Sorgenti e legge di Gauss per il campo B

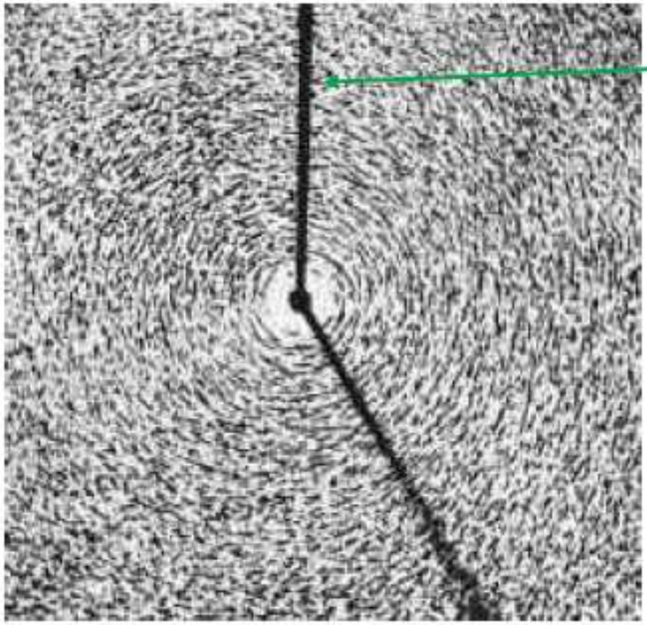
Contrariamente al campo E (indotto da cariche) **NON** e' una analoga carica magnetica (*monopolo magnetico*) a generare il campo B stesso. In qualunque situazione, *le linee di forza del campo magnetico sono linee chiuse*. Questo, poiché i poli N e S si presentano sempre insieme. Matematicamente, si ha:

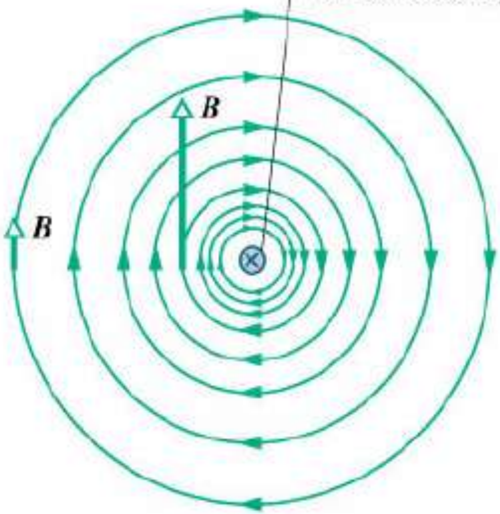
Legge di Gauss per il campo magnetico.

$$\oint_{\text{superficie chiusa}} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

Poiché non sono stati trovate cariche magnetiche, chi origina **B**? H.C. Oerted (1820): ***i campi magnetici vengono generati dal moto di cariche elettriche***

Flusso entrante = Flusso uscente

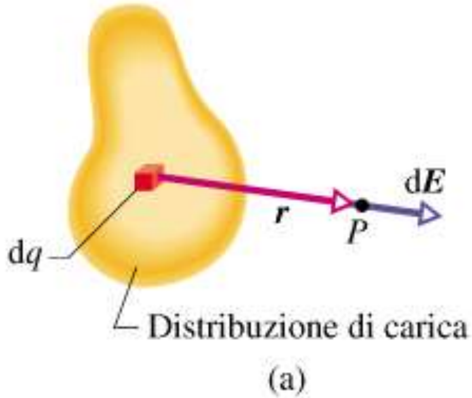




Campi magnetici generati da correnti

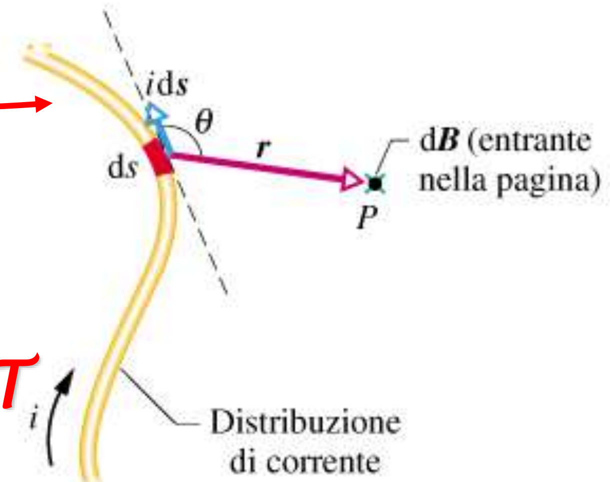
Per calcolare il campo magnetico prodotto da un filo percorso da corrente dobbiamo usare una procedura simile a quella della legge di Coulomb e sapere quale è la forza elementare in un punto nello spazio dovuta ad un elemento di filo percorso da corrente.

*Possiamo considerare un filo qualunque percorso da corrente **i** ed individuare un elemento **ds** (tangente al filo ed orientato secondo la corrente).*



Il contributo di campo magnetico generato da questo elemento ad una distanza **r** vale:

$$d\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i \cdot d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \propto \frac{1}{r^2}$$



Permeabilità magnetica del vuoto

$$\boxed{\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\,\frac{T \cdot m}{A}}$$

LEGGE DI BIOT-SAVART

Equivalente magnetico della legge di Coulomb

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{i\,d\vec{s}\times\hat{u}_r}{r^2}$$

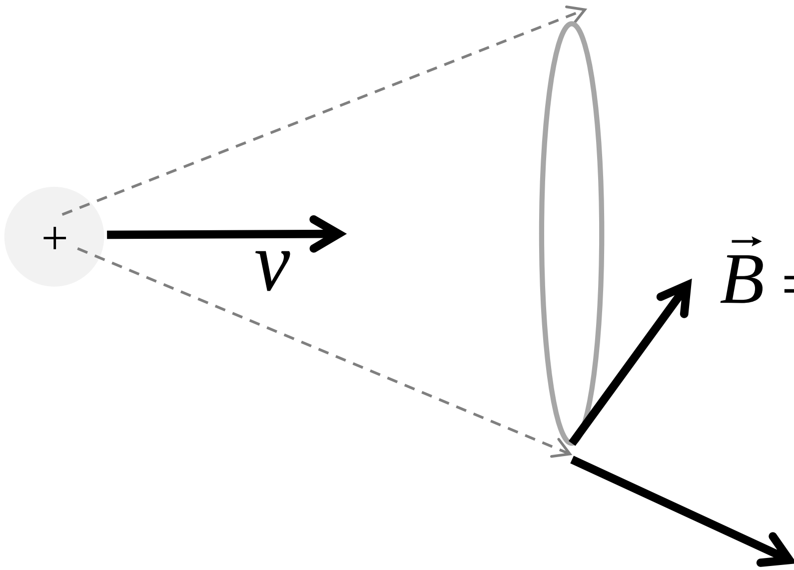
$$\left\{\begin{array}{l} j = \dfrac{i}{\Sigma} \\ \vec{j} = (nq\vec{v}_d) \end{array}\right.$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q\,\vec{v}_d\times\hat{u}_r}{r^2}\,nd\tau \longrightarrow$$

Numero di cariche contenute nel volume $d\tau = \Sigma ds$

Campo prodotto dalla singola carica. **Una carica in moto produce un campo magnetico**

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q\,\vec{v}_d\times\hat{u}_r}{r^2}$$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\,\vec{v}_d \times \hat{u}_r}{r^2}$$

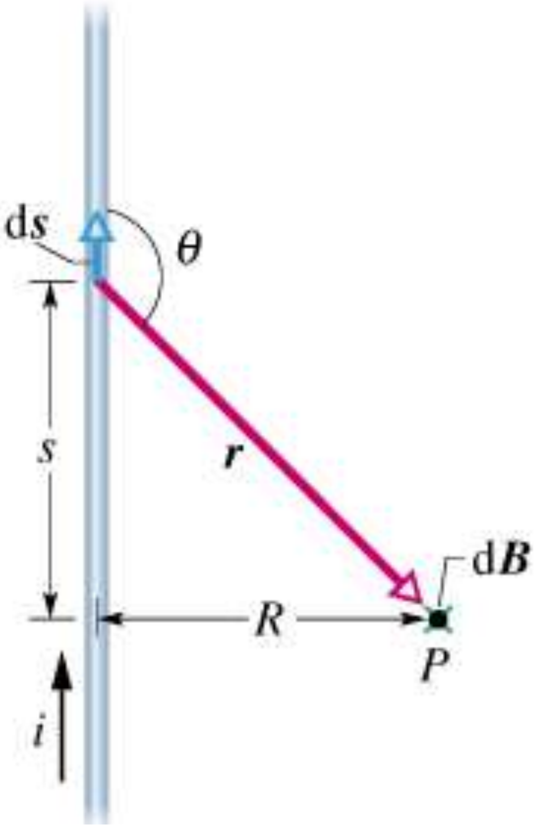
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r$$

Campo elettrico e campo magnetico sono interconnessi

$$\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \, \vec{v}_d \times \vec{E}$$

Campo magnetico del filo rettilineo indefinito

Consideriamo un filo elettrico rettilineo indefinito ("infinitamente lungo", ovvero di lunghezza molto maggiore della distanza R che consideriamo) percorso da una corrente di intensità costante.



Dalla legge di Biot-Savart si ha:

$$d\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i \cdot d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\left|d\vec{B}\right| = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i \cdot |ds| \cdot r \sin\vartheta}{r^3} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i \cdot |ds| \cdot \sin\vartheta}{r^2}$$

Osservando la geometria si ha:

$$\begin{cases} r^2 = R^2 + s^2 \\ R = r\sin(\pi - \vartheta) = r\sin\vartheta \\ s = r\cos(\pi - \vartheta) = -r\cos\vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{R}{\sin\vartheta} \\ s = -R\dfrac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \end{cases}$$

Campo magnetico del filo rettilineo indefinito II

Calcoliamo |ds|

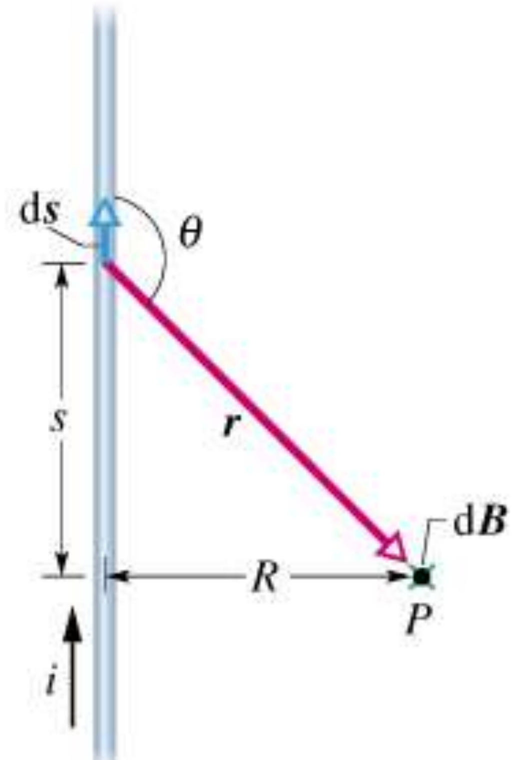
$$\left|ds\right| = \frac{ds}{d\vartheta}\cdot d\vartheta = R\left|\frac{-\sin^2\vartheta-\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta}\right| d\vartheta = \frac{R}{\sin^2\vartheta}d\vartheta$$

Per cui

$$\left|d\vec{B}\right| = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i\cdot\left|ds\right|\cdot\sin\vartheta}{r^2} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i\cdot\dfrac{\cancel{R}}{\cancel{\sin^2\vartheta}}\cdot d\vartheta\cdot\sin\vartheta}{\dfrac{R^{\cancel{2}}}{\cancel{\sin^2\vartheta}}} =$$

$$\left|d\vec{B}\right| = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i\cdot\sin\vartheta}{R}d\vartheta$$

Se il filo è infinitamente esteso (L >>R), nell'integrazione su tutto il filo l'angolo θ varia da 0 a π, mentre il vettore **dB** mantiene sempre la stessa direzione, per cui:



$$\left|\vec{B}\right| = \int_0^\pi\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i\cdot\sin\vartheta}{R}d\vartheta = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i}{R}\int_0^\pi\sin\vartheta\cdot d\vartheta =$$

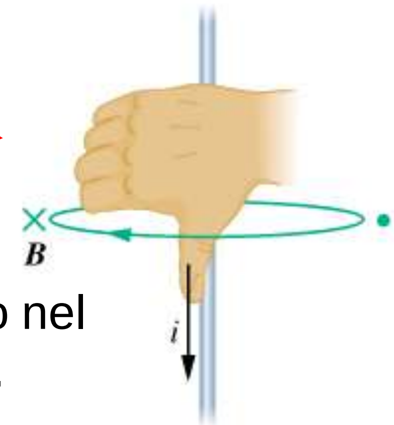
$$= \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i}{R}\left[-\cos\vartheta\right]_0^\pi = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i}{R}(1+1) = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

Campo magnetico del filo rettilineo indefinito III

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

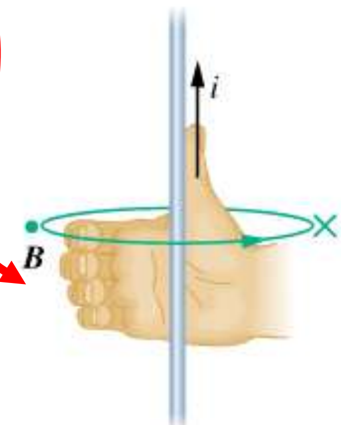
Quale è il verso?

Il verso si determina con la regola della mano destra:
Il campo magnetico ***B*** in ogni punto sulla sinistra del filo è orientato nel verso entrante alla pagina (X) nella direzione delle punte delle dita.



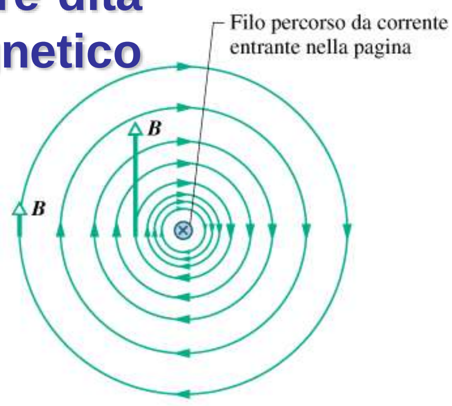
(a)

Se si inverte la corrente, ***B*** in ogni punto sulla sinistra del filo è orientato nel verso uscente alla pagina (●)



(b)

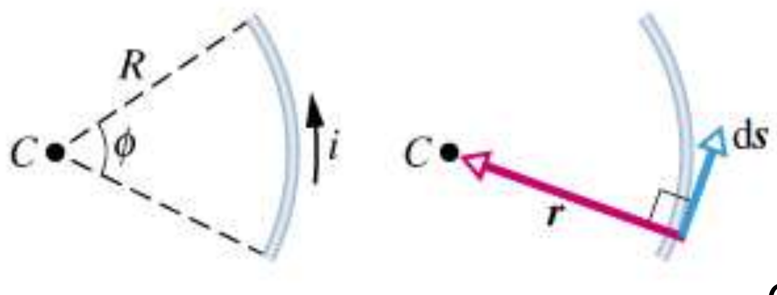
Afferriamo idealmente il filo con il pollice puntato secondo la direzione della corrente nel filo. Il verso di rotazione stabilito dalle altre dita indica il verso delle linee del campo magnetico generato dal filo



Le linee di campo del campo magnetico formano delle circonferenze concentriche al filo

Campo magnetico del filo piegato ad arco

Se il filo è piegato ad arco e consideriamo il campo risultante nel centro di questo arco, abbiamo che dalla figura l'angolo tra ***ds*** *e* ***r*** *e 90° per cui abbiamo che:*



(a) (b)

(c)

$$dB = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i \cdot ds \cdot \sin 90°}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds}{R^2}$$

Questo valore è lo stesso si a come modulo che come direzione e verso per tutti gli elementi infinitesimi per cui abbiamo che nel centro di curvatura del filo si ha:

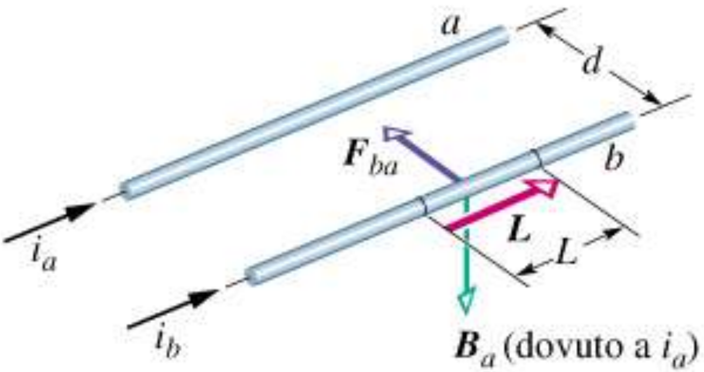
$$B = \int \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds}{R^2} = \int_0^{\phi} \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{R d\phi}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\phi}{R}$$

Nel caso l'arco sia in realtà una **spira circolare** allora il campo magnetico risultante al centro della spira ha direzione perpendicolare al piano della spira e modulo pari a

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{2\pi}{R} = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

Forza tra fili percorsi da corrente

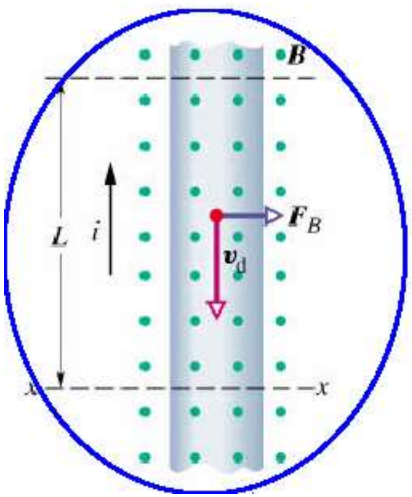
Poiché un filo percorso da corrente ed immerso in un campo magnetico risente di una forza di Lorentz, allora anche due fili paralleli percorsi da corrente interagiscono tra loro, in quanto ognuno di essi genera un campo magnetico e tramite questo producono una forza di Lorentz sull'altro filo.



Consideriamo il caso in cui i due fili sono paralleli ed infiniti, allora calcoliamo il campo magnetico del filo 1 nella posizione del filo 2 che è distante d dall'altro vale:

$$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}$$

Nel caso del secondo filo conduttore, nel tratto L gli elettroni di conduzione trasportano la carica: $\mathbf{q = i_b t = i_b (L/v_d)}$ lungo da direzione del filo.



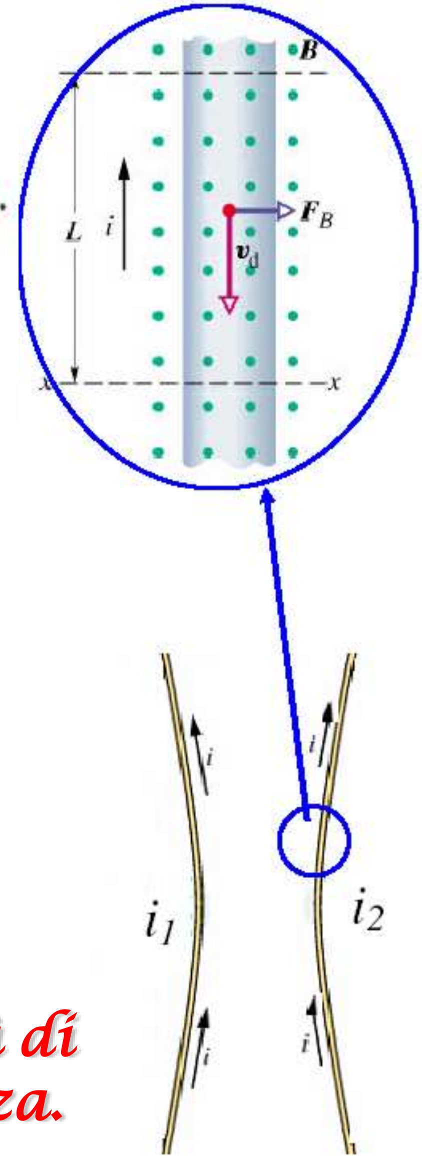
Riscriviamo la forza di Lorentz per questa quantità di carica

Forza tra fili percorsi da corrente II

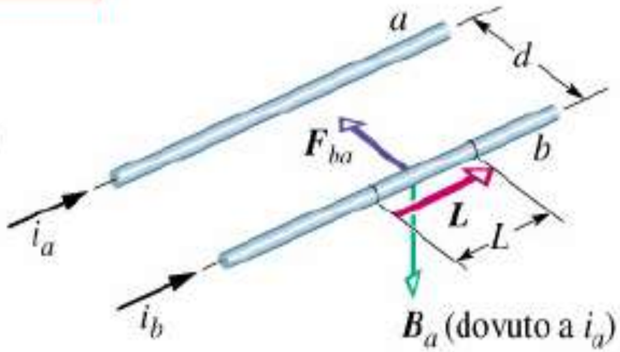
$q=i_b t = i_b\ (L/v_d)$

$$\vec{F} = q\vec{v}_D \times \vec{B} = \left(\frac{Li}{v_d}\right) v_d \hat{L}\times\vec{B} = i\vec{L}\times\vec{B}$$

Forza di Lorentz su un filo.
Per cui:



$$F_2 = i_2 L B_1 = i_2 L\left(\frac{\mu_o i_1}{2\pi r}\right) = \frac{\mu_o i_1 i_2}{2\pi d} L$$



Con la regola della mano destra, fili percorsi da correnti parallele e concordi si attraggono. Se le correnti sono discordi?

Se le correnti sono discordi e parallele la forza è repulsiva.

La forza è proporzionale al prodotto delle intensità di corrente e inversamente proporzionale alla distanza.

La definizione di Ampere

- Da quanto abbiamo visto, se le intensità di correnti che scorrono nei due fili sono uguali, la forza è:

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} l \quad \Rightarrow \quad i = \sqrt{\frac{2\pi d\left|\vec{F}\right|}{\mu_0 l}}$$

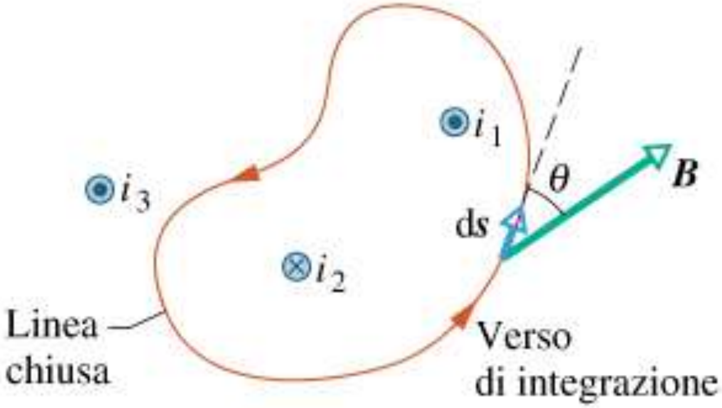
- Possiamo ora comprendere la definizione di dell'unità di corrente elettrica del Sistema Internazionale.
- L'**Ampère** viene definito come l'intensità di corrente elettrica che, fluendo in 2 conduttori rettilinei, paralleli, indefinitamente lunghi, di sezione circolare trascurabile, posti alla distanza di un metro, determina fra di essi una forza magnetica di 2×10^{-7} N per metro di conduttore.

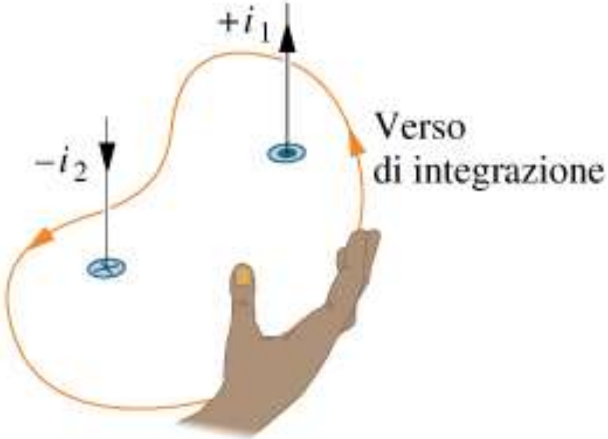
La legge di Ampere

La legge di Ampere stabilisce che la circuitazione di B lungo un percorso chiuso è pari alla somma delle correnti concatenate al percorso stesso:

$$\oint_{linea\,chiusa} \vec{B} \bullet d\vec{s} = \mu_0 i$$

i = *somma delle correnti racchiuse dalla linea*





Nel fare l'integrale attribuiamo un verso di B concorde a quello di integrazione e poi diamo un segno alle correnti (secondo membro) in modo da considerare positive le correnti che sono concordi (secondo l'avvitamento della mano destra) alla direzione nel percorso di integrazione e negative se discordi.

Calcolo di campi magnetici con la legge di Ampere: filo indefinito

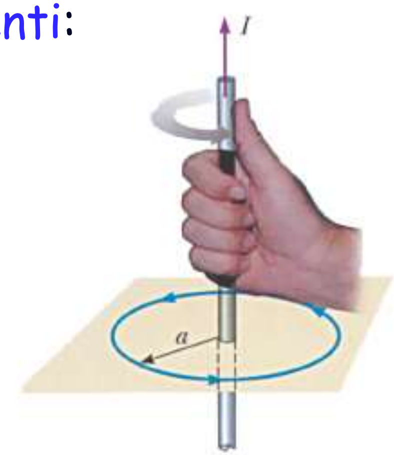
- La legge di Ampère-Maxwell può essere utilizzata calcolare campi magnetici, in alternativa alla I° formula di Laplace (o Legge di Biot-Savart).

- L'utilizzo della legge di Ampère-Maxwell per il calcolo di campi magnetici risulta particolarmente conveniente quando le sorgenti del campo (le correnti) possiedono un sufficiente grado di simmetria.

➢ Consideriamo un filo elettrico rettilineo indefinito neutro percorso da una corrente di intensità costante.

➢ Per le caratteristiche di simmetria del sistema, tutti i punti dello spazio aventi la medesima distanza ***r*** dal filo debbono essere equivalenti:

- nessun effetto fisico può distinguere tra loro due punti dello spazio equidistanti dal filo.



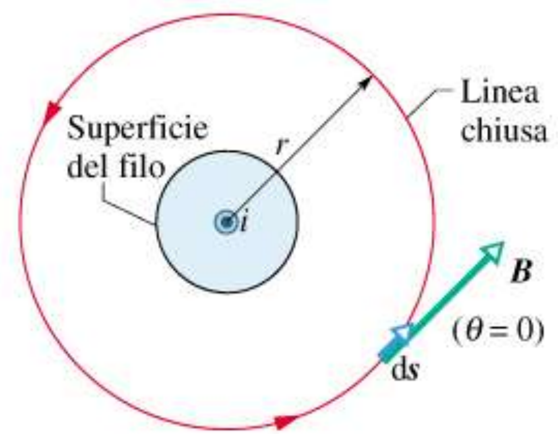
Legge di Ampere: filo indefinito II

Poiché il campo magnetico è un effetto della corrente *i*, dobbiamo attenderci che anche il campo magnetico possieda lo stesso tipo di simmetria.

Si può dimostrare che il campo magnetico può avere soltanto una componente tangente alla superficie cilindrica e giacente su un piano normale al filo.

Tale componente deve avere la medesima intensità su tutti i punti della superficie laterale di un cilindro con asse sul filo.

Consideriamo la circuitazione di **B** lungo la circonferenza ottenuta dall'intersezione del cilindro con un piano normale al filo. La corrente concatenata alla circonferenza è la corrente *i* che scorre nel filo. Avremo perciò:



$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{s} = \oint B\cos\theta \cdot ds = B\oint ds = B(2\pi R)$$

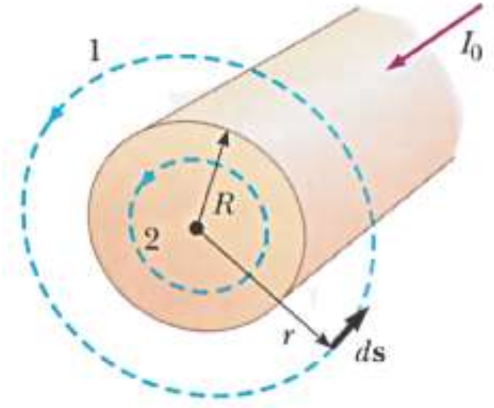
Per il teorema di Ampere si ha $\oint \vec{B} \bullet d\vec{s} = \mu_0 i$

$$\mu_0 i = B(2\pi R)$$

Come già dimostrato precedentemente $\boxed{B = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi R}}$

Legge di Ampere: Campo del filo infinito all'interno del filo stesso

La legge di Ampere permette di calcolare agevolmente anche il campo magnetico all'interno del filo percorso da corrente. Infatti applicando il teorema ad un percorso circolare concentrico al filo e di raggio r < R interno al filo



Dal teorema di Ampere si ha: $$\oint \vec{B} \bullet d\vec{s} = \mu_0 i_{conc}$$

La corrente concatenata è quella che attraversa il percorso circolare e chiaramente è una porzione della totale.

Dal momento che la corrente si distribuisce uniformemente sulla sezione del conduttore, abbiamo che:

$$i_{conc} = jS = j\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad j = \frac{i}{\pi R^2}$$

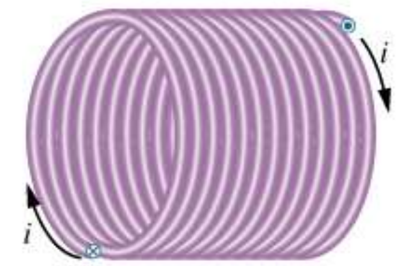
Il campo magnetico è costante su tutti i punti della circonferenza

$$\mu_0 j \cdot \pi r^2 = \mu_0 i_{conc} = B \cdot 2\pi r \quad \Leftarrow \quad \oint \vec{B} \bullet d\vec{s} = \mu_0 i_{conc}$$

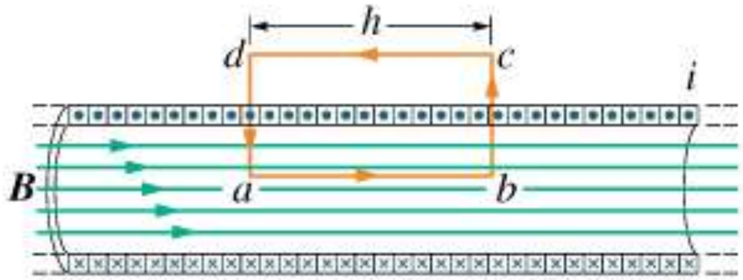
$$\mu_0 \frac{i}{\pi R^2} \cdot \pi r^2 = B \cdot 2\pi r \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} \cdot r}$$

Legge di Ampere: Campo magnetico nei solenoidi

Il solenoide è costituito da un lungo filo avvolto a forma di spirale attorno ad un supporto cilindrico, e le varie spire sono strettamente addossate l'una all'altra.



Assumiamo che la lunghezza del solenoide sia molto grande (o comunque molto più grande del suo diametro) e analizziamo una sezione trasversale di questo solenoide, in questa situazione il campo magnetico tende a disporsi secondo l'asse orizzontale del solenoide stesso ed è costante in modulo.



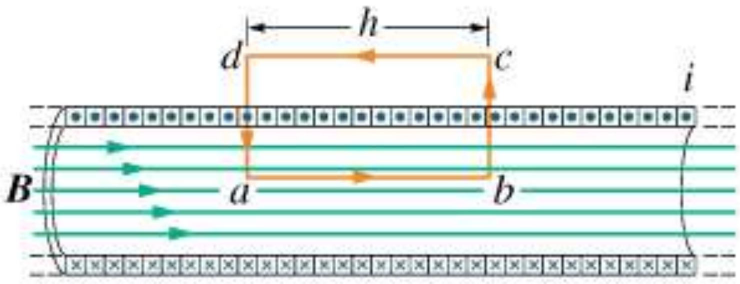
Possiamo allora scegliere un percorso per applicare il Teorema di Ampere il rettangolo ***abcd***.

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{s} = \mu_0 i_{conc} \Rightarrow \oint \vec{B} \bullet d\vec{s} = \int_a^b \vec{B} \bullet d\vec{s} + \cancel{\int_b^c \vec{B} \bullet d\vec{s}} + \cancel{\int_c^d \vec{B} \bullet d\vec{s}} + \cancel{\int_d^a \vec{B} \bullet d\vec{s}}$$

Di questi termini il secondo ed il quarto sono nulli in quanto il percorso ed il campo sono perpendicolari tra loro, il terzo è nullo perché nel solenoide ideale il campo esterno è nullo per cui si ha:

Legge di Ampere: Campo magnetico nei solenoidi II

$$\int_a^b \vec{B} \bullet d\vec{s} = B \cdot h = \mu_0 i_{conc}$$

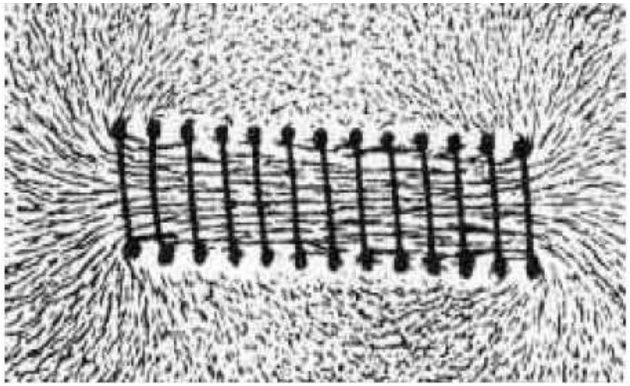


La corrente concatenata è la somma delle correnti delle spire intrecciate al percorso per cui indicando con ***n*** il numero di spire per unita di lunghezza

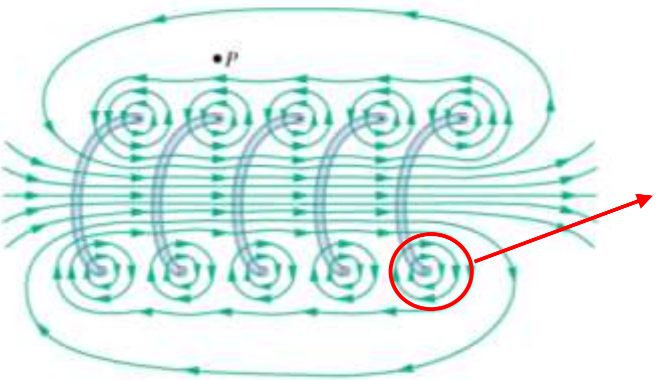
$$i_{conc} = n \cdot h \cdot i \Rightarrow \boxed{B = \mu_0 n \cdot i}$$

i è la corrente entrante nel solenoide

Si osservi che il risultato che abbiamo ottenuto con la legge di Ampère nel solenoide ideale vale per tutti i punti interni al solenoide.



Al centro, sono linee coassiali al S.



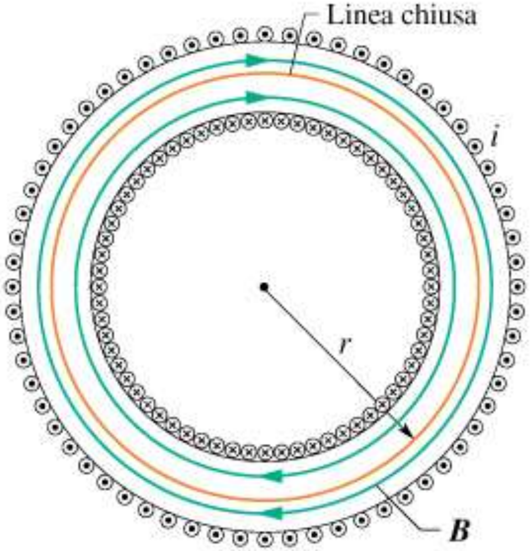
In prossimità dei fili, le linee di forza sono analoghe a quelle di un singolo filo

Legge di Ampere: Campo magnetico nei toroidi

Il toroide è costituito da un lungo filo avvolto a forma di spirale attorno ad un supporto cilindrico con le varie spire strettamente addossate l'una all'altra e ripiegato a forma di ciambella.

(a)

In base a considerazioni di simmetria le linee del campo **B** formano circonferenze concentriche all'interno del toroide. Scegliamo quindi una di queste circonferenze per usarla nella LEGGE DI AMPERE



(b)

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{s} = \mu_0 i_{conc} \Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 i N$$

Dove *i* è la corrente negli avvolgimenti ed N è il numero totale di spire

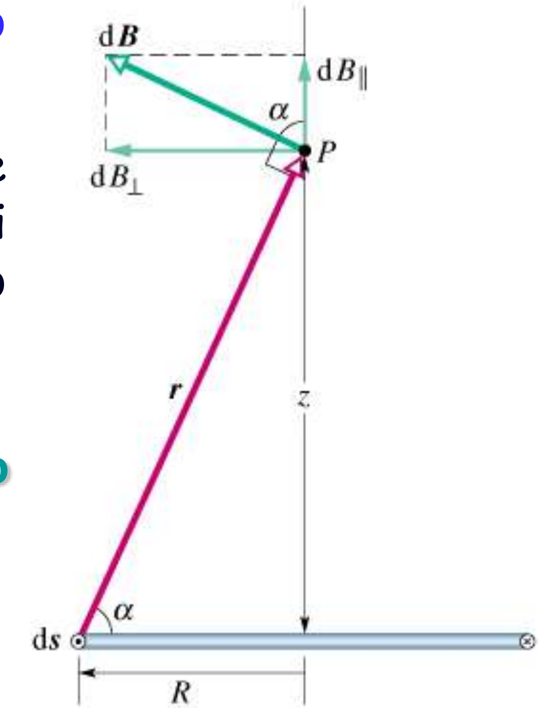
$$\boxed{B = \frac{\mu_0 i N}{2\pi} \frac{1}{r}}$$

Il campo magnetico è nullo esternamente al toroide è non è costante.
Il verso del campo segue la regola della mano destra: chiudendo le dita nel verso della corrente, il pollice indica il verso del campo.

Campo magnetico di una bobina

Consideriamo un filo elettrico di forma circolare percorso da una corrente di intensità costante.

Il calcolo del campo magnetico in tutto lo spazio è complicato: ci limitiamo a calcolarlo nei punti appartenenti all'asse di simmetria del sistema (la retta normale al piano su cui giace la spira e passante per il centro di questa).

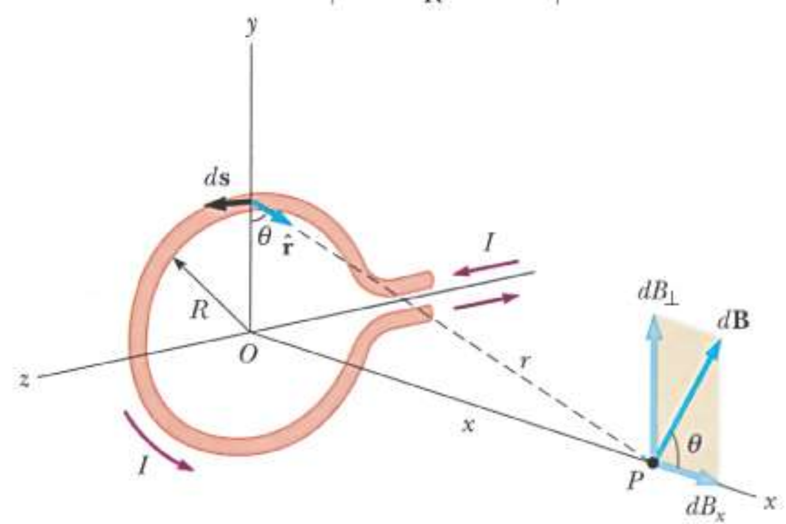


Per considerazioni di simmetria le componenti del campo perpendicolari all'asse di simmetria si elidono nel totale

Rimane soltanto la componente di **dB** parallela all'asse della spira, *dB* cos α. Si ha, per geometria:

$$\cos\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

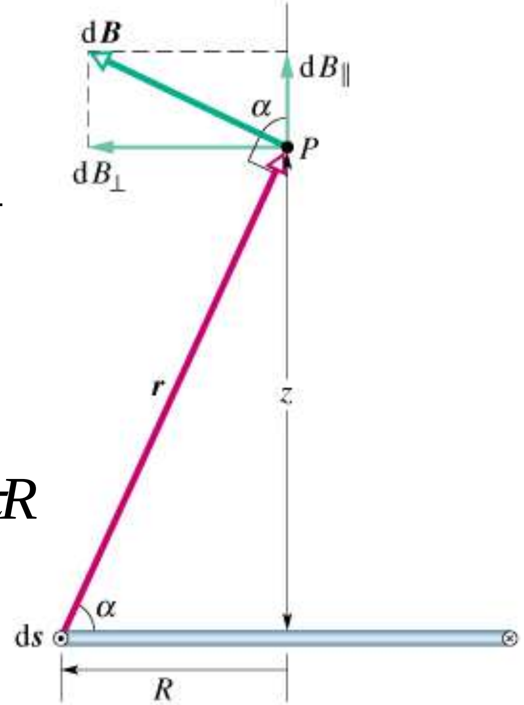
$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\left|d\vec{s}\times\vec{r}\right|}{r^3} \overset{d\vec{s}\perp\vec{r}}{=} \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds}{R^2+z^2}$$



Campo magnetico di una bobina II

Quindi si ricava

$$dB \cdot \cos\alpha = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds}{R^2 + z^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R ds}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$$



Integrando si ha:

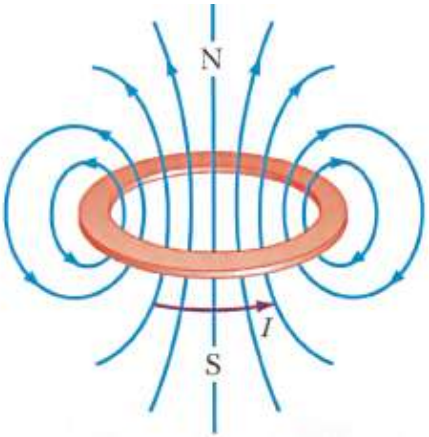
$$B = \int dB \cdot \cos\alpha = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \int_l ds = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} 2\pi R$$

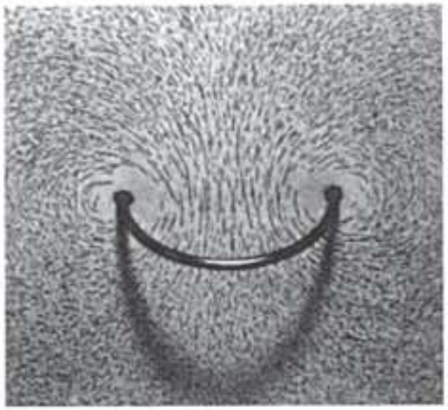
$$\boxed{\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{iR^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \vec{k}}$$

Asse della spira

In particolare al centro della spira (z=0)

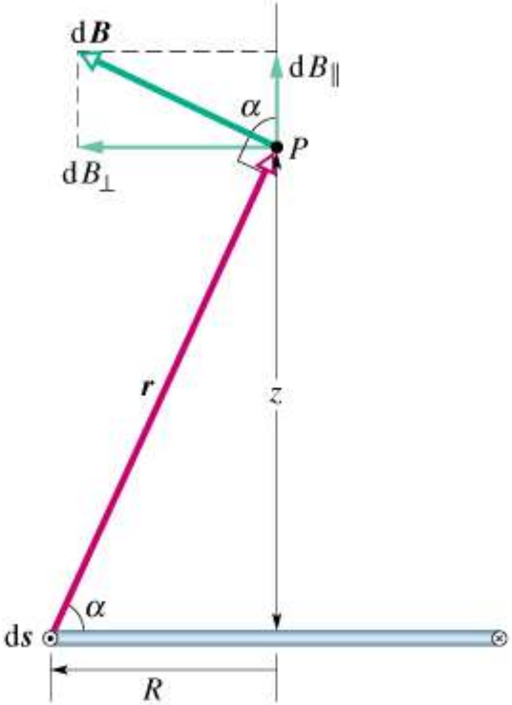
$$\boxed{\vec{B}(0) = \frac{\mu_0}{2} \frac{i}{R} \vec{k}}$$





Campo magnetico di una bobina III

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{iR^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \vec{k}$$



Per punti molto lontani dalla spira z » R si ha:

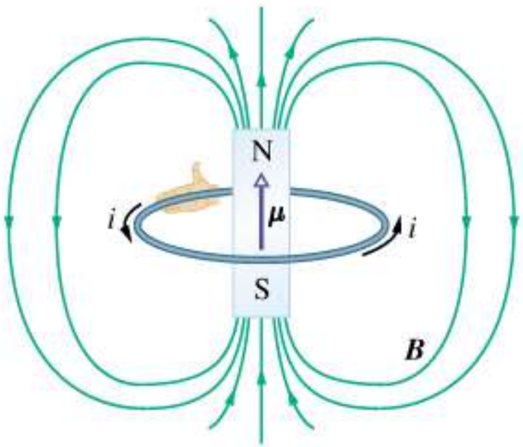
$$\vec{B}(z) \cong \frac{\mu_0}{2} \frac{iR^2}{z^3} \vec{k}$$

Ricordando che l'area della spira vale πR^2 ed estendendo il calcolo al caso di bobine con N spire posso scrivere:

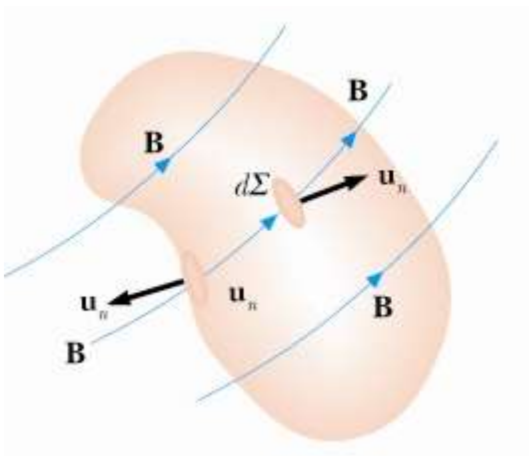
$$\vec{B}(z) \cong \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NiA}{z^3} \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{B}(z) \cong \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3}}$$

Ovvero una bobina si comporta come un dipolo magnetico



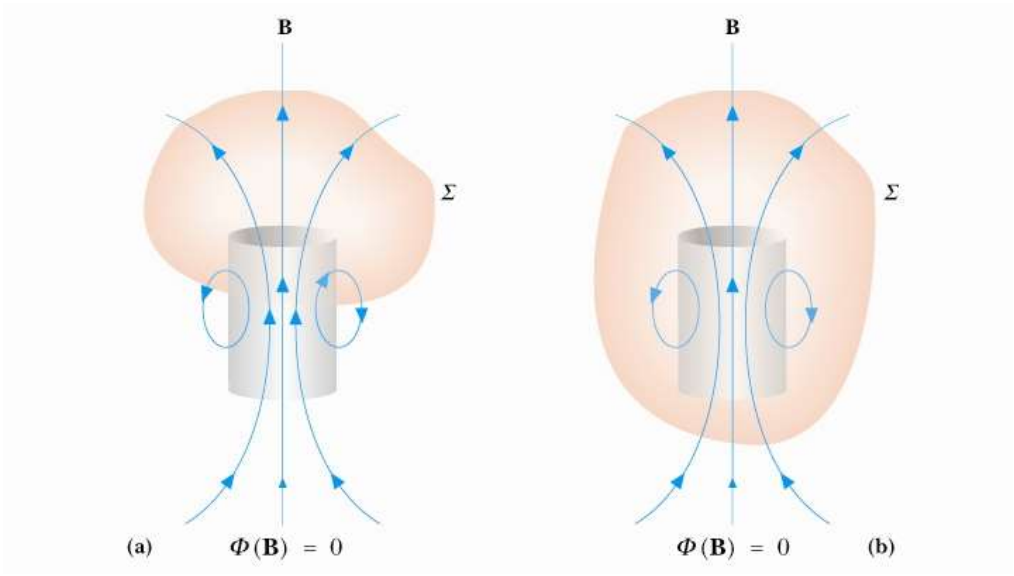
Si definisce il flusso del campo magnetico



$$\Phi_B = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma}$$

Attraverso una qualunque superficie chiusa

$$\Phi_B = \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$



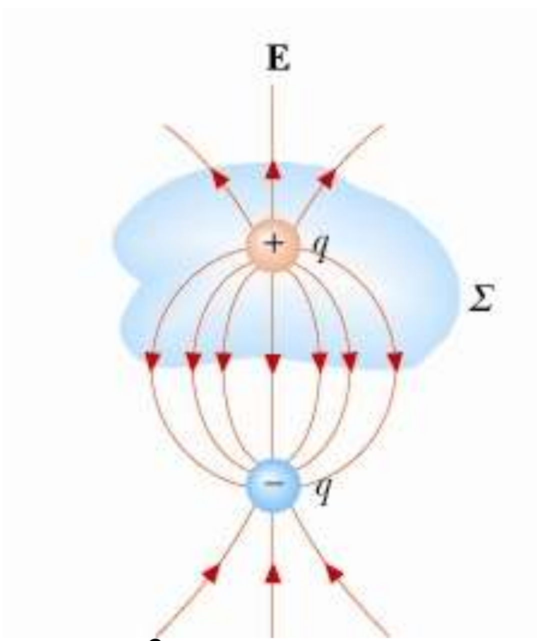
Legge di Gauss per il campo magnetico

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

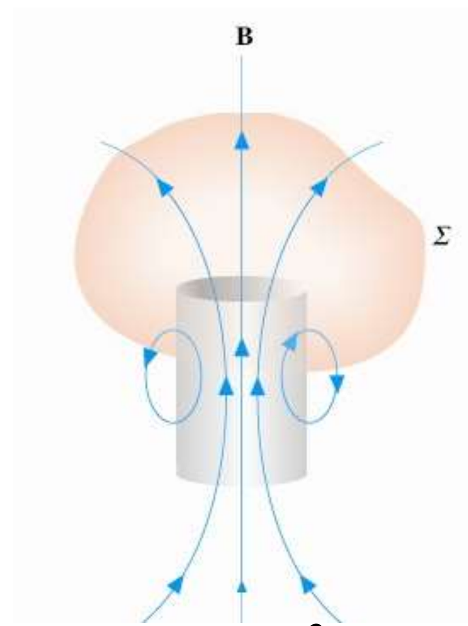
Definisce la carica elettrica

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

Non esiste la carica magnetica



$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} \neq 0$$



$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$