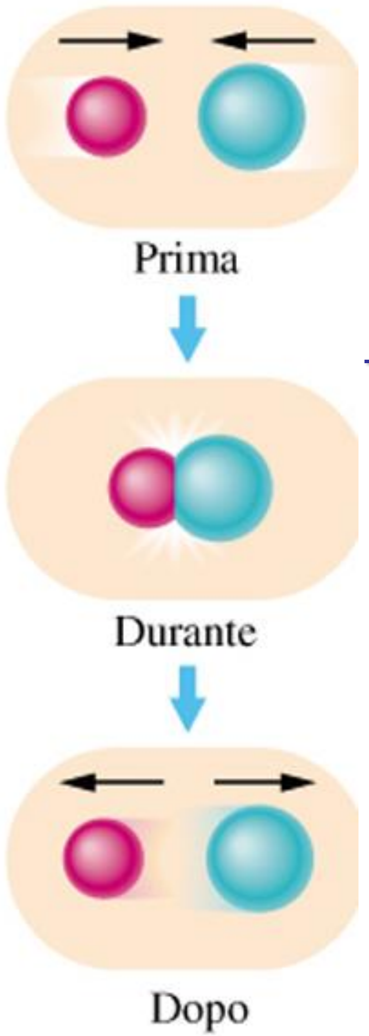
URTI

Coinvolgono due o più particelle (corpi puntiformi):

{Ci riferiamo a corpi di cui non consideriamo la struttura interna}



Che interagiscono

Forze interne INTENSE. Non è necessario un contatto

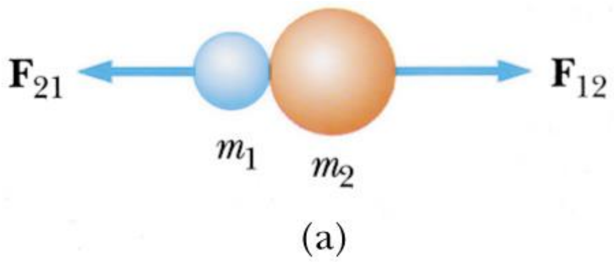
Per un tempo breve

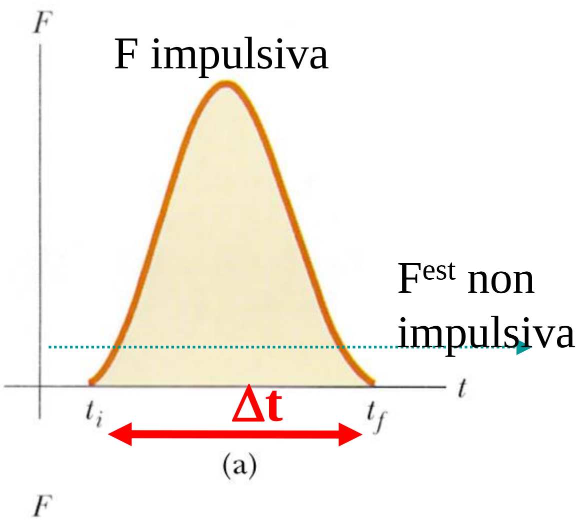
Rispetto ai tempi di osservazione

Modificando il proprio moto

Occorre uno studio di P_{Tot}, P_i e Energia Cinetica per capire queste "modificazioni"

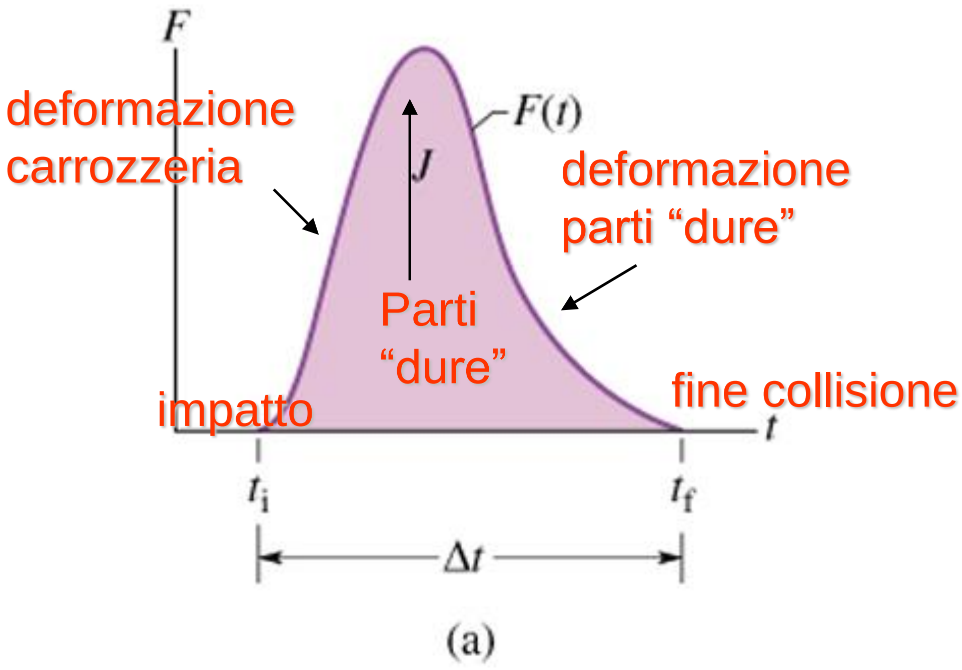
Quindi si parla di urti quando due punti materiali (o due sistemi di punti materiali) interagiscono per un intervallo di tempo estremamente breve. Si sviluppano forze INTERNE di intensità elevata dette "IMPULSIVE".

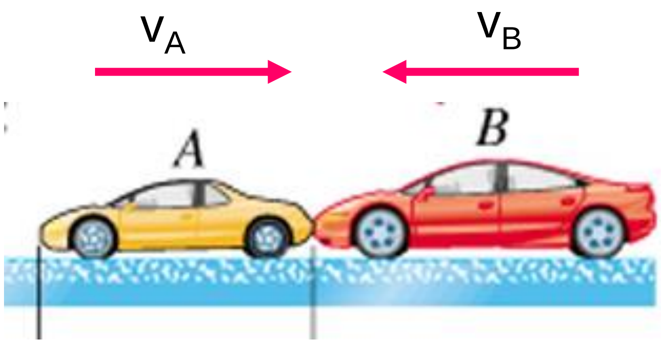




Durante questo tempo, piuttosto breve rispetto alla durata complessiva del moto, i punti non si muovono in modo apprezzabile.

Esempio di URTO: collisione frontale





$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

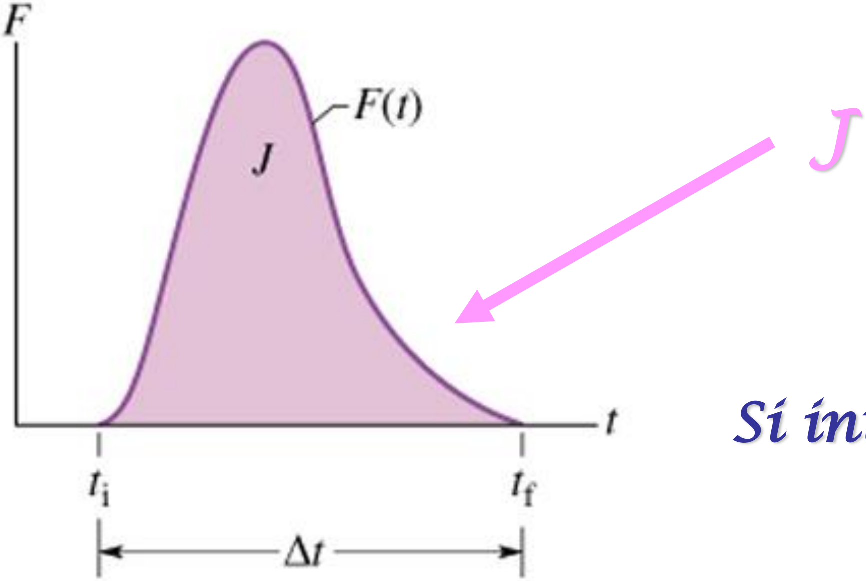
Forze intense e su tempi brevi: IMPULSIVE

[1000 Kg a 100 Km/h fermati in 0.1 sec: $3\cdot10^5$ N]

Ora vale: $\vec{F}_{12} = \dfrac{d\,\vec{p}_1}{dt}$ e invertendo si ha

$$\Delta\vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{12}(t)dt \equiv (def) = \vec{J}$$

Impulso

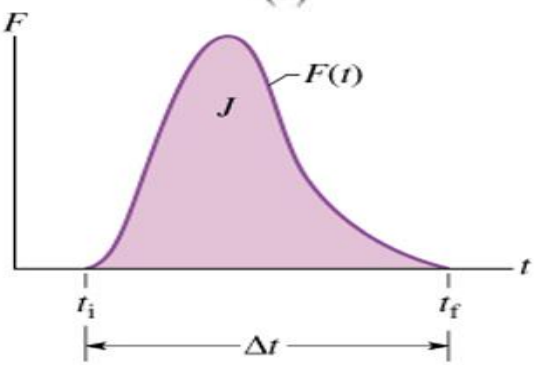


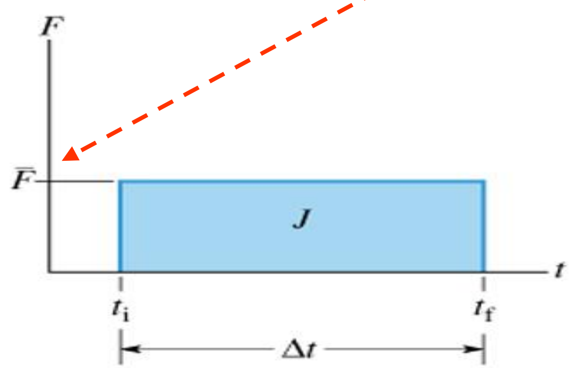
(a)

Graficamente l'impulso J corrisponde all'area sottesa dalla curva

Si introduce quindi la forza MEDIA

$$\overline{F} = \frac{|J|}{\Delta t}$$





Ma il sistema è formato da 2 corpi

$$\Delta p_1 = p_{1f} - p_{1i} = J_{12} = \int F_{12}\,dt = -\int - F_{12}\,dt =$$

$$= -\int \underbrace{F_{21}}_{-F_{12}}\,dt = -J_{21} = -\Delta p_2$$

Così vale: $\Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = \Delta \vec{p}_{tot} = 0$ *in un urto*

Ovvero: $\boxed{\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}}$

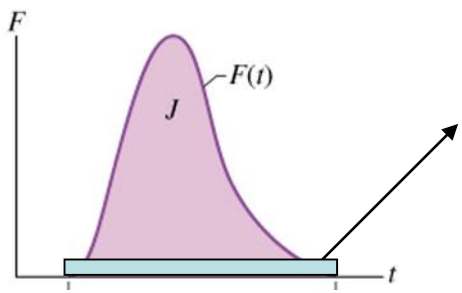
NB: Se non ci sono forze esterne

Se infatti $\vec{F}_{ext} \neq 0 \Rightarrow \Delta p_{tot} = \Delta p_1 + \Delta p_2 =$

$$\cancel{J_{12}} + \cancel{J_{21}} + J_1^{ext} + J_2^{ext} = \sum_i J_i^{ext} \neq 0$$

Ma se $|F_{\text{int}}| \succ\succ |F_{ext}|$ allora $J^{ext} \sim 0$

Si trascura



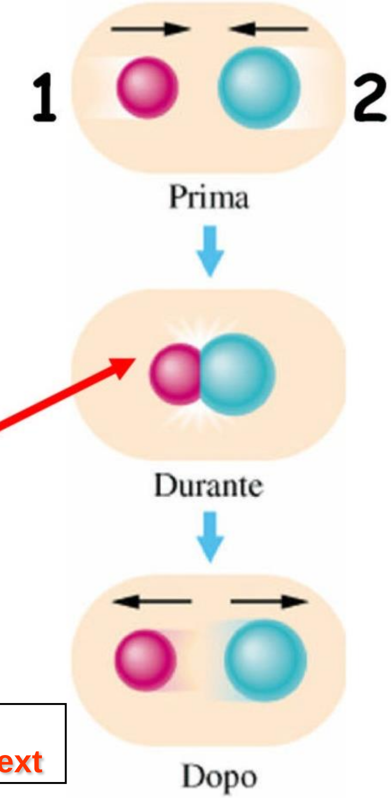
J^{ext}

Le forze esterne non devono essere di tipo impulsivo

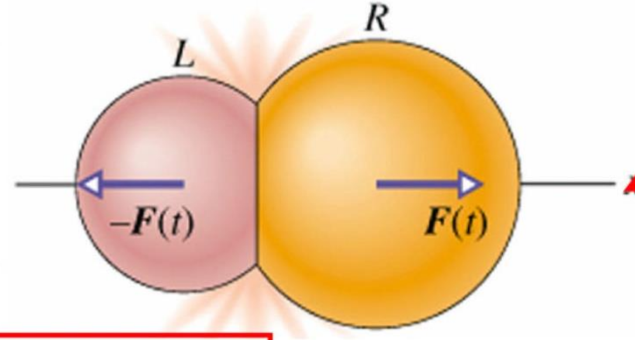
Urti

Sistema **chiuso** e **isolato**

La quantità di moto è utile per studiare gli **urti**. Un **urto** è un evento nel quale una forza agisce per un tempo relativamente breve, su ciascuno di due corpi in contatto.



In un sistema chiuso ed isolato, la quantità di moto P resta invariata.



$$\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}$$

Trascuro F_{ext}

Se nell'urto tra due corpi *l'energia cinetica totale non cambia*, l'urto si chiama **elastico**. Negli usuali urti tra oggetti comuni, una certa porzione di energia si trasferisce da cinetica ad altre forme. In questi casi, l'urto si chiama **anelastico**.

In presenza di forze esterne, la variazione della quantità di moto dovuto alle forze esterne è:

$$\Delta\vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} F^{est}\,dt = F_m^{est} \cdot \Delta t$$

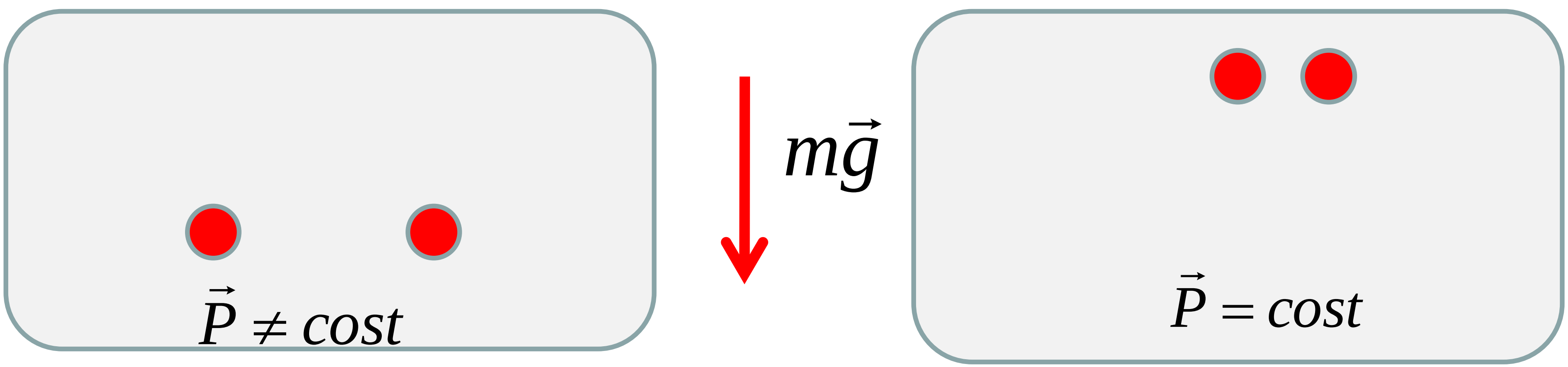
Se Δt è piccolo

ΔP è trascurabile

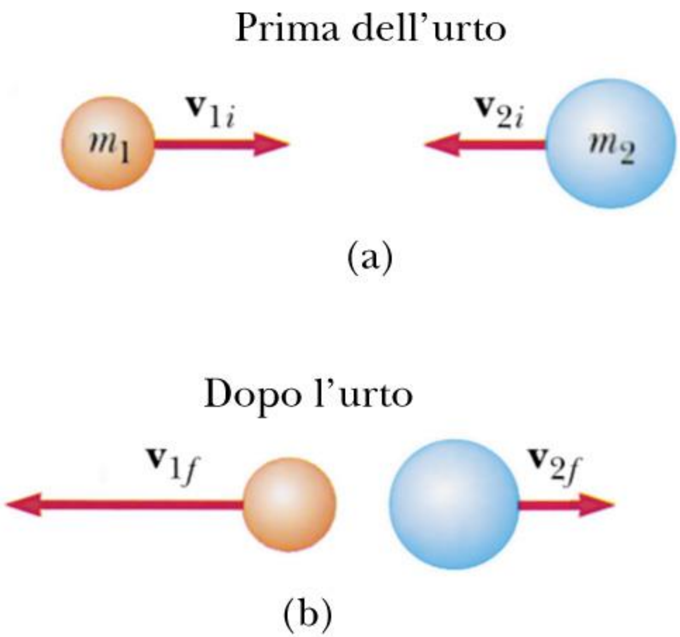
$$\vec{P} = cost$$

Inoltre

$$\vec{L}_{in} = \vec{r} \wedge \vec{P}_{in}$$
$$\vec{L}_{fin} = \vec{r} \wedge \vec{P}_{fin}$$
$$\longrightarrow \quad \vec{L}_{in} = \vec{L}_{fin}$$



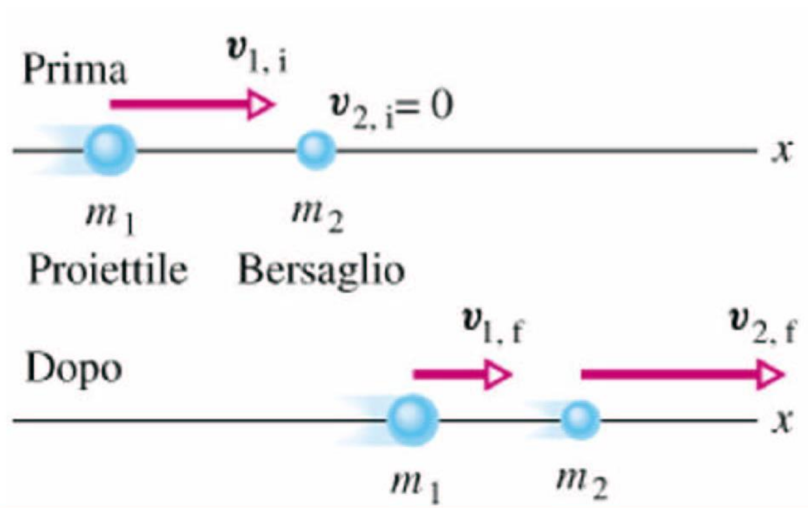
Dal punto di vista dell'energia gli urti si classificano



- Elastici: si conserva l'energia cinetica quindi le forze interne sono conservative.
- Anelastici: quando non si conserva l'energia cinetica. Gli urti sono **completamente anelastici** quando i due corpi restano attaccati dopo l'urto. L'energia cinetica può anche aumentare, esplosioni).

URTI Unidimensionali

Urto elastico

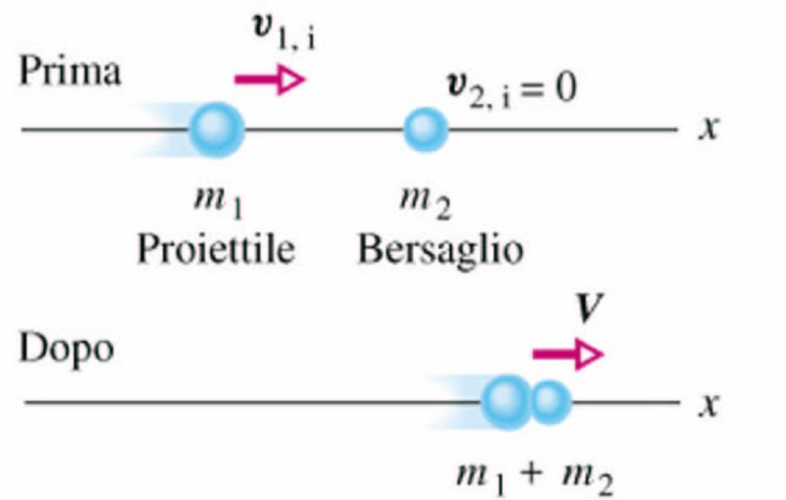


$$m_1 v_{1,i} + 0 = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2$$

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} ; v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i}$$

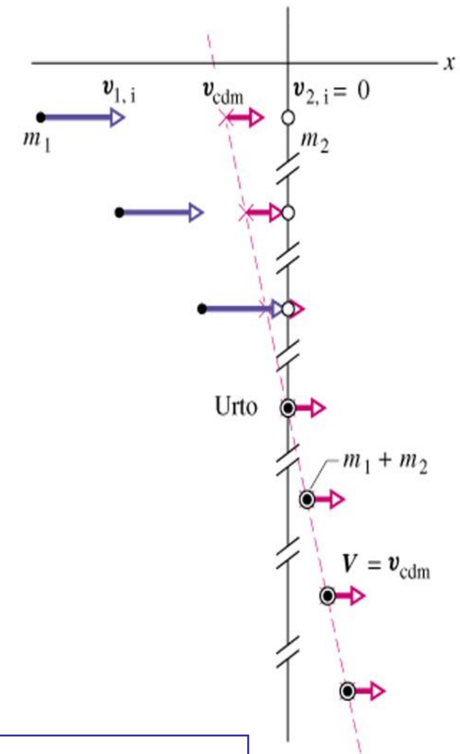
Urto completamente anelastico



$$m_1 v_{1,i} + 0 = (m_1 + m_2) V$$

$$V = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} v_{1,i}$$

URTO PARZIALMENTE ANELASTICO



Si conserva solo quantità di moto:

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

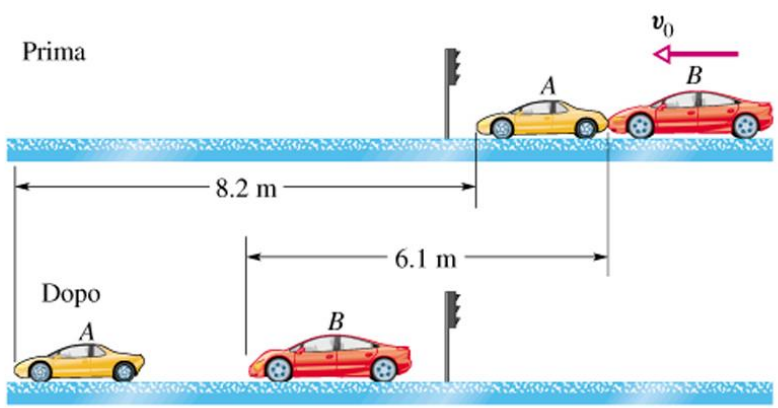
Per il Centro di Massa: $P_{CdM} = P_{Tot} = Mv_{CdM}$

Nel nostro caso vale: $(m_1 + m_2)v_{CdM} = P_{1i} + P_{2i}$

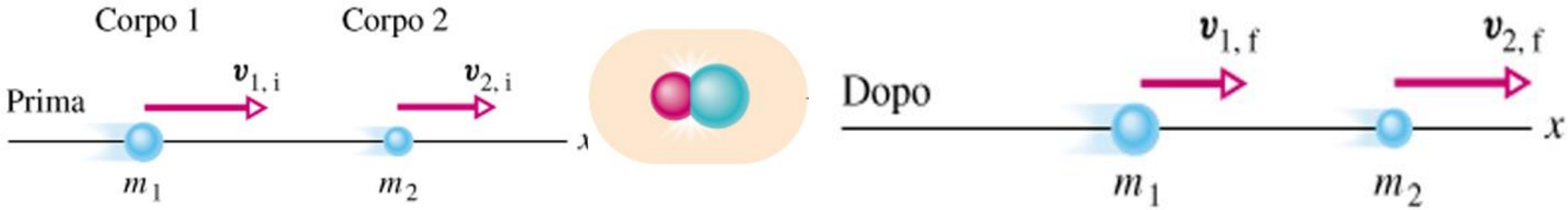
$$v_{CdM\,f} = \frac{P_{Tot\,f}}{m_1 + m_2} = \frac{P_{Tot\,i}}{m_1 + m_2} = v_{CdM\,i}$$

La velocità del centro di massa rimane invariata

(vale sempre in un sistema isolato)



URTO ELASTICO in 1 Dimensione



A) Conservazione quantità di moto

B) Conservazione dell'Energia

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f} \end{cases}$$

Con $K = \dfrac{1}{2} m v^2$

$$\begin{cases} m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}) \\ \dfrac{m_1}{2}(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = \dfrac{m_2}{2}(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) \end{cases} \Longleftrightarrow \quad -\Delta p_1 = +\Delta p_2$$

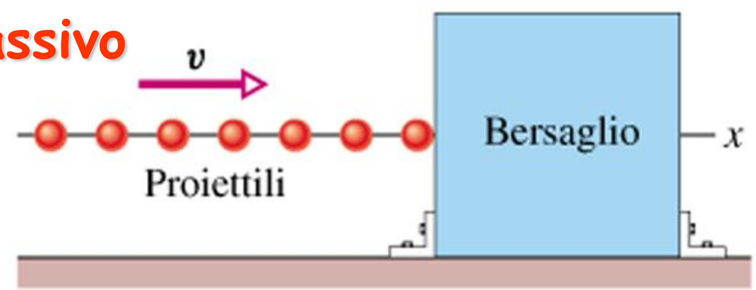
La soluzione si ricava facilmente se si considera che:

$$(v_i^2 - v_f^2) = (v_i + v_f) \cdot (v_i - v_f)$$

E dividendo la seconda equazione con la prima membro a membro per il primo si ottiene :

$$\begin{cases} (v_{1i} + v_{1f}) = (v_{2f} + v_{2i}) \\ m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \\ v_{2f} = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} \end{cases}$$

Esempio: Serie di Urti su bersaglio massivo



Una serie di urti su un corpo equivale ad esercitare sul corpo una forza media che vale:

$$\overline{F} = \frac{J}{\Delta t} = -\frac{n \cdot \Delta p}{\Delta t} = -N \cdot \Delta p$$

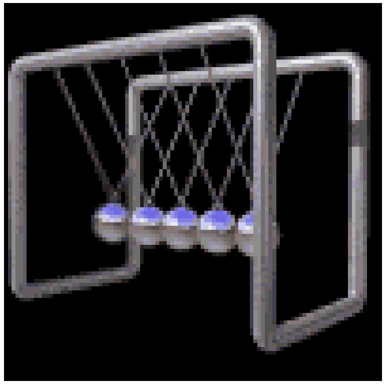
Con N = numero di urti al secondo e $\boxed{\Delta p = -2mv}$

In quanto si può approssimare come ad un urto contro una parete essendo $m_{bersaglio} >> m_{proiettile}$

Casi particolari di Urti Elastici

A) Masse uguali $m_1=m_2$

$$v_{1f} = v_{2i}$$
$$v_{2f} = v_{1i}$$



Ovvero le due particelle si scambiano le velocità

B) Seconda particella ferma $v_2=0$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad e \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

Se le due particelle hanno massa uguale

$$v_{1f} = 0 \quad e \quad v_{2f} \approx v_{1i}$$

La prima si ferma e parte la seconda

C) Bersaglio massiccio $m_2 >> m_1$

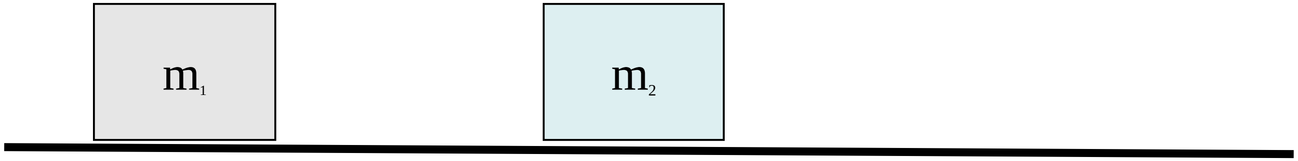
$$v_{1f} \cong -v_{1i} + 2v_{2i} \qquad v_{2f} = v_{2i} + \frac{2m_1}{m_2} \cdot v_{1i} \cong v_{2i}$$

Se $v_i=0$ si ha la condizione di "quasi rimbalzo"

D) Proiettile massiccio $m_1 >> m_2$

$$v_{1f} \cong v_{1i} \qquad v_{2f} = 2v_{1i} - v_{2i}$$

Urto nel sistema del CM



Calcoliamo la velocità di m_1 e m_2 nel sistema CM :

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

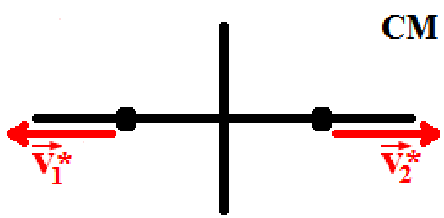
$$\vec{v}_1^* = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} \Rightarrow \vec{v}_1^* = \frac{m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2}$$

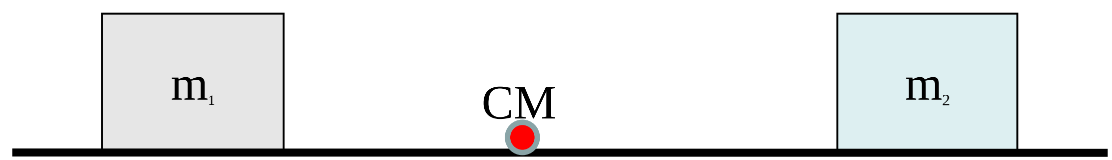
$$\vec{v}_2^* = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} \Rightarrow \vec{v}_2^* = \frac{m_1(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\vec{v}_1^*}{m_2} = -\frac{\vec{v}_2^*}{m_1}$$

$$P_T^* = m_1\vec{v}_1^* + m_2\vec{v}_2^* = \frac{m_1 m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{m_1 + m_2}$$

$$P_T^* = 0$$





Urti nel sistema del CM

$$E_K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 + E_K^*$$

Energia del centro di massa

Energia nel sistema centro di massa

$$E_K^* = \frac{1}{2}m_1(v_1^*)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2^*)^2$$

$$\Delta E_K^* = E_{K_{fin}}^* - E_{K_{in}}^*$$

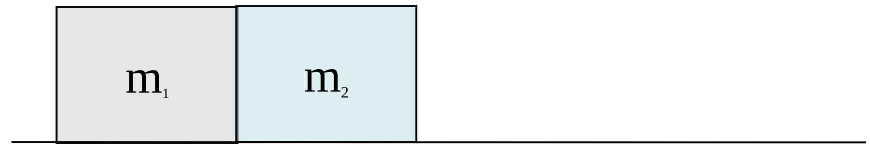
$$\Delta E_K^* = 0 \qquad urto \qquad elastico$$

$$\Delta E_K^* \neq 0 \qquad urto \qquad anelastico$$

$$\Delta E_K^* = -E_{K_{in}}^* \qquad urto \qquad completamente \qquad anelastico$$

Urti completamente anelastici

Sistema laboratorio

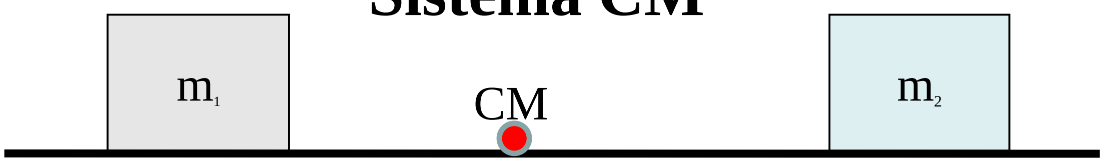


$$m_1\vec{v}_{1in} + m_2\vec{v}_{2in} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \cos t$$

$$E_{k\,fin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{cm}^2$$

Sistema CM



$$m_1\vec{v}^{\,*}_{1_{in}} + m_2\vec{v}^{\,*}_{2_{in}} = 0$$

$$E^*_{kfin} = 0$$

L'energia cinetica dei punti rispetto al CM viene trasformata in calore o deformazione.

Solo la parte dell'energia disponibile nel CM viene trasformata

$$Q = E_{k_{fin}} - E_{K_{in}}$$

(Q = "Q" valore dell'urto)

Q = 0 collisione elastica

Q < 0 collisione anelastica di 1° tipo $E_{k_{fin}} < E_{k_{in}}$

Q > 0 collisione anelastica di 2° tipo $E_{k_{fin}} > E_{k_{in}}$

Ricordando che

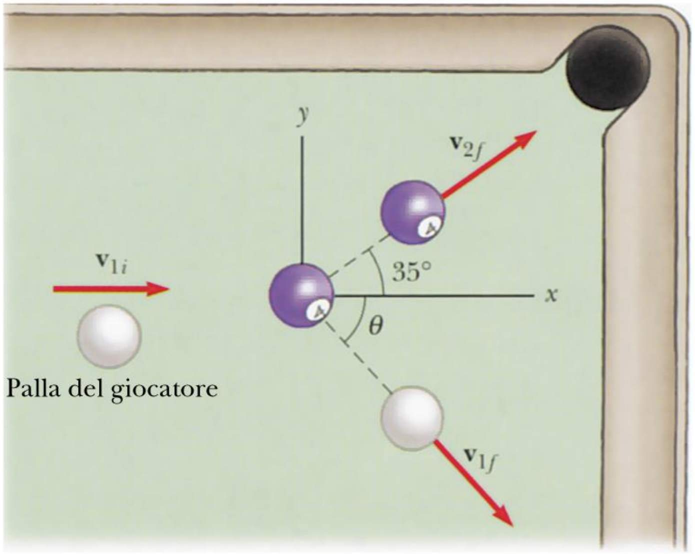
$$E_k = \frac{P^2}{2m} \qquad Q = \frac{P_{1_{fin}}^2}{2m_2} + \frac{P_{2_{fin}}^2}{2m_2} - \frac{P_{1_{in}}^2}{2m_1} - \frac{P_{2_{in}}^2}{2m_1}$$

Nel caso di un urto completamente anelastico (anche detta <u>"reazione di cattura")</u>

$$\boxed{Q = -E^*_k}$$

Urto in due dimensioni

$$\vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin}$$



$$P(x)_{in} = P(x)_{fin} \qquad P(y)_{in} = P(y)_{fin}$$

La quantità di moto è un vettore e si conserva per componenti

URTO ELASTICI in 2 Dimensioni

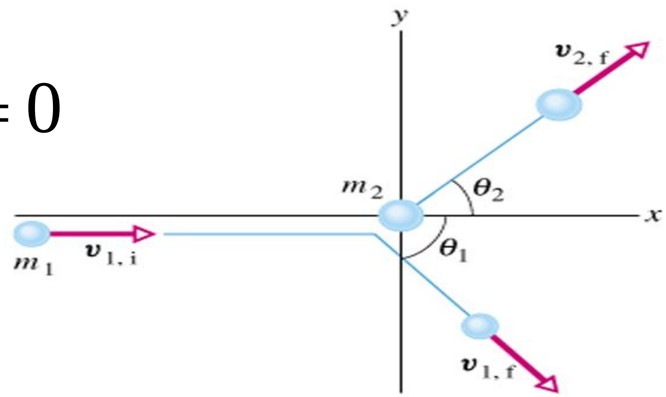
A) Conservazione quantità di moto

$$\begin{cases} m_1 v_{1x}^{in} + m_2 v_{2x}^{in} = m_1 v_{1x}^{fin} + m_2 v_{2x}^{fin} \\ m_1 v_{1y}^{in} + m_2 v_{2y}^{in} = m_1 v_{1y}^{fin} + m_2 v_{2y}^{fin} \end{cases}$$

B) Conservazione dell'Energia

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}$$

Ad Esempio: $v_2^{in} = 0$

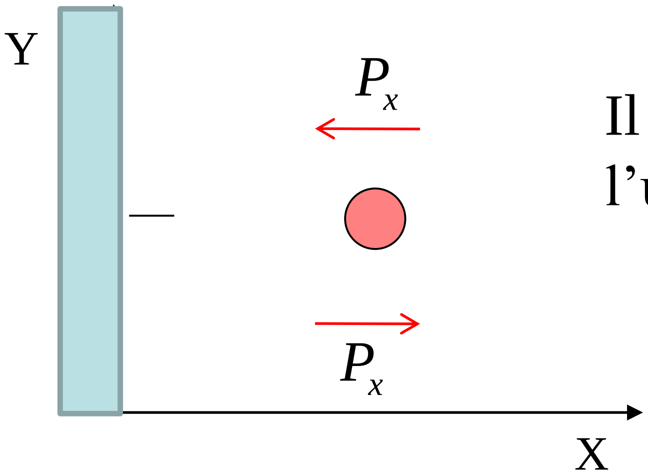


$$\begin{cases} m_1 v_1^{in} = m_1 v_1^{fin} \cos\theta_1 + m_2 v_2^{fin} \cos\theta_2 \\ 0 = m_1 v_1^{fin} \sin\theta_1 + m_2 v_2^{fin} \sin\theta_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1,in}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2 \end{cases}$$

4 Incognite

Essendoci solo 3 Equazione il problema non è risolvibile a meno che non si conosca un altro dato (ad Es. θ_1)

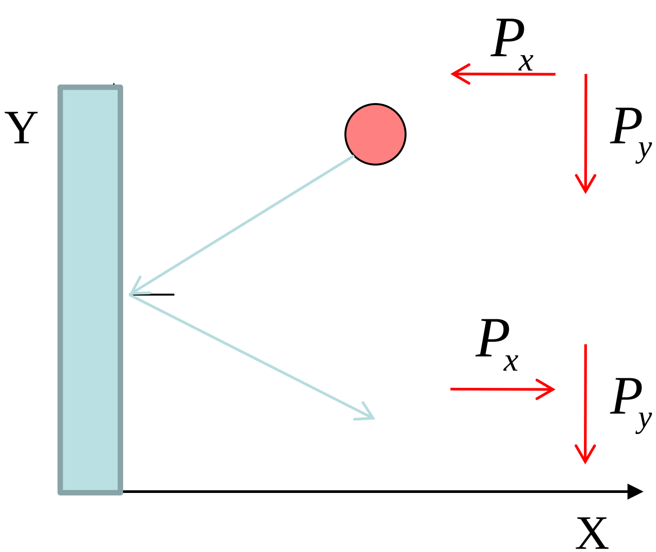
Un caso particolare



Il muro esercita una forza impulsiva durante l'urto: la quantità di moto non si conserva

$$mv_{xfin} - mv_{xin} = J_{reazione}$$

(Impulso della reazione)



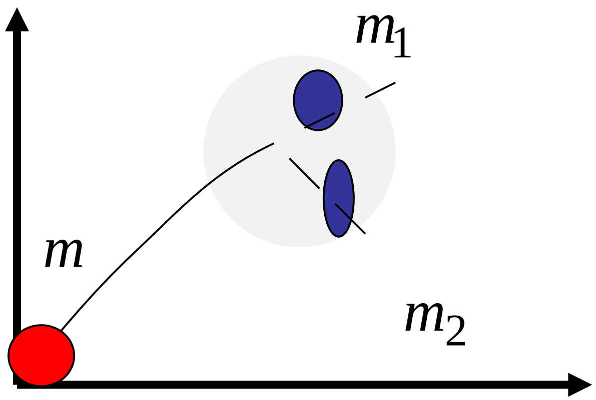
$$mv_{xfin} - mv_{xin} = J_{reazione}$$

$$mv_{yfin} - mv_{yin} = 0$$

P_y si conserva

Studiamo il caso Q > 0

Esplosione (decadimento)



$$\vec{P}_{in} = m\vec{v}$$

$$\vec{P}_{fin} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$\vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin}$$

Nel sistema cm :

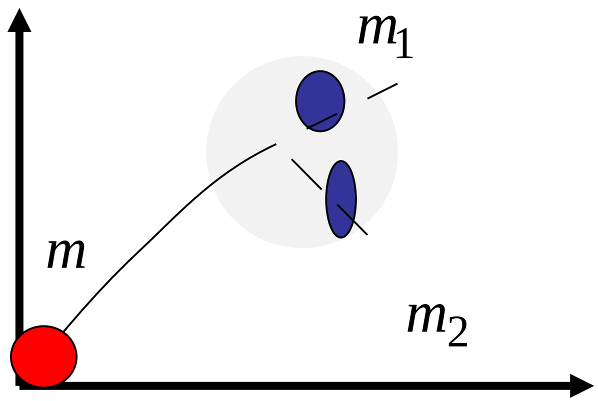
$$\vec{P}^*_{in} = 0 \qquad \vec{P}^*_{fin} = 0$$

$$E^*_{k_{in}} = 0 \qquad E^*_{k_{fin}} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{P}^*_{1_{in}} = -\vec{P}^*_{2_{fin}}$$

$$Q = E^*_{kfin} - E^*_{kin} > 0$$

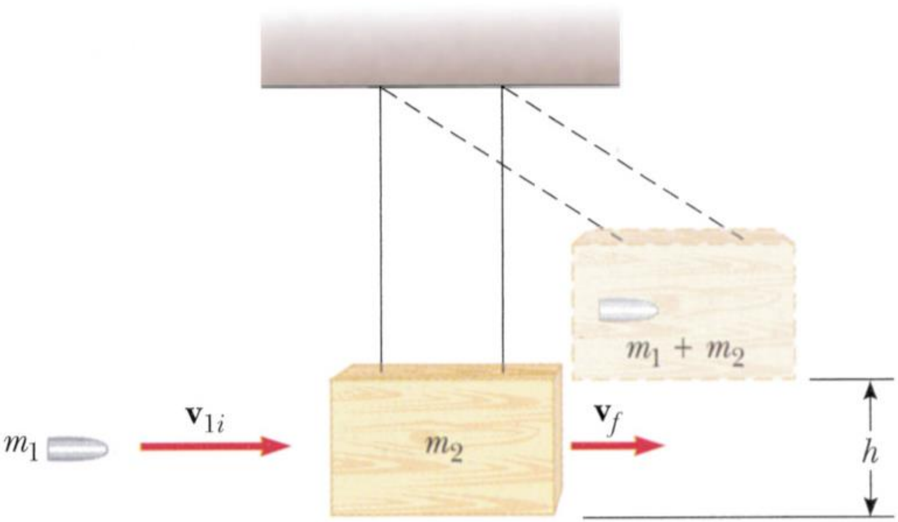
La quantità di moto si conserva nelle sue componenti



$$\begin{cases} mv_x = m_1 v_{x_1} + m_2 v_{x_2} \\ mv_y = mv_{y_1} + m_2 v_{x_2} \end{cases}$$

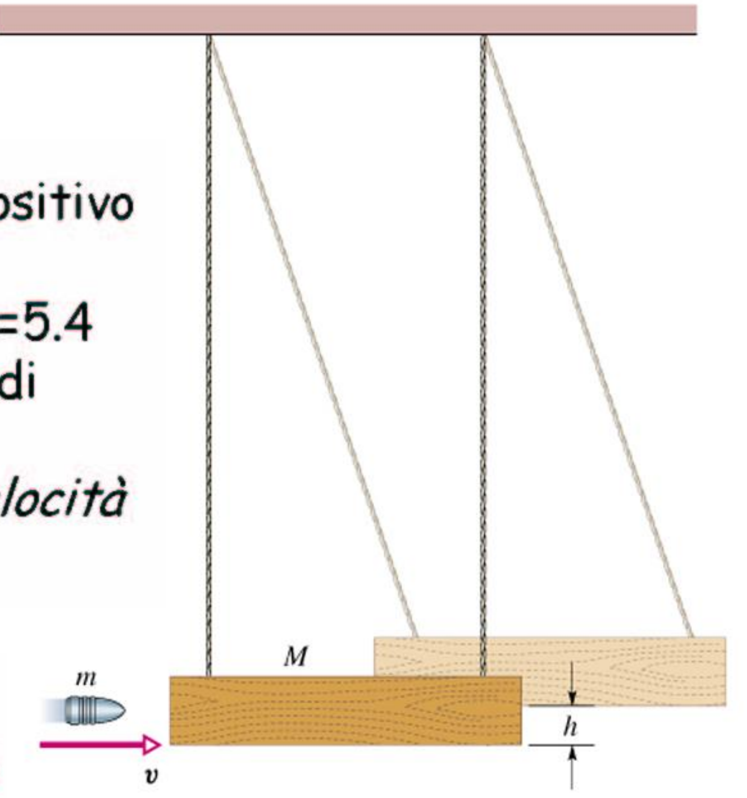
La conservazione della quantità di moto si intende applicata ad un intervallo di tempo τ intorno all'istante dell'esplosione

Il pendolo balistico



Pendolo balistico

Esercizio 8.1: Il pendolo balistico era un dispositivo usato per misurare la velocità dei proiettili. Assumendo che la massa del legno in figura sia M=5.4 kg, quella del proiettile che si arresta nel blocco di legno m=9.5 g, e che il pendolo si sollevi per una distanza verticale di h=6.3 cm, *determinare la velocità del proiettile prima della collisione.*



Risoluzione. Occorre suddividere il problema in due parti: (1) l'urto completamente anelastico tra proiettile e legno, e (2) l'innalzamento del blocco contro la forza di gravità.

Dopo l'urto, la velocità complessiva del blocco è V=mv/(m+M).
Per innalzamento, l'energia cinetica del sistema [1/2 (m+M)V^2] si trasforma in energia potenziale gravitazionale [(m+M)gh], da cui si ricava:

$$\boxed{v = \frac{M + m}{m}\sqrt{2gh} = 630 m/s}$$