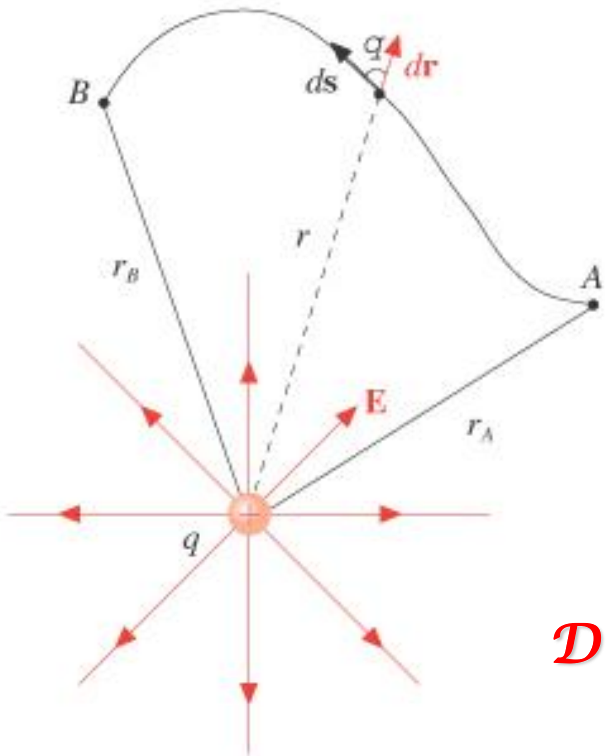
Energia Potenziale Elettrica



Calcoliamo il lavoro svolto dalle forze del Campo Elettrico generato da una carica puntiforme **Q** per spostare una carica di prova $\mathbf{q_0}$ dal punto A al punto B

$$L_{A\to B} = \int_A^B F_e \cdot d\vec{l} = \int_A^B \frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r \cdot d\vec{l} =$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} \frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_A}\right)$$

Dipende solo dalla posizione iniziale e finale

(Valido in generale)

La forza elettrostatica è conservativa, quindi il lavoro necessario a spostare una carica è indipendente dal percorso e possiamo introdurre l' Energia potenziale elettrica

$$\Delta U = U_f - U_i = -L$$

Di regola l'energia potenziale è riferita ad un livello cui attribuiamo valore di Energia Potenziale nullo e spesso si sceglie un punto ad ∞ come riferimento di potenziale.

Il potenziale Elettrico

Il lavoro che si deve compiere per spostare una carica q tra due punti A e B in presenza di un campo elettrico E e':

$$L_{AB} = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_A^B q\vec{E}\cdot d\vec{s}$$

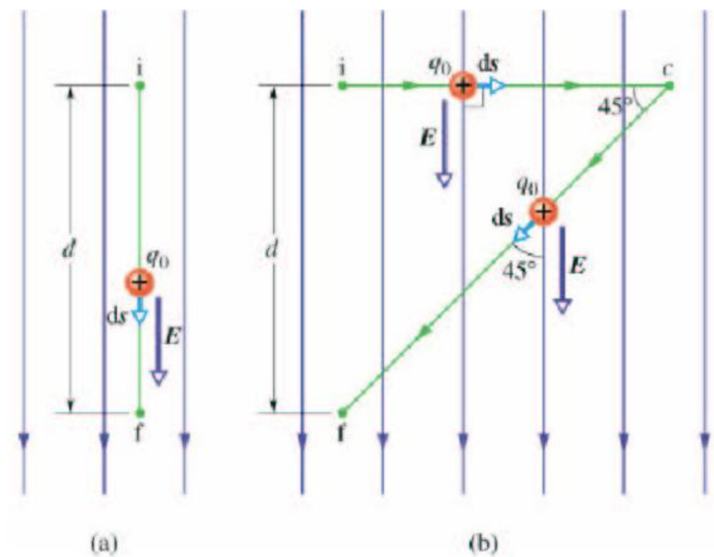
Poiché il lavoro e' proporzionale a q, possiamo definire il lavoro per unità di carica ***differenza di potenziale (ddp).***
La ddp e' sempre calcolata tra due punti.

$$\boxed{V_{AB} \equiv V_B - V_A \equiv \frac{L_{AB}}{q} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}}$$

Se si fissa il punto di partenza (ad es. all'infinito) si parla di ***potenziale elettrico***.

La ddp (ed il potenziale elettrico) sono grandezze molto usate. L'unita' di misura e' il J/C. Questa grandezza ha il nome di **Volt (V).**
Nel caso di campo costante e cammino rettilineo, si ha (sia per il cammino "if", che per il cammino "ic,if":

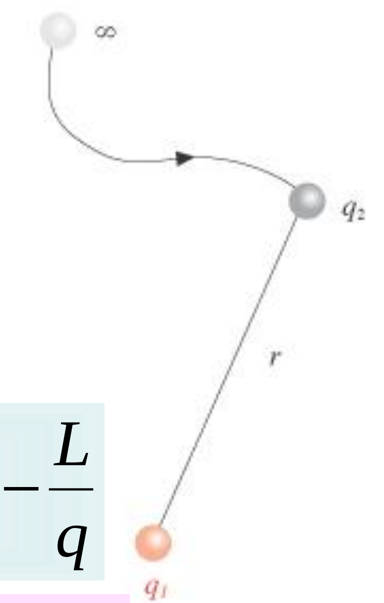
$$V_{AB} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = -Es\cos\theta = -Ed$$



Potenziale Elettrico

Quindi il potenziale elettrico o potenziale è una quantità scalare ed è dato dal rapporto

$$V = \frac{U}{q_0}$$



Pertanto la differenza di potenziale tra due punti dello spazio è data da:

$$\Delta V = \frac{U_f - U_i}{q} = V_f - V_i$$

Dalla definizione discende anche che:

$$\Delta V = V_f - V_i = -\frac{L}{q}$$

Inoltre la scelta per il potenziale di riferimento (nullo ad ∞) equivale a dire che prendendo la carica da infinito ($V_i = 0$) si ha:

$$V_f = -\frac{L_\infty}{q}$$

Il potenziale in un punto qualunque corrisponde al lavoro svolto dal campo elettrico sulla carica di prova (e diviso per tale valore) per spostarla da infinito al punto considerato.

Tramite la nuova unità di misura possiamo ridefinire anche l'unità di misura del campo elettrico. Infatti si ha:

$$[E] = \frac{N}{C} = \frac{N}{J/V} = \frac{V \cdot N}{N \cdot m} = \frac{V}{m}$$

*Altra unità di misura usata per l'energia (soprattutto quando si parla di semiconduttori o di energie di legame) è l'**Elettronvolt** (eV)*

Lavoro necessario a portare un elettrone da infinito al potenziale elettrico di 1 V.

$$1eV = 1.6\cdot 10^{-19} C\cdot 1V = 1.6\cdot 10^{-19}\ J$$

Lavoro Svolto da una forza esterna

Se una forza esterna obbliga una carica q a spostarsi in campo elettrico E, da un punto ***i*** ad un punto ***j*** ⇒ Teorema lavoro ed Energia Cinetica ⇒ $\Delta E_k = L_{ext} + L_{campo}$

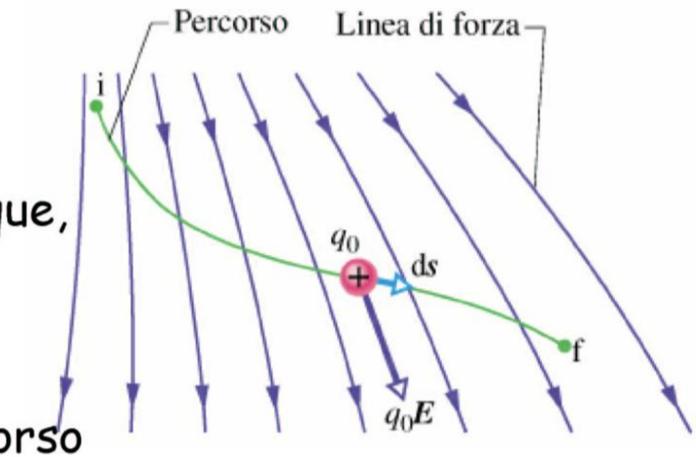
Se la carica è ferma in ***i*** ed è ferma anche in ***j*** ⇒ $0 = L_{ext} + L_{campo}$ ⇒ $L_{campo} = -L_{ext}$

Ma il campo elettrico è conservativo ⇒ $L_{campo} = -\Delta U = -\left(U_f - U_i\right)$

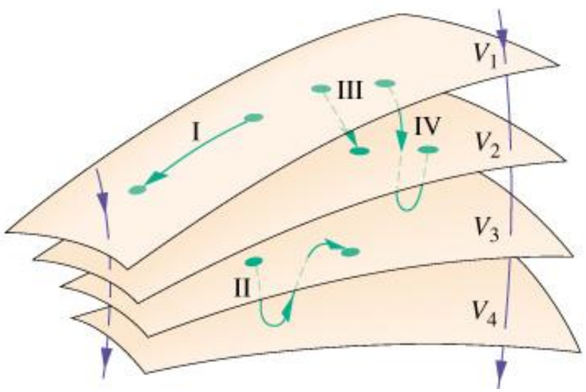
$$\boxed{L_{ext} = U_f - U_i = qV_f - qV_i = q\Delta V}$$

Pertanto qualunque sia il tipo di forza esterna possiamo sempre dire che il lavoro necessario a spostare una carica ferma da una posizione all'altra è: $L_{ext} = q\Delta V$

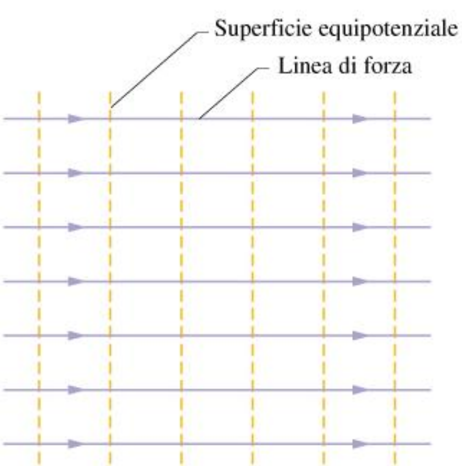
Superfici equipotenziali

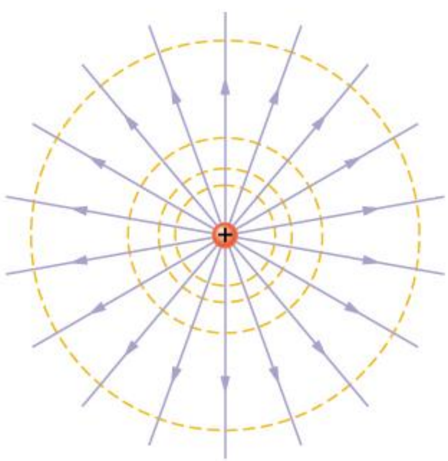


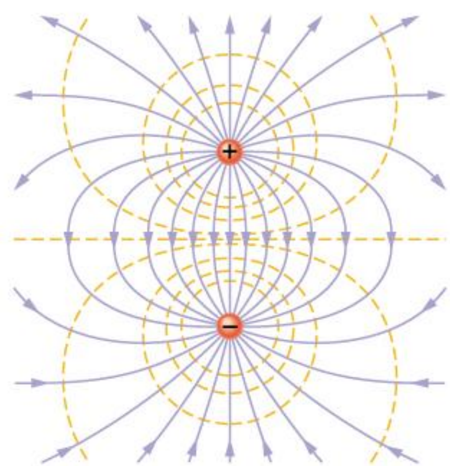
Nel caso di campo variabile, e di percorso qualunque, occorre calcolare un integrale di linea. Si puo' dimostrare che in qualunque caso,in cui il campo elettrico è generato da distribuzioni di cariche il risultato dell'integrazione NON dipende dal percorso scelto. *(i campi elettrostatici sono conservativi)*



Muovendosi su una linea o superficie di eguale potenziale, ***non si compie lavoro*** . Queste superfici (reali o immaginarie) sono sempre ad ogni punto ortogonali alle linee di forza del campo elettrico (vd. definizione di ddp)







Se non fosse così, una componente del campo elettrico, che è tangente alla linea di forza, si troverebbe lungo la superficie equipotenziale.

Calcolo del potenziale dato il campo elettrico

Se si conosce l'espressione del campo elettrico è possibile trovare l'espressione del potenziale.

Supponiamo di effettuare spostamenti infinitesimi su una carica di prova q_0

Il lavoro necessario a spostare la carica in uno spostamento **ds** è :

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

quindi l'intero lavoro per uno spostamento arbitrario è:

$$L = q_0 \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Ma $q_0 \Delta V = -L$

Pertanto la differenza di potenziale tra due punti qualunque nello spazio è data dall'integrale di linea del prodotto scalare tra E e lo spostamento.

$$\Delta V = V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Se stabiliamo che il potenziale è nullo nel punto iniziale allora il potenziale in qualunque altro punto sarà:

$$\boxed{V = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Il Potenziale di una carica Puntiforme

Supponiamo di voler spostare la carica q_0 in figura all'infinito, avendo collocato nell'origine degli assi la carica q che genera il campo elettrico.

Qualunque sia la direzione **ds** del percorso il prodotto scalare vale:

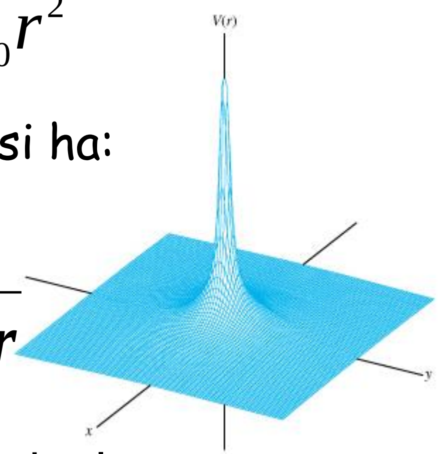
$$\vec{E}\cdot d\vec{s} = E\vec{u}_r \cdot d\vec{s} = E\,ds\cos\vartheta$$

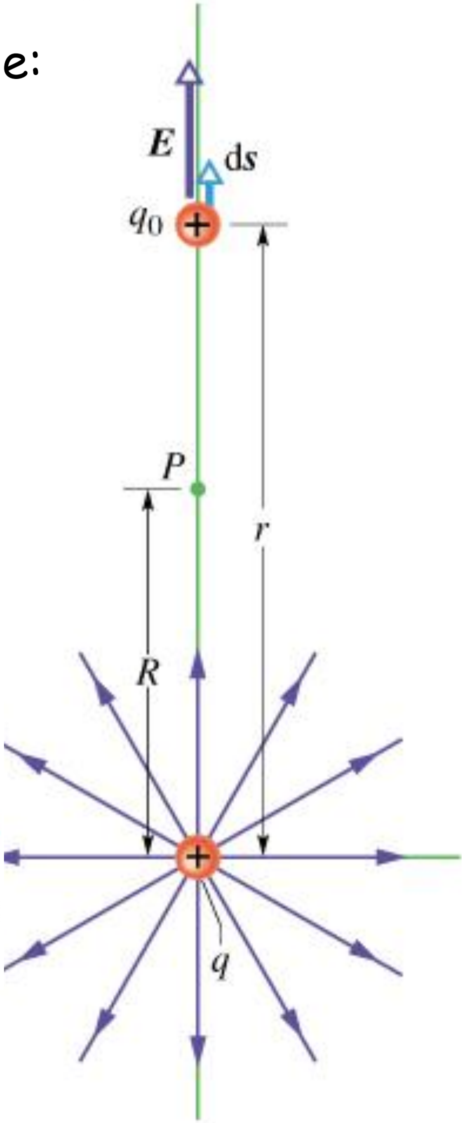
Ma *ds cos*θ è la proiezione del vettore **ds** lungo la direzione radiale ovvero: $ds\cos\vartheta = dr$

Quindi $$V_f - V_i = -\int_R^{\infty} E\,dr = -\int_R^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

Se pongo **nullo il potenziale all'infinito** (**V_{fin}**) si ha:

$$V = \int_r^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{\infty} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



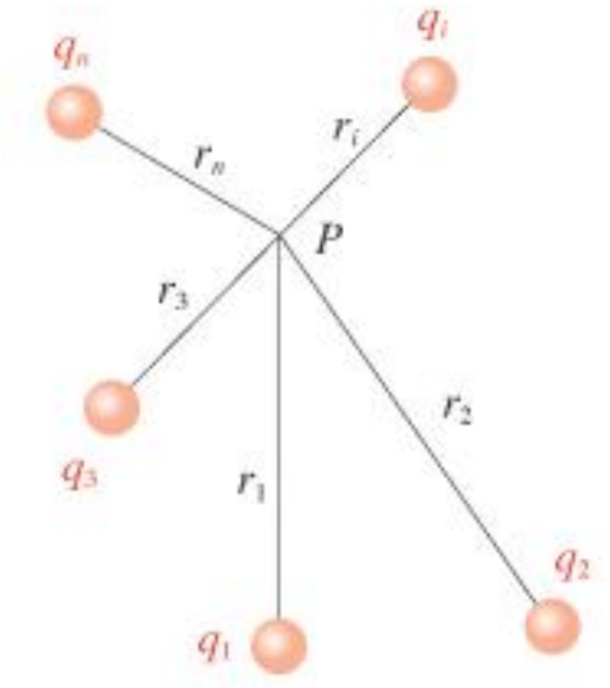


Pertanto il potenziale della carica puntiforme ha lo stesso segno della carica che genera il campo.

Potenziale di un insieme di cariche Puntiformi

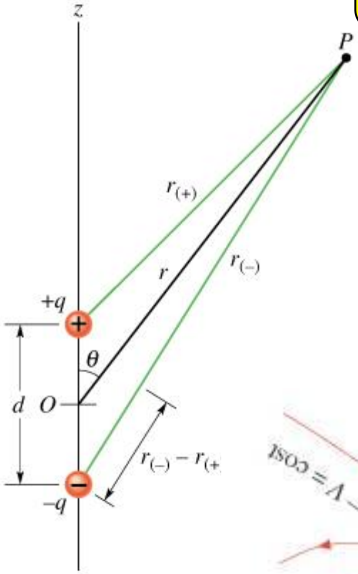
Il Principio di sovrapposizione e la definizione di potenziale comportano che il potenziale elettrico dovuto ad un insieme di cariche puntiformi è dato dalla somma dei potenziali dovuti a ciascuna delle sorgenti, quindi:

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i}$$

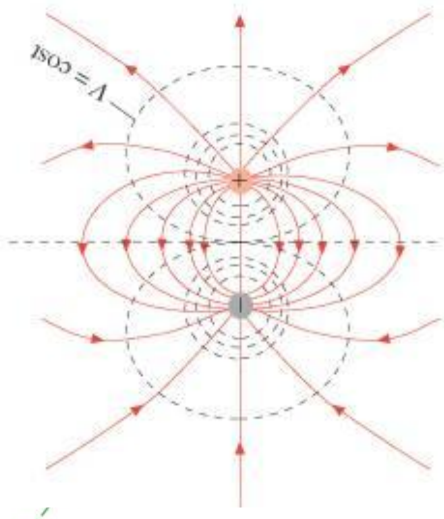


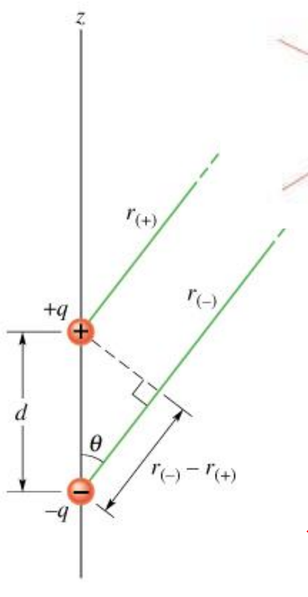
Rispetto alla situazione del campo elettrico il vantaggio consiste nel dover sommare **semplici quantità scalari** (*e non vettoriali come per il campo elettrico*).

Potenziale di un dipolo elettrico



(a)





(b)

Calcoliamo il potenziale dovuto al dipolo in un generico punto P del piano del dipolo.

Per il principio di sovrapposizione si ha:

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_+ + \mathrm{V}_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{r}_+} + \frac{-\mathrm{q}}{\mathrm{r}_-}\right) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}$$

A grande distanza, tale che ***r » d***

$$r_- - r_+ \approx d\cos\vartheta$$

$$r_- \cdot r_+ \approx r^2$$

Per cui:

$$V = \frac{qd\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

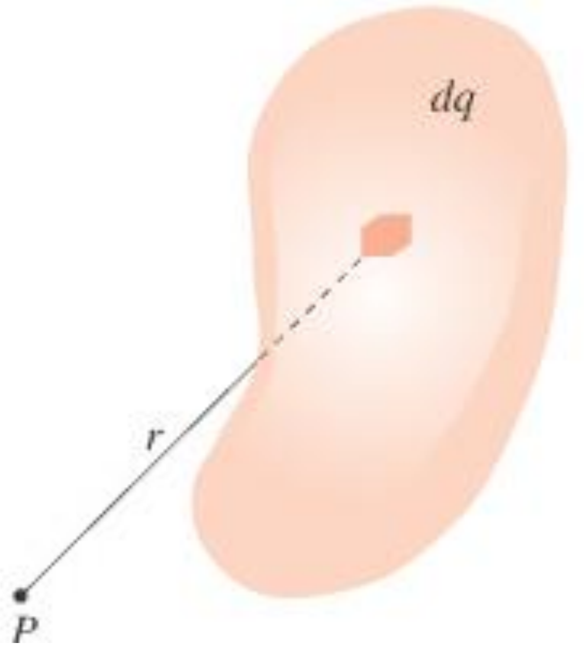
Anche il potenziale del dipolo (così come il campo) si attenua più velocemente di quello della carica puntiforme.

Potenziale di una distribuzione continua di cariche

Quando la distribuzione di carica è continua le somme dei potenziale diventano integrali. Quindi se consideriamo un elemento infinitesimo puntiforme il suo potenziale nel punto P dello spazio sarà

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

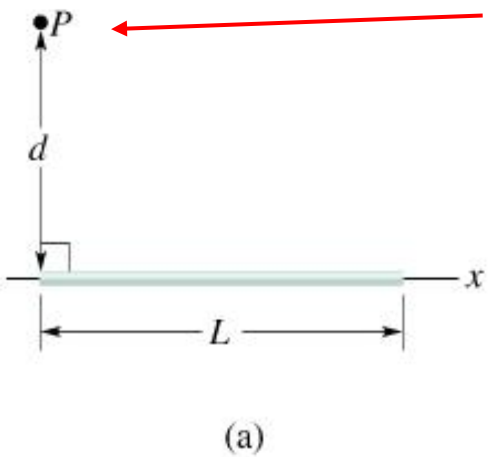
$$V(r) = \int_C dV = \int_C \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



Vediamo ora alcune applicazioni legate a distribuzioni di carica lineare e planare

Potenziale di una distribuzione lineare di cariche

Consideriamo una bacchetta finita di lunghezza L
e con carica distribuita uniformemente



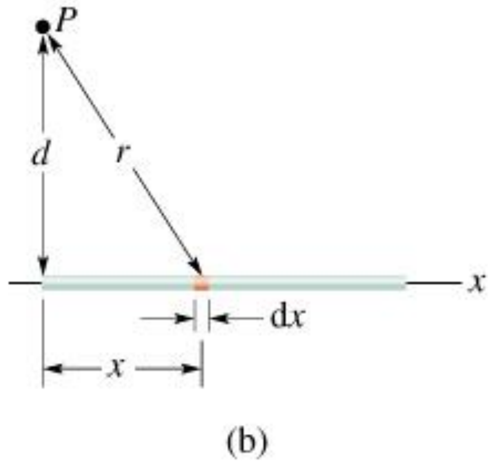
(a)

Consideriamo il punto P in figura posto in corrispondenza di uno degli estremi della bacchetta

Carica per unità di lunghezza

ora $\frac{Q}{L} = \lambda \ (costante)$ *e* $dq = \lambda \, dx$

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+d^2}}$$



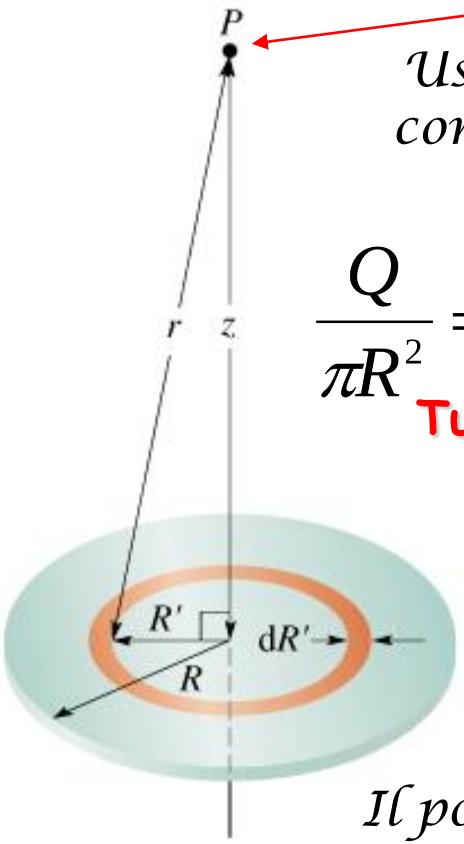
(b)

$$V = \int dV = \int_0^L \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{L+\left(L^2+d^2\right)^{1/2}}{d}\right] \succ 0$$

Potenziale di un disco carico omogeneamente

Consideriamo un generico punto sull'asse z di un disco carico di raggio R

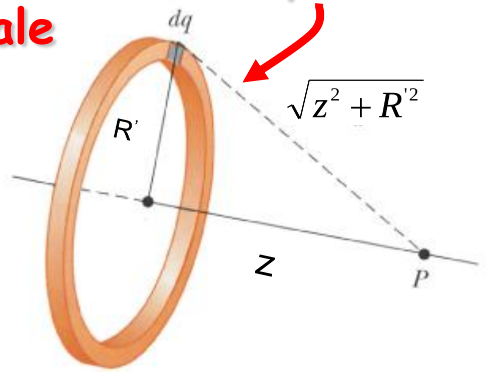


Uso il **PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE** esteso a un continuo di anelli (corone circolari) infinitesimi carichi

Carica per unità di area

$$\frac{Q}{\pi R^2} = \sigma \ (costante) \quad e \quad dq = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot 2\pi R' dR'$$

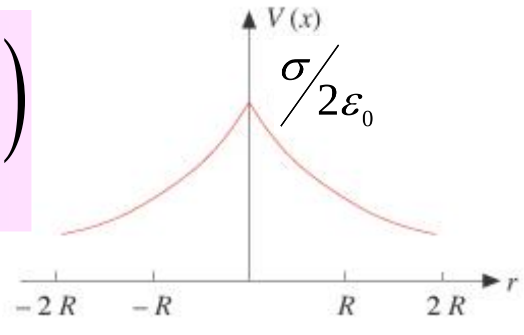
Tutti i punti dell'anello sono alla stessa distanza r dal punto P per cui il suo potenziale vale



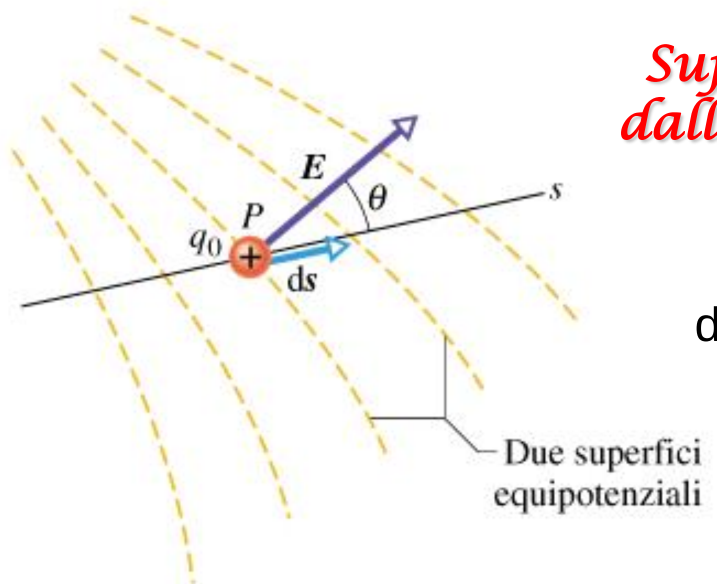
$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{\sigma \cdot R' dR'}{2\varepsilon_0 \sqrt{z^2 + R'^2}}$$

Il potenziale totale si ottiene integrando:

$$V = \int dV = \int_0^R \frac{\sigma \cdot R' dR'}{2\varepsilon_0 \sqrt{z^2 + R'^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2 + R'^2} - z\right)$$



Calcolo del Campo Elettrico, dato il Potenziale



Supponiamo di muovere la carica di prova q_0 dalla superficie equipotenziale V a quella $V+\Delta V$

Il lavoro (dalla definizione di potenziale) ⇨ $$L = -q_0 dV$$

Possiamo pero anche scrivere (dalla definizione di lavoro) che: ⇨ $$dL = \left(q_0 \vec{E}\right) \cdot d\vec{s}$$

$$dV = -E\cos\vartheta ds$$

Componente di E lungo la direzione **s** $$\frac{dV}{ds} = -E\cos\vartheta$$

La componente del campo elettrico E in qualsiasi direzione è la derivata del potenziale elettrico, cambiata di segno, rispetto a quella direzione

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Energia potenziale in presenza di un sistema di cariche puntiformi

Per costruire un sistema di cariche collocate in vari punti dello spazio

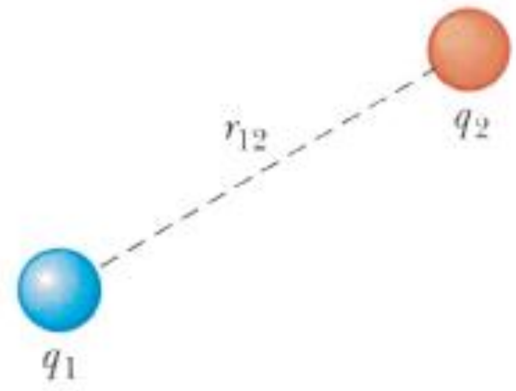
$\Downarrow$

Spendere Energia per vincere le Forze di Campo

L'energia potenziale elettrica di un sistema di cariche puntiformi è uguale al lavoro svolto da un agente esterno per portare il sistema nella configurazione indicata, spostando ciascuna carica da una distanza infinita alla propria posizione

Quindi ad esempio l'energia potenziale elettrica di una coppia di cariche puntiformi vale

$$\boxed{U = L = q_2 V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}}$$

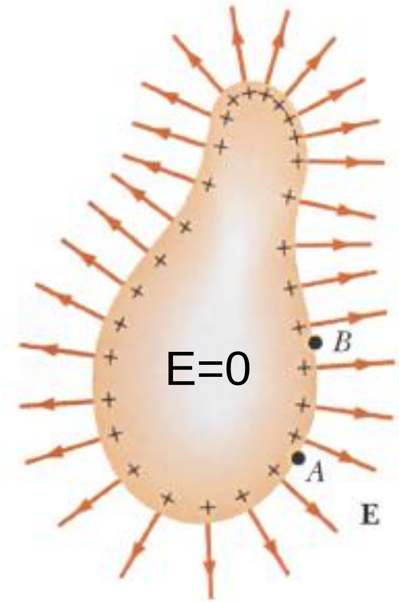


Potenziale per un conduttore carico isolato

Dalla definizione del potenziale

$$V_f - V_i = -\int_i^f E\,ds$$

Poiché all'interno del conduttore **E=0** allora il potenziale è lo stesso su tutti i punti del conduttore.



Una carica su un conduttore isolato si dispone sulla superficie del conduttore stesso in modo che tutti i punti del conduttore, sulla superficie e all'interno, sono allo stesso potenziale.

Questo vale anche se il conduttore è semplicemente immerso in un campo elettrico esterno. Il conduttore continuerà ad essere una superficie equipotenziale e le linee di campo saranno perpendicolari alla superficie.