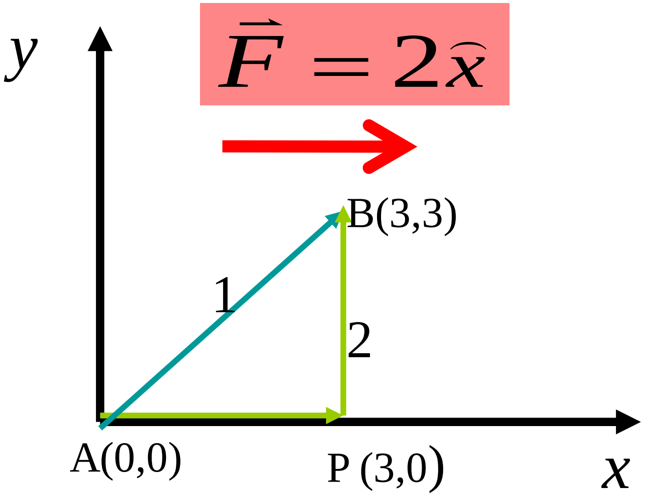
Lavoro di un forza costante



$$W_1 = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = 2 \cdot \Delta s \cdot \cos\theta = 2 \cdot 3\sqrt{2}\cos\theta =$$

$$= 6\sqrt{2} \cdot (3/3\sqrt{2}) = 6 \quad Joule$$

$$W_2 = \int_{X_A}^{X_B} F_X\, dx + \int_{Y_A}^{Y_B} F_Y\, dy =$$

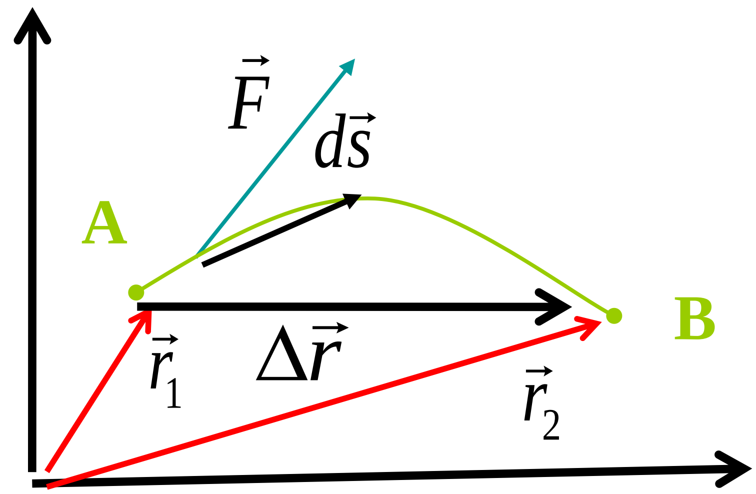
$$= 2 \cdot 3 + 0 = 6\, Joule$$

$$W_1 = W_2$$

Se la forza è costante (modulo, direzione e verso),
***il lavoro non dipende dal percorso*!!!**

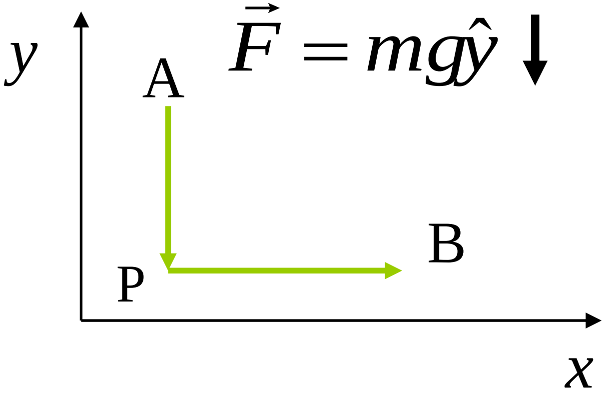
Più in generale, se F costante

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



$$W = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{s} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Il lavoro dipende solo dal punto di partenza e dal punto di arrivo ed è indipendente dalla traiettoria



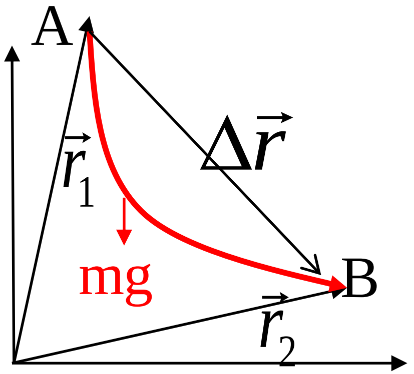
$$\vec{F} = mg\hat{y} \downarrow$$

1

$$W_{AP} = -mg\,\ell_{AP}\cos 0^\circ = -mg\left(y_B - y_A\right)$$

$$W_{PB} = -mg\,\ell_{PB}\cos 90^\circ = 0$$

$$W_{AB} = W_{AP} + W_{PB} = -mg\left(y_B - y_A\right)$$



2

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = m\vec{g}\cdot\int_A^B d\vec{s} = m\vec{g}\cdot\vec{r}_{AB}$$

$$W = m\vec{g}\cdot\vec{r}_{AB} = (-mg)(\Delta y) = -mg(y_B - y_A)$$

Energia potenziale

$$\left.\begin{aligned} W_{AB} &= -\left(mgy_B - mgy_A\right) \\ U &= mgy \end{aligned}\right\} \qquad W_{AB} = -\left(\underbrace{U_B}_{\text{Finale}} - \underbrace{U_A}_{\text{Iniziale}}\right) = -\Delta U$$

Esiste una funzione della posizione del punto materiale P

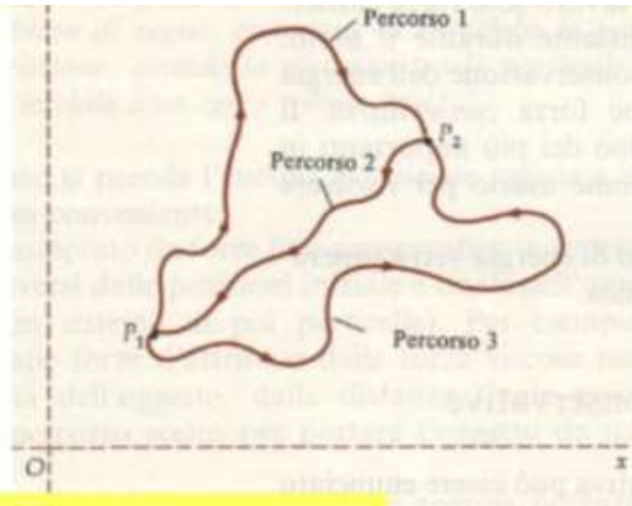
U(P) = U(x,y,z)

$$W_{AB} = -\Delta U$$

Legge della conservazione dell'energia

Forze **conservative** e non

Supponendo di spostare il punto materiale dalla posizione P_1 a P_2 su diversi percorsi, troviamo che per *alcuni campi di forze* il lavoro **NON** dipende dal percorso scelto.

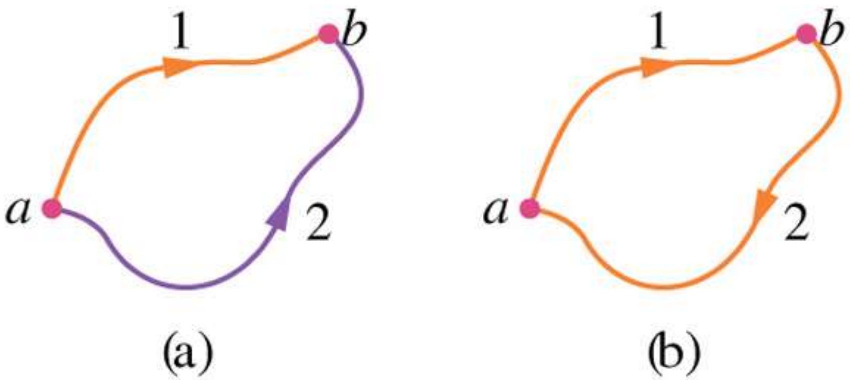


In questo caso, la forza e' detta **conservativa**. In caso contrario, il campo è non conservativo

In altri termini, il lavoro complessivo svolto da una forza conservativa su una particella che si muove su un percorso chiuso è zero.

Esempi:
- Forza peso, $F_z = mg$
- Forza di tipo centrale, $\vec{F} = k\frac{\hat{r}}{r^2}$
- Forza di attrito
- $F_x = xy$; $F_y = y$; $F_z = 0$

Caso importante!



$$W_{AB} = \int_{A,1}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{A,2}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$W_{AB} = \int_{A,1}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{A,2}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$W_{AB} = \int_{A,1}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{B,2}^{A} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$W_{AB} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Il lavoro effettuato da una forza conservativa su un percorso chiuso è nullo

Energia Potenziale

Se (e solo se) il campo di forze è conservativo, allora è possibile definire una funzione scalare della sola posizione, l' Energia Potenziale U(r). Il lavoro della forza dipende solo dalla variazione dei valori della funzione U(r) tra i punti iniziale e finale.

$$L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \equiv -[U(B) - U(A)] = -\Delta U$$

L'energia potenziale U(x,y,z) viene sempre definita a meno di una costante iniziale, che risulta legata alla scelta del sistema di riferimento e che in ogni caso non va a modificare il calcolo di ΔU.

$$W_{P_1P_2} = -\Delta U = U(P_1) - U(P_2)$$

Considerando i punti P_o, iniziale, e P, il generico punto dello spazio:

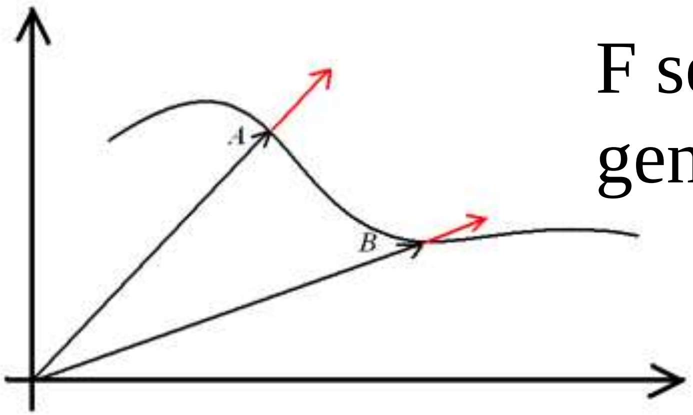
$$W_{P_oP} = -\Delta U = U(P_o) - U(P)$$

$$U(P) = U(P_o) - W_{P_oP} = \boxed{U(P_o)} - \int_{P_o}^{P} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

costante

P_o punto punto dello spazio a cui viene assegnato un valore arbitrario dell'energia potenziale. La funzione U (P) definito rispetto alla costante $U(P_0)$

Le forze centrali sono conservative



F sempre nella direzione $\hat{u}_r$ ed in generale può dipendere da $|\vec{r}|$

$$W = \int_A^B \vec{F}(r) \cdot d\vec{s} = \int_A^B F(r)\,dr$$

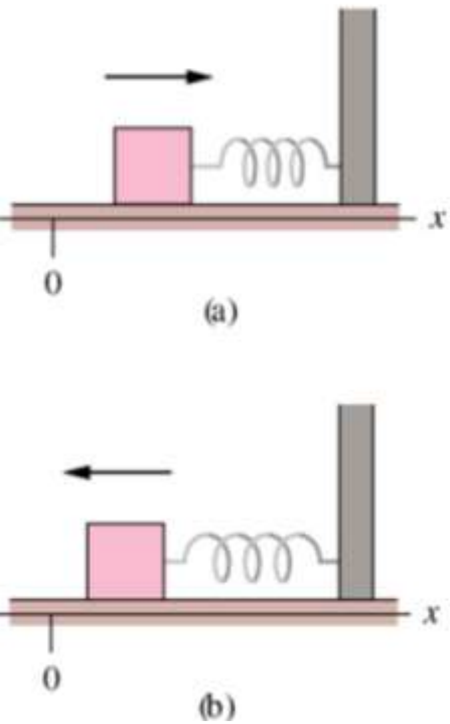
La soluzione di questo integrale dipende solo da $\vec{r}_A, \vec{r}_B$

$$W = -(U_{r_A} - U_{r_B})$$

$U_r =$ Energia potenziale

$$\boxed{\vec{F} = -(dU/dr)\hat{u}_r}$$

Esempio: Energia elastica



Calcoliamo il lavoro svolto per spostare il corpo da x_i ad una x generica

$$L = \int_{x_i}^{x} \vec{F}_e \bullet dx = \int_{x_i}^{x} -kx \cdot dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Definisco quindi l'Energia Potenziale Elastica come:

$$U_e(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

$$L = -\Delta U_e = U_e(x_i) - U_e(x)$$

Se scelgo come posizione iniziale l'origine del sistema di riferimento ovvero:

$$x_i = 0$$

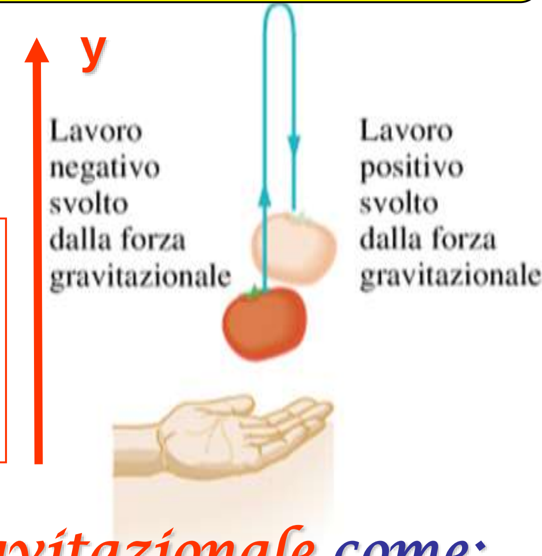
e assumo

$$U_e(x_i) = 0$$

$$U_e(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Esempio: Energia potenziale gravitazionale

Calcoliamo il lavoro svolto per spostare il corpo da y_i ad una y generica



$$L = \int_{y_i}^{y} \vec{F}_G \bullet dy = \int_{y_i}^{y} -mg \cdot dy = mgy_i - mgy$$

Definisco quindi l'Energia Potenziale Gravitazionale come:

$$\boxed{U_G(y) = mgy + C} \Rightarrow \boxed{L = -\Delta U_G = U_G(y_i) - U_G(y)}$$

Se scelgo come posizione iniziale l'origine del sistema di riferimento ovvero:

$$\boxed{y_i = 0} \xrightarrow{\text{e assumo}} \boxed{U_G(y_i) = 0} \Rightarrow \boxed{U_G(y) = mgy}$$

• In generale, la funzione **energia potenziale U(r)** deve essere determinata problema per problema !
•Se tiene fissa la posizione di partenza (ad es., nell'origine del SiRCO o ad una distanza ∞ dall'origine), la **funzione energia potenziale dipende solo dal punto di arrivo.**
• In tal caso, U(r) è definita a meno di una costante additiva (arbitrarietà della posizione di partenza).

Energia Meccanica

Definiamo ***energia meccanica*** **E** la somma di energia cinetica T ed energia potenziale U:

$$E = T + U$$

-L'energia totale E di un sistema può variare solo se viene trasferita *energia dal (al) di fuori* del sistema. Se questo non può avvenire, il sistema si chiama *isolato*.
- In un sistema isolato, ***l'energia meccanica si conserva.***

Legge di conservazione dell'energia meccanica

1. Teorema delle forze vive: il lavoro svolto dalle forze eguaglia la variazione di energia cinetica: $L = T_2 - T_1$
2. Se il campo di forze è conservativo, $L = U_1 - U_2$
3. allora la quantità:

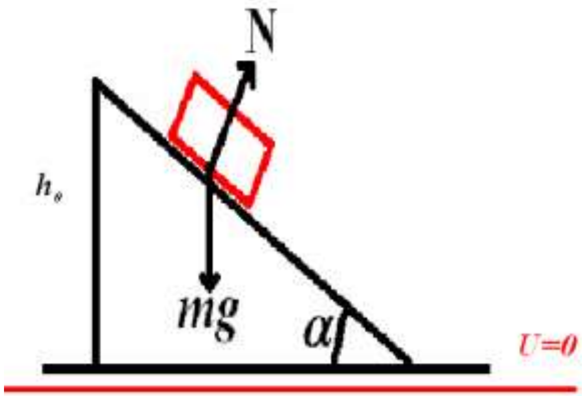
$$E \equiv U_2 + T_2 = U_1 + T_1$$

rimane costante lungo tutta la traiettoria del moto

-La legge della conservazione dell'energia meccanica è molto importante e verrà generalizzata.
- E' una legge predittiva (possiamo ricavare informazioni)

Es. 7.1 – A quale velocità deve essere sparato un razzo sulla superficie terrestre in modo che riesca a fuggire all'attrazione della Terra?

Piano inclinato



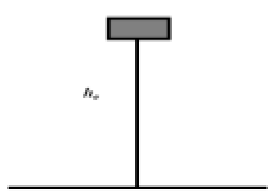
La forza $\vec{N} \perp$ *spostamento* $\Longrightarrow$

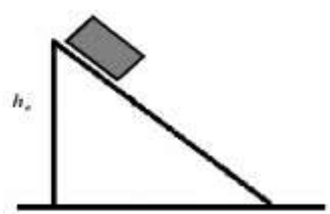
$\Longrightarrow$ *non produce lavoro*

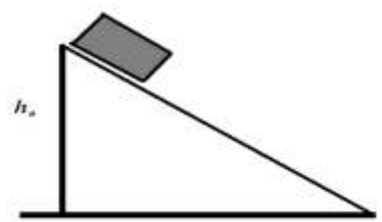
E_T *si conserva !!*

Punto di partenza	$E_K = 0$	$U = mgh_o$
Punto di arrivo	$E_K = \frac{1}{2} mV_f^2$	$U = 0$
Punto generico	$E_K = \frac{1}{2} mV^2$	$U = mgh$

$$mgh_0 = \frac{1}{2} mV_f^2 \quad \Longrightarrow \quad V_f = \sqrt{2gh_0}$$

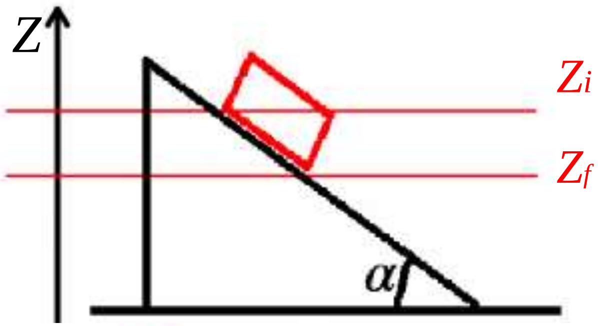






t_1 $V = \sqrt{2gh_0}$ $t_1 < t_2$ $V = \sqrt{2gh_0}$ $t_2 < t_3$ $V = \sqrt{2gh_0}$

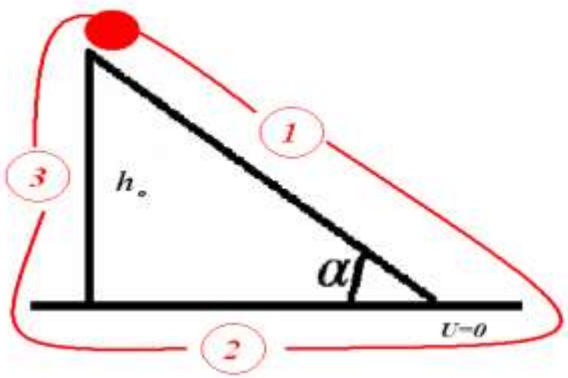
Piano inclinato



$$L = -(U_f - U_i)$$

$$L = -(mgh_j - mgh_i) = -mg*(Z_j - Z_i)$$

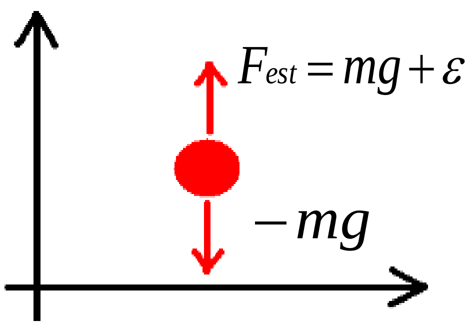
Conta solo la differenza di quota !!



$$L_1 = mgh_0$$

$$L_2 = 0 \quad \textit{Forza peso} \perp \textit{allo spostamento}$$

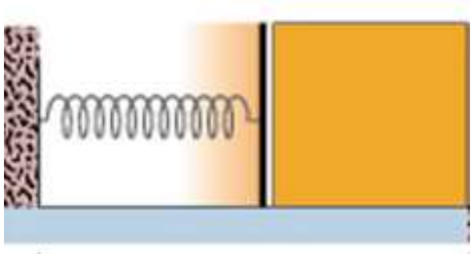
$$L_3 = ?$$



$$L_3 = \int_0^{h_o} (-mg)dz - mgh_0$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = \oint m\vec{g}d\vec{r} = \varnothing$$

Sistema Corpo + Molla



Per l'energia potenziale e la forza vale:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \quad \Rightarrow F = -kx$$

Con accelerazione

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

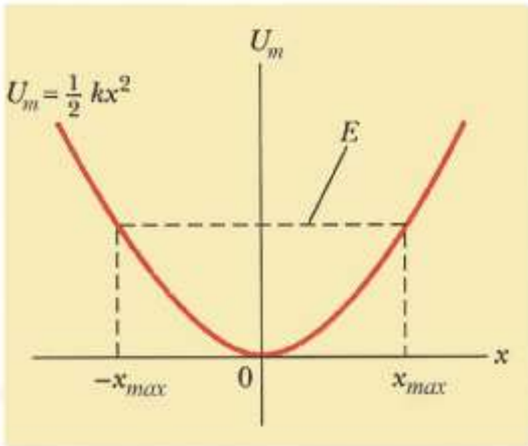
e se definisco $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ si ha

$$\boxed{U = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2}$$

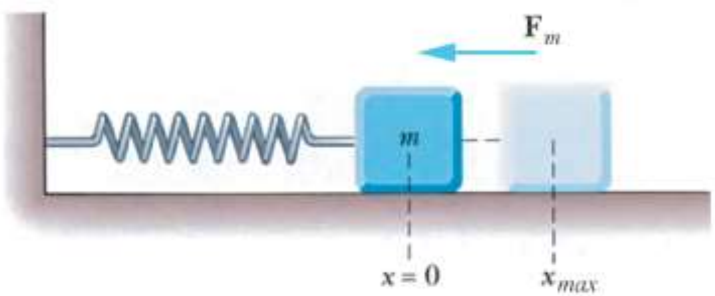
Potenziale parabolico con concavità verso l'alto

Il MOTO ARMONICO SEMPLICE avviene <u>sempre</u> in presenza di Potenziale Parabolico... e viceversa se $U \propto x^2$ (con concavità verso l'alto) avremo un moto armonico

Vediamo ora di seguire l'alternanza delle energie in funzione di x anziché di t (cioè in base a "dove" si trova il punto materiale



(a)



(b)

L'energia potenziale assume valore massimo agli estremi di oscillazione dove l'energia cinetica è nulla

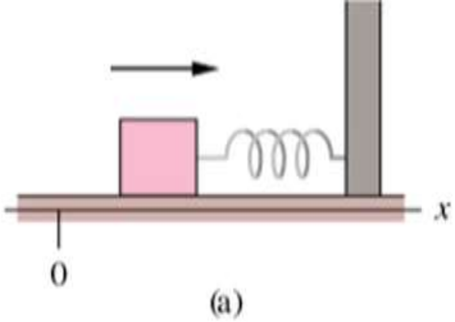
Mentre nel centro di oscillazione l'Energia potenziale è nulla e l'energia cinetica assume valore massimo

Da $$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = E \quad (costante)$$

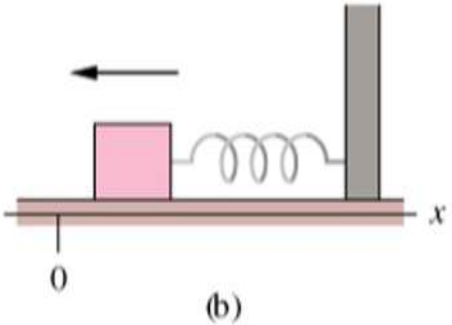
ricavo $$K = \frac{1}{2}mv^2 = E - \frac{1}{2}kx^2$$

e $$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(x_{\max}^2 - x^2)}$$

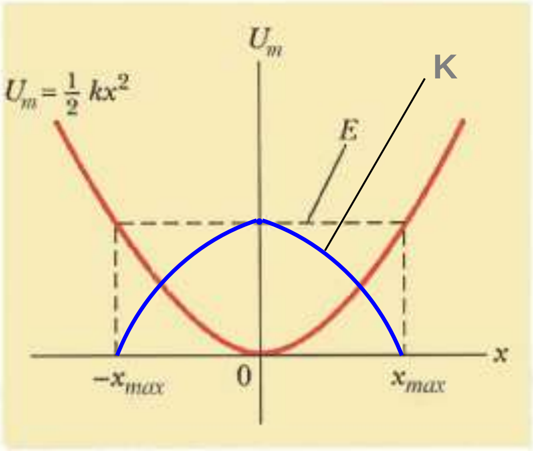
La seconda equazione mi dice che v=0 negli estremi di oscillazione ($x = \pm x_{max}$), mentre assume valore massimo per x=0



Quindi si ha: $U = \frac{1}{2}kx^2$ $K = E - \frac{1}{2}kx^2$



E sono entrambi descritti da parabole



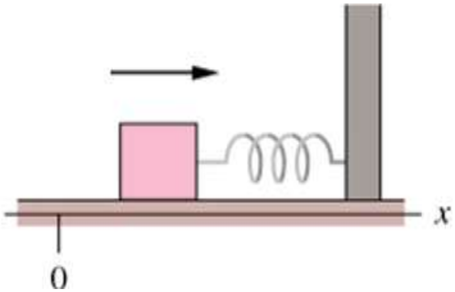
U e K sono in "controfase". La loro somma è sempre costante. L'energia si alterna tra potenziale (Molla) e Cinetica (massa in moto)

Queste considerazioni energetiche discendono dalla forma delle energie e della legge oraria e possono essere estese anche ad altri casi di MOTO ARMONICO SEMPLICE, come ad esempio il moto del pendolo

Conservazione dell'Energia nel moto Elastico

In questo caso le forze sono di tipo conservativo (FORZA ELASTICA).

Dunque l'energia totale E si conserva nel tempo (in ogni configurazione del sistema)



La legge oraria è:

$$x = x_{Max}\cos(\omega t+\varphi) \quad con \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$U(t)=\frac{1}{2}kx^2(t)=\frac{1}{2}kx_{Max}^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

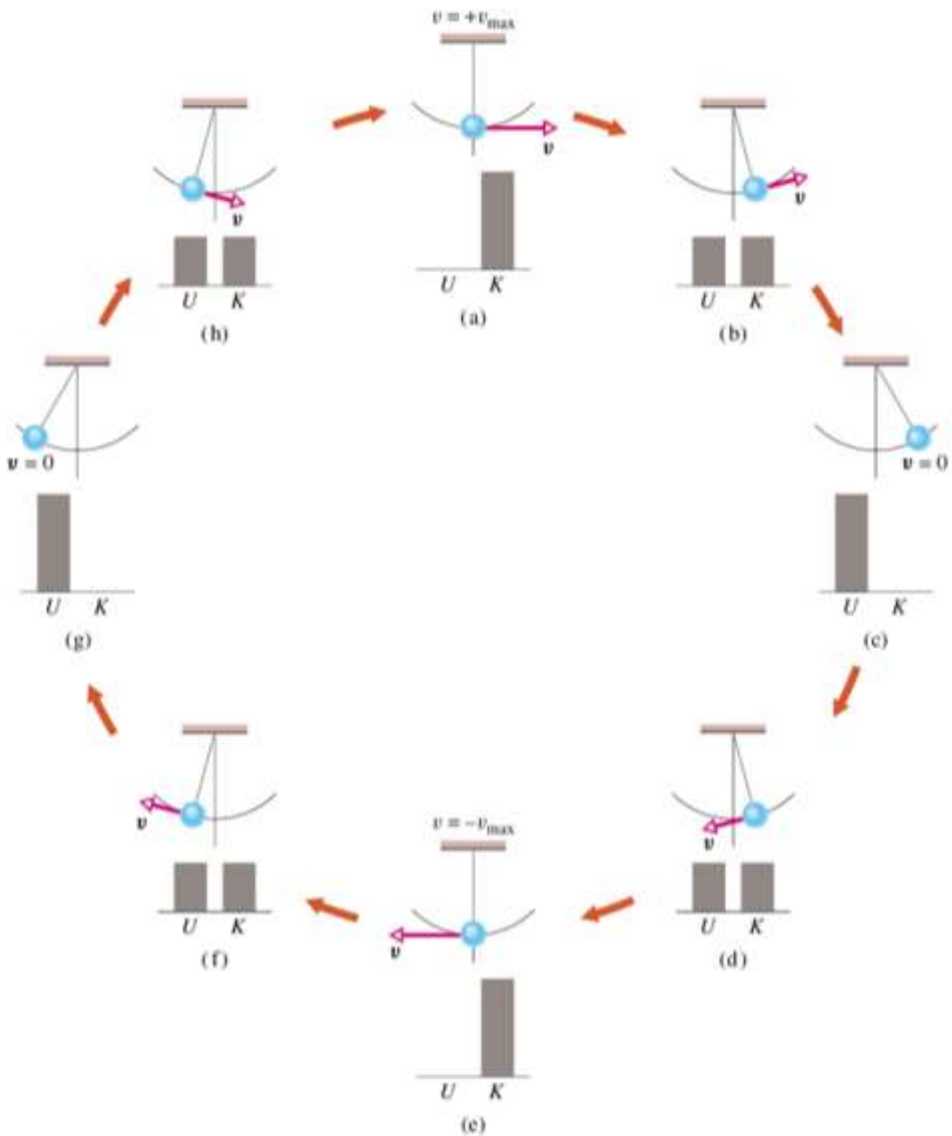
Ora si ha che $v(t)=\dfrac{dx}{dt}=-x_{Max}\omega\cdot\sin(\omega t+\varphi)$

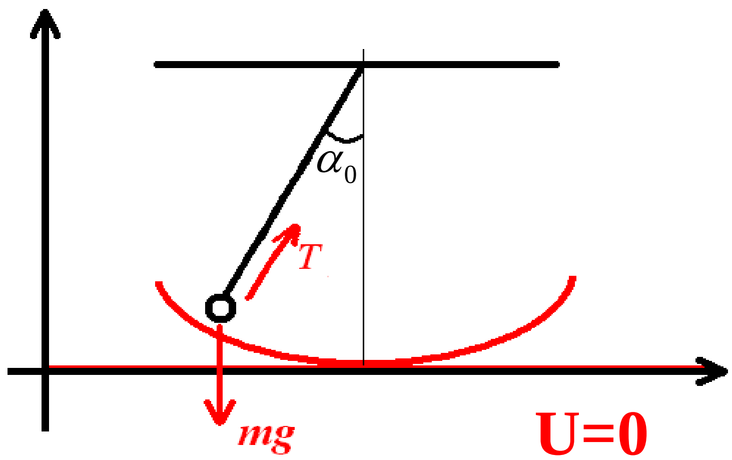
Quindi

$$K(t)=\frac{1}{2}mv^2(t)=\frac{1}{2}mx_{Max}^2\omega^2\cdot\sin^2(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}kx_{Max}^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

Dunque: $\boxed{E=U(t)+K(t)=\frac{1}{2}kx_{Max}^2\cos^2(\omega t+\varphi)+\frac{1}{2}kx_{Max}^2\sin^2(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}kx_{Max}^2}$

Conservazione dell'Energia nel moto del Pendolo

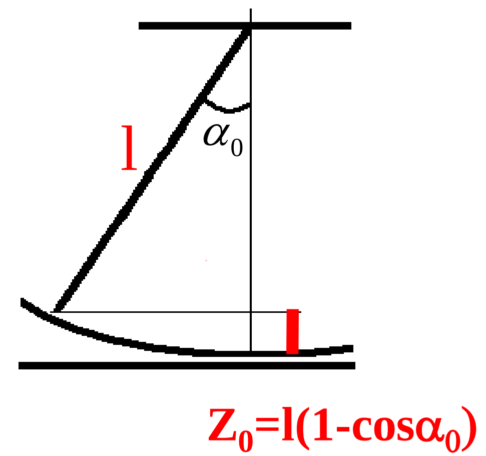




$m\vec{g}$ Forza conservativa

$\vec{T}$ Forza non conservativa, ma non compie lavoro

→ E_T Si conserva !



Punto più alto
$$\begin{cases} E_k = 0 \\ U = mgz_0 = mgl(1-\cos\alpha_0) \end{cases}$$

Punto più basso
$$\begin{cases} E_k = \dfrac{1}{2}mv_0^2 \\ U = 0 \end{cases}$$

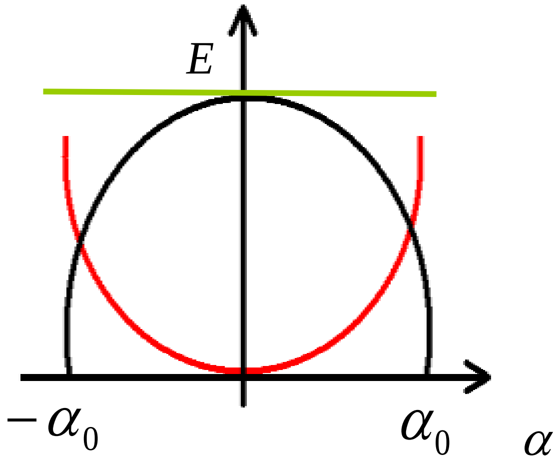
Punto generico
$$\begin{cases} E_k = \dfrac{1}{2}mv^2 \\ U = mgz = mgl(-\cos\alpha) \end{cases}$$

$(E_k + U)$ *punto generico* $=$ $(E_k + U)$ ***punto più alto***

$$mgl(1-\cos\alpha)+\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 = mgl(1-\cos\alpha_0)$$

$$\boxed{\mathrm{v} = \sqrt{2gl(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}}$$

Nel punto più basso, la velocità è massima: $\boxed{\mathrm{v}_o = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha_0)}}$

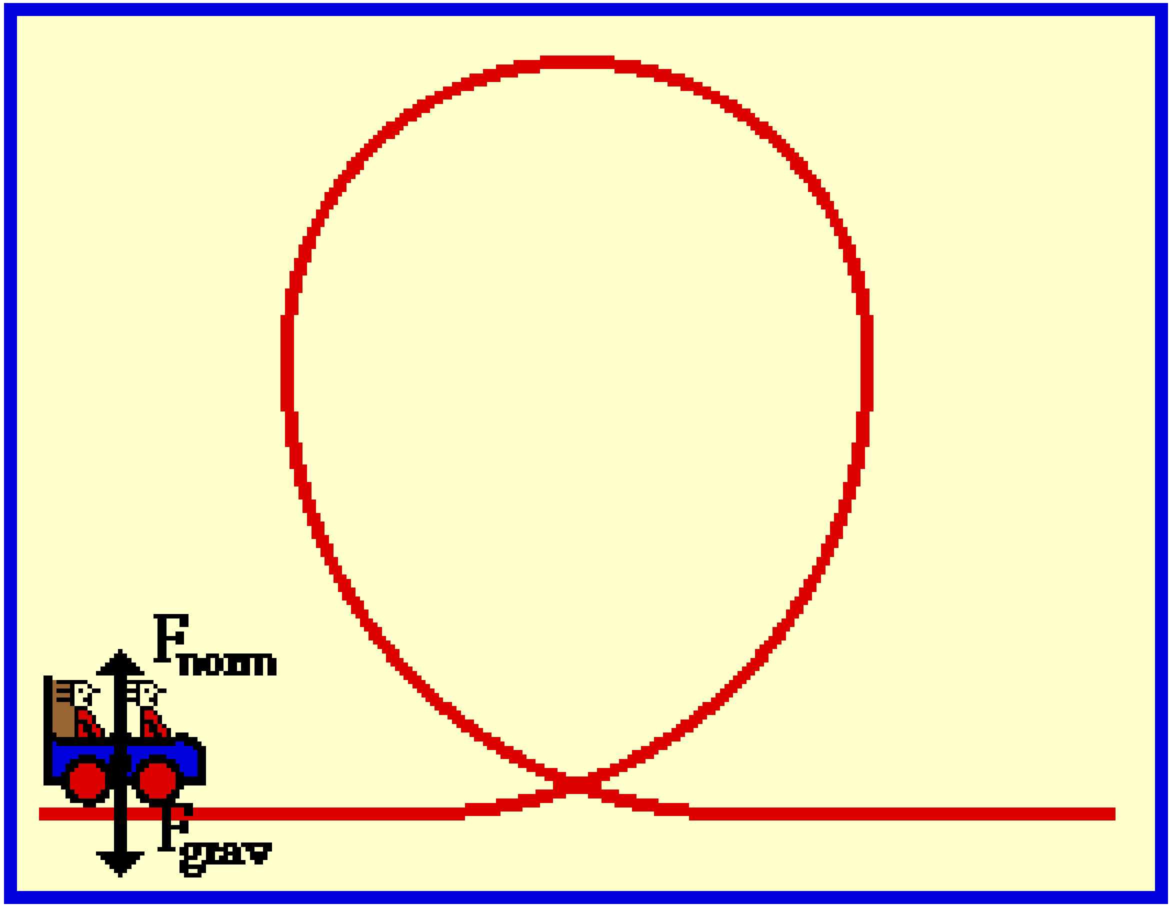


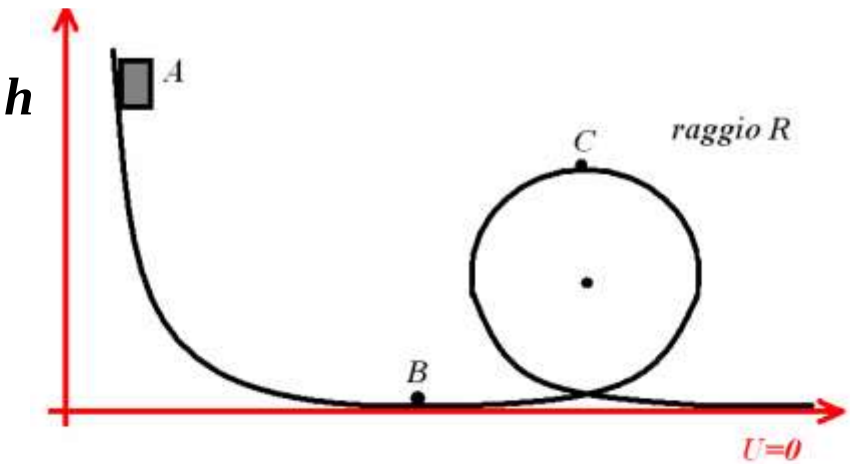
$$E_k = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}m(2gl)(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$

U=mgl(1-cos α ***)***

E_k + U = costante

Il giro della morte





Da quale altezza si deve partire per fare correttamente il giro?

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \Leftrightarrow v_B = \sqrt{2gh}$$

B

$$E_{kB} = \frac{1}{2}mv_B^2 = mgh$$

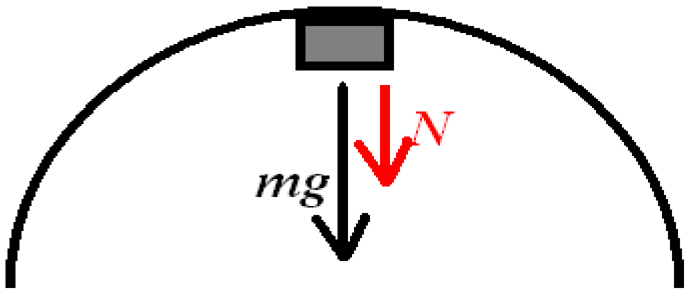
$$U_B = 0$$

C

$$U_c = 2gRm$$

$$E_{kc} = 1/2mv_c^2$$

$$v_c \neq 0$$



$$v_c \neq 0$$

$$F_{centr.} = mg+N$$

$$mg+N=(mv^2_C\ )/R$$

$|N| \neq 0$ *Altrimenti il corpo si stacca!!*

In C : $mg+N= (mv^2_C)/R$

Condizione limite: N diventa nullo in C

$$mg=(mv^2_C\ )/R \Longrightarrow v_c = \sqrt{gR}$$

Conservazione dell'energia tra A e C

$$mgh=1/2\ mv^2_C+2gRm \qquad h=5/2R$$

$$W = -\Delta U$$
$$d(W) = -d(\Delta U)$$

$$dW = -dU$$
$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = -dU$$

$$F ds \cos\theta = -dU \qquad F_T ds = -dU$$

$$F_T = -dU / ds$$

La componente della forza nella direzione dello spostamento, si ottiene derivando la funzione U, rispetto alla coordinata relativa

Ancora sull'energia potenziale

In generale U(x,y,z)

$$F_X = -(\delta U / \delta x)\hat{u}_x$$

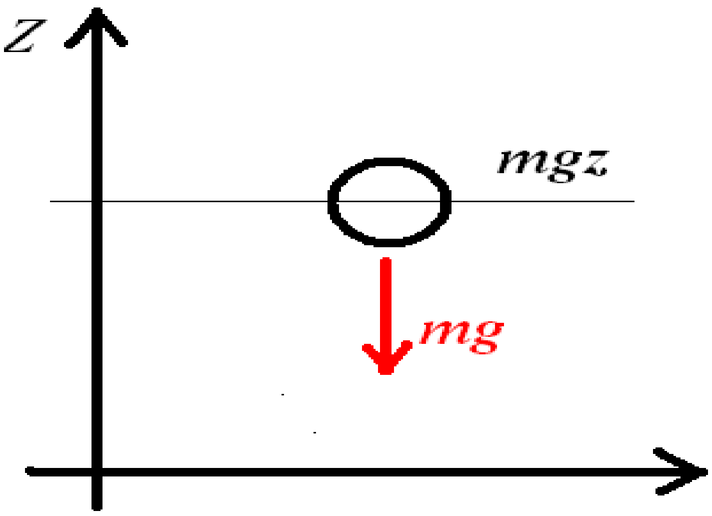
$$F_Y = -(\delta U / \delta y)\hat{u}_y$$

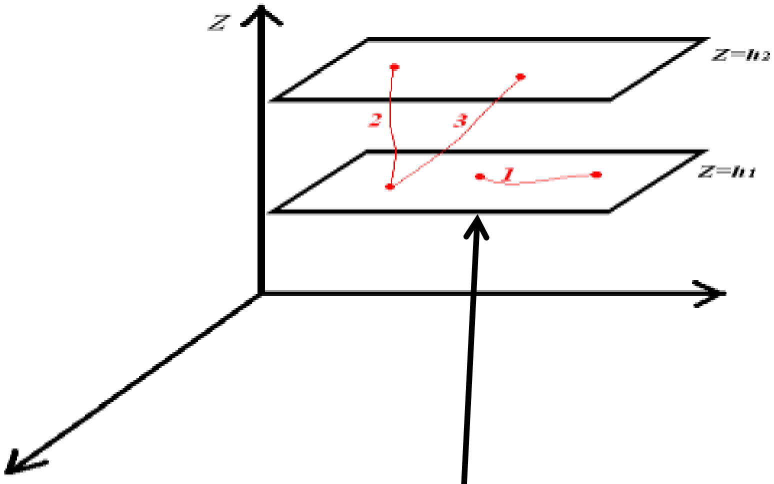
$$F_Z = -(\delta U / \delta z)\hat{u}_z$$

$(\delta U / \delta x)$ Significa derivare solo rispetto a X

$$U = mgz$$

$$F_X = -(dU / dz)\hat{u}_x = -mg$$





$$U = mgz$$

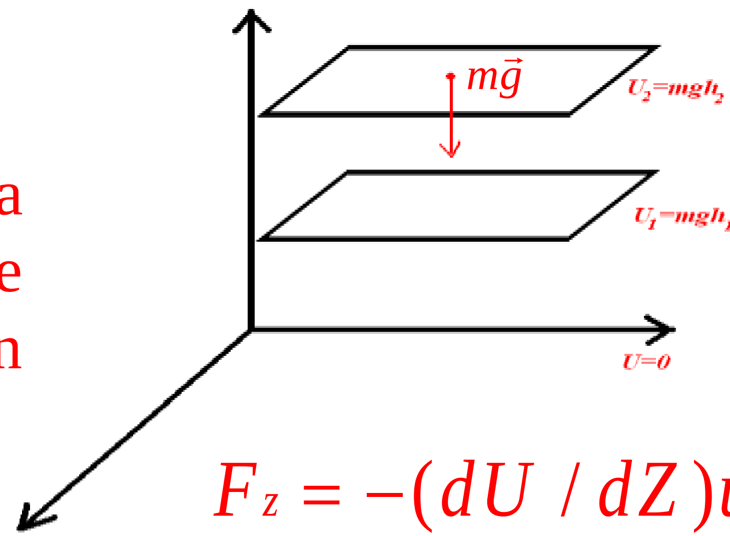
Percorso 1 : W = 0

Percorso 2 : W = $mg(h_2-h_1)$

Percorso 3 : W = $mg(h_2-h_1)$

Superficie "<u>equipotenziale</u>"

La forza è sempre diretta perpendicolarmente alla superficie equipotenziale diretta nel verso in cui essa decresce.

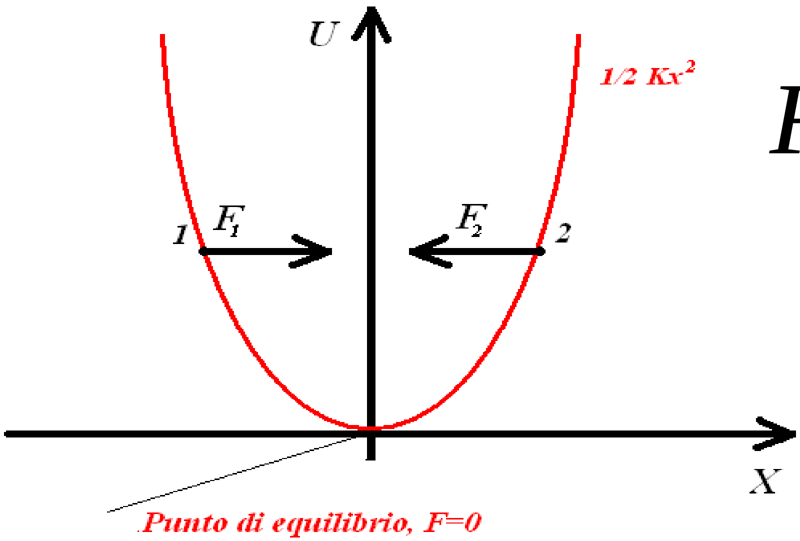


$$F_z = -(dU/dZ)\hat{u}_z$$

Le curve di energia potenziale

Forza elastica

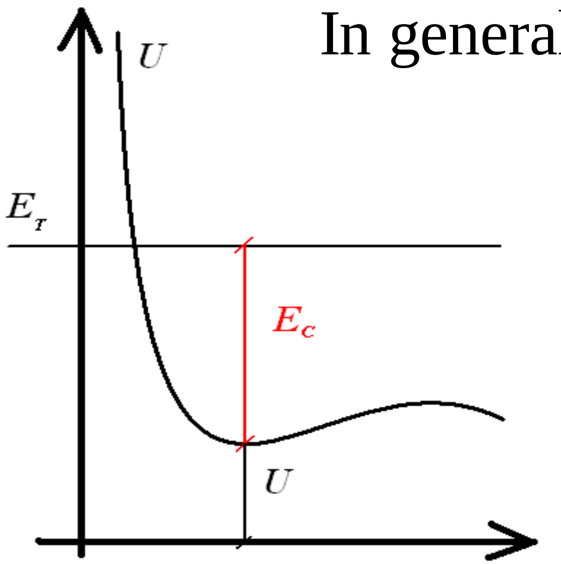
$$U = \frac{1}{2} K x_0^2$$



$$F = -(dU/dx) = -Kx$$

1 $\quad Se \quad x < 0 \quad F_1 > 0$

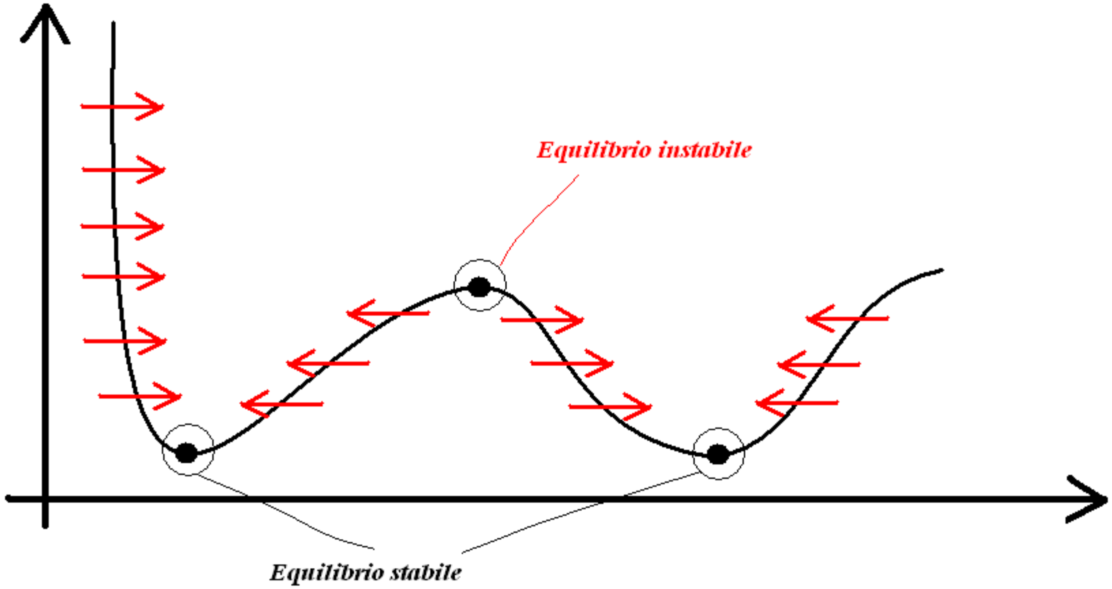
2 $\quad Se \quad x > 0 \quad F_2 < 0$



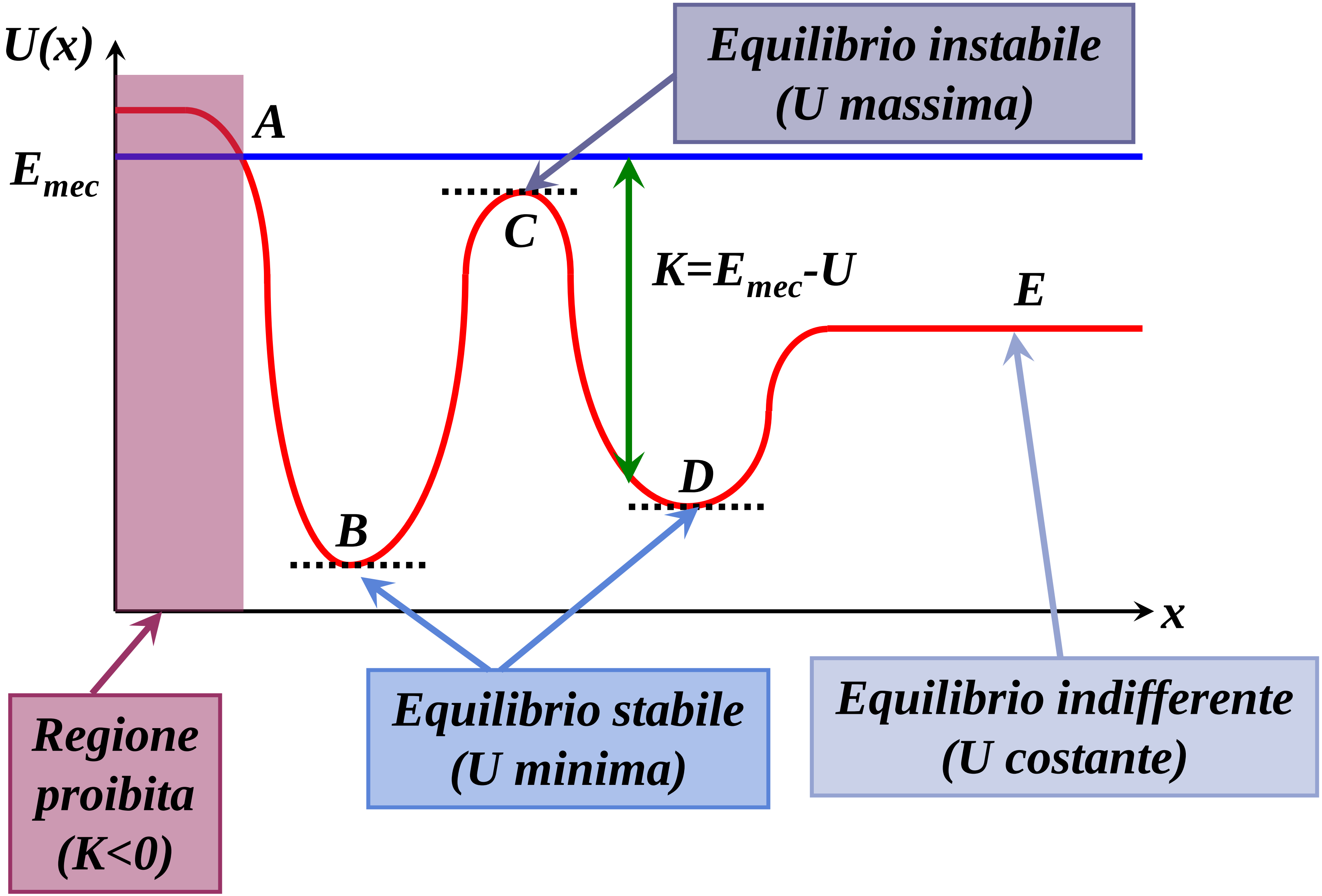
In generale

$$F = -(dU/dx)$$

$$Se \quad dU/dx = 0 \Rightarrow U = Max/Min$$



Curve dell'energia potenziale



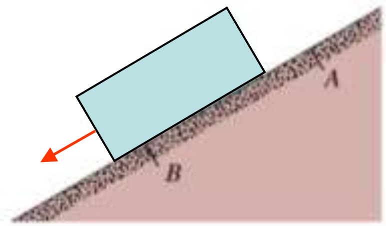
Forze Conservative, Sistema Isolato

$$U + K = costante \Rightarrow \Delta(U + K) = 0$$

Forze Conservative + Dissipative, Sistema Isolato

$$\Delta(U + K + E_{Int}) = 0$$

Ad Es. Riscaldamento per frizione

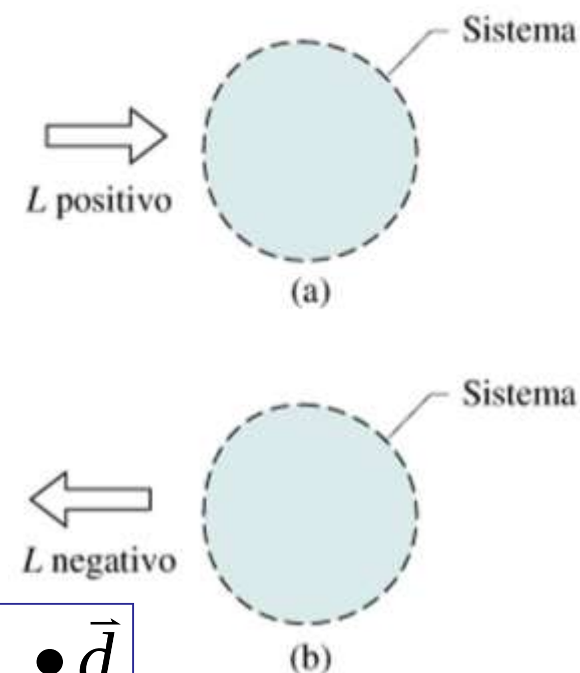


[Se consideriamo come sistema: il blocco più il piano inclinato, che si scaldano durante il processo]

Sistema non Isolato

A) Agiscono Forze dall'esterno sul sistema (Lavoro fatto sul sistema)

B) Il sistema agisce sull'ambiente con una Forza (Lavoro fatto dal Sistema)



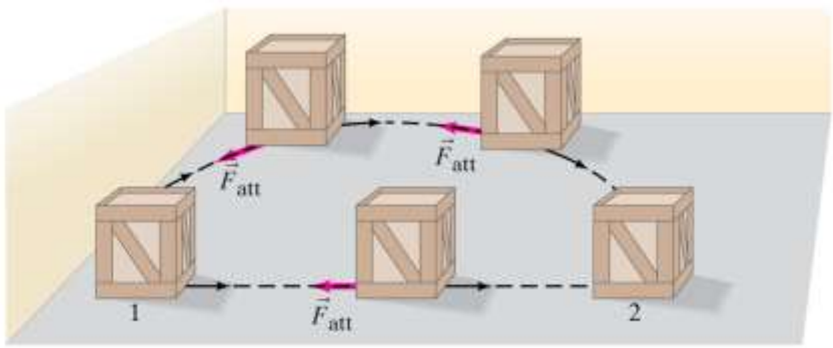
$$\Delta(U + K + E_{Int}) = L_{ext}$$

Ad Es.

$$\Rightarrow \boxed{\Delta(U + K + E_{Int}) = \vec{F}_{ext} \bullet \vec{d}}$$

forze non conservative?

Se agiscono anche forze non conservative:



$$W = \Delta E_k$$

è sempre valida

$$W = W_{nc} + W_c$$

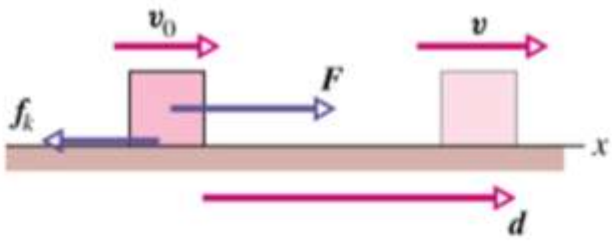
$$W_c = -\Delta U$$

$$\Delta E_k + \Delta U = W_{nc}$$

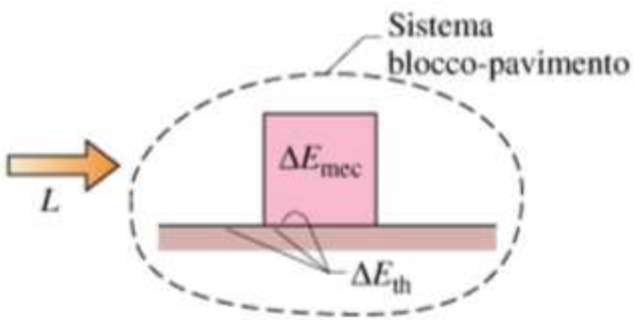
$$E_{Tfin} - E_{Tin} = W_{Fa}$$

L'energia meccanica non resta costante e la sua variazione è pari al lavoro delle forze non conservative.

Sistema non Isolato, con attrito dinamico



(a)



(b)

Valgono le seguenti formule:

$$\begin{cases} \vec{f}_k = -\mu_k N \\ \Delta E = L_F + L_{Attr} = F \cdot d - \mu_k mgd \end{cases}$$

Se cambio la definizione di sistema si ha:

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{Int} = F \cdot d$$

Con:

$$\Delta E_{Int} = +\mu_k mgd$$

E quindi

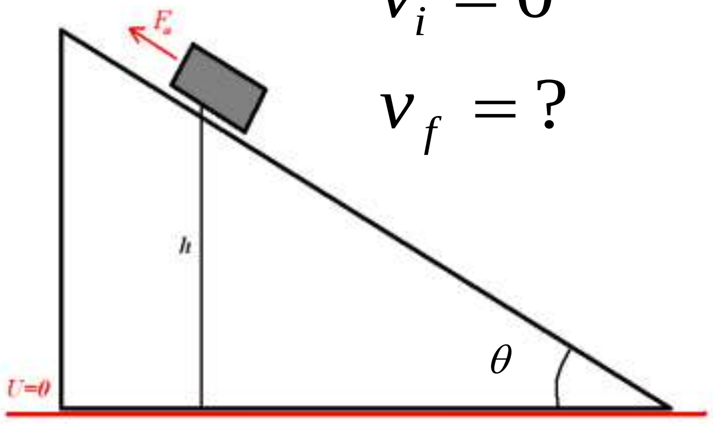
$$\boxed{\Delta(E + E_{Int}) = L_{Ext}}$$

Più in generale si ha:

$$\boxed{L_{Ext} = \Delta(E + E_{Int} + E_{Chim} + E_{ElettrMagn} + \ldots)}$$

In un sistema ISOLATO l'Energia (in senso "ampio") si conserva

Un esempio



$$v_i = 0$$
$$v_f = ?$$

$$W_{Fa} = -\mu_d mg \cos\theta (h/\sin\theta)$$

$$E_{kin} = 0 \qquad U_i = mgh$$

$$E_{kfin} = 1/2 m v_f^2 \qquad U_f = 0$$

$$E_{Tfin} - E_{Tin} = W_{Fa}$$

$$1/2 m v_f^2 - mgh = \mu_d mg \cos\theta (h/\sin\theta)$$

$$v_f = \sqrt{2gh(1 - \mu_d / tg\theta)}$$

Senza attrito sarebbe $v_f = \sqrt{2gh}$