Il Lavoro, l'Energia Cinetica e L'Energia Potenziale

- Di seguito, definiremo alcune nuove grandezze fisiche scalari: il *lavoro*, *l'energia cinetica* e *l'energia potenziale.*
- (Il lavoro è l'integrale su un percorso, del prodotto scalare tra la forza e uno spostamento infinitesimo sul percorso.)
- Troveremo che, grazie alla II legge di Newton, potremo calcolare il lavoro di una forza tra due punti nello spazio, come la variazione di energia cinetica tra i due punti.
- Infine troveremo che, per alcune forze dette conservative, il *lavoro non dipende dal (percorso) cammino scelto.*
- In questo caso, è definita una nuova grandezza (*l'energia potenziale*) che dipende dai soli punti di arrivo e partenza.
- Nel caso delle forze conservative, la somma di *l'energia cinetica* e *l'energia potenziale (=energia)* sono costanti del moto (ossia, l'energia è la stessa in tutti i punti del percorso).

L'Energia Cinetica

L'energia è definita come la capacità di un sistema di compiere lavoro e quindi di modificare l'ambiente circostante

L'energia Cinetica è la forma di energia legata allo stato di moto dei corpi, quindi dipende dalla massa m e dallo stato cinetico v

Energia Cinetica (K) ⇒ $K=\frac{1}{2}mv^2$

SEMPRE POSITIVA!!

Unità di Misura → 1 Joule= 1 $Kg \cdot m^2/s^2$

N.B.: v è il modulo (v^2_x+ v^2_y +v^2_z), m rappresenta la massa di un corpo puntiforme la cui velocità di traslazione nello spazio è v

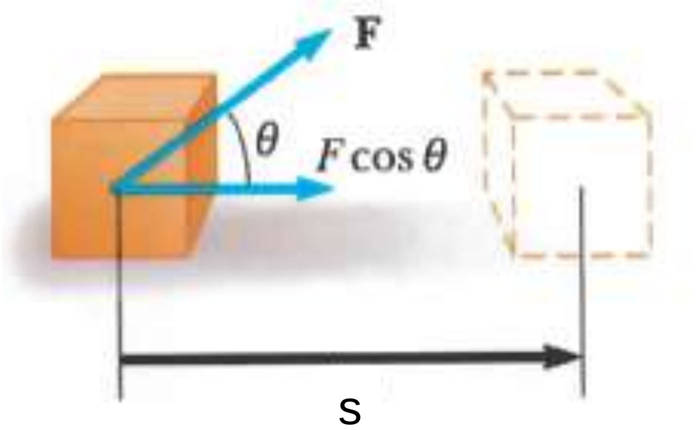
Lavoro ed Energia

Abbiamo visto come applicare le leggi della dinamica in varie situazioni. Spesso però l'analisi del moto spesso risulta complicata. Esiste un approccio alternativo all'analisi del moto che si realizza introducendo i concetti di lavoro ed energia.

*Si definisce lavoro di una forza "F" applicata ad un corpo che ne provoca uno spostamento "s" il seguente **PRODOTTO SCALARE**:*

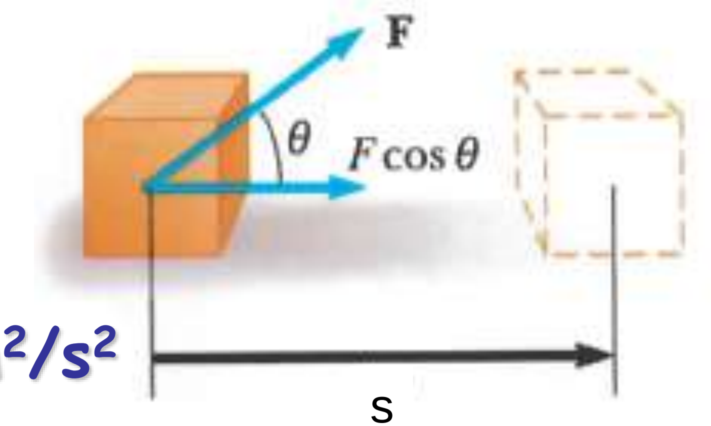
$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\theta$$

Ovvero il lavoro è pari al prodotto della componente della forza nella direzione dello spostamento, moltiplicato per lo spostamento stesso.



Dalla definizione se una forza è perpendicolare allo spostamento il lavoro risulta nullo.

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\theta$$



Questa definizione comporta che il lavoro ha un segno (può essere negativo)

Unità di Misura → 1 Joule= 1 Kg·m²/s²

Se l'angolo θ tra la forza e lo spostamento è θ < 90° il lavoro è positivo altrimenti sarà negativo; in questo ultimo caso la componente della forza nella direzione dello spostamento è di conseguenza opposta allo spostamento stesso.

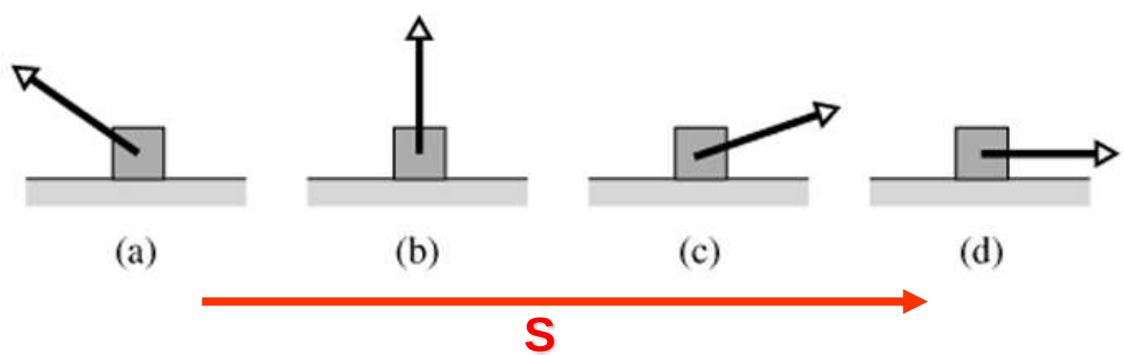
Esempi

1- Forza costante e parallela allo spostamento [caso (d) in fig.] *L>0*

2- Forza costante e normale allo spostamento [(b) in fig.] *L=0*

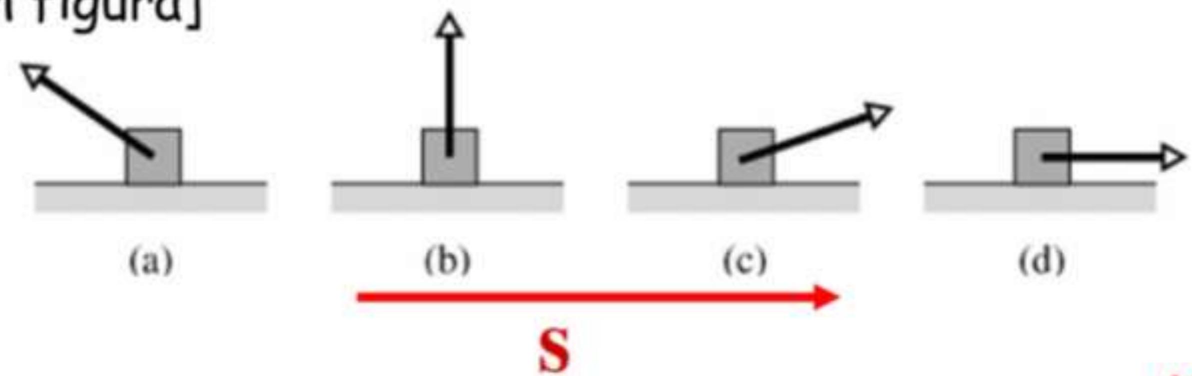
3- Forza costante ad angolo fisso rispetto allo spostamento [casi (a,c) in figura]

L<0 *L>0*



Casi semplici: spostamento unidimensionale e…

1- Forza costante e parallela allo spostamento [caso (d) in fig.]
2- Forza costante e normale allo spostamento [(b) in fig.]
3- Forza costante ad angolo fisso rispetto allo spostamento [casi (a,c) in figura]

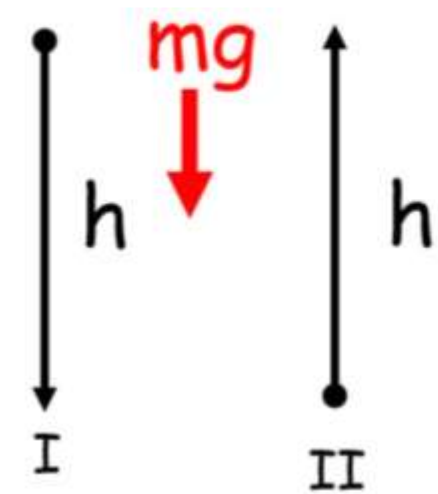


4- Lavoro svolto dalla Forza peso F_g=mg:
Nel secondo caso sposto la massa m *verso l'alto* per un tratto lungo h:

$$L= mgh(\cos 180°)=-mgh$$

Nel primo caso, la massa m viene spinta verso il basso:

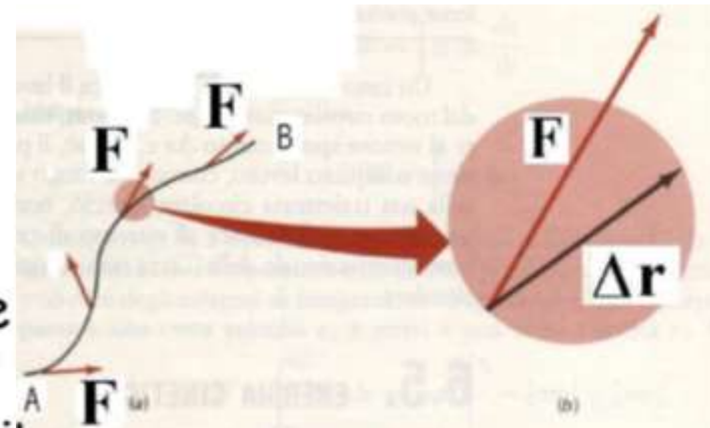
$$L= mgh(\cos 0°)=+mgh$$



Lavoro di una forza variabile

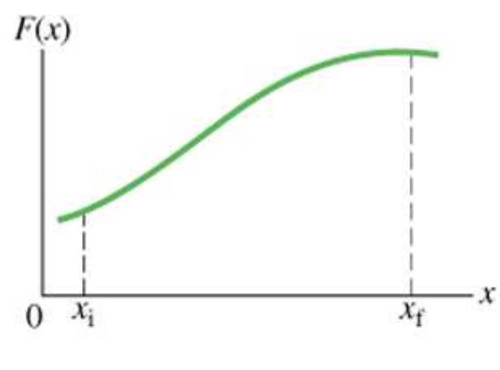
1- Supponiamo di conoscere la forza **F** in tutti i punti di una regione di spazio (=campo di forze) $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{r})$, $\mathbf{F}=\mathbf{F}(x,y,z)$

2- Consideriamo una curva nello spazio che connetta i punti A e B

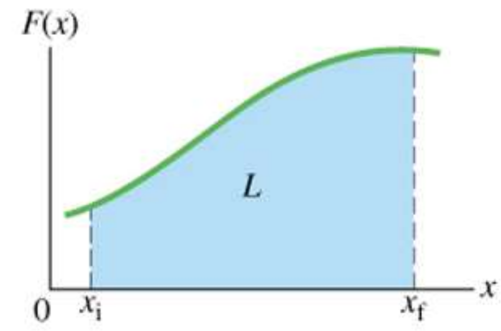


Possiamo DEFINIRE una nuova grandezza fisica, come l'integrale del prodotto scalare tra la **forza** ed un **elemento infinitesimo di curva**. L'integrale è sempre *calcolabile*, ed il risultato è uno scalare

$$L \equiv \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

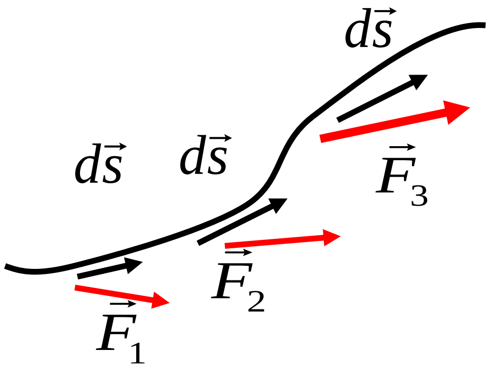


(a)



(d)

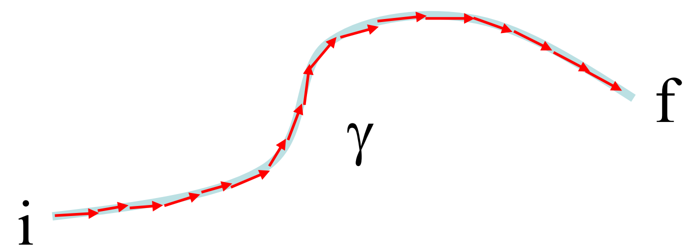
Forza non costante e percorso generico.
Per ogni spostamento infinitesimo



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds \cos\vartheta = F ds$$

Il lavoro totale è la somma tutti i lavori calcolati sui singoli tratti

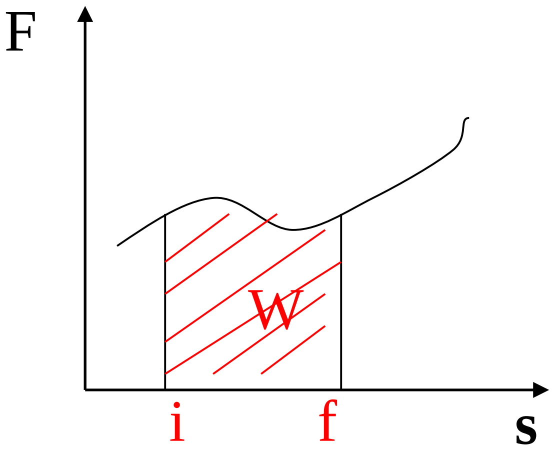
$$W = \int_{i\gamma}^{f} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

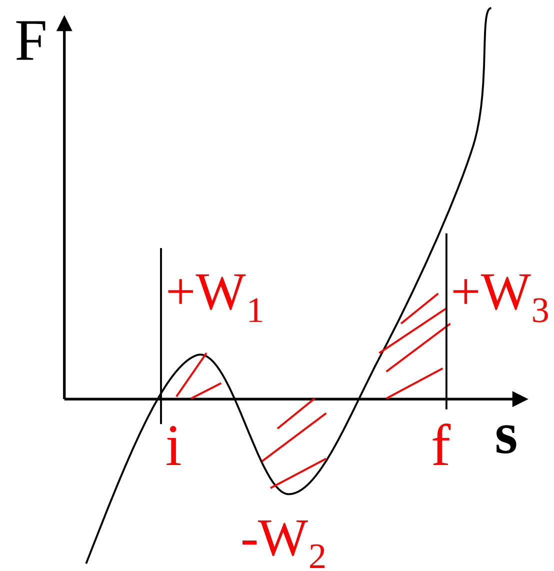


Nel caso di più forze:

$$W = \int_{i\gamma}^{f} \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3\right) \cdot d\vec{s} = \int_{i\gamma}^{f} \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} + \int_{i\gamma}^{f} \vec{F}_2 \cdot d\vec{s} + \int_{i\gamma}^{f} \vec{F}_3 \cdot d\vec{s}$$

$$W = \int_{i\gamma}^{f} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$





Lavoro totale come somma algebrica dei lavori parziali. Attenzione , il lavoro è una quantità scalare

Lavoro estensione caso 2D e 3D

In questo caso si ha:

$$d\vec{s} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$$

Siccome vale anche:

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$$

Si ha

$$L = \int \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int F_x \cdot dx + \int F_y \cdot dy + \int F_z \cdot dz =$$

$$= \int_{x_i}^{x_f} F_x \cdot dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y \cdot dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z \cdot dz$$

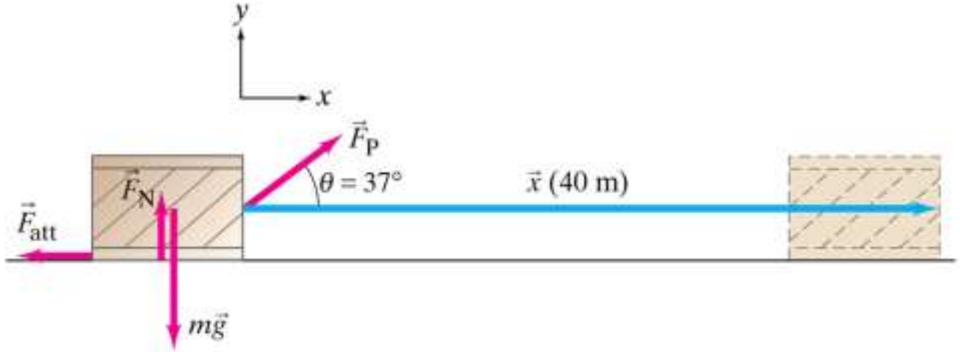
N.B.

$$F_x = F_x(x, y, z)$$
$$F_y = F_y(x, y, z)$$
$$F_z = F_z(x, y, z)$$

Ma si integra una sola variabile per ciascun integrale

Un esempio

Una persona traina una cassa di 50 kg per 40 m lungo un pavimento orizzontale applicando una forza costante F_p=100N e agente con un angolo di 37°. Il pavimento è scabro ed esercita una F_{att}=50 N. Determinare il lavoro compiuto da ciascuna forza e il lavoro totale.



$$\vec{d} = 40\text{m}\ \hat{x}$$

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F_x d_x + F_y d_y + F_z d_z}$$

$$\vec{F}_p = \left|\vec{F}_p\right| \cos\vartheta\, \hat{x} + \left|\vec{F}_p\right| sen\vartheta\, \hat{y} = 79.8\hat{x} + 60.2\hat{y}$$

$$\vec{F}_{att} = -50\hat{x}$$

$$W_p = F_{px} d_x = 3192J$$

$$W_{att} = F_{attx} d_x = -2000\ J$$

$$W_{mg} = m\vec{g} \cdot \vec{d} = 0$$

$$W_{F_N} = \vec{F}_N \cdot \vec{d} = 0$$

$$W_{tot} = W_p + W_{att} = 1192J$$

Teorema delle forze vive o Teorema del lavoro ed energia cinetica

Il teorema stabilisce che il lavoro compiuto da una forza comporta una variazione di energia cinetica. Questa espressione permette di definire anche l'energia (in generale) come la capacità di un corpo a compiere un lavoro.

In virtù della II Legge di Newton $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$, il lavoro ha una importante proprietà:

$$L \equiv \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

allora il *lavoro* compiuto dalla risultante delle forze agenti su un punto materiale da "A" a "B" è uguale alla differenza tra l' *energia cinetica* posseduta dal punto nella posizione finale ed in quella iniziale:

$$\mathbf{L = T_B - T_A}$$

Teorema del lavoro ed energia cinetica
Dimostrazione Forza costante

Dimostrazione: 1°caso Forza costante

consideriamo F \\ s allora il lavoro è L=Fs dalla 2^a Legge della dinamica si ha F=ma $\Rightarrow L = m \cdot a \cdot s$

$$\begin{cases} s = v_i t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v_f = v_i + at \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = \dots \\ t = \frac{v_f - v_i}{a} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} s = v_i \cdot \frac{v_f - v_i}{a} + \frac{1}{2} \cancel{a} \frac{(v_f - v_i)^2}{a^{\cancel{2}}} \\ t = \dots \end{cases} \Rightarrow$$

$$s = \frac{v_i v_f - v_i^2}{a} + \frac{v_f^2 + v_i^2 - 2 v_i v_f}{2a}$$

Teorema del lavoro ed energia cinetica

Dimostrazione Forza costante pg.2

$s = \frac{2v_i v_f - 2v_i^2 + v_f^2 + v_i^2 - 2v_i v_f}{2a} \Rightarrow \mathbf{s = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a}}$ Quindi in questo caso si ottiene: $L = m \cdot a \cdot s = ma\frac{(v_f^2 - v_i^2)}{2a} = \frac{1}{2}(mv_f^2 - mv_i^2) = E_{kf} - E_{ki} = \Delta E_k$

Pertanto abbiamo dimostrato nel primo caso il teorema, che stabilisce che l'energia cinetica aumenta se il lavoro è positivo o diminuisce se il lavoro è negativo.

In altre parole possiamo anche dire che l'energia cinetica è pari al lavoro necessario a fermare un corpo di massa m in moto con velocità v.

Teorema del lavoro ed energia cinetica

Dimostrazione Forza variabile

La definizione generale del lavoro è: $L = \int_{\mathrm{x_i}}^{\mathrm{x_f}} \mathrm{F(x)dx}$ e

$$F = ma \Rightarrow$$

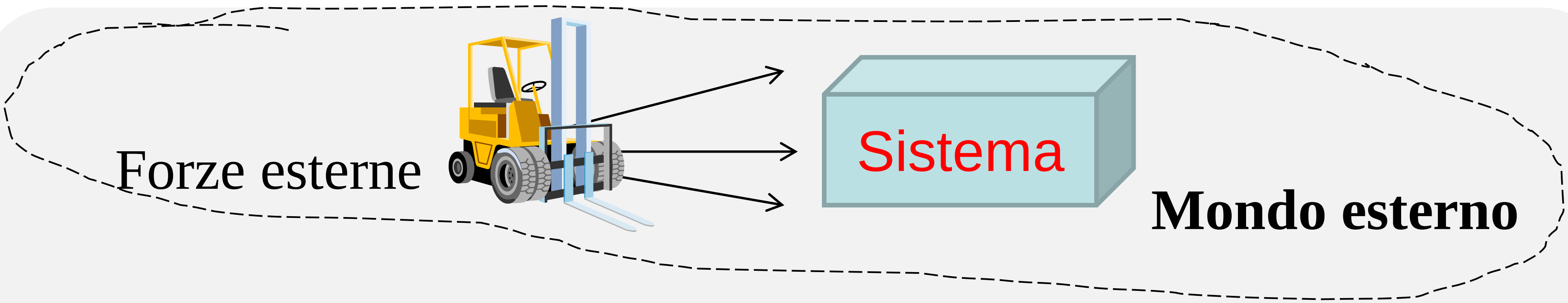
$$L = \int_{\mathrm{x_i}}^{\mathrm{x_f}} \mathrm{madx}$$

esplicitiamo la funzione integranda: $madx = m\frac{dv}{dt}dx = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}dx = mv\frac{dv}{dx}dx = mvdv$ avendo usato le regole di derivazione delle funzioni composte. Quindi si ottiene

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = \int_{v_i}^{v_f} mvdv = \frac{1}{2}mv^2\Big|_{v_i}^{v_f}$$

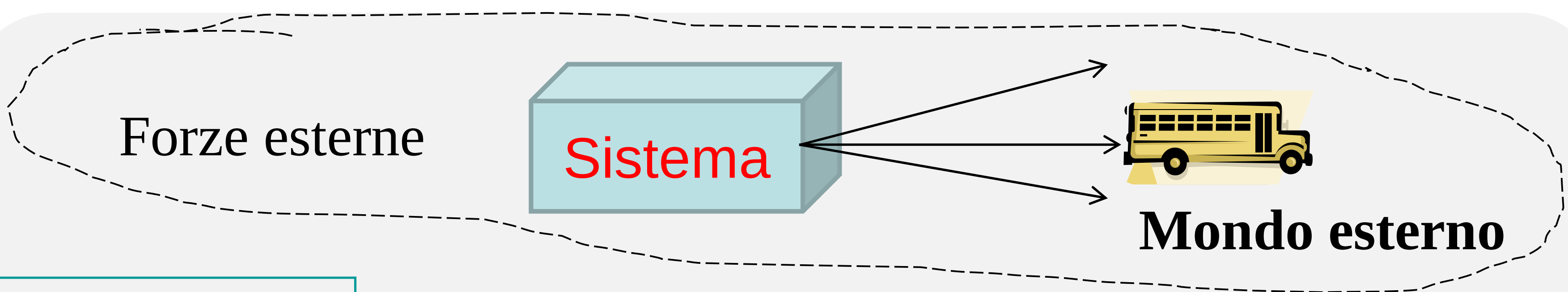
$$\mathbf{L = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \Delta E_k = \Delta K}$$

Teorema delle forze vive



$$W = \Delta E_k \geq 0$$

Lavoro positivo. L'esterno "fa lavoro"sul sistema.
Il sistema acquista energia cinetica



$$\boxed{W = \Delta E_k \leq 0}$$

Lavoro negativo. Il sistema perde energia cinetica.
Il sistema "fa lavoro" sull'esterno

Potenza

Un lavoro può essere svolto in più o meno tempo. Per molti scopi questo aspetto è importante. La "rapidità" con la quale viene eseguito un lavoro si chiama ***potenza*** **P**:

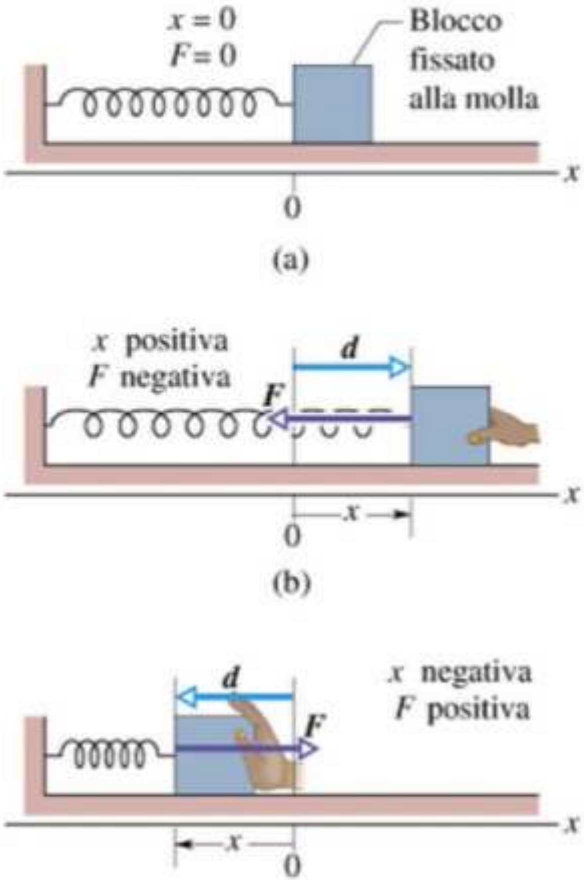
$$\boxed{P \equiv \frac{dL}{dt} = \frac{(\vec{F} \cdot d\vec{s})}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

- Una forza non compie lavoro se la forza è perpendicolare allo spostamento (ovvero, forza e velocità ortogonali).
- P>0 se la forza e lo spostamento sono concordi: la forza esercita un lavoro
- P<0 se forza e spostamento sono discordi: occorre esercitare un lavoro esterno sul corpo per muoverlo contro la forza in questione.

La potenza nel SI si misura in Joule/s. Poiché è una unità molto comune:

1 Watt = 1 joule/s

5.3 La forza elastica



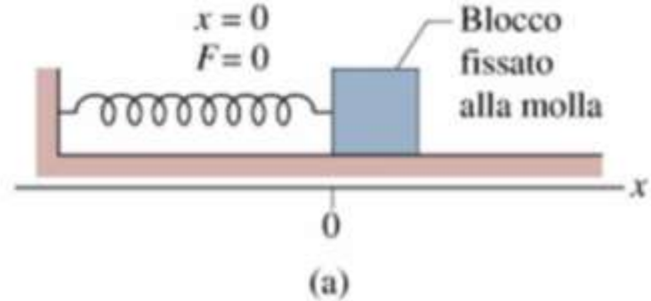
In Natura molte situazioni possono essere assimilate alla forza di richiamo di una molla. Se si sposta dalla posizione di riposo una molla di una quantità **x**, questa esercita una *__forza di richiamo__* che viene parametrizzata da:

$$\mathbf{F} = -k\,\mathbf{x} \qquad \text{(legge di Hooke)}$$

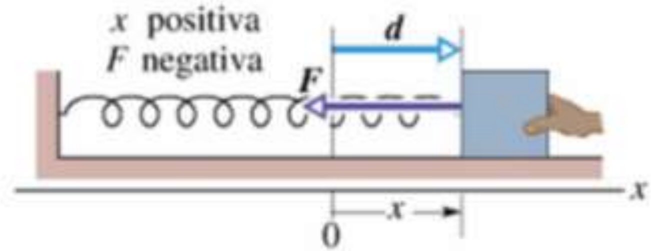
La funzione che soddisfa questa equazione è:

$$x(t) = x_o \cos(\varpi t), \quad \text{con} \quad \varpi = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Lavoro della forza elastica



Allontaniamo un blocco (fissato con una molla) dalla posizione di equilibrio (forza negativa sull'asse x, spostamento positivo sull'asse x):

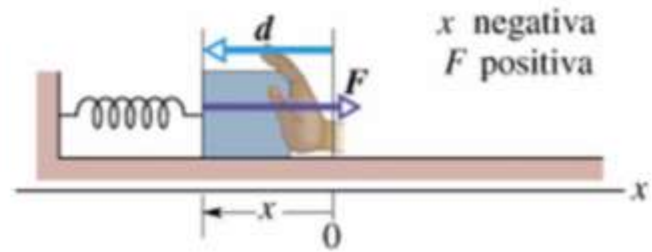


$$L \equiv \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \rightarrow \int_{x_o}^{x} (-ks) \cdot d\,s = \frac{1}{2}kx_o^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

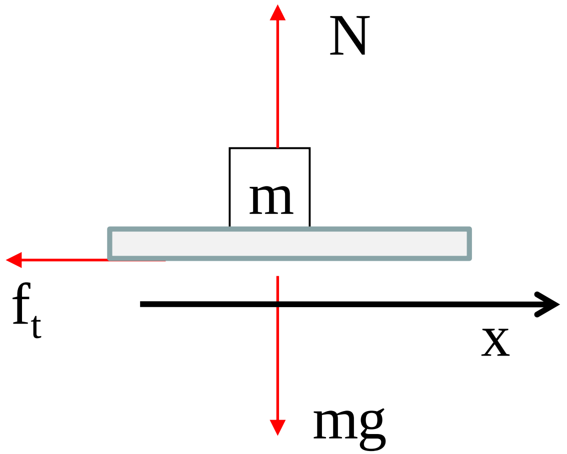
Occorre fornire un lavoro dall'esterno per allontanare il blocco dalla posizione di riposo. Il lavoro è *negativo* se compiuto sulla molla.

In generale, il ***lavoro*** è una grandezza fisica (numero!) che ***è sempre calcolabile*** se la forza è nota (potranno eventualmente esserci problemi di calcolo). Può succedere che il numero sia differente se il percorso scelto è differente.

Es. 6.2 - Cosa succede se sposto il blocco, comprimendo la molla?



Lavoro di una forza di attrito

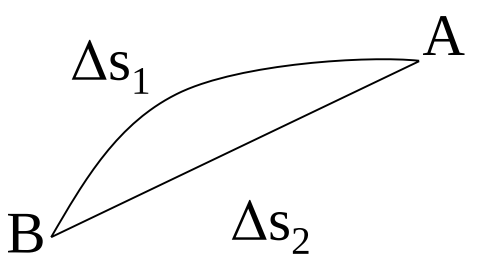


$$N = mg$$

$$F_t = \mu d \cdot mg$$

$$W = \int_A^B F_t ds = \int_A^B -\mu d mg ds = -\mu d mg \cdot \Delta s$$

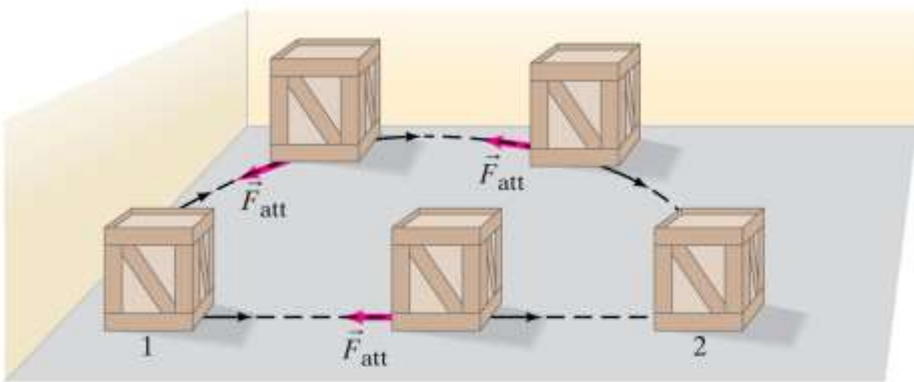
Δs dipende dalla traiettoria



In generale il lavoro dipende dalla traiettoria

Lavoro di una forza di attrito

La forza di attrito statico fa un lavoro nullo



$$F_{att} = -\mu_d N = -\mu_d mg$$

costante

$$W_{P_1P_2} = \int_{P_1,\gamma_1}^{P_2} \vec{\mathbf{F}}_{att} \cdot d\vec{s} = \int_{P_1,\gamma_1}^{P_2} -\mu_d mg ds = -\mu_d mg \int_{P_1,\gamma_1}^{P_2} ds = -\mu_d mg l_{12}$$

Il lavoro della forza di attrito dinamico non dipende solo dal punto iniziale e da quello finale, ma anche dalla lunghezza della traiettoria scelta