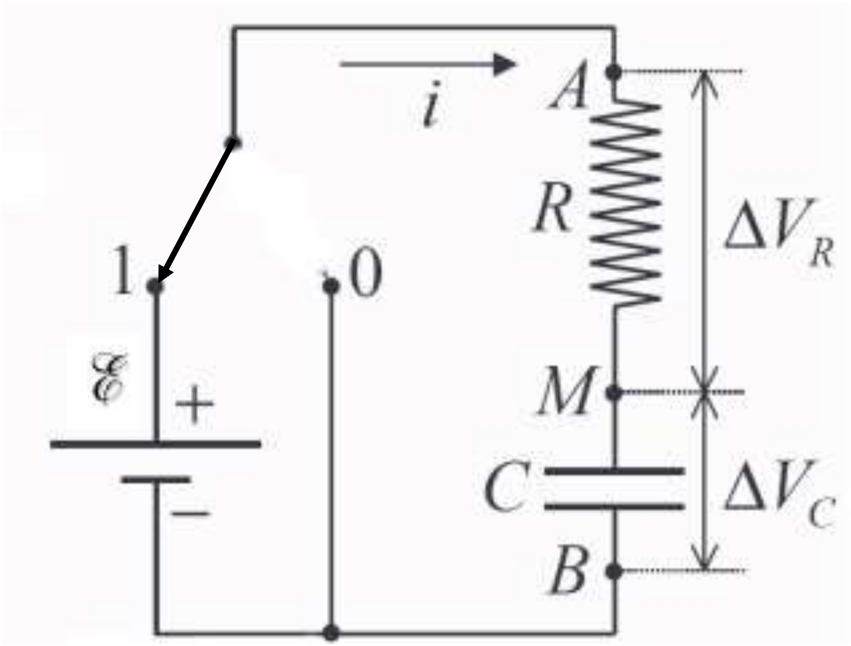
$$0 = R \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C}$$

Risolvendo:

$$\frac{di(t)}{i} = -\frac{d(t)}{RC} \Rightarrow \int_{i_0}^{i} \frac{di}{i} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

$$\left[\ln i\right]_{i_0}^{i} = -\frac{t}{RC} \quad \Rightarrow \ln\frac{i}{i_0} = -\frac{t}{RC}$$

$$\boxed{i = i_0 e^{-t/RC}}$$



Circuiti RC: Carica di un condensatore III

$$\boxed{i = i_0 e^{-t/RC}}$$

$\tau = RC$ Prende il nome di Costante di Tempo del Circuito

All'istante iniziale si ha:

$$\mathcal{E} = \Delta V_R(0) + \Delta V_C(0) = R \cdot i_0 + 0 \quad \Rightarrow \quad i_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Da cui:

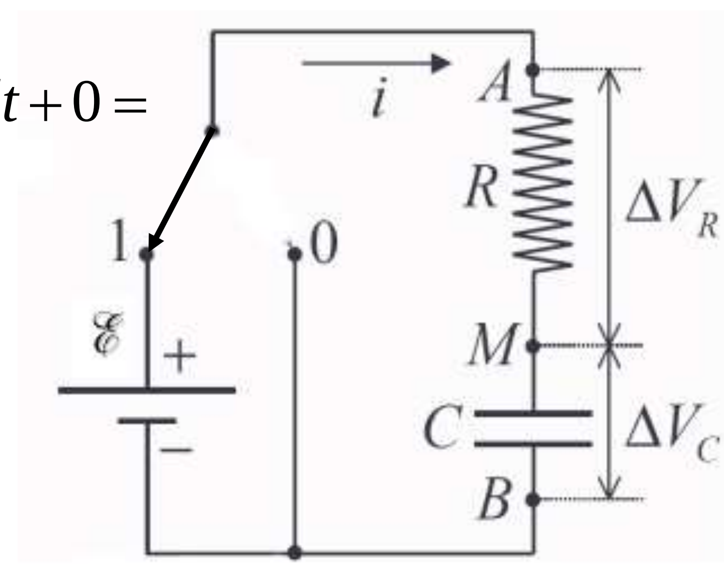
$$\boxed{i = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}}$$

Si ottiene inoltre:

$$\Delta V_R = R \cdot i(t) = \mathcal{E} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\Delta V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt + \Delta V_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} dt + 0 =$$

$$= \frac{\mathcal{E}}{RC}\left[-RC \cdot e^{-\frac{t}{RC}}\right]_0^t = \mathcal{E}\left(1\text{-}e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



$$\boxed{Q(t) = C \cdot \Delta V_C(t) = C \cdot \mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})}$$

Circuiti RC: Carica di un condensatore IV

Ricapitolando:

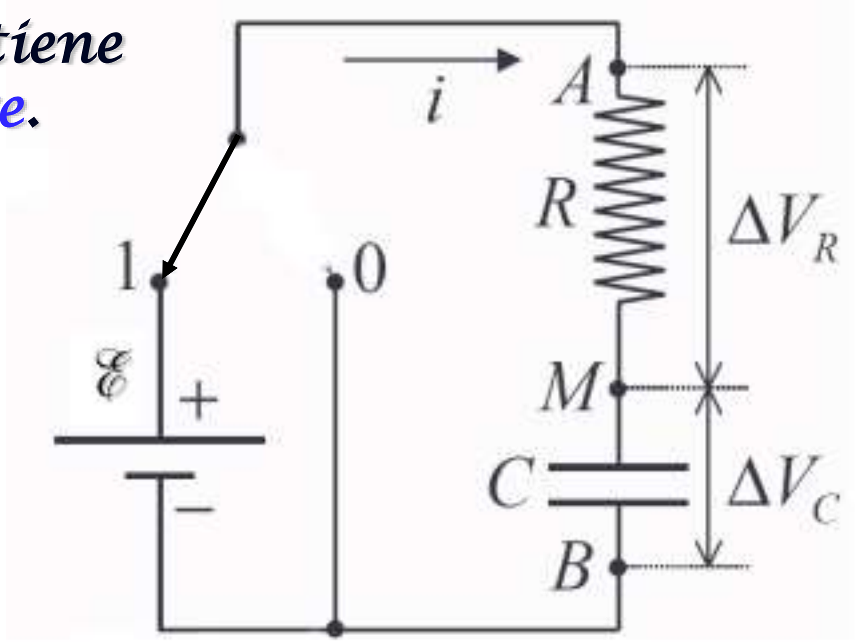
$$\Delta V_R(t) = \mathcal{E} \cdot e^{-t/RC}$$
$$\Delta V_C(t) = \mathcal{E} \cdot \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$
$$Q(t) = C\mathcal{E} \cdot \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

$$\Delta V_R(t) = \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$
$$\Delta V_C(t) = \xrightarrow[t\to\infty]{} \mathcal{E}$$
$$Q(t) = \xrightarrow[t\to\infty]{} C\mathcal{E}$$

Si noti che la carica del condensatore aumenta nel tempo tendendo al valore limite $C \cdot \mathcal{E}$.

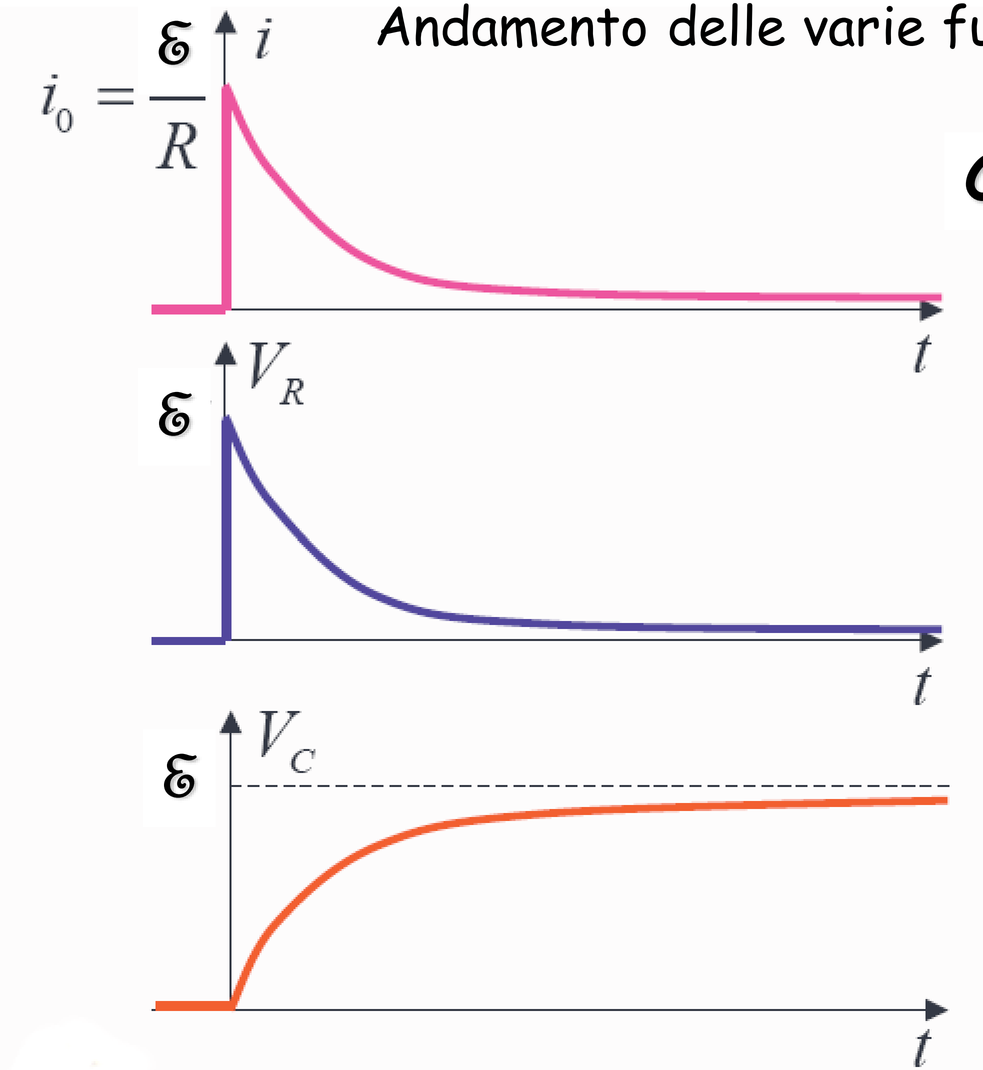
Commutando il deviatore su 1 si ottiene perciò la carica del condensatore.

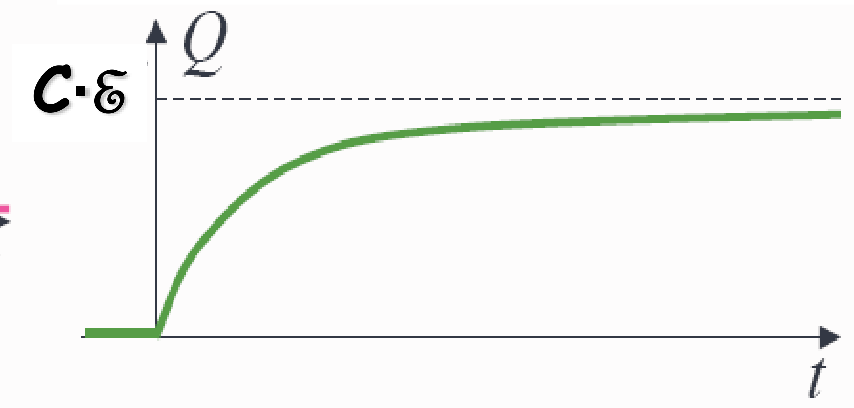
Un condensatore all'inizio della carica si comporta come un conduttore di resistenza nulla (condizione di corto circuito) e al termine si comporta come una resistenza infinita (condizione di circuito aperto)

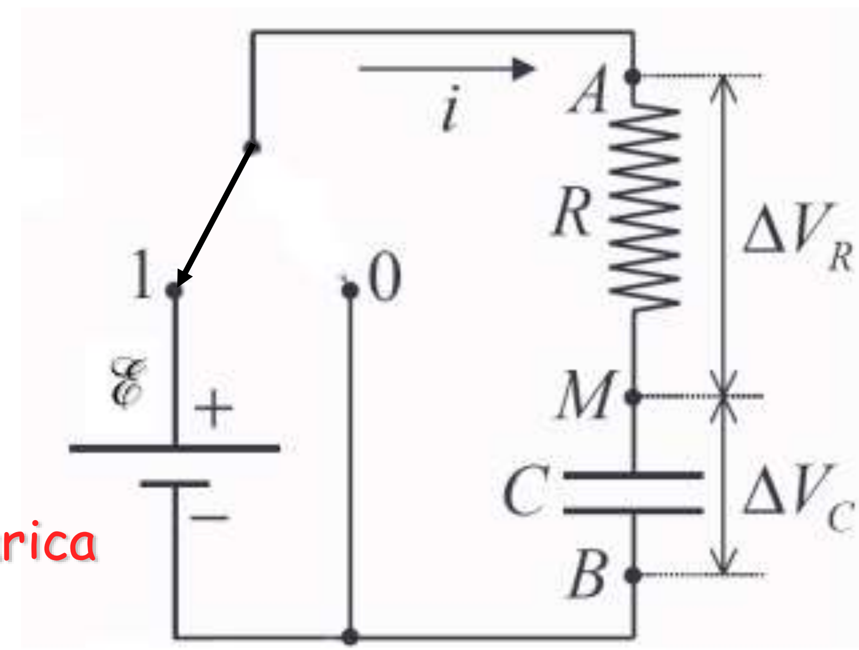


Circuiti RC: Carica di un condensatore V

Andamento delle varie funzioni







$\tau = RC$ Rappresenta il tempo in cui la carica arriva al 63% del massimo

Circuiti RC: Scarica di un condensatore

Supponiamo ora che, inizialmente, il deviatore si trovi nella posizione 1, con il condensatore *C* completamente carico (*Q* = *Cf*). Supponiamo poi che a un certo istante, ***t* = 0**, il deviatore venga commutato nella posizione **0**.

Avremo l'equazione :
$$0 = \Delta V_R + \Delta V_C = R \cdot i(t) + \frac{Q(t)}{C}$$

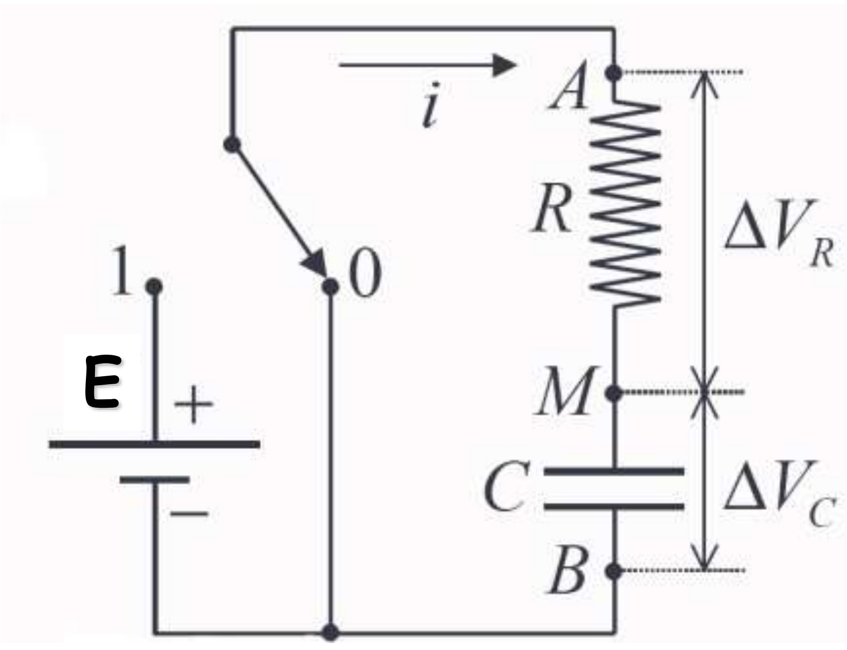
Derivando si ottiene l'equazione differenziale:
$$0 = R \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C}$$

Risolvendo:

$$\frac{di(t)}{i} = -\frac{d(t)}{RC} \Rightarrow \int_{i_0}^{i} \frac{di}{i} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

$$[\ln i]_{i_0}^{i} = -\frac{t}{RC} \quad \Rightarrow \ln\frac{i}{i_0} = -\frac{t}{RC}$$

$$\boxed{i = i_0 e^{-t/RC}}$$



Circuiti RC: Scarica di un condensatore II

$$\boxed{i = i_0 e^{-t/RC}}$$

All'istante iniziale si ha:

$$0 = \Delta V_R(0) + \Delta V_C(0) = R \cdot i_0 + \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad i_0 = -\frac{\mathcal{E}}{R}$$

Da cui:

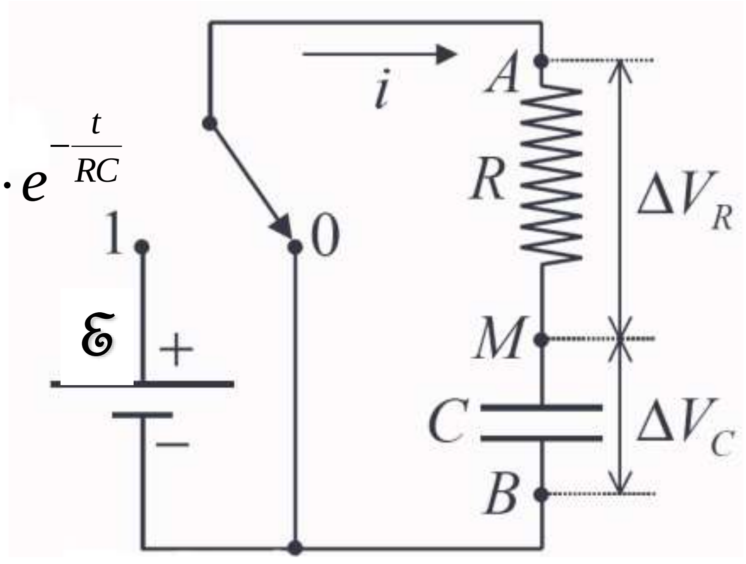
$$\boxed{i(t) = -\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}}$$

Si ottiene inoltre:

$$\Delta V_R = R \cdot i(t) = -\mathcal{E} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\Delta V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt + \Delta V_C(0) = -\frac{1}{C}\int_0^t \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} dt + \mathcal{E} =$$

$$= -\frac{\mathcal{E}}{RC}\left[-RC \cdot e^{-\frac{t}{RC}}\right]_0^t + \mathcal{E} = -\mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) + \mathcal{E} = \mathcal{E} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$



$$\boxed{Q(t) = C \cdot \Delta V_C(t) = C \cdot \mathcal{E} \cdot e^{-t/RC}}$$

Circuiti RC: Scarica di un condensatore III

Ricapitolando:

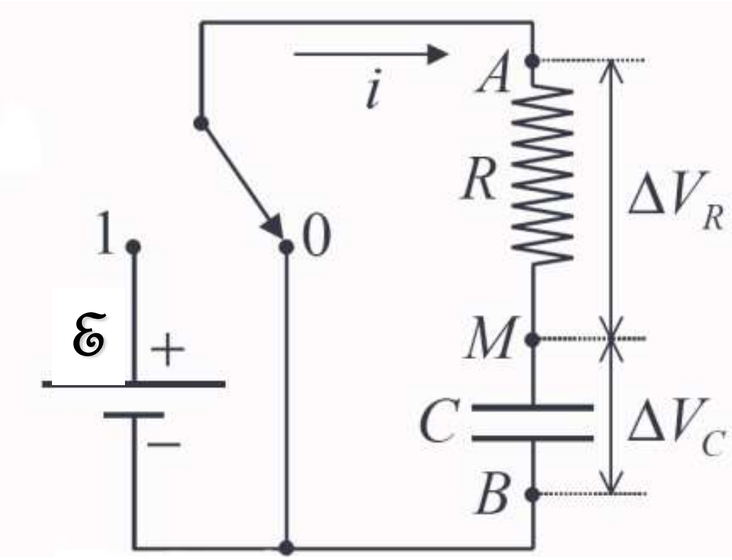
$$\Delta V_R(t) = -\mathcal{E} \cdot e^{-t/RC}$$
$$\Delta V_C(t) = \mathcal{E} \cdot e^{-t/RC}$$
$$Q(t) = C\mathcal{E} \cdot e^{-t/RC}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta V_R(t) = \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$
$$\Delta V_C(t) = \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$
$$Q(t) = \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

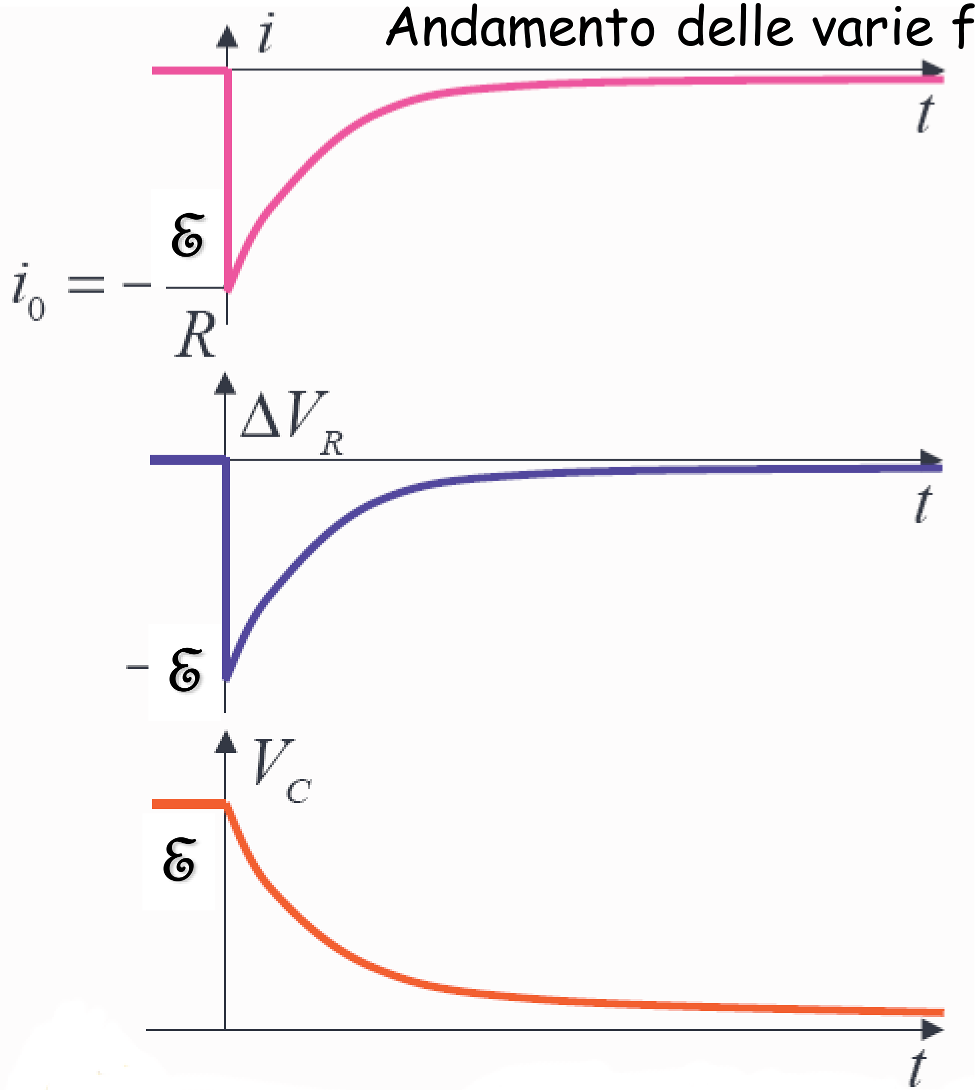
Si noti che la carica del condensatore diminuisce nel tempo tendendo al valore limite **0**.

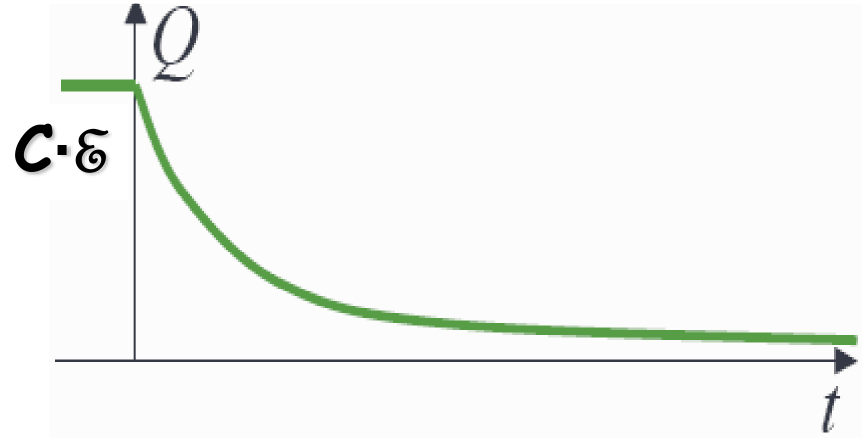
Commutando il deviatore su o si ottiene perciò la scarica del condensatore.

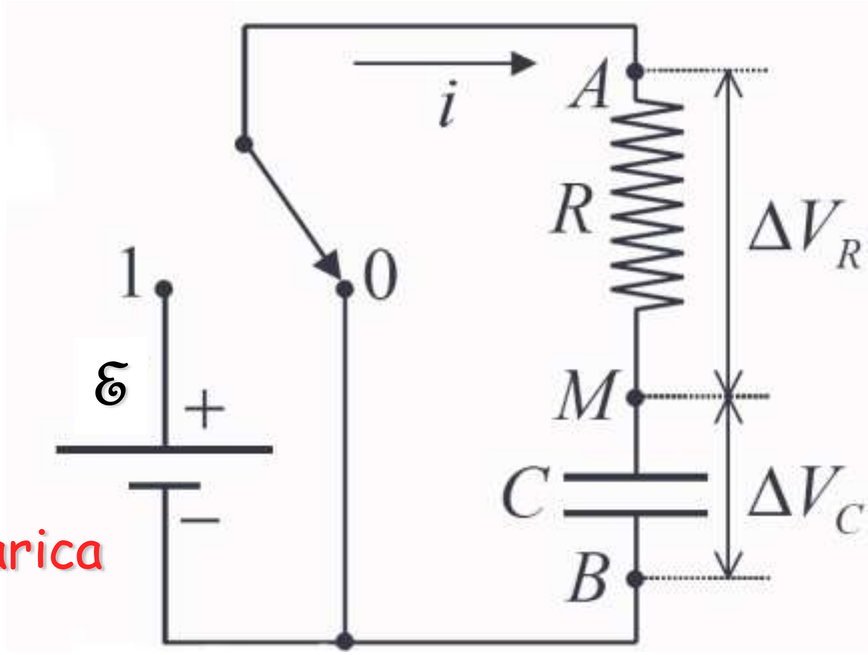


Circuiti RC: Scarica di un condensatore IV

Andamento delle varie funzioni

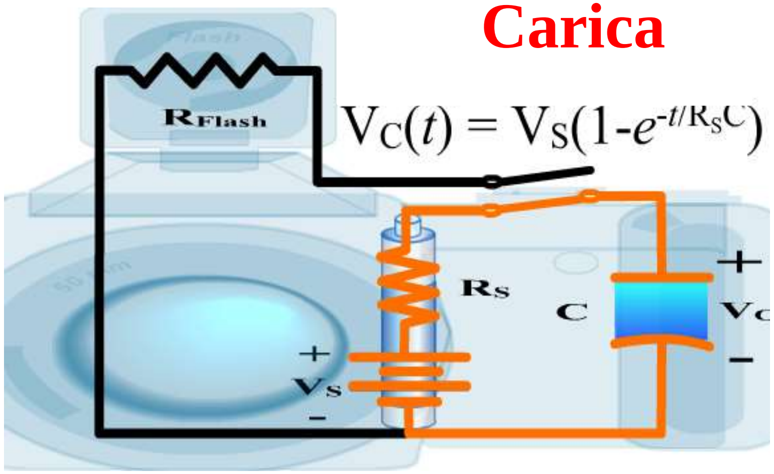






$\tau = RC$ Rappresenta il tempo in cui la carica arriva al 37% del massimo

Carica



$$\tau_C = R_s C = 0.45\,\text{ms}$$

$$R_s = 3\Omega, C = 150\mu F$$

Scarica