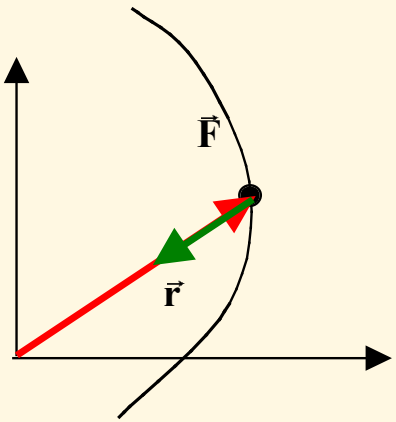
Forze centrali

- Si definisce *forza centrale* una forza agente in una certa regione dello spazio con le seguenti proprietà:
  - per qualunque posizione del punto materiale P che subisce la forza,
  - la direzione della forza agente su P passa sempre per un punto fisso dello spazio, detto *centro della forza centrale*,
  - e il suo modulo è funzione soltanto della distanza del punto materiale P dal centro stesso.
- Esempio di forza centrale: la forza di gravitazione universale.

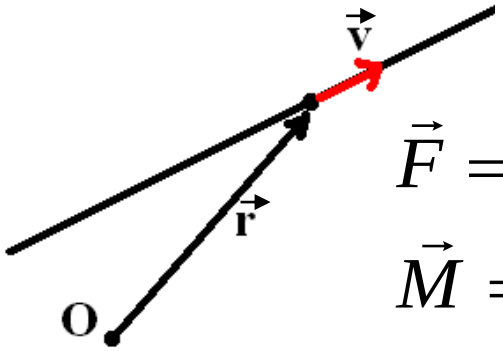
$$\vec{\mathbf{F}} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}$$

- Anche la forza di Coulomb è centrale $\vec{\mathbf{F}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r$

- Così come la forza elastica $\vec{\mathbf{F}} = -kx\vec{\mathbf{i}}$



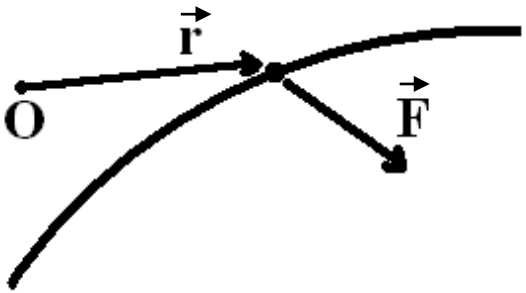
- Le forze centrali sono conservative



$$\vec{F} = 0$$

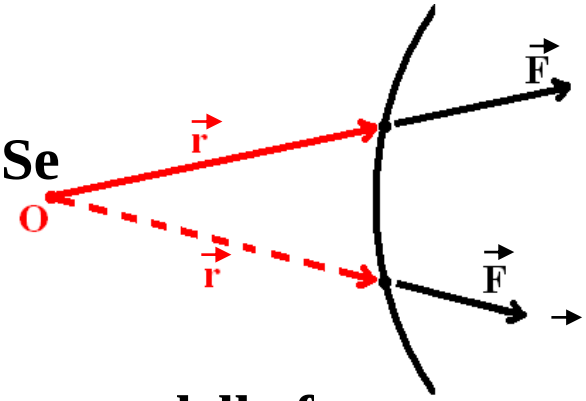
$$\vec{M} = 0$$

particella libera



$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Se



$$\vec{r} \,//\, \vec{F}$$

Forze centrali

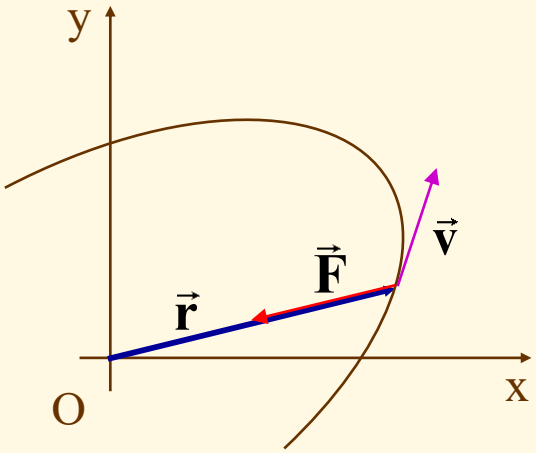
$$\vec{M} = 0$$

O = centro della forza

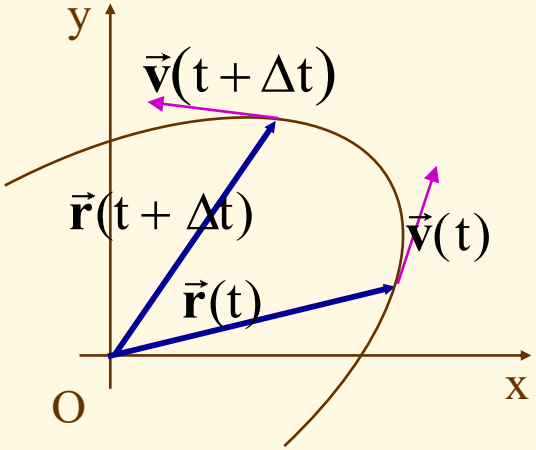
Moto di un punto materiale sotto l'azione di una forza centrale

- Il momento di una forza centrale valutato rispetto al centro della forza è nullo
  - La forza ed il vettore posizione sono paralleli o anti paralleli

$$\frac{d\vec{\ell}_o}{dt} = \vec{M}_o \qquad \frac{d\vec{\ell}_o}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\ell}_o = \text{costante}$$

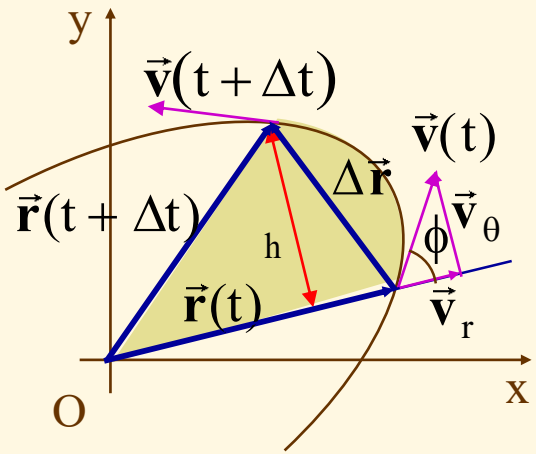


- Il momento della quantità di moto rispetto al centro della forza deve rimanere costante
  - in direzione
    - Il moto è un moto piano
  - Verso
    - La traiettoria viene percorsa sempre nello stesso verso: orario o antiorario
  - Modulo
    - La velocità areale è costante: il segmento che connette il centro della forza con il punto materiale spazza aree uguali in tempi uguali.



La velocità areale

- Consideriamo l'intervallo di tempo Δt
  - L'area spazzata nell'intervallo Δt è quella evidenziata in figura
  - Approssimativamente uguale all'area del triangolo di lati $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}(t+\Delta t)$, $\Delta\mathbf{r}$.
  - L'eguaglianza approssimata diventa precisa per Δt che tende a zero.
  - L'area del triangolo vale: $\Delta A = \frac{1}{2} r(t) h$



La velocità areale:

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} r(t) h}{\Delta t} = \frac{1}{2} r(t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h}{\Delta t}$$

Dalla definizione di velocità istantanea ricaviamo che:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow v_\theta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h}{\Delta t}$$

e quindi

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r v_\theta = \frac{1}{2} r v \operatorname{sen} \phi$$

Il modulo del momento della quantità di moto rispetto al centro della forza vale: $\ell_O = r m v \operatorname{sen} \phi$ e quindi:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\ell_O}{m}$$

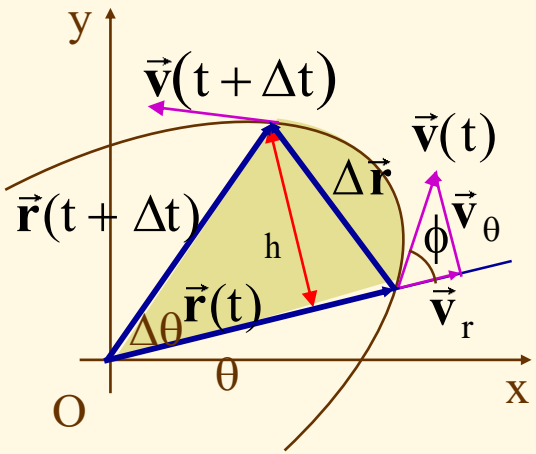
Nel caso di forze centrali, poiché il modulo del momento della quantità di moto è costante, allora la velocità areale è costante

La velocità areale

- Se indichiamo con $\Delta\theta$ l'angolo formato tra i vettori posizione all'istante t e t+Δt

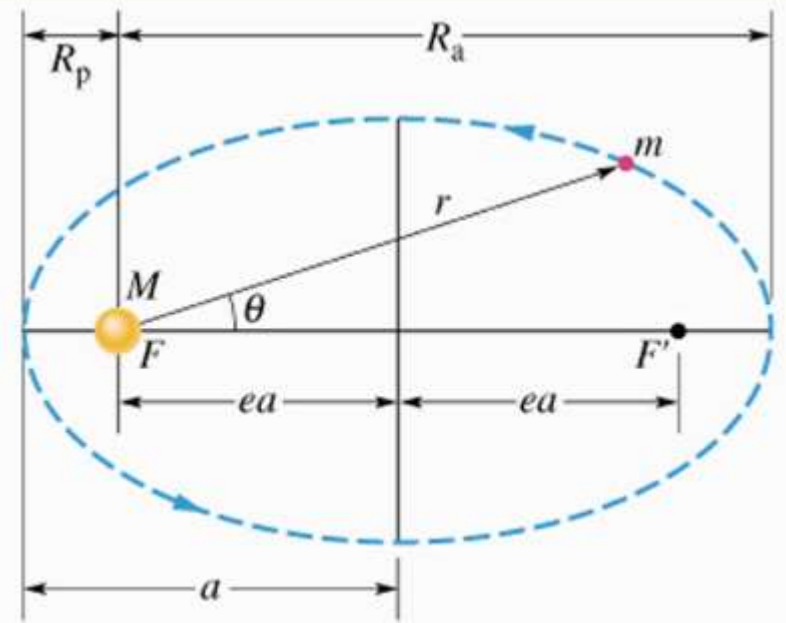
$$v_\theta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t)\,\mathrm{sen}(\Delta\theta)}{\Delta t} =$$

$$= r(t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\omega$$



Il momento angolare: $\ell_O = rmv\,\mathrm{sen}\,\theta = mrv_\theta = mrr\omega = mr^2\omega$

Perielio
Più veloce



Afelio
Più lento

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

10. Gravitazione Universale

Sinora, abbiamo parlato di grandezze ***cinematiche*** (velocità, accelerazione) e di grandezze ***dinamiche*** (forze,..). Abbiamo trovato la relazione tra queste grandezze (Leggi di Newton, leggi di conservazione). Rimane una domanda:

Che cosa origina le forze?

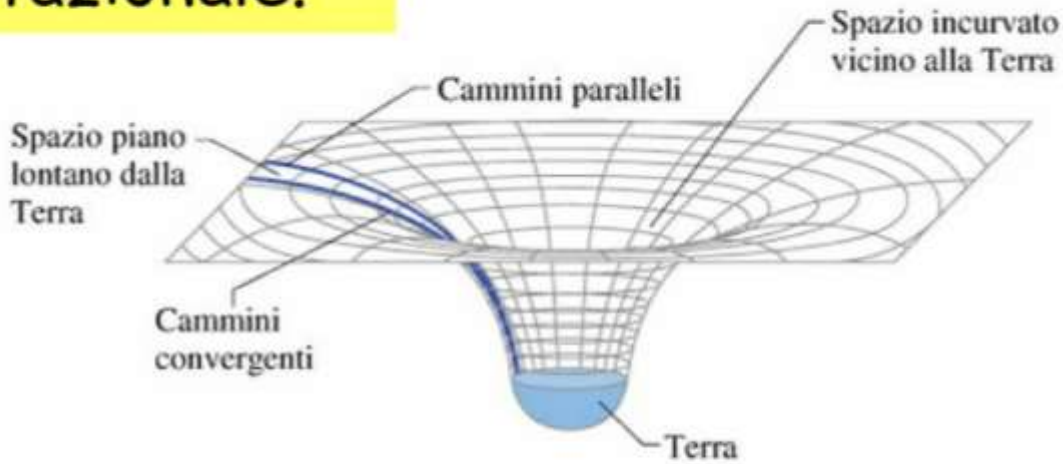
E' questo il problema che deve risolvere la fisica; sino a poco tempo fa' si conoscono 4 tipi di forze *fondamentali*:

- **Forza gravitazionale**, originata dalle **masse**;
- **Forze elettromagnetiche**, originate dalle **cariche elettriche e dal loro moto;**
- **Forze forti,** all'interno dei protoni e neutroni, originate da ***cariche di colore***;
- Forze deboli.

A partire dagli anni '70, si e' compreso che le forze deboli e le forze elettromagnetiche sono aspetti diversi dello stesso meccanismo, e le forze fondamentali si sono ridotte a 3. Tutti gli aspetti della fisica sono riconducibili (per ora) a questi 3 tipi di interazione fondamentali.
L'Uomo per primo ha avuto esperienza coi fenomeni gravitazionali.

La Forza Gravitazionale.

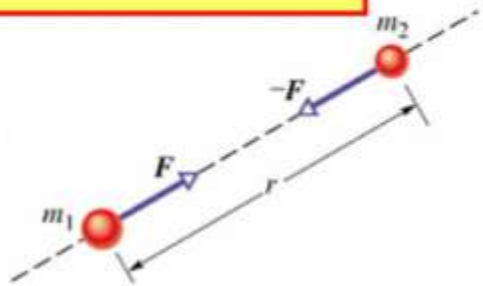
In termini di fisica moderna, si pensa che una massa possa *deformare la geometria* dello spazio-tempo. Anche se matematicamente complicato, questo concetto ha una semplice rappresentazione nel caso bidimensionale!



Tutto si basa sull'osservazione che le masse si attraggono! Non solo oggetti vengono attratti dalla Terra (caduta libera) ma anche la Luna e' attratta (e cade!!) sulla Terra. *I. Newton* (1665) formulo' la Legge di Gravitazione Universale:

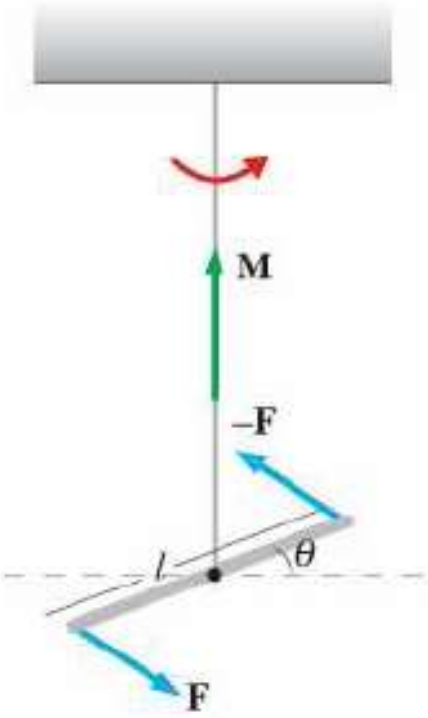
$$\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r} \qquad G = 6.67\cdot 10^{-11}\ \ (Nm^2/kg^2)$$

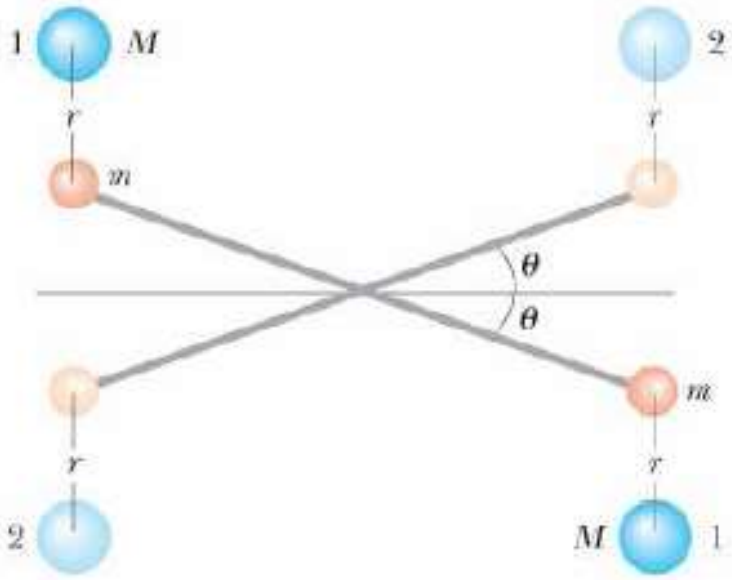
m_1 ed m_2 rappresentano le masse, r la distanza mentre G e' la costante Gravitazionale



"Nothing yet. ...How about you, Newton?"

Misura di G con la Bilancia di torsione di Cavendish





Gravita' sulla superficie Terrestre

In realtà, la mela attrae la Terra così come la Terra attrae la mela (III Legge). Tuttavia, gli effetti sono più evidenti sulla mela, in quanto **l'accelerazione** (II legge) sulla mela e' molto più grande, mentre e' trascurabile per la terra.

(La cosa difficile da mostrare, e' che se la materia si distribuisce uniformemente a gusci, allora e' **come se** tutta la massa fosse concentrata nel suo centro. Newton invento' il calcolo integrale per risolvere questo problema!)

Pesiamo la Terra.

Noi conosciamo gia' che i corpi cadono in prossimita' della superficie Terrestre con una accelerazione costante verso il basso: F=mg. E' compatibile tale legge con la Legge di Gravitazione Universale? Supponiamo m_2= massa terra, r_T=6300 km:

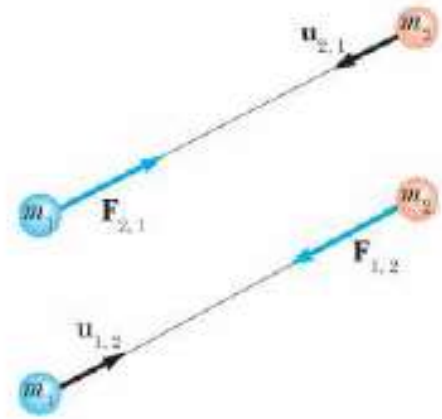
$$F = G\frac{mm_T}{(r_T+h)^2} \approx \left(\frac{Gm_T}{r_T^{\,2}}\right)m = mg$$

(Trascuriamo h rispetto a r_T ; la direzione sara' sempre perpendicolare alla superficie terrestre)

$$g = \left(\frac{Gm_T}{r_T^{\,2}}\right) \Rightarrow m_T = \frac{gr_T^{\,2}}{G} = \frac{9.8\times(6.3\cdot 10^6)^2}{6.67\cdot 10^{-11}} = 5.8\cdot 10^{24}\,kg$$

Campo Gravitazionale

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{12}$$



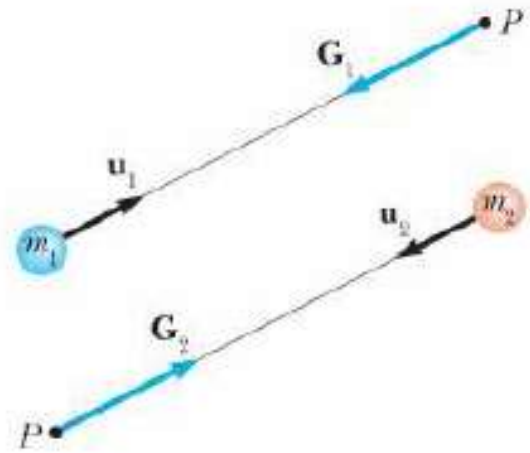
questa è la forza che lega due masse qualsiasi, $u_{1,2}$ è il versore che va m_1 a m_2. Posso riscrivere le due forze come

$$\vec{F}_{12} = (-\gamma \frac{m_1}{r^2} \vec{u}_{1,2}) m_2 \qquad \vec{F}_{2,1} = (-\gamma \frac{m_2}{r^2} \vec{u}_{2,1}) m_1$$

Pongo il termine tra parentesi eguale a G_i, campo gravitazionale, generato dalla massa m_i

$$G_1 = (-\gamma \frac{m_1}{r^2} \vec{u}_1) \Rightarrow \vec{F}_{1,2} = m_2 \vec{G}_1$$

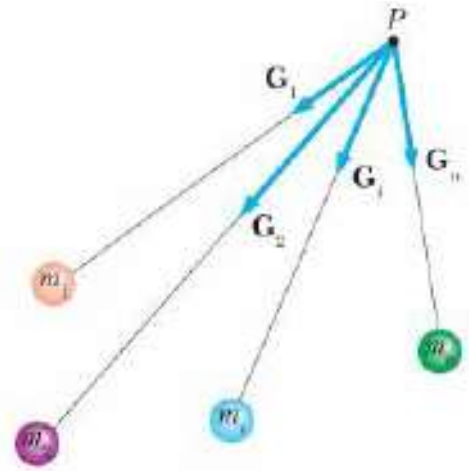
$$G_2 = (-\gamma \frac{m_2}{r^2} \vec{u}_2) \Rightarrow \vec{F}_{2,1} = m_1 \vec{G}_2$$



Campo Gravitazionale

Le formule sopra scritte valgono per masse puntiformi o a simmetria sferica. Se ci sono più masse vale il principio di sovrapposizione; se G_i è il campo della iesima massa

$$G_i = -\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \bar{u}_i$$

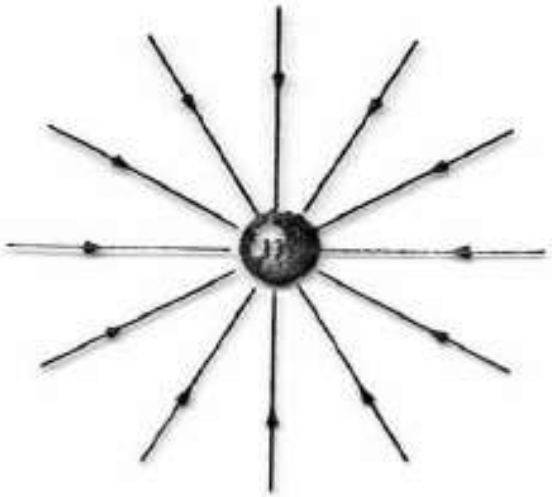


Sommo vettorialmente ed ho il campo totale in un punto generico P

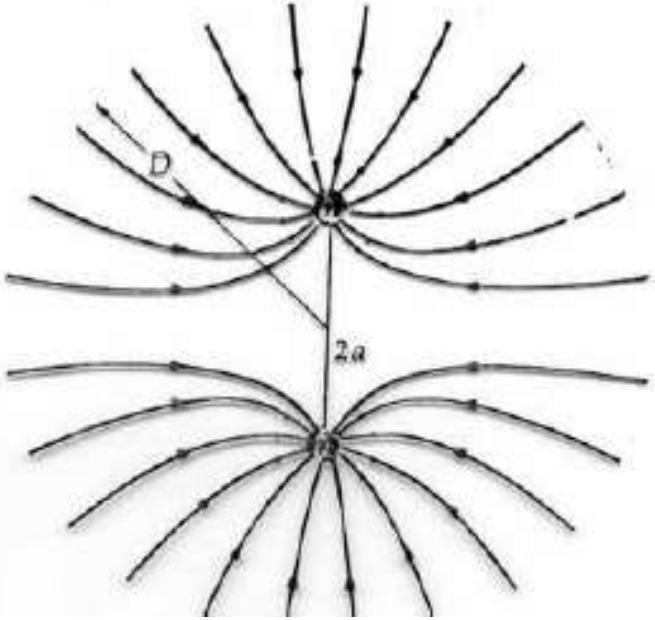
$$G(P) = \sum_{1}^{n}{}_{i} \left(-\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \bar{u}_i\right)$$

Rappresentazione grafica dei campi : linee di forza

1. Il vettore del campo ha la direzione della tangente alla linea di forza in ogni punto
2. iniziano e finiscono sulle "sorgenti" del campo
3. la loro densità è proporzionale all' intensità del campo
4. la loro distribuzione nello spazio in genere rispecchia le "simmetrie" delle sorgenti



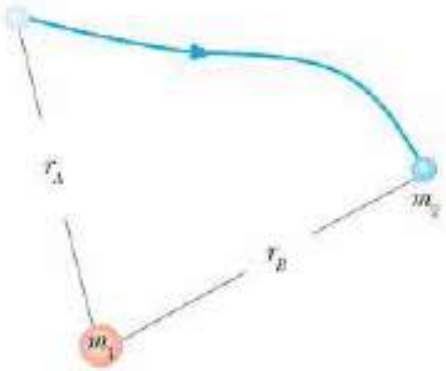
Linee di forza che indicano il campo gravitazionale vicino ad una massa puntiforme. La direzione delle Linee di Forza indica la direzione del campo in ogni punto; la densità delle linee è proporzionale all' intensità del campo



Linee di forza che indicano il campo elettrico generato da due cariche puntiformi di stessa intensità e di stesso segno

Energia potenziale del Campo Gravitazionale

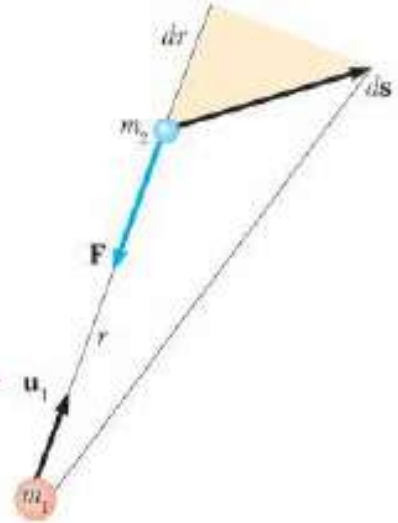
Calcoliamo il lavoro compiuto dalla forza per spostare una massa da un punto A ad un punto B



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$W_{AB} = \int_A^B -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_1 \cdot d\vec{s} = \int_A^B -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr$$

$$W_{AB} = -\gamma m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A}\right) = E_{p,A} - E_{p,B}$$



Definiamol'energia potenziale della forza di gravità che come già detto è una forza conservativa

$$E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

W è nullo se spostamento è tra due posizioni con stessa distanza (r) da m_1; energia potenziale non cambia

dalla definizione di potenziale
Trovo relazione tra forza e E_p:

$$E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

$$\boxed{F(r) = -\frac{dE_p}{dr}}$$

E_p <0 per r finito
Ep =0 per R=∞
W>0 se m viene da ∞

$$\text{infatti } \frac{d}{dr}\left(-\gamma \frac{m_1 m_2}{r}\right) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

per una distribuzione continua:

$$W(r) = -m \int \frac{\gamma}{r} dm$$

la forza di Newton è corretta solo se m ha una distribuzione di massa sferica o se è puntiforme altrimenti vale per gli elementi dm
per i sistemi legati E totale <0

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{Mm}{r} < 0$$

consideriamo infatti un corpo di massa m (satellite) orbitante attorno ad un corpo di massa M(pianeta). Sia M fisso nell' origine di un sistema di riferimento inerziale e l' orbita di m sia circolare.

$$\boxed{E_p(r) = -\gamma \frac{Mm}{r}}$$

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2}$$

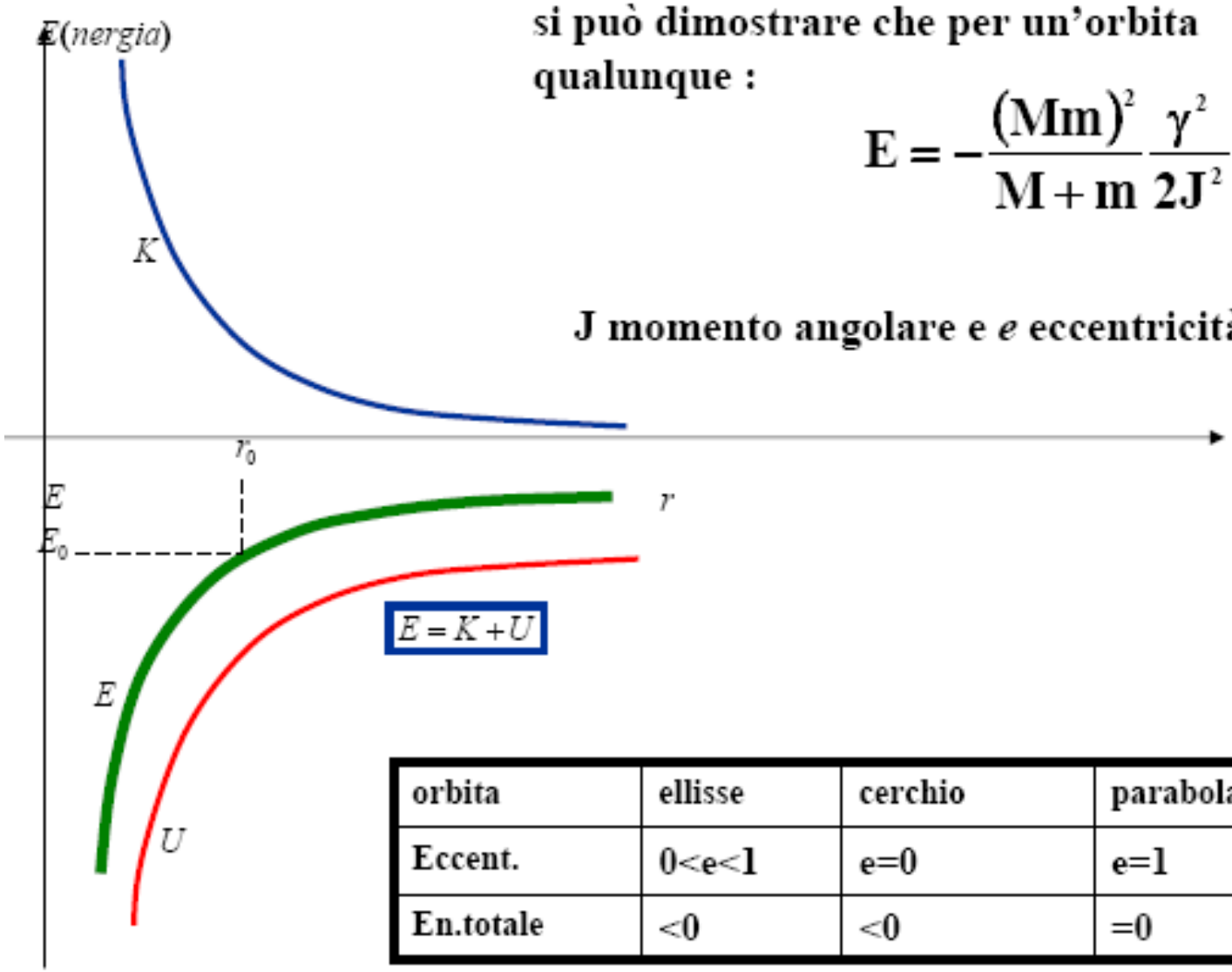
$$\gamma \frac{Mm}{(r)^2} = m\omega^2 r \longrightarrow \gamma M = \omega^2 r^3$$

$$\frac{\gamma M}{r} = \omega^2 r^2 \longrightarrow \boxed{E_K = \frac{1}{2}\frac{\gamma Mm}{r}}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}\gamma\frac{Mm}{r} - \gamma\frac{Mm}{r}$$

$$\boxed{E = -\frac{1}{2}\gamma\frac{Mm}{r} < 0}$$

vale per tutti i sistemi legati



si può dimostrare che per un'orbita qualunque :

$$E = -\frac{(Mm)^2}{M+m}\frac{\gamma^2}{2J^2}(1-e^2)$$

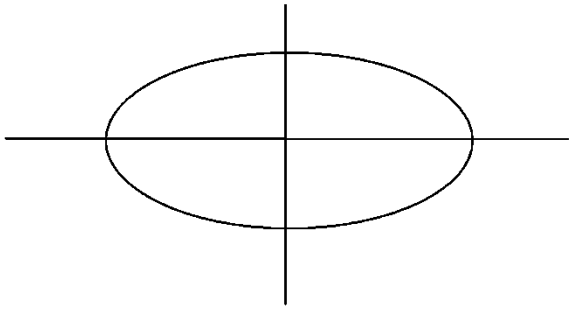
J momento angolare e *e* eccentricità dell'orbita

orbita	ellisse	cerchio	parabola	iperbole
Eccent.	0<e<1	e=0	e=1	e>1
En.totale	<0	<0	=0	>0

Orbite

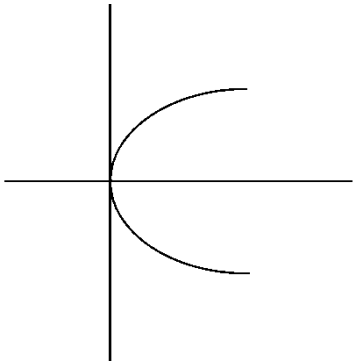
Si dimostra che

$E_T < 0$



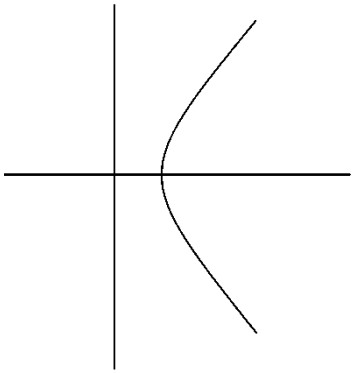
orbite ellittiche

$E_T = 0$



orbite iperboliche

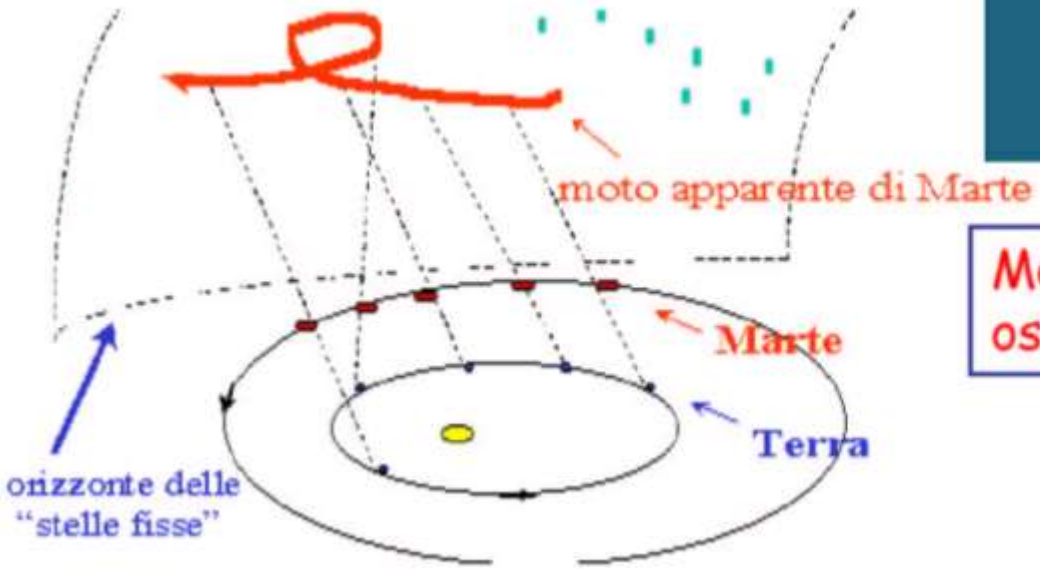
$E_T > 0$



orbite paraboliche

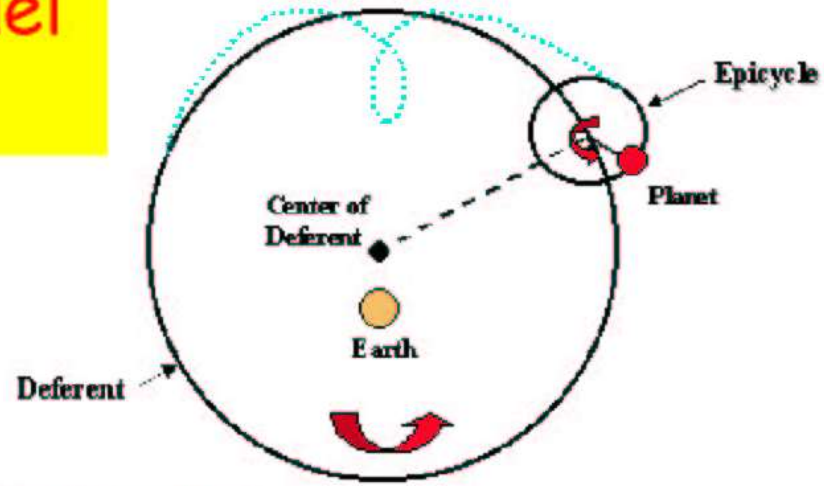
La cinematica dei pianeti

Sin dall'antichità l'Uomo ha studiato il moto degli oggetti celesti. Il moto di questi risultava estremamente complicato, a **causa principalmente di pregiudizi** che condizionavano la scelta del sistema di riferimento.



Moto apparente di Marte osservato dalla Terra nel 1971

Osservazione *cinematica* del Sistema Solare



•**Tolomeo** (120 a.C.): origine del Sistema di riferimento: *Terra*. Composizione di *moti circolari*

•**Copernico** (1500): origine del S. di riferimento: *Sole*. Composizione di *moti circolari*

•Osservazioni *sperimentali* di Tycho **Brahe** (1546-1601)

• **Keplero** (1600):origine del S. di riferimento: *Sole*. Orbite dei pianeti *ellittiche*

Le leggi di Keplero provengono da misure di cinematica. Tuttavia, esse permettono una interpretazione dei dati in termini di legge *dinamica*

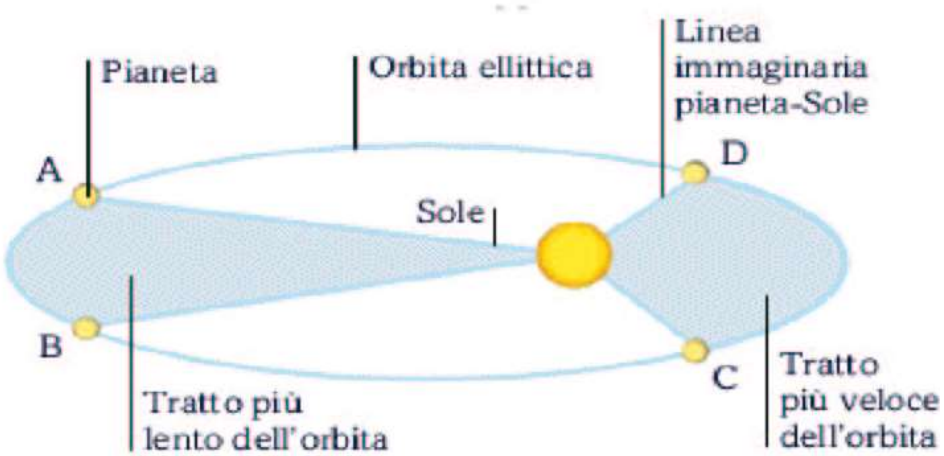
In pratica, si tratta di un complesso problema inverso di cinematica: ***avendo le informazioni sul moto dei pianeti, possiamo ricavare informazioni sulla natura di*** F ? **SI**

Le 3 leggi di Keplero:

1- Le orbite dei pianeti sono *i)* **piane** (ciascun pianeta la propria) e *ii)* **sono di forma ellittica,** con un fuoco occupato dal Sole.

2- Il raggio vettore dal Sole al pianeta **descrive aree proporzionali ai tempi impiegati** a descriverle (velocità areolare costante)

3- **I quadrati dei periodi *T*** di rivoluzione dei pianeti attorno al Sole sono proporzionali ai **cubi del semiasse maggiore *a*** delle rispettive orbite ellittiche, $T^2 \propto a^3$



Interpretazione in termini di legge *dinamica*

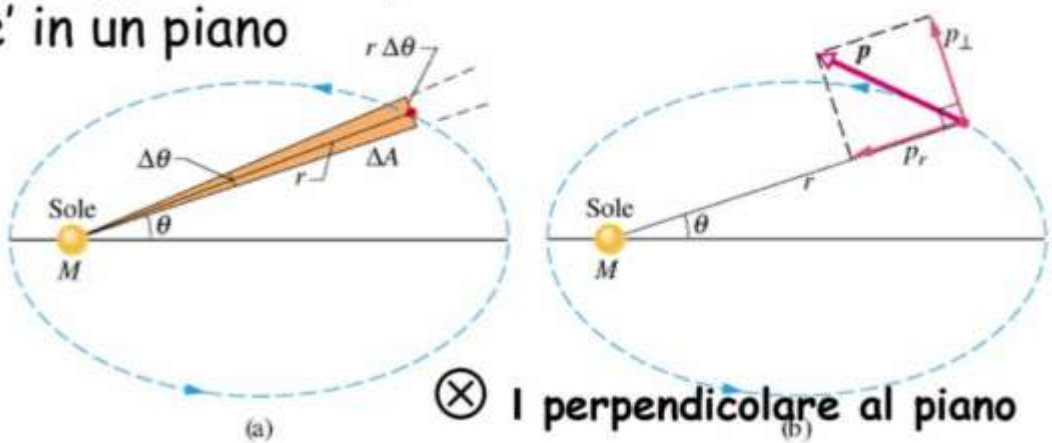
La prima parte della I Legge di Keplero, e la II Legge implicano che la Forza e' di tipo centrale: **F = F (r)**

Un orbita piana implica che il vettore velocita' giaccia in un piano. Questo e' vero se il ***vettore momento angolare l=r×p e' costante***. Se la direzione di **l** e' costante, v e' in un piano

Se ***l=r×p e' costante in modulo,*** si ha la legge delle aree. Infatti:

$|\boldsymbol{l}| = |\mathbf{r}\times\mathbf{p}| = r\,p\,\sin\theta = r p_\perp =$

$= r m v_\perp = m\omega r^2$



⊗ **l perpendicolare al piano**

Consideriamo ora l'area ΔA in arancio in figura:

$$\Delta A \approx \frac{1}{2} r \cdot (r\Delta\theta)$$

(Questa relazione diviene esatta quando **Δt (ossia Δθ) tende a 0**)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \varpi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2m} = \text{cost}}$$

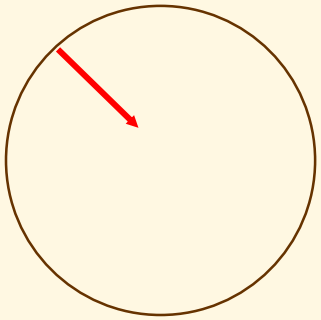
Verifica della III legge di Keplero

- Faremo la verifica supponendo che le orbite dei pianeti siano circolari anziché ellittiche.
  - L'eccentricità per la terra è 0.0167
  - a è il semiasse maggiore
  - b quello minore

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

- Se la traiettoria è circolare il moto è uniforme (la velocità areale deve essere costante)
- Il pianeta è soggetto ad un'accelerazione centripeta
- Quindi la forza di gravitazione universale si comporterà da forza centripeta:

$$F_G = G\frac{mM}{r^2} = ma_n = \frac{mv^2}{r}$$



Verifica della III legge di Keplero

Ma la velocità è legata al periodo dalla relazione:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$G\frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} = \frac{m\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{m4\pi^2 r^2}{rT^2} = \frac{m4\pi^2 r}{T^2}$$

Che appunto verifica la III legge di Keplero

$$G\frac{mM}{r^2} = \frac{m4\pi^2 r}{T^2} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3$$

Terza legge di Keplero per il sistema solare

Pianeta	Semiasse maggiore a (10^{10} m)	Periodo T (a)	T^2/a^3 (10^{-34} a^2/m^3)
Mercurio	5.79	0.241	2.99
Venere	10.8	0.615	3.00
Terra	15.0	1.00	2.96
Marte	22.8	1.88	2.98
Giove	77.8	11.9	3.01
Saturno	143	29.5	2.98
Urano	287	84.0	2.98
Nettuno	450	165	2.99
Plutone	590	248	2.99

Si noti che dal valore sperimentale di r^3/T^2 si può determinare il prodotto GM (che noi abbiamo esplicitamente inserito in F_N). In realta', le orbite non sono che approssimativamente circolari. Utilizzando le orbite ellittiche, i differenti valori di r^3/T^2 nella tabella sono spiegati (leggera dipendenza dalla massa del pianeta)!. Tuttavia anche con questa modifica, il valore per Mercurio resta leggermente anomalo. Questa anomalia venne spiegata rivoluzionando la teoria della Gravitazione (**Teoria della Relatività Generale di Einstein**).

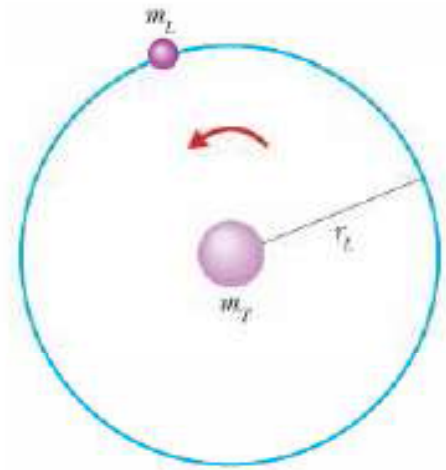
La parte matematicamente più complessa da studiare e' il fatto che le orbite dei pianeti sono ellittiche (2ª parte della I legge). Anche questo e' conseguenza del fatto che $F \sim 1/r^2$

Conclusioni

Le leggi di Newton sono state l' esempio più importante di come osservazioni cinematiche possano produrre leggi dinamiche. La spiegazione della gravita' terrestre e di quella tra pianeti rappresenta il primo esempio di **unificazione dei fenomeni**

Esempio

Si osserva che un pianeta ha un satelliteche ruota con orbita circolare di raggio 1,5 10^5 Km. Il periodo di rotazione T è 12 giorni. Da questi dati posso Trovare la massa del pianeta?



Si posso perché se il moto è circolare uniforme deve valere
Stessa relazione scritta per il sistema terra luna

$$F_{P,S} = \gamma \frac{m_P m_S}{r_{P,S}^2} = m_S \omega_S^2 r_{P,S} \Rightarrow m_P = \frac{\omega_S^2 r_{P,S}^3}{\gamma}$$

Sostituendo i valori :

$$m_P = \frac{\frac{4\pi^2}{T^2} r_{P,S}^3}{\gamma} = \frac{\frac{39.5}{(12 \cdot 86400)^2}(1,5 \cdot 10^8)^3}{6,67 \cdot 10^{-11}}$$

$$\Rightarrow m_P = \frac{\omega_S^2 r_{P,S}^3}{\gamma} = 1,86 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

per i satelliti artificiali terrestri fissato il T è fissata la distanza dalla superfice terrestre (dal centro della terra)

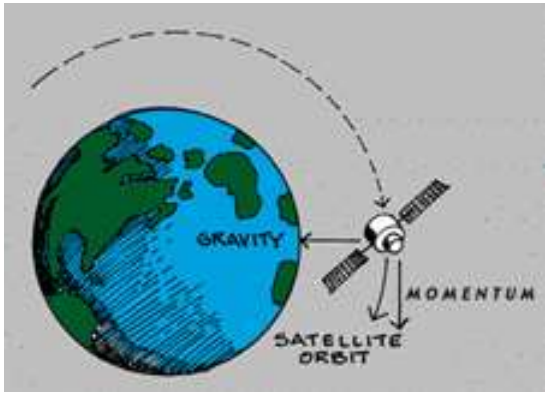
Satelliti

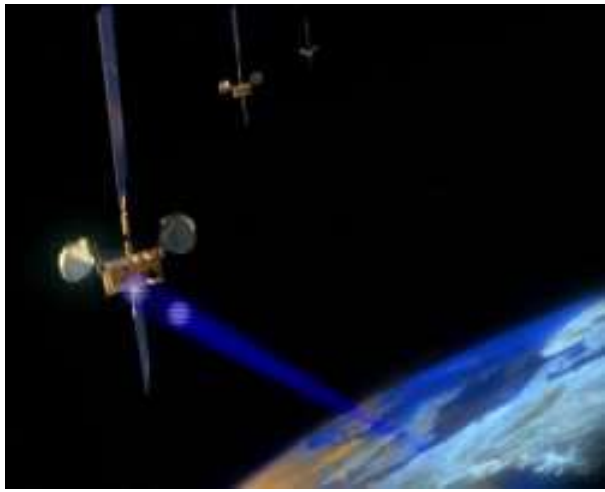
- Cosa tiene in orbita un satellite?

  La sua alta velocità

- Come si muove?

$$G\frac{m_{sat}m_E}{r^2} = m\frac{v_{sat}^2}{r}$$





L'energia potenziale della forza di gravitazione universale - la velocità di fuga

- La forza di gravitazione universale è conservativa

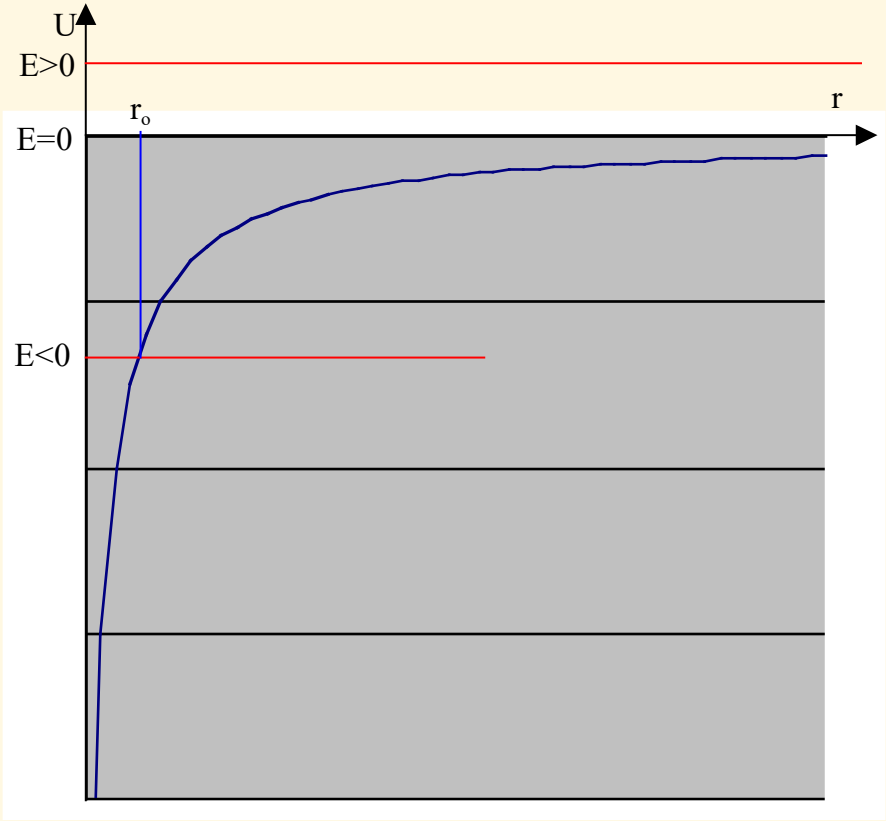
$$U(r) = -G\frac{mM}{r}$$

- La velocità di fuga dalla terra:

$$U = -\frac{GmM_T}{R_T} \qquad E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_T}{R_T}$$

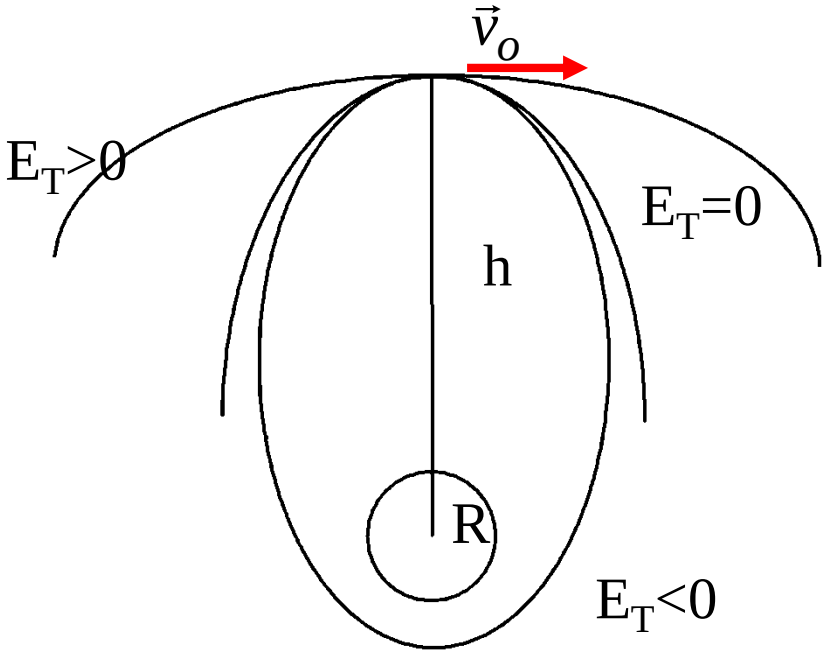
- Per la fuga dalla terra, E>=0:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GmM_T}{R_T} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_f = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$



$$mg = \frac{GmM_T}{R_T^2} \quad \Rightarrow \quad v_f = \sqrt{2gR_T} = \sqrt{2*9.81*6.37*10^6} = \sqrt{125.0*10^6} = 11.2*10^3\ m/s$$

Orbite



Per mettere in orbita un corpo è necessario anche imprimere una componente trasversale alla velocità in modo che $L \neq 0$

A seconda dell'energia totale si avranno diversi tipi di orbite

$$E_T = \frac{1}{2} m v_0^{\,2} - \frac{GmM}{R+h}$$

Orbita circolare $$\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2}$$

$$E_T = -\frac{1}{2}\frac{GmM}{r}$$

Energia totale negativa !

Massa Gravitazionale

Tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione

Massa gravitazionale

$$\vec{F}_g = -G\frac{m_g M_g}{r^2}\hat{u}_r$$

$$\vec{F}_g = m_g \vec{g}$$

Massa inerziale

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}$$

$$F_i = F_g \Rightarrow \boxed{a = \frac{m_g}{m_i} g}$$

$$\frac{m_g}{m_i} = \text{cost}$$ **uguale per tutti i corpi**

Con la scelta delle unità di misura **cost = 1**

Un satellite artificiale si muove su un'orbita che dista 640 km dalla superficie della terra. Il suo tempo di rivoluzione è di 98 minuti. Quale è il modulo della velocità del satellite? Quanto vale l'accelerazione di caduta libera da questa orbita (cioè l'accelerazione di gravità a cui è soggetto un corpo in questa orbita)? Raggio della terra: R_T=6370 km. [$v = 7.5 \times 10^3$ m/s; $a = 8$ m/s^2] SOLUZIONE

Assumendo valida la teoria di Keplero-Newton del Sistema Solare e approssimando l'orbita della Terra ad una circonferenza, determinare la massa del Sole conoscendo il raggio dell'orbita terrestre pari a 149.6 10^6 km. G=6.67 10^{-11} Nm^2/kg^2.

a) Ricavare la distanza Terra-Luna sapendo che il suo periodo orbitale è di 27 giorni, 7 ore e 43 minuti, e che la massa della Terra è $M_T = 5{,}97\times10^{24}$ kg.

b) Quanto vale l'accelerazione di gravità sulla superficie lunare? (massa della Luna: $M_L = 7.35\times10^{22}$ kg; raggio medio della Luna: $R_L = 1737$ km)

La stazione spaziale internazionale (ISS) orbita attorno alla Terra ad un'altitudine di circa 350 km.

a) Calcolare il suo periodo di rotazione intorno alla Terra.

b) Quale è l'accelerazione di gravità g' di un corpo che si trovi fermo alla stessa altitudine? Perché gli astronauti si trovano invece in condizioni di assenza di gravità?

(massa della Terra: $M_T = 5{,}97\times10^{24}$ kg; raggio della Terra: $R_T = 6{,}38\times10^{6}$ m)