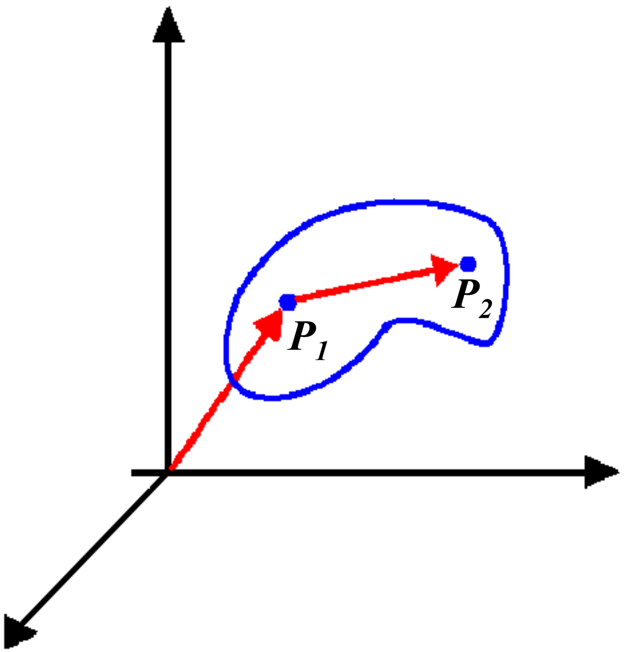
Il corpo rigido

Corpo rigido: Insieme di punti materiali sottoposti ad una interazione mutua tali da mantenerli in posizione fissa l'uno rispetto all'altro



$P_1(x_1, y_1, z_1)$ Definisce la posizione del corpo

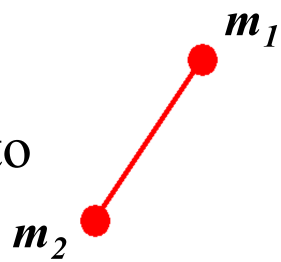
$P_2(x_2, y_2, z_2)$ Definisce l'orientazione rispetto ***P₁***

In totale 6 parametri per determinare la posizione nello spazio

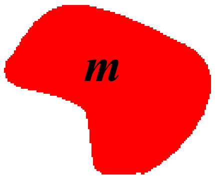
6 gradi di libertà

Inoltre:

Corpo rigido discreto

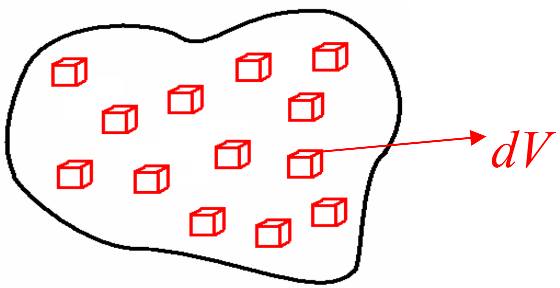


o continuo



Determinazione del CM

In ogni elementino *dm*



Per ogni elementino ***dV***

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad \text{densità}$$

$$\boxed{m = \int dm = \int_V \rho dV}$$

Se il corpo è omogeneo : ***ρ*** *è sempre lo stesso per ogni elementino*

$$m = \int_V \rho dV = \rho \int_V dV = \rho \cdot V \qquad \boxed{m = \rho \cdot V}$$

Attenzione nel caso più generale:

$$\rho = \rho(x, y, z)$$

Determinazione del CM

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r}\, \rho\, dV}{m}}$$

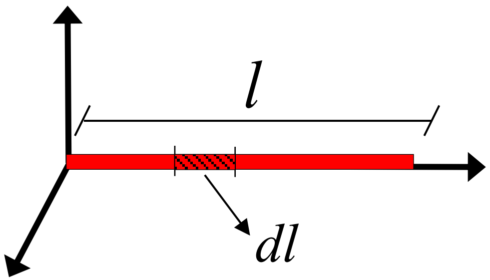
Se $\rho = costante$

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\rho}{m}\int \vec{r}\, dV = \frac{1}{V}\int \vec{r}\, dV}$$

Come al solito:

$$x_{CM} = \frac{1}{V}\int x\, dV \quad ; \quad y_{CM} = \frac{1}{V}\int y\, dV \quad ; \quad z_{CM} = \frac{1}{V}\int z\, dV$$

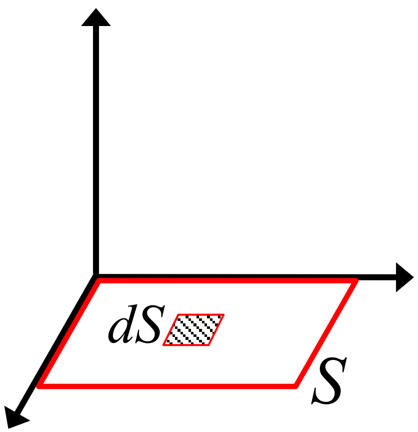
Determinazione del CM



Densità lineare
corpi omogenei

$$\lambda = \frac{dm}{dl}$$

$$\lambda = \frac{m}{l}$$



Densità superficiale
corpi omogenei

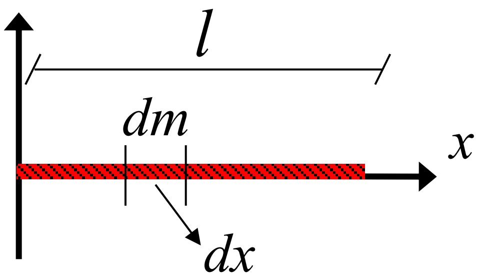
$$\sigma = \frac{dm}{dS}$$

$$\sigma = \frac{m}{S}$$

Ad esempio, per un corpo a densità lineare λ

$$x_{CM} = \frac{1}{l}\int x\,dx$$

Determinazione del CM

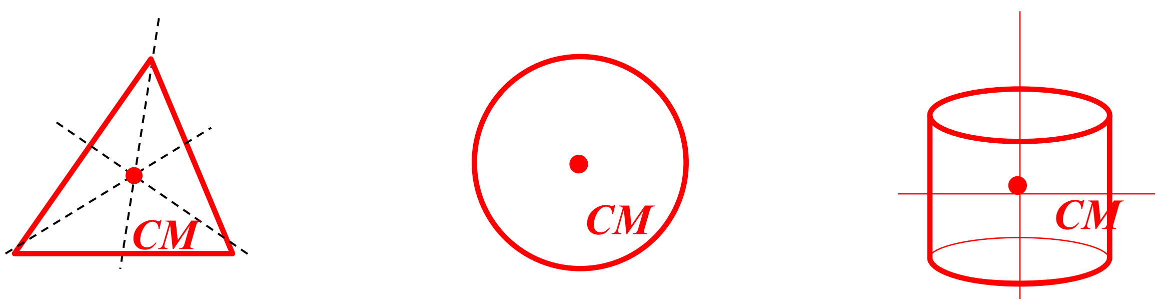


$$x_{CM} = \frac{1}{l}\int x\,dx$$

Infatti $\quad x_{CM} = \dfrac{\int x\,\lambda\,dx}{\int dm} = \dfrac{\lambda\int x\,dx}{m} = \dfrac{1}{l}\int x\,dx$

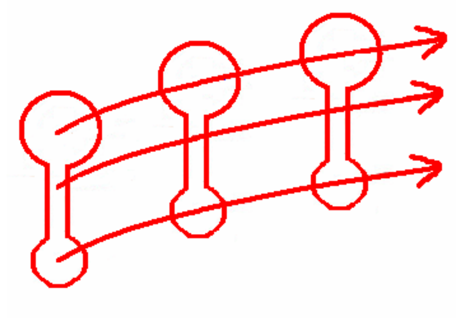
$$x_{CM} = \frac{1}{l}\int_0^l x\,dx = \frac{l}{2} \qquad !!!$$

In generale: *se un corpo omogeneo è simmetrico rispetto ad un punto, il CM coincide con il centro di simmetria*

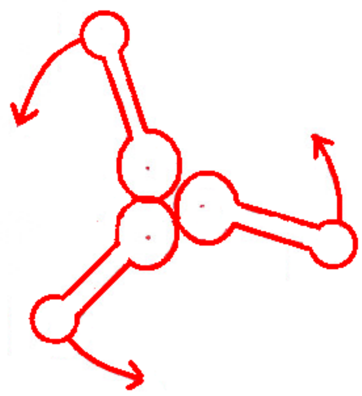


Il corpo rigido

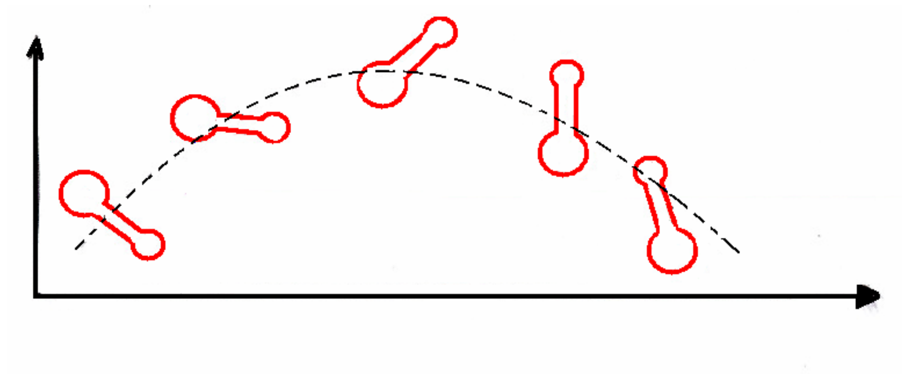
Un corpo rigido può traslare:



o ruotare:



o fare un moto di rototraslazione:

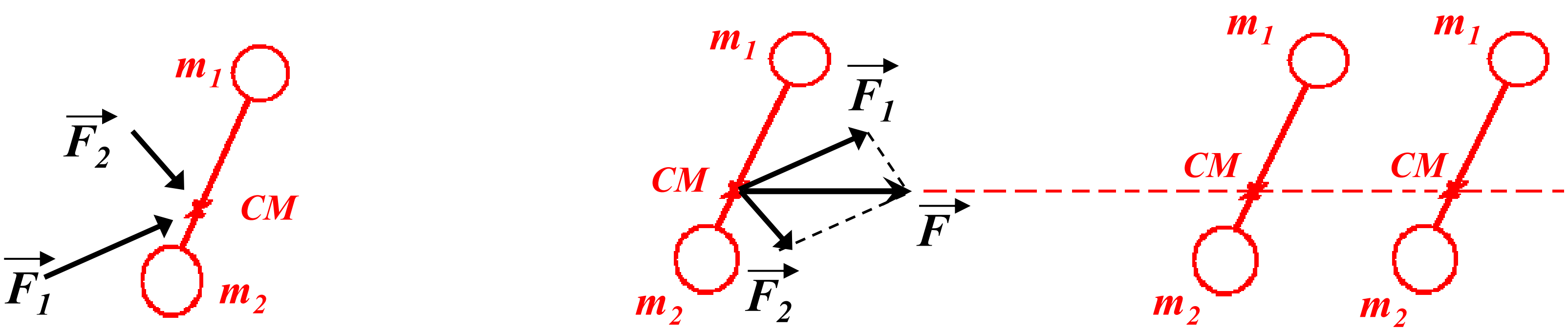


Dinamica

Moto di traslazione

Le forze sono applicate al applicate al CM

Il moto è caratterizzato dalla forza esterna $$\sum \vec{F}_{est} = M \cdot \vec{a}_{CM} \qquad (1)$$



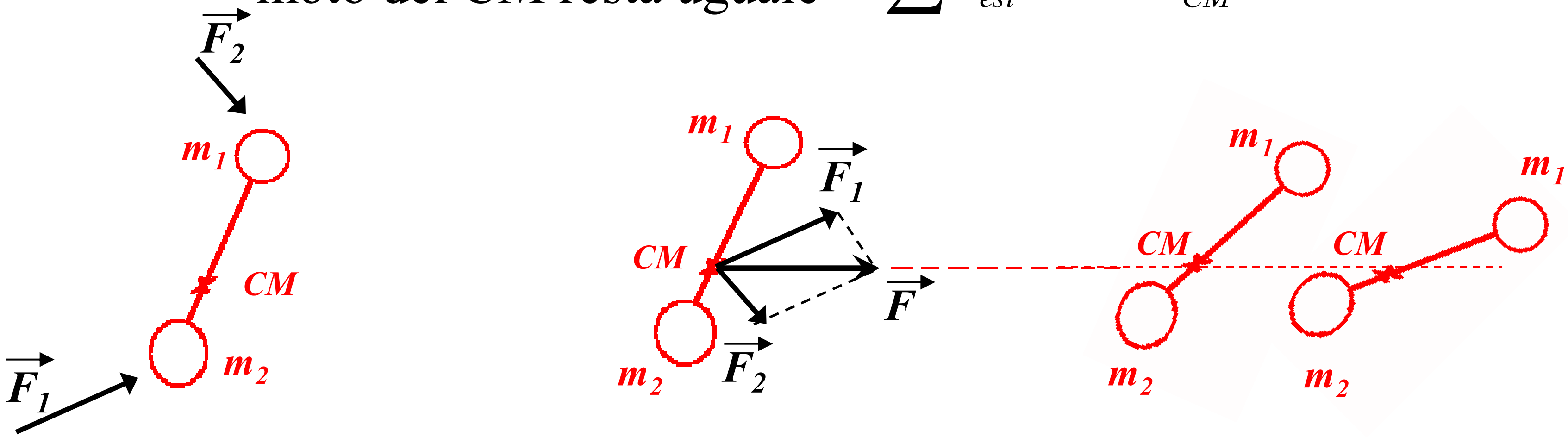
$$\vec{P}_{tot} = M \cdot \vec{v}_{CM}$$

$$E_K = \frac{1}{2} M \cdot v_{CM}^2$$

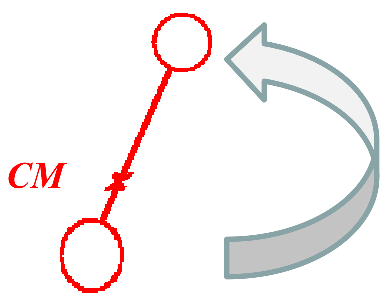
Dalla (1) si determina $\vec{a}_{CM}$!

Moto di rototraslazione

Le forze NON sono applicate al applicate al CM, ma il moto del CM resta uguale $\sum \vec{F}_{est} = M \cdot \vec{a}_{CM}$ (1)

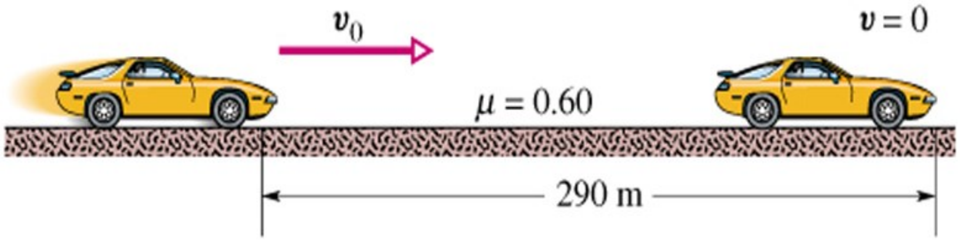


Inoltre nel sistema del CM, moto di pura rotazione

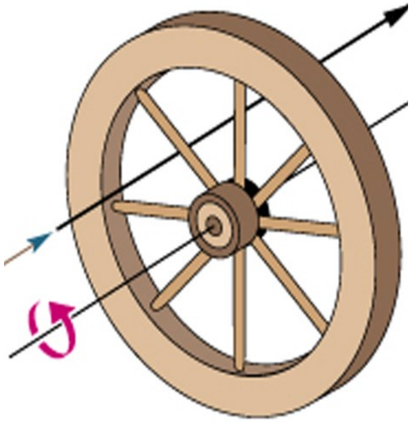


Si può determinate la velocità di rotazione intorno al CM

Moto Rotatorio: Cinetica



Moto Traslatorio

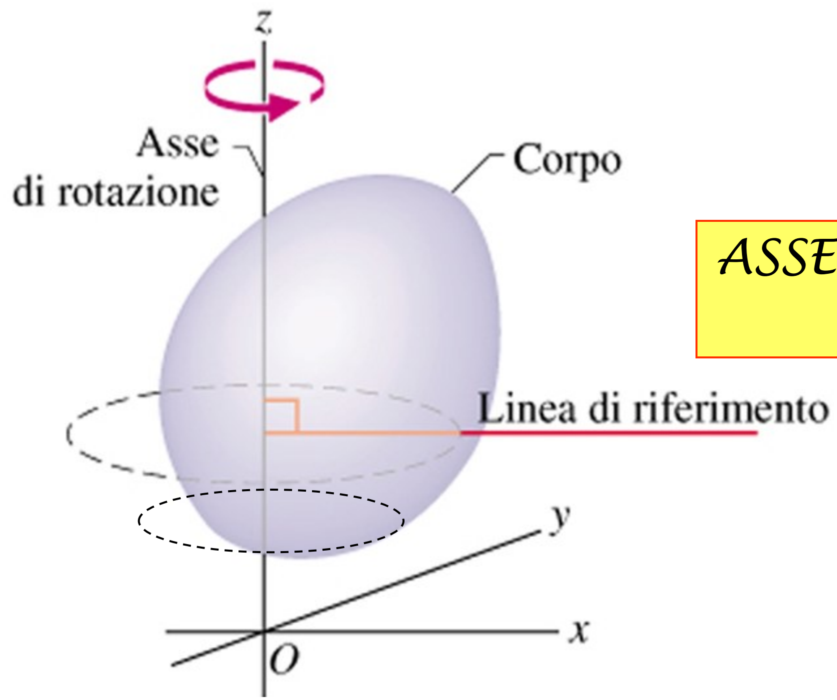


Moto Rotatorio

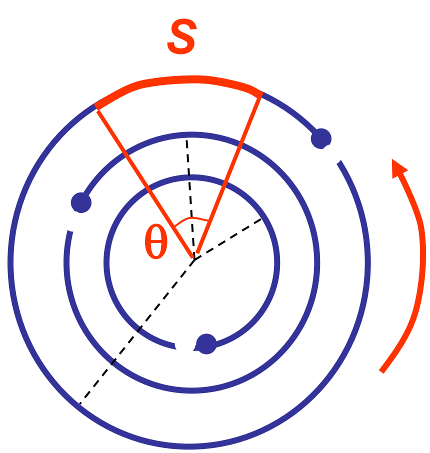
Traiettoria dello stesso tipo (*circonferenza*) per tutti i punti del corpo
Centro della traiettoria uguale per tutti i punti

Rem: CORPO RIGIDO: Insieme di particelle elementari (*dm*) pensati come puntiformi
Le distanze reciproche tra i vari punti non variano

Asse di rotazione Fisso



ASSE: Luogo dei punti equidistanti dalle circonferenze

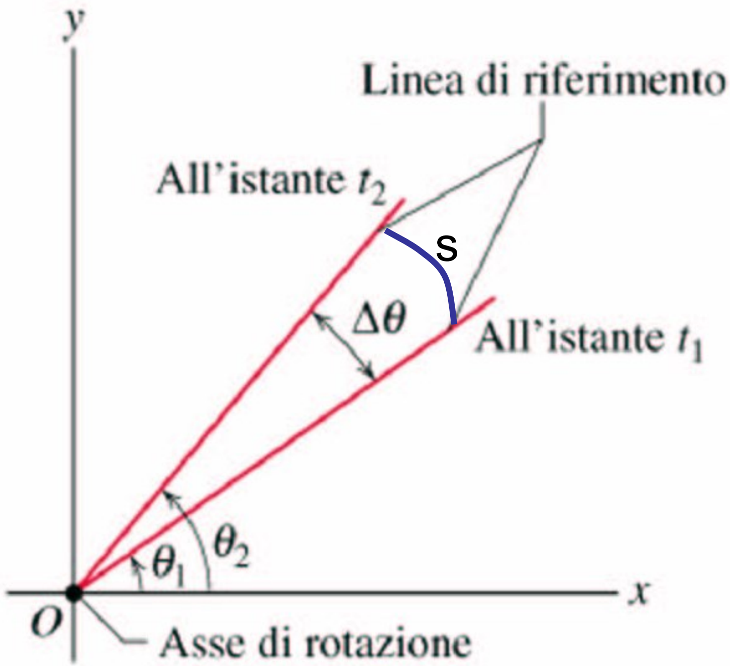


Ogni traiettoria è circolare: variabile curvilinea S

L'angolo θ si misura come: $\boxed{\vartheta = \frac{S}{r}}$

Verso Antiorario ⟹ $\vartheta > 0$

In **RADIANTI** ⟹ $1\,rad = 57{,}3°$ $\pi\ rad = 180°$



Posizione angolare: misurata in **radianti**

θ= lunghezza arco/raggio=s/r

Spostamento angolare:

$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$

Velocità angolare: $\boxed{\varpi = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}}$

Nel caso in cui la posizione angolare varia in modo costante ($s=r\theta$), la velocità angolare ω è costante (moto circolare uniforme). La velocità del punto è semplicemente: **v=ds/dt = ωr**

Il **periodo** è semplicemente:

(lunghezza circonferenza/velocità) =2π**r/v** =$2\pi/\omega$

Si introduce anche un'accelerazione angolare $\boxed{\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}}$

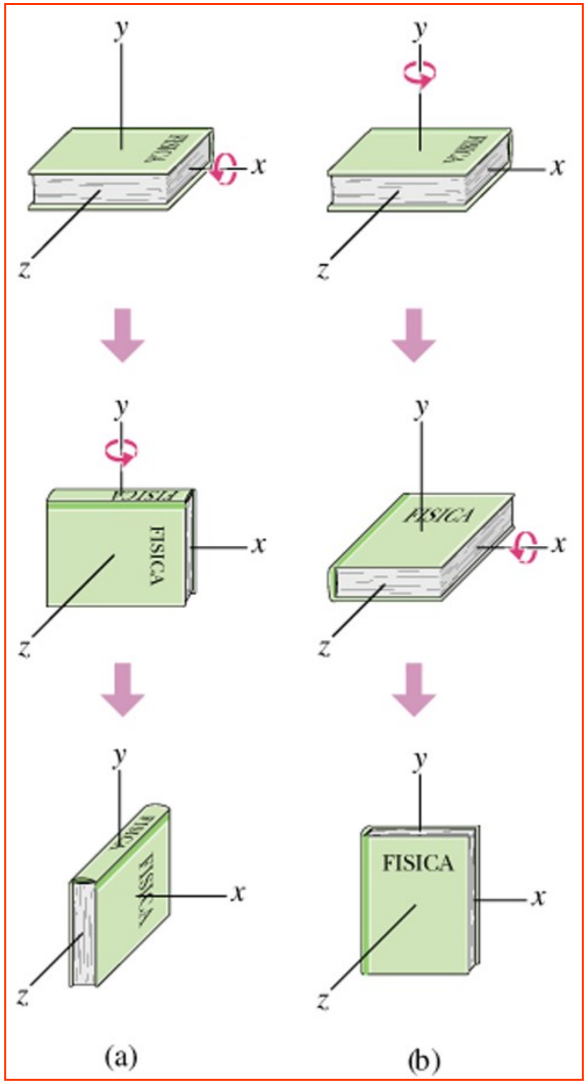
$$(\vec{x}, \vec{v}, \vec{a}) \Longrightarrow (\theta, \omega, \alpha)$$

TRASLAZIONE **ROTAZIONE**

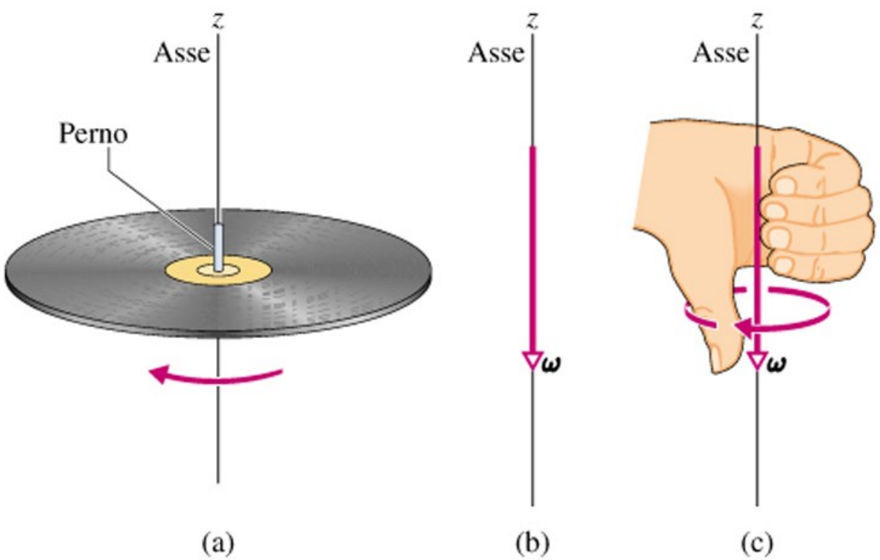
… ma sono dei vettori ?

1. θ e $\Delta\theta$ non sono vettori

(non verificano le leggi di somma vettoriale)



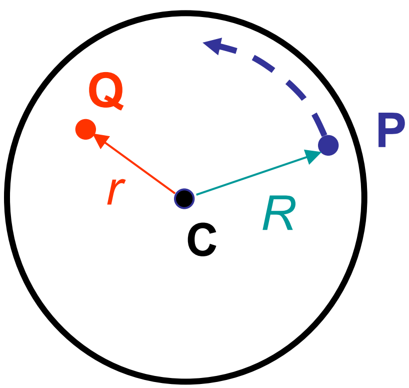
2. ω ed α sono vettori



Equazioni del moto per accelerazione costante (lineare e angolare)

Moto lineare	Variabile mancante		Moto rotatorio
$v = v_0 + at$	$x - x_0$	$\theta - \theta_0$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v	ω	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t	t	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a	α	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$
$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0	ω_0	$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$

Che legame esiste tra **(v, a)** in un punto e **(ω, α)** del corpo rigido ?



1 giro/min
(2π/60 sec.)

Per il punto P ⇨ $\vec{v}_P = \dfrac{2\pi R}{60\,s}$

Per il punto Q ⇨ $\vec{v}_Q = \dfrac{2\pi r}{60\,s}$

$$\vec{v}_P > \vec{v}_Q$$

Siccome per traiettorie circolari

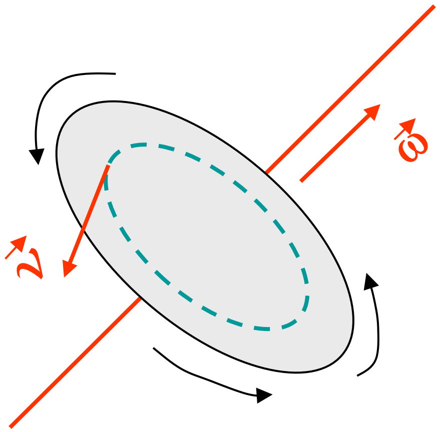
$$S(t) = r \cdot \theta(t)$$

Vale

$$\boxed{v(t) = \frac{dS}{dt} = r \cdot \frac{d\theta}{dt} = r \cdot \omega(t)}$$

MODULO !

ATTENZIONE !!



e di conseguenza

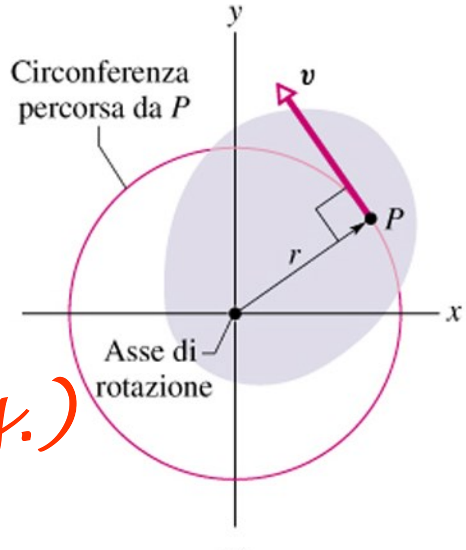
$$a = \frac{d(r \cdot \omega)}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt} = r \cdot \alpha$$

MODULO !

Ricordiamo che dal Moto Circolare Uniforme

$$\boxed{a_r = \omega^2 \cdot r}$$

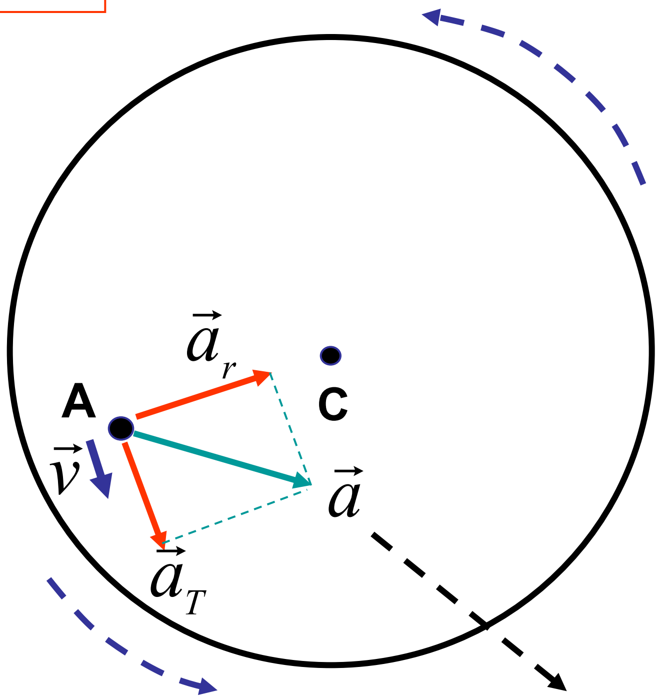
Centripeta



In generale

$$\boxed{a_T = \alpha \cdot r}$$

Diretta come $\vec{v}$ (tang.)



$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_r}$$

Energia Cinetica

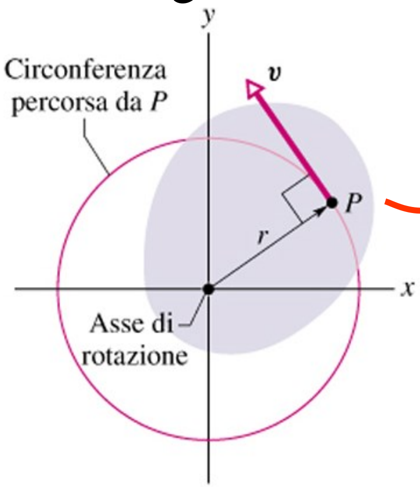
Traslazionale

$$v \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 \quad : \frac{[m][l]^2}{[t]^2}$$

Rotazionale

$$\omega \rightarrow \frac{1}{2}\,?\,\omega^2 \quad : [?]\frac{[1]}{[t]^2}$$

$$[?] = [m]\cdot[l^2]$$



P: $m_P\,;\ v_P = \omega\, r$

$K_P = ½\, m_P\, v^2_P$

Considerando tutte le particelle

$$E_K = ½\, m_1\, v^2_1 + ½\, m_2\, v^2_2 + \ldots\ldots\ldots + ½\, m_N\, v^2_N$$

ma per ciascuna $\quad v_i = \omega \cdot r_i$

La STESSA !!

Quindi

$$E_K = \frac{1}{2}\left\{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots\dots\dots + m_N r_N^2\right\}\cdot\omega^2$$

$$E_K = \frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2\right\}\cdot\omega^2$$

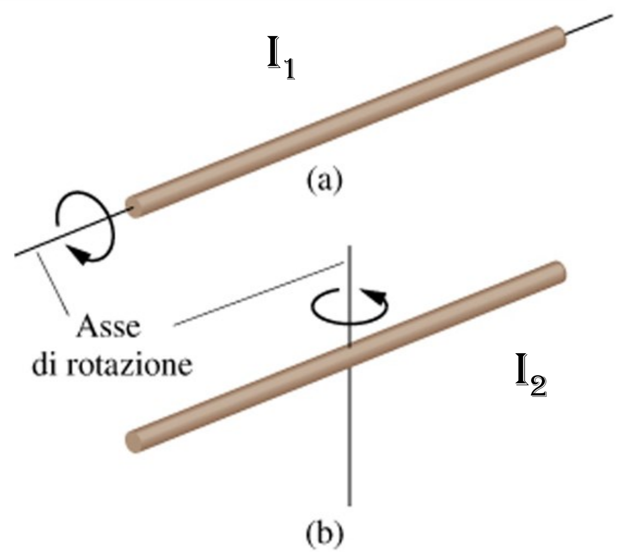
Possiamo allora introdurre il

Inerzia di un corpo a variazione del suo stato di rotazione

Domanda d'esame !

MOMENTO DI INERZIA

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \int r^2 \cdot dm}$$

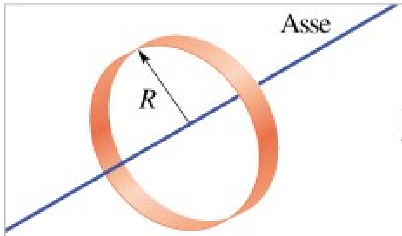


$$E_K = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 \qquad \left\{ per\ \ traslazioni: \quad E_K = \frac{1}{2} M \cdot v^2 \right\}$$

Massa e Geometria

$$\boxed{I_1 < I_2}$$

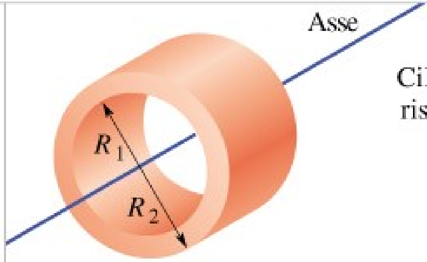
Alcune espressioni del momento d'inerzia



Anello rispetto all'asse centrale

$I = MR^2$

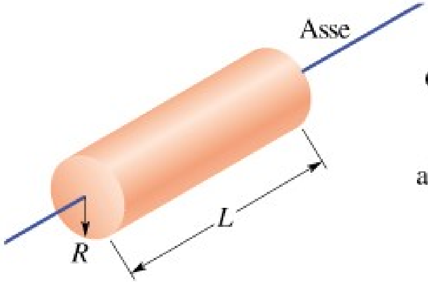
(a)



Cilindro anulare rispetto all'asse centrale

$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$

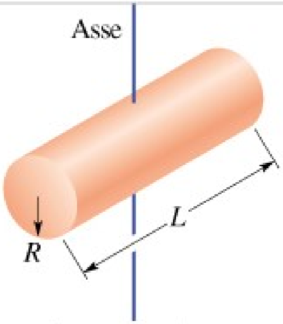
(b)



Cilindro pieno (o disco) rispetto all'asse centrale

$I = \frac{1}{2}MR^2$

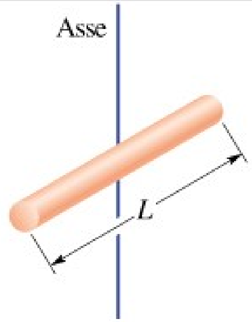
(c)



Cilindro pieno (o disco) rispetto a un diametro passante per il centro

$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$

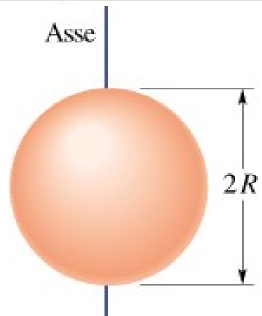
(d)



Barra sottile rispetto a un asse passante per il centro e perpendicolare alla lunghezza

$I = \frac{1}{12}ML^2$

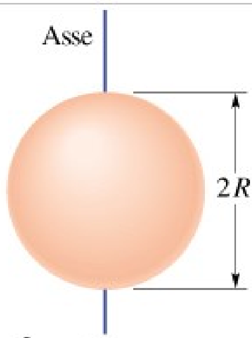
(e)



Sfera piena rispetto a un diametro

$I = \frac{2}{5}MR^2$

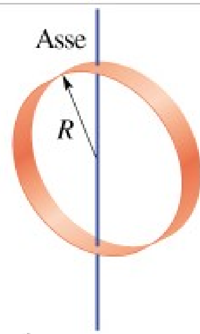
(f)



Sfera cava (o guscio) sottile, rispetto a un diametro

$I = \frac{2}{3}MR^2$

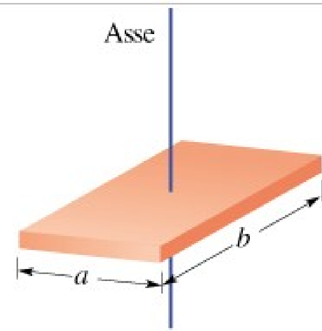
(g)



Anello rispetto a un diametro

$I = \frac{1}{2}MR^2$

(h)



Lastra rispetto a un asse perpendicolare passante per il centro

$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$

(i)

Teorema di Huygens-Stainer
(degli assi paralleli)

Massa totale del Corpo

$$I_P = I_{CM} + M \cdot h^2$$

Distanza tra i due assi

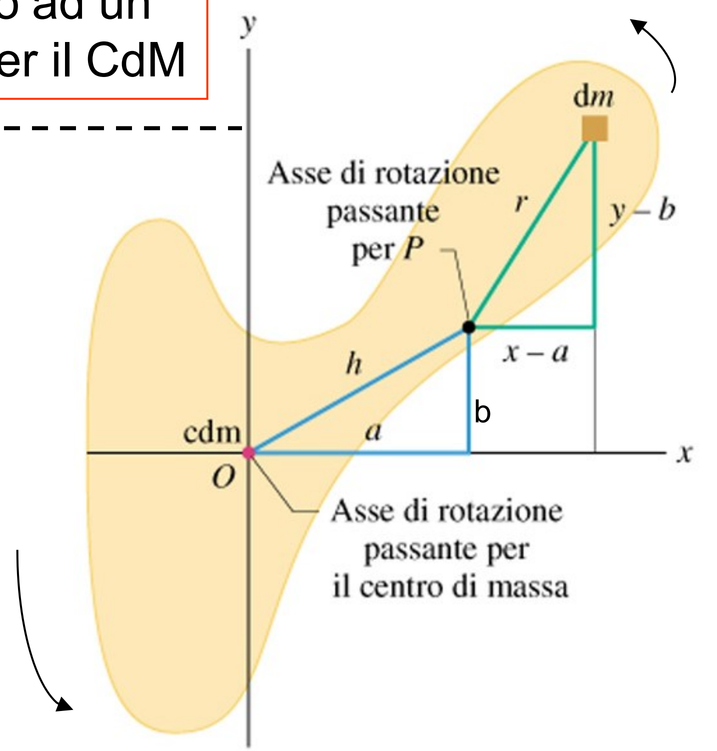
Momento di Inerzia per rotazioni rispetto ad un asse passante per P e // a quello passante per il CdM

Momento di Inerzia <u>NOTO</u> per rotazioni rispetto ad un asse passante per per il CdM

$h^2 = a^2 + b^2$ dm ⇨ (x, y)

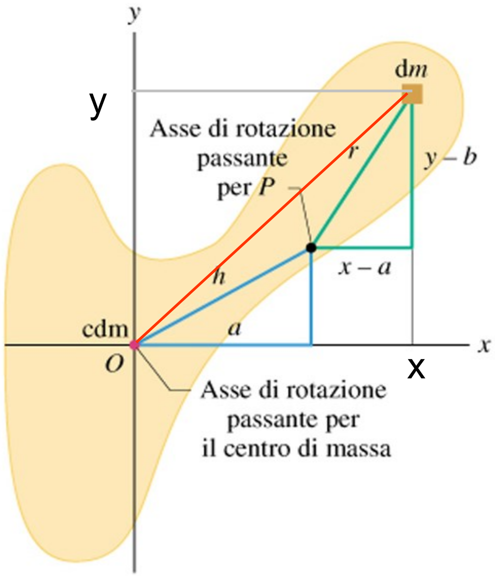
$$I_P = \int r^2 \, dm =$$

$$= \int \left[(x-a)^2 + (y-b)^2 \right] \cdot dm$$



$$I_P = \int \left(x^2 + y^2\right) \cdot dm + \int \left(a^2 + b^2\right) \cdot dm - 2a \int x \cdot dm - 2b \int y \cdot dm$$

1 2 3 4



$$r_{CM}^2 = x^2 + y^2$$

$$\boxed{I_{CM} = \int r_{CM}^2 \cdot dm}$$

Che equivale ad 1

2 $\Rightarrow$ $$\int \left(a^2 + b^2\right) \cdot dm = \left(a^2 + b^2\right) \int dm = M \cdot \left(a^2 + b^2\right) = M \cdot h^2$$

3 *e* 4 Ricordiamo che $x_{CM} = \int \frac{x \cdot dm}{M}$ dunque $\int x \cdot dm = M x_{CM}$

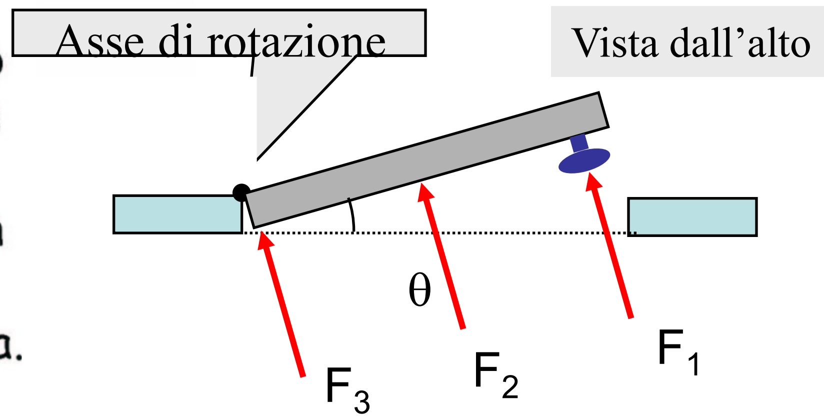
Siccome il CdM ≡ Origine (asse di rotazione) $\Rightarrow$ $\boxed{x_{CM} = 0 \quad \int x \cdot dm = 0}$

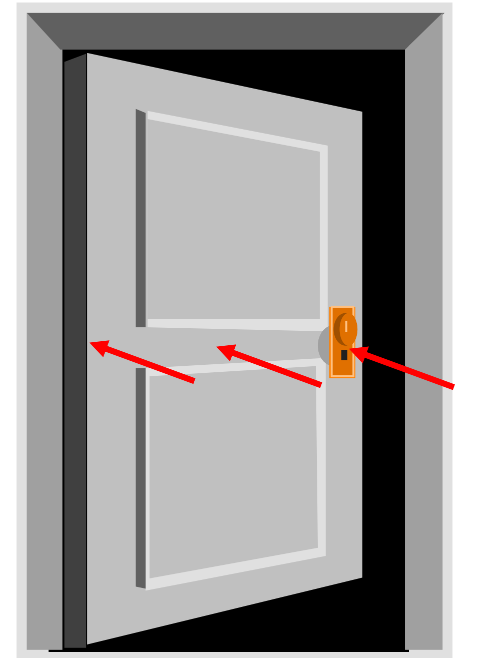
$\boxed{y_{CM} = 0 \quad \int y \cdot dm = 0}$

$$\boxed{I_P = I_{CM} + M \cdot h^2}$$

Momento di una forza

Empiricamente, sappiamo che è più semplice aprire una porta vicino alla maniglia, piuttosto che in prossimità dei cardini, anche con la stessa forza.

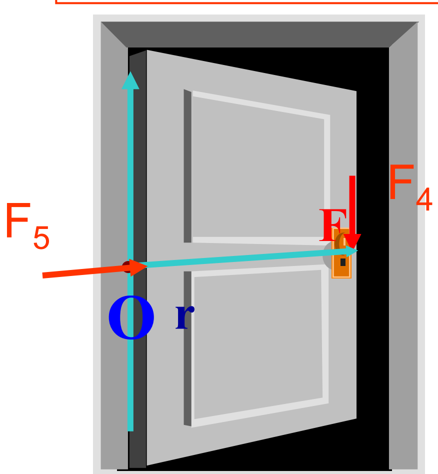




F_1 alla maniglia basta una Forza piccola

F_2 vicino ai cardini serve una forza maggiore di F_1

F_3 se spingo sui cardini (asse di rotazione) la porta non si muove qualunque sia F_3



Inoltre: se applico F_4 o F_5 (parallele al piano della porta) la porta non si muove.

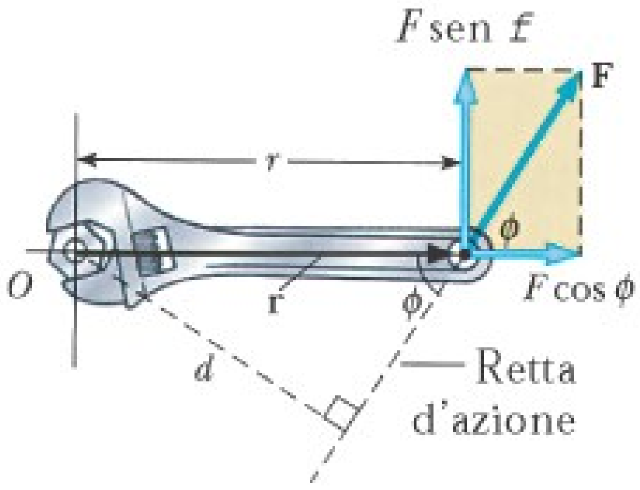
Cause del moto rotatorio sono

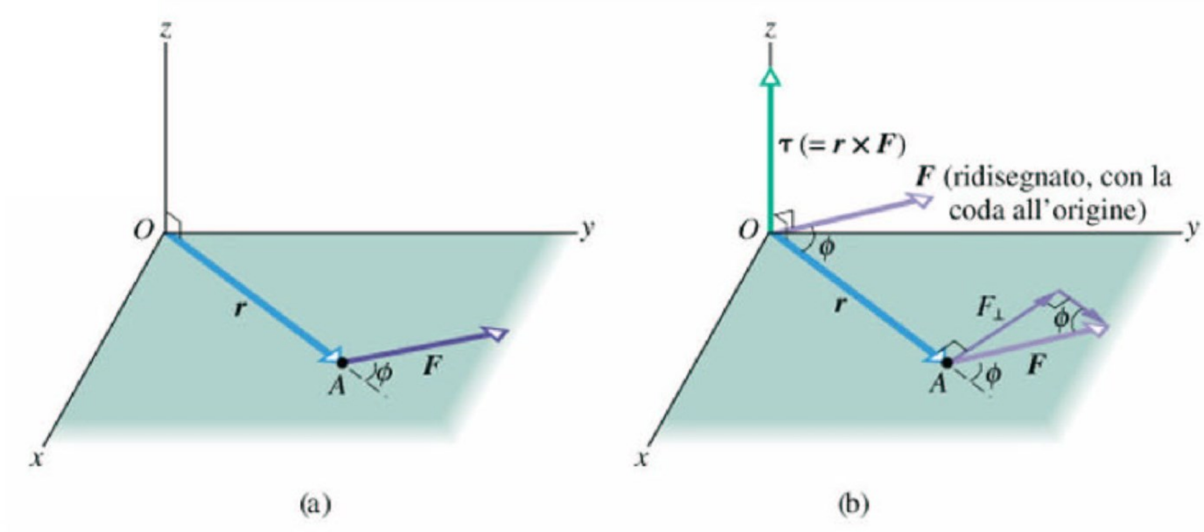
1)Forza

2)Dove è applicata

3)Direzione di applicazione

Momento di una Forza





Perché si causi una *rotazione*, non solo è necessaria una forza, ma anche che sia *applicata* in un punto conveniente. *Definiamo* il **momento della forza** la grandezza:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

il modulo è $\tau = rF \sin\Phi$, direzione normale al piano di $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$.

Condizione perché un corpo venga messo in rotazione, è che vi sia un momento della forza non nullo.

Si può anche scrivere che in modulo:

$$\tau = F_{\perp} \cdot r$$

II° Legge di Newton per il Moto Rotatorio

Domanda d'esame

$$\sum \tau = I \cdot \alpha \qquad \sum F = m \cdot a$$

Risultante Dei Momenti

Momento di Inerzia

accelerazione angolare

Opposizione alla variazione dello stato di moto traslazionale

accelerazione

Sappiamo che: $\boxed{\tau = F_{\perp} \cdot r}$ Dalla 2° Legge di newton ⇒ $F_{\perp} = m \cdot a_{\perp}$

e nella cinematica rotazionale valeva: $a_{\perp} = \alpha \cdot r$ (qui $a_{\perp}$ vuol dire tangente alla traiettoria)

Dunque $\boxed{\tau = F_{\perp} \cdot r = m \cdot (\alpha \cdot r) \cdot r = mr^2 \cdot \alpha}$ I

Se ci sono più forze ⇒ $\boxed{\sum \tau_i = \left(\sum F_i \cdot r_i\right) = \left(\sum m_i r_i^2\right) \cdot \alpha = I \cdot \alpha}$

Corpo rigido ⇒ $\boxed{\sum \tau_i = \left(\int r^2 \cdot dm\right) \cdot \alpha = I \cdot \alpha}$

Lavoro-Energia nella dinamica rotazionale

Sappiamo che:

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} m v_{fin}^2 - \frac{1}{2} m v_{in}^2 = L$$

per ciascun punto di un CORPO RIGIDO in rotazione

e intendendo $L = \int F \cdot dx$ STESSA $\boxed{\tau = F_{\perp} \cdot r}$

Ma ora vale: $\boxed{v_i = \omega \cdot r_i \quad \forall m_i \quad \textit{del corpo rigido}}$

Sostituendo ed integrando su tutto il Corpo Rigido

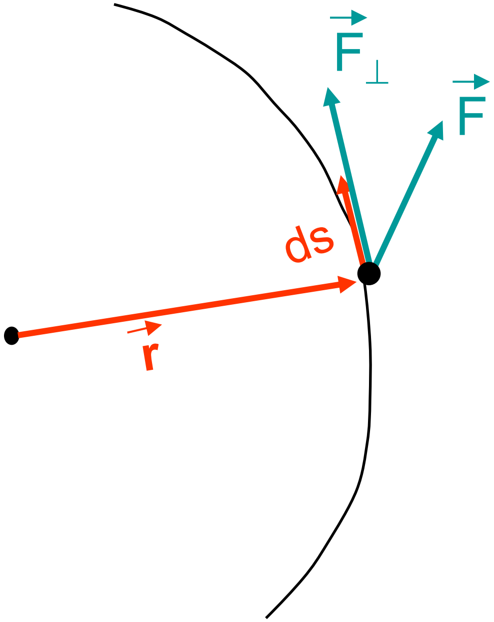
$$\Delta E_{K-Tot} = \frac{1}{2} I \cdot \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \cdot \omega_i^2 = \int F \cdot dx = L$$

$I_f = I_i$

No deformazioni

No perdita di massa

Caso 1-dimensionale



ds è ⊥ al vettore $\vec{r}$

ds = r dθ in modulo

$$\boxed{dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_\perp \cdot r \cdot d\vartheta = \tau \cdot d\vartheta}$$

Quindi $L = \int \tau \cdot d\vartheta =$ [se τ = costante] $= \tau \cdot \left(\vartheta_f - \vartheta_i\right)$

E infine ricordando che $$\boxed{P = \frac{dL}{dt}}$$

Abbiamo che $$\boxed{P = \frac{\tau \cdot d\vartheta}{dt} = \tau \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = \tau \cdot \omega}$$