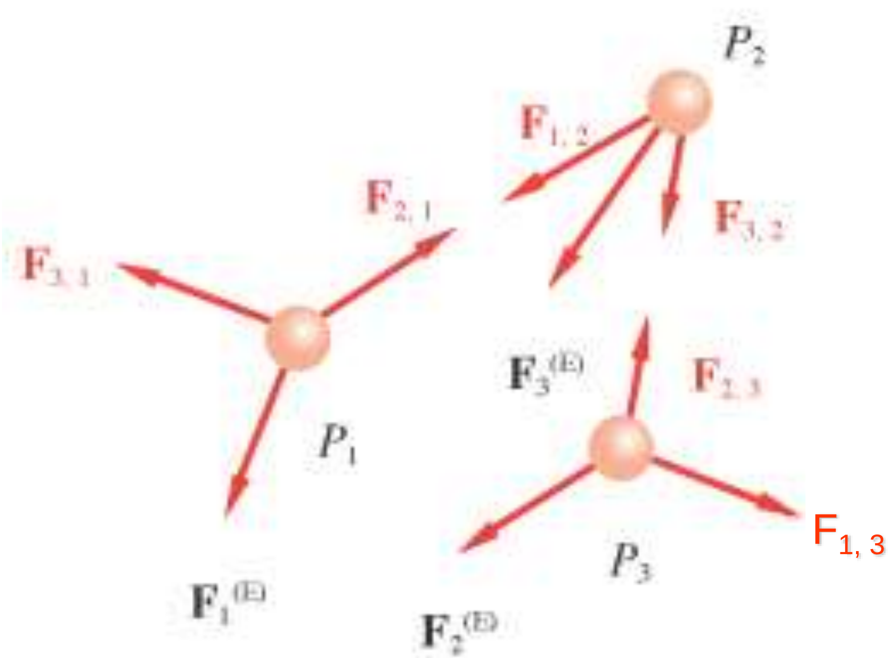
Sistema di Particelle

Due o più punti materiali

In un sistema di punti materiali occorre definire:

FORZE ESTERNE "$\mathcal{F}^{(E)}$" (ad es. Forza Peso)

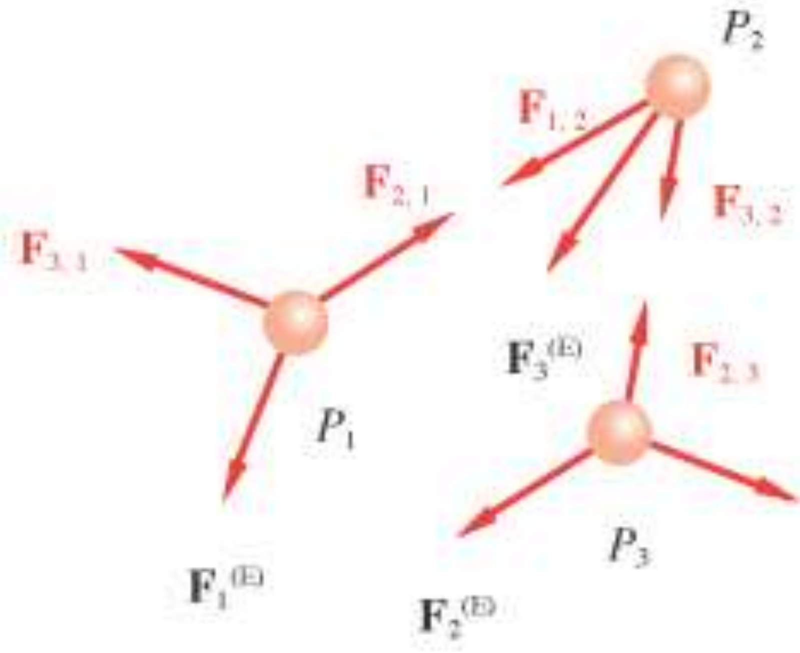
FORZE INTERNE "$\mathcal{F}$" (per cui vale la III° Legge)



Dati tre corpi di masse m_1, m_2, m_3

Vale la II° Legge di Newton

$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1^{\,E} + \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} \\ m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2^{\,E} + \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} \\ m_3\vec{a}_3 = \vec{F}_3^{\,E} + \vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1^E + \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} \\ m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2^E + \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} \\ m_3\vec{a}_3 = \vec{F}_3^E + \vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} \end{cases}$$

E sommando le equazioni si ottiene:

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 = \vec{F}_1^E + \vec{F}_2^E + \vec{F}_3^E + \cancel{\vec{F}_{1,2}} + \cancel{\vec{F}_{1,3}} +$$

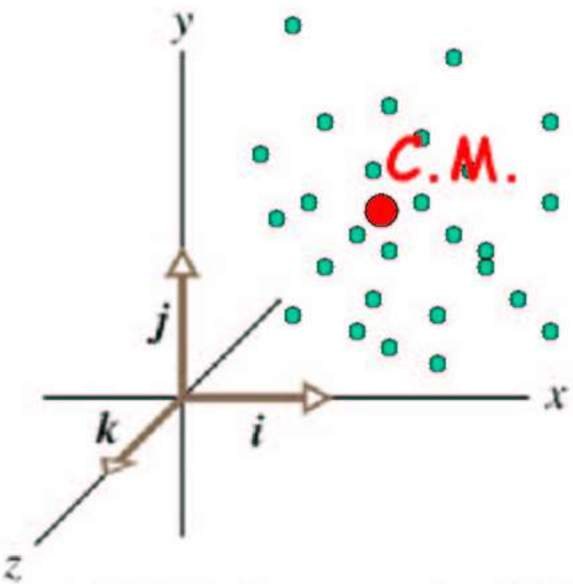
$$+ \cancel{\vec{F}_{2,1}} + \cancel{\vec{F}_{2,3}} + \cancel{\vec{F}_{3,1}} + \cancel{\vec{F}_{3,2}}$$

OVVERO:

$$\boxed{\sum m_i\vec{a}_i = \sum \vec{F}_i^E}$$

SOLO FORZE ESTERNE

Consideriamo un insieme di punti in un SiRCO. Si definisce

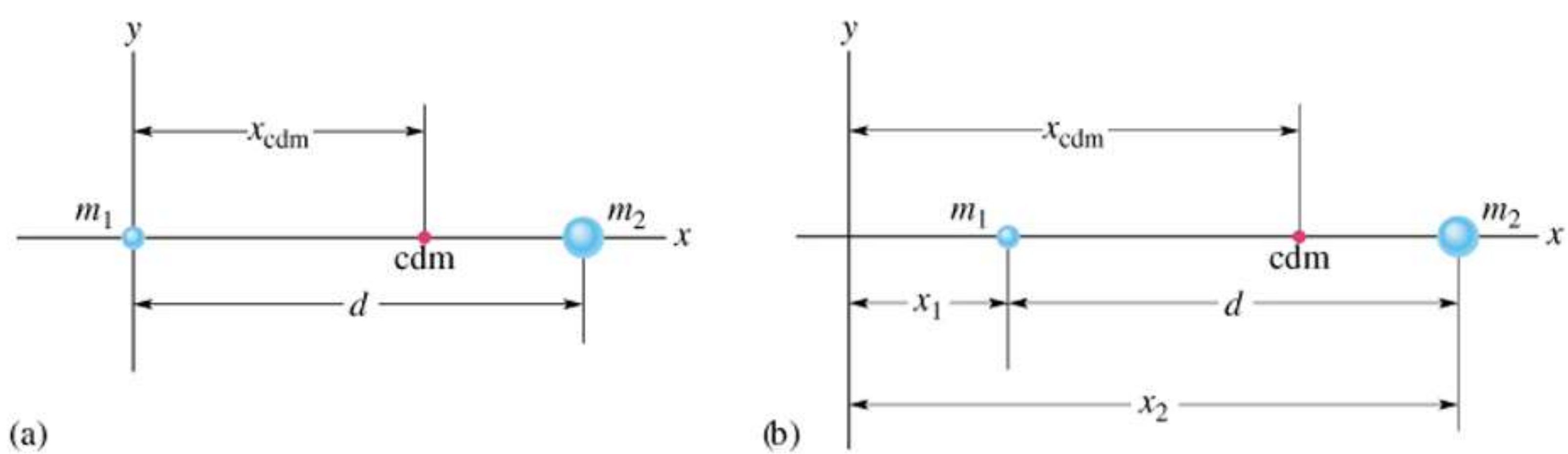


Centro di Massa (C.M) il punto di coord:

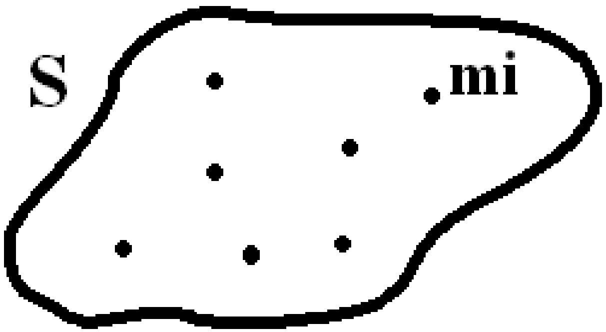
$$x_{c.m.} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}; \quad y_{c.m.} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}; \quad z_{c.m.} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

$$\boxed{\vec{r}_{c.m.} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}}$$

Il C.M. è un punto fittizio che può corrispondere a nessun punto reale.



n punti materiali



Se il sistema S è <u>isolato</u> (non ci sono forze dall’esterno che agiscono sui suoi punti)

$$\Downarrow$$

$$\vec{P}_T = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

E le forze interne?

$$\vec{F}_{12} \qquad -\vec{F}_{21}$$

Per il principio di azione e reazione

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2$$

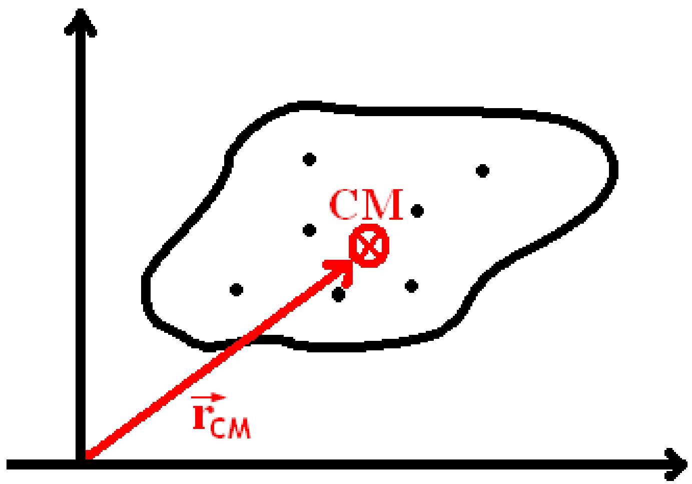
La risultante delle forze interne è nulla

$$\sum \vec{F}_i = 0 \qquad \Delta\vec{P}_T = 0$$

centro di massa (CM)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{M}$$

M = massa totale



Possiamo definire:

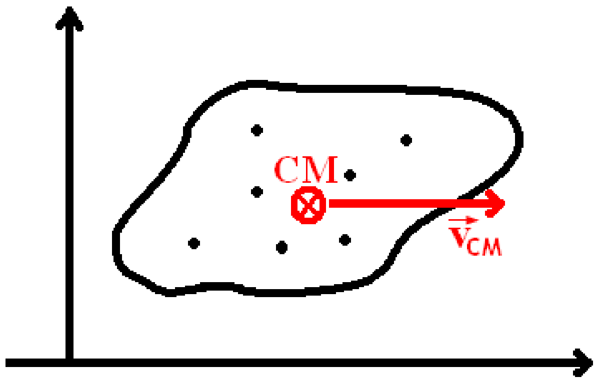
$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i\vec{v}_i}{M}$$

$$M\vec{v}_{CM} = \sum_i m_i\vec{v}_i$$

Il *CM* porta tutta la quantità di moto del sistema

$$\boxed{\vec{P}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i}$$

In un sistema inerziale



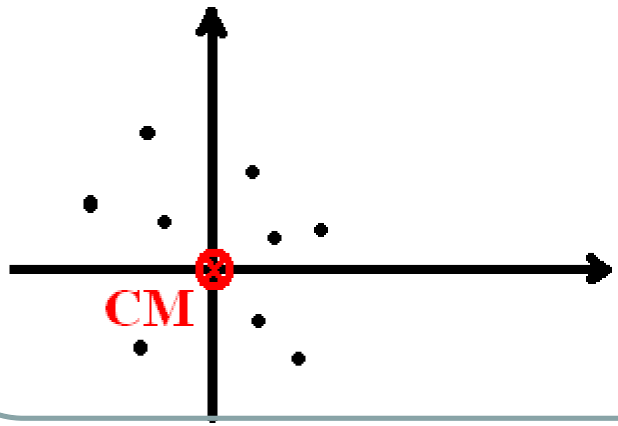
Se il sistema è isolato

$$\vec{P}_{CM} = M\,\vec{v}_{CM} = \text{cost}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}_{CM} = \text{cost}$$

Nel sistema del CM



$$\vec{v}^{\,*}_{CM} = 0$$

$$\vec{P}^{\,*}_{CM} = 0$$

Nel sistema del CM,
la quantità di moto totale è nulla.

Quantità di moto

Si definisce quantità di moto di un oggetto la grandezza:

$$\vec{p} \equiv m \cdot \vec{v}$$

Si definisce quantità di moto di un sistema di *N* punti:

$$\vec{p}_{\text{Tot}} \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i \Longrightarrow E_C = \frac{P^2}{2m_{Tot}}$$

Quindi si ha che:

$$\vec{P}_{Tot} = M\vec{v}_{CdM}$$

*La quantità di moto di un sistema di particelle COINCIDE con la quantità di moto di un **punto materiale** che **si muove come il Centro di Massa** ed ha una massa pari alla **massa totale del sistema***

Da qui segue che:

$$\sum \vec{F}^{Ext} = \frac{d\vec{P}_{Tot}}{dt}$$

Solo forze esterne possono far variare la quantità di moto del Sistema

La quantità di moto è una grandezza fisica importante. Infatti, se sul sistema di punti ***non agiscono forze esterne*** (ma solo interne) la *quantità di moto del sistema non varia (si conserva)*

$$\boxed{\vec{p} = \text{costante}}$$ (sistema chiuso e isolato)

Dim: $$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{\text{int}} = \vec{F}_{ext}$$

48

Se $$\boxed{\sum F_{Ext} = 0 \rightarrow \frac{dP}{dt} = 0}$$

Le particelle possono scambiarsi quantità di moto senza variare la $\mathbf{P}_{\mathbf{Tot}}$

Leggi del moto del Centro di Massa (CdM)

$$\vec{v}_{CdM} = \frac{d\vec{r}_{CdM}}{dt} = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\sum m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$\vec{v}_{CdM} = v_{CdM(X)}\vec{i} + v_{CdM(Y)}\vec{j} + v_{CdM(Z)}\vec{k}$$

$$\vec{v}_{CdM(X,Y,Z)} = \frac{1}{M}\sum m_i v_{i(X,Y,Z)}$$

Derivando ancora si ottiene:

$$\vec{a}_{CdM} = \frac{d\vec{v}_{CdM}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a}_{CdM} = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{a}_i}$$

$$\vec{a}_{CdM} = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{a}_i$$

Ma ciò equivale a dire:

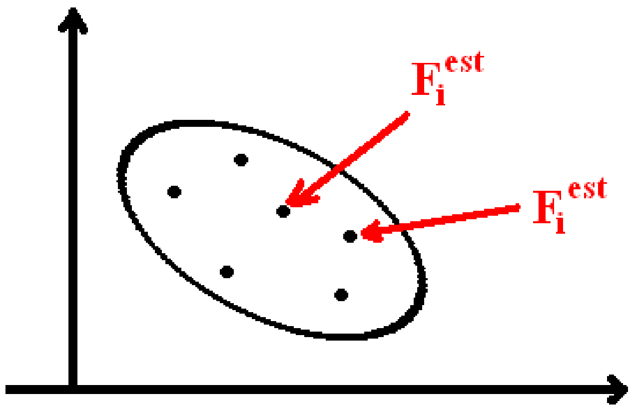
$$\boxed{M\vec{a}_{CdM} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum F_i^{(Ext)}}$$

Tutta la massa del Sistema

Solo le Forze Esterne

Nessun altro punto del sistema si muove in modo così semplice

Dinamica dei sistemi – sistemi non isolati



$$\boxed{M\vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i}$$

$$M\vec{a}_{CM} = M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt}$$

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_i \vec{F}_i^{est}$$

Il CM si muove come se fosse soggetto a tutte le forze che agiscono sul sistema

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{est}$$

Sulle definizioni

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \quad \Longrightarrow \quad x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}$$

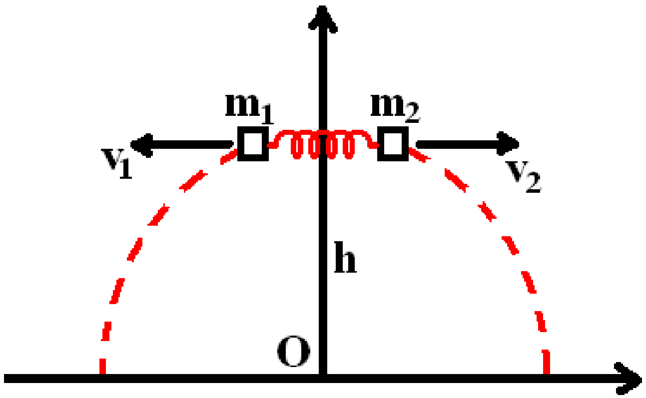
$$y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M}$$

$$z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{M}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M} \quad \Longrightarrow \quad v_{x_{CM}} = \frac{\sum_i m_i \, v_{x_i}}{M}$$

$$v_{y_{CM}} = \frac{\sum_i m_i \, v_{y_i}}{M}$$

$$v_{z_{CM}} = \frac{\sum_i m_i \, v_{z_i}}{M}$$



Solo **forze interne**. Nel momento dell'esplosione la forza peso è trascurabile.

$$P_x = m_1 v_{x_1} + m_2 v_{x_2} = \text{cost} = 0$$

$$v_{x_1} = x_1/t \qquad v_{x_2} = x_2/t \quad \Longrightarrow \quad m_1 \frac{x_1}{\cancel{t}} + m_2 \frac{x_2}{\cancel{t}} = 0$$

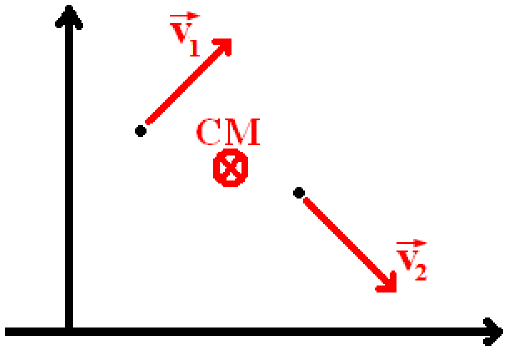
$$m_1 x_1 = -m_2 x_2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|x_1|}{|x_2|} = \frac{m_2}{m_1}$$

$$v_{CM_x} = 0$$

Il CM "cade" lungo la verticale a terra.

$$x_{CM} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{M} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|x_1|}{|x_2|} = \frac{m_2}{m_1}$$

Alcuni esempi



$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Calcoliamo la velocità di m_1 e m_2 nel sistema CM :

$$\vec{v}_1^{\,*} = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} \Rightarrow \vec{v}_1^{\,*} = \frac{m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2}$$

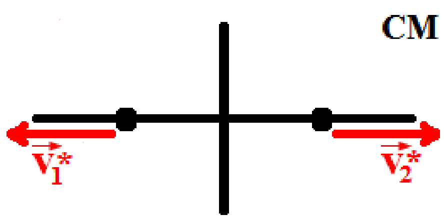
$$\vec{v}_2^{\,*} = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} \Rightarrow \vec{v}_2^{\,*} = \frac{m_1(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\vec{v}_1^{\,*}}{m_2} = -\frac{\vec{v}_2^{\,*}}{m_1}$$

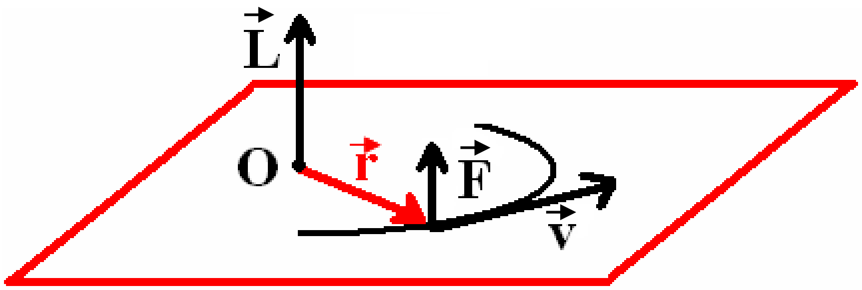
$$P_T^* = m_1\vec{v}_1^{\,*} + m_2\vec{v}_2^{\,*} = \frac{m_1 m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{m_1 + m_2}$$

$P_T^* = 0$ Nel sistema CM la quantità di moto totale è Ø !

Inoltre:



Momento angolare



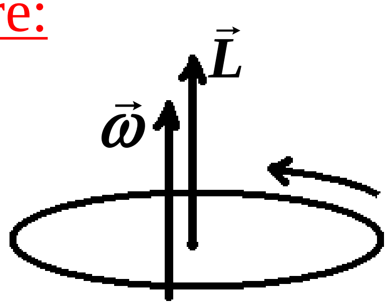
O = polo

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = m \cdot \vec{r} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{L} \quad \perp \quad al \quad piano \quad (\vec{r}, \vec{v})$$

Per un moto in un piano (con O nello stesso piano), $\vec{L}$ ha sempre la stessa direzione

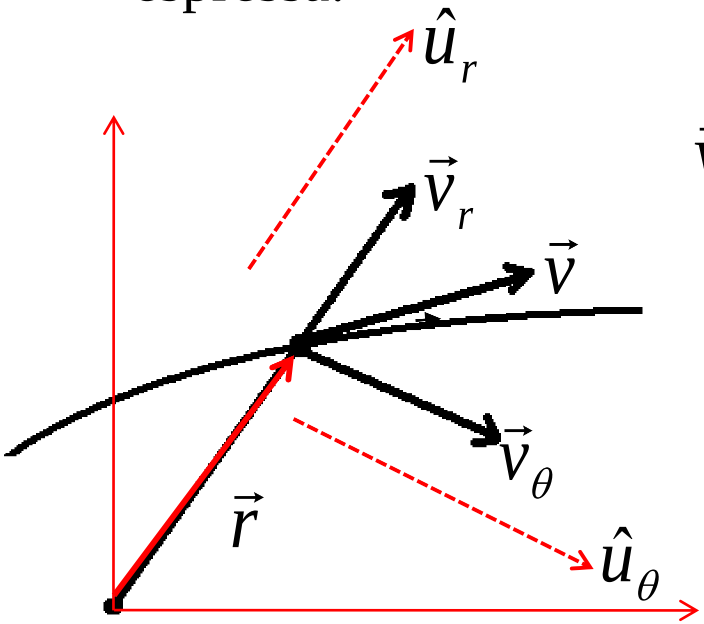
Moto circolare:



$$L = m \cdot r \cdot v = m \cdot r^2 \cdot \omega$$

$$\vec{L} = m \cdot r^2 \cdot \vec{\omega}$$

Ricordiamo che , in coordinate polari, la velocità può essere espressa:

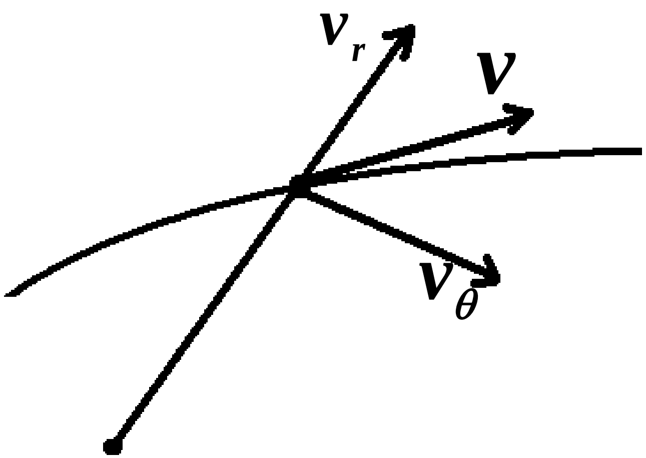


$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\hat{u}_r\right) = \left(\frac{dr}{dt}\right)\hat{u}_r + r\left(\frac{d\hat{u}_r}{dt}\right)$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta$$

Nel caso di moto circolare uniforme:

$$\frac{dr}{dt} = 0 \longrightarrow v = \omega \cdot r$$



$$\vec{L} = m \cdot \vec{r} \wedge (\vec{v}) = m \cdot \vec{r} \wedge (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta)$$

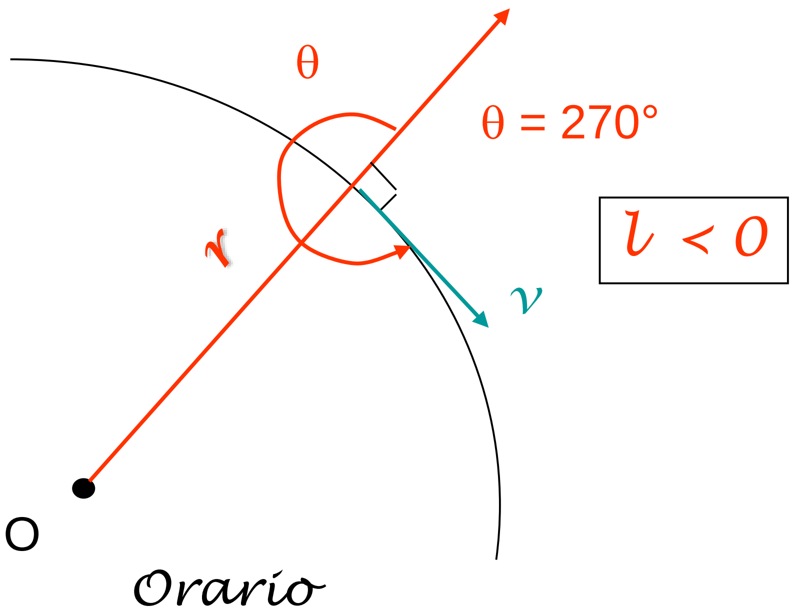
$$\vec{L} = \underbrace{\cancel{m \cdot \vec{r} \wedge \vec{v}_r}}_{=0} + m \cdot \vec{r} \wedge \vec{v}_\theta$$

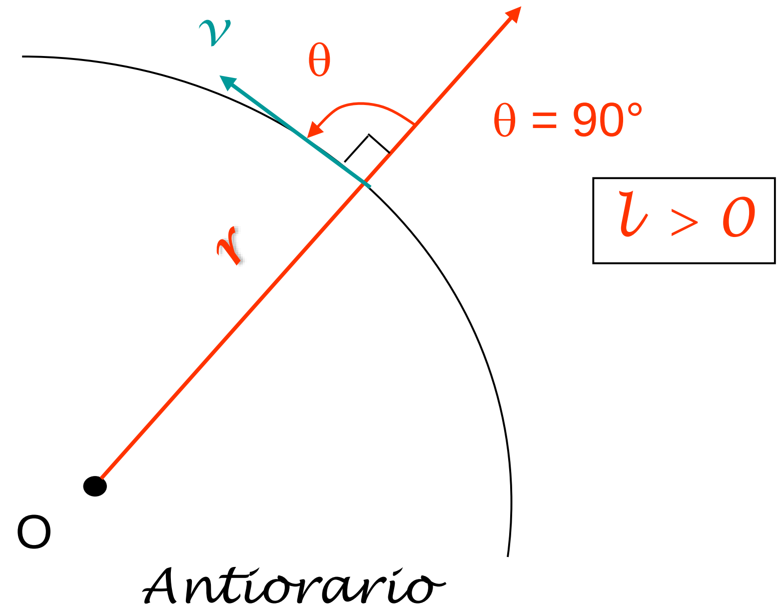
$$L = m \cdot r \cdot v_\theta = m \cdot r \cdot r \frac{d\theta}{dt}$$

$$L = m \cdot r^2 \cdot \omega$$

Il momento angolare è sensibile solo alla componente v_θ della velocità

Nota: $L = r\,v\,\sin\theta$ Angolo tra **r** e **v** (<u>non viceversa</u>)





Momento della forza

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \cancel{\frac{d\vec{r}}{dt}} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$= 0$ $= F$

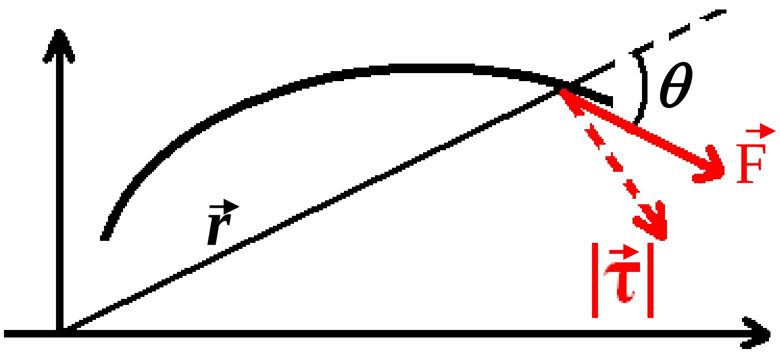
$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Si definisce

Momento della forza $\quad \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



$$\boxed{\left|\vec{M}\right| = r \cdot F \cdot \sin\theta}$$

Conservazione del momento angolare

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

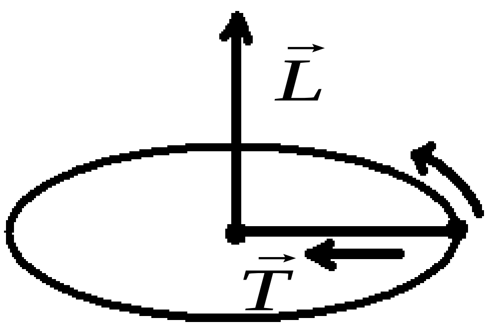
$$\vec{M} = 0 \Longrightarrow \vec{L} = \text{cost}$$

$M = 0$ Se

$$\boldsymbol{F = 0}$$

$$\vec{\mathrm{F}} \,//\, \bar{\mathrm{r}}$$

Moto circolare uniforme

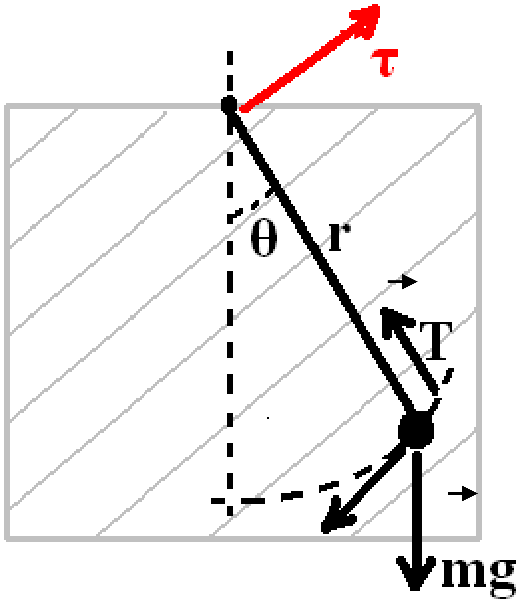


$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{T} = 0 \qquad \vec{L} = \text{cost}$$

$$L = m \cdot r^2 \cdot \omega$$

$$\omega = \text{cost}$$

Ancora il pendolo



$$M = \frac{dL}{dt} \qquad M = -r \cdot mg \cdot \sin\theta$$

$$L = r \cdot m \cdot v = m \cdot r^2 \cdot \omega$$

Il momento di T è nullo!

$$-r \cdot mg \cdot \sin\theta = m \cdot r^2 \cdot \alpha$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{r}\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{r}\theta = 0$$

θ piccoli

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \longrightarrow \vec{F}dt = d\vec{p}$$

$$\Longrightarrow \int_0^t \vec{F}dt = \int_{p_0}^{p} d\vec{p}$$

$$\Delta\vec{p} = \int_0^t \vec{F}dt \longrightarrow$$ *impulso di una forza:* **J**

$$\boxed{\vec{J} = \int_0^t \vec{F}dt = \Delta\vec{p}}$$

L'impulso di una forza produce una variazione della quantità di moto

$$[J] = \left[kg \cdot \frac{m}{s}\right]$$

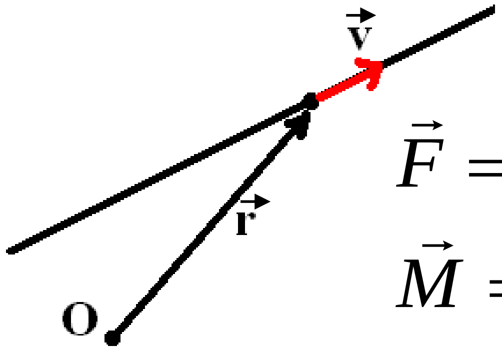
Impulso del momento angolare

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Longrightarrow \int d\vec{L} = \int \vec{M} dt \Longrightarrow \Delta\vec{L} = \int_0^t \vec{M} dt$$

$$\Delta\vec{L} = \int_0^t \left(\vec{r} \wedge \vec{F}\right) dt = \vec{r} \wedge \int_0^t \vec{F}\, dt = \vec{r} \wedge \vec{J}$$

Momento dell'impulso

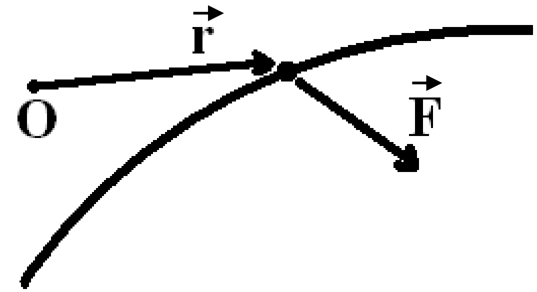
La variazione del momento angolare è uguale al momento dell'impulso applicato



$$\vec{F} = 0$$

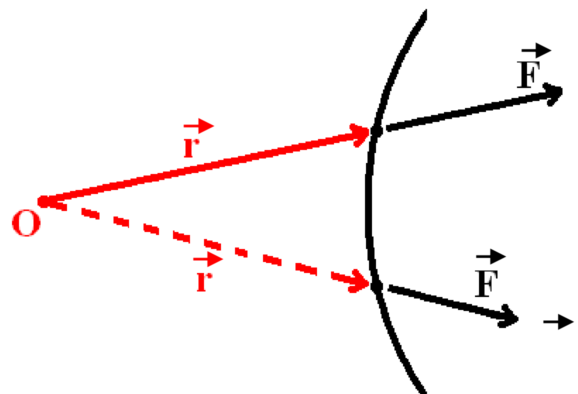
$$\vec{M} = 0$$

particella libera



$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Se

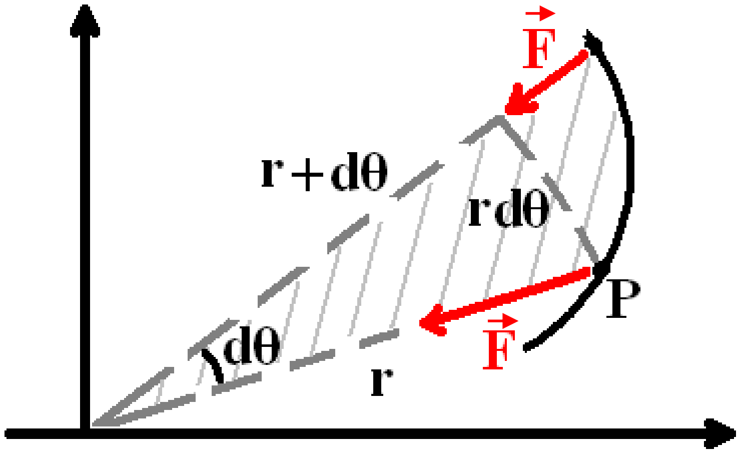


$$\vec{r} \,//\, \vec{F}$$

Forze centrali

$$\rightarrow \quad \vec{M} = 0$$

O = centro della forza



$$\vec{M} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{L} = \text{cost}$$

Moto in un piano

$$L = m \cdot r^2 \cdot \omega = m \cdot r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cost}$$

Calcoliamo l'area: $$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega = \text{cost}$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \text{cost}}$$

Momento Angolare Totale

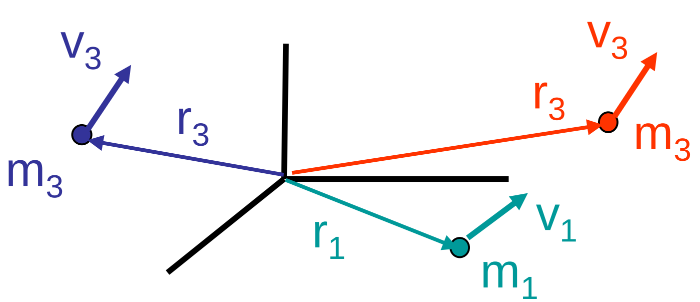
vale $$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\sum \vec{\tau}\right)^{esterne}}$$

Così come avevamo $$\boxed{\frac{dP}{dt} = M\frac{dv_{CM}}{dt} = ma_{CM} = \sum F_i^{ext}}$$

Momento angolare di un sistema di particelle

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 + \ldots \vec{l}_n = \sum_{i=1,N} \vec{l}_i$$

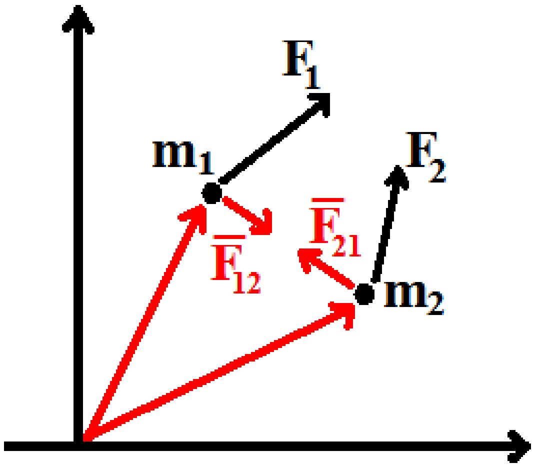
Nota: *L'origine rispetto a cui calcolare i momenti deve essere la stessa* $\forall\ i$



Sistemi di punti - momento angolare

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$



Calcoliamo $\vec{M}_{m_1} + \vec{M}_{m_2}$

$$\vec{M}_{m_1} + \vec{M}_{m_2} = \vec{r}_1 \wedge \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}\right) + \vec{r}_2 \wedge \left(\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}\right)$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$\vec{M}_{m_1} + \vec{M}_{m_2} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 + \underbrace{\boxed{\cancel{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \wedge \vec{F}_{21}}}}_{= 0}$$

Le coppie di forze interne produce momento nullo !

Dunque

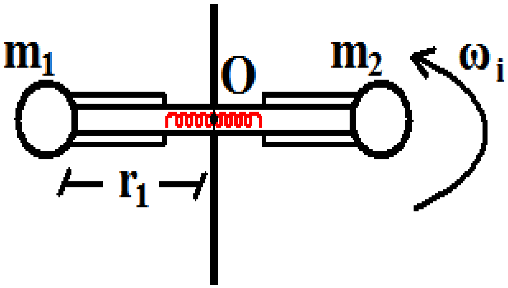
$$\frac{d}{dt}\vec{L}_1 + \frac{d}{dt}\vec{L}_2 = \boxed{\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2\right) = \vec{M}_{m_1} + \vec{M}_{m_2}}$$

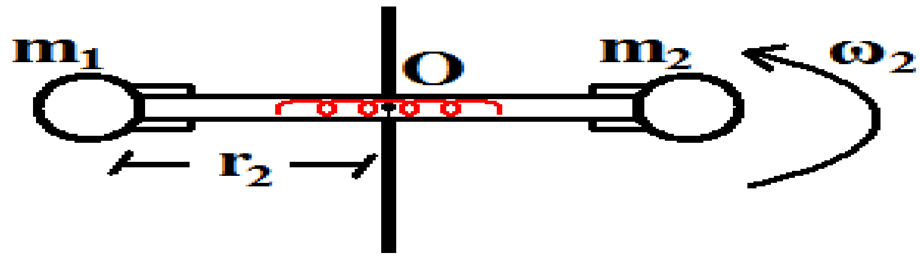
$$\boxed{\frac{d\vec{L}_T}{dt} = \vec{M}_{est}}$$

In caso di $F_{est} = 0$ $\Rightarrow$ $M_{est} = 0$ oppure F_{est} // r

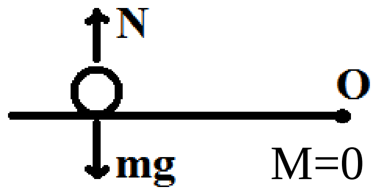
$$\frac{d\vec{L}_T}{dt} = 0 \qquad \vec{L}_T = \mathrm{cost} \qquad \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots = \mathrm{cost}$$

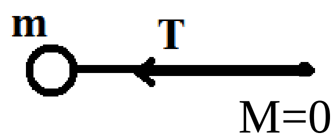
Per un sistema isolato $L_T = \mathrm{cost}$





Consideriamo come polo O





Si conserva il momento angolare totale

$$\vec{M}^{ext} = 0 \qquad \vec{L}_T = \text{cost}$$

$$\vec{L}_{1in} + \vec{L}_{2in} = \vec{L}_{1fin} + \vec{L}_{2fin}$$

$$se \quad m_1 = m_2 = m \qquad 2mr_1^2\omega_1 = 2mr_2^2\omega_2 \qquad \omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2}\omega_1$$

Teorema di Köning per il momento angolare

$$\vec{L} = \vec{L}^* + M\vec{r}_{CM} \wedge \vec{v}_{CM}$$

Momento del sistema Lab

Momento del sistema CM

Momento CM nel sistema Lab

Dim:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_i (\vec{r}_i^{\,*} + \vec{r}_{CM}) \wedge m_i (\vec{v}_i^{\,*} + \vec{v}_{CM}) =$$

$$= \underbrace{\sum_i \vec{r}_i^{\,*} \wedge m_i \vec{v}_i^{\,*}}_{L^*} + \underbrace{\cancel{\sum_i \vec{r}_i^{\,*} \wedge m_i \vec{v}_{CM}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\sum_i \vec{r}_{CM} \wedge m_i \vec{v}_i^{\,*}}}_{=0} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_{CM} \wedge m_i \vec{v}_{CM}}_{M\vec{r}_{CM} \wedge \vec{v}_{CM}}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_i m_i \vec{r}_i^{\,*} &= 0 \\ \sum_i m_i \vec{v}_i^{\,*} &= 0 \end{aligned}\right\}$$ **Per definizione di CM !**

Teorema di Köning per l'energia cinetica

Nel sistema Lab:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_i^* + \vec{v}_{CM}\right)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{*2} + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \left(\cancel{\sum_i m_i \vec{v}_i^*}\right) \cdot \vec{v}_{CM}$$

$$\left(\vec{v}_{CM}\right) \cdot \left(\vec{v}_{CM}\right) = 0$$

$$\boxed{E_K = E_K^* + \frac{1}{2} M v_{CM}^2}$$

E_K nel sistema Lab

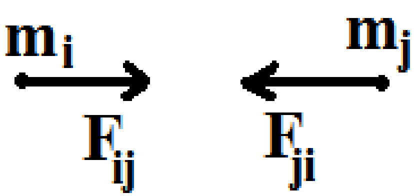
E_K nel sistema CM

E_K del CM nel sistema Lab

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = \vec{F}_i^{\,ext} \cdot d\vec{s} + \vec{F}_i^{\,\mathrm{int}} \cdot d\vec{s}_i$$

$$W^{TOT} = W^{ext} + W^{\mathrm{int}}$$

Il lavoro delle forze interne non è nullo!



$$W^{\mathrm{int}} = \sum_{ij} \left(\vec{F}_{ij}^{\,\mathrm{int}} \cdot d\vec{s}_j + \vec{F}_{ji}^{\,\mathrm{int}} \cdot d\vec{s}_i \right)$$

$$W^{\mathrm{int}} = \sum_{ij} \left(\vec{F}_{ij}^{\,\mathrm{int}} \cdot d\left(\vec{r}_j - \vec{r}_i \right) \right) = \sum_{ij} \left(\vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} \right)$$

Dal “teorema delle forze vive”

$$W^{TOT} = E_{k\,f} - E_{k\,i} = \Delta E_k$$

Forze esterne conservative

$$\boxed{W^{TOT} = W^{ext} + W^{\text{int}} = E_{k\,fin} - E_{kin}}$$

Se le forze esterne sono conservative: $(W^{ext} = -\Delta U^{ext})$

$$E_{k\,fin} - E_{k\,in} = -(U^{ext}_{fin} - U^{ext}_{in}) + W^{\text{int}}$$

$$\Downarrow$$

$$(E_{k\,fin} + U^{ext}_{fin}) - (E_{k\,in} + U^{ext}_{in}) = W^{\text{int}}$$

Attenzione: $E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$

$$U^{ext} = \sum U_i^{ext}$$

Se le forze interne sono conservative:

$$E_{k\,fin} - E_{k\,in} = W^{ext} + W^{\text{int}} \Rightarrow$$

$$E_{k\,fin} - E_{k\,in} = -\Delta U^{\text{int}} + W^{ext}$$

$$E_C = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$\boxed{(E_{k\,in} + U_{in}^{\text{int}}) - (E_{k\,fin} + U_{in}^{\text{int}}) = W^{ext}}$$

$$U^{\text{int}} = \sum_i U^{\text{int}}{}_i$$

$E_k + U^{\text{int}} =$ Energia propria

(Energia propria)$_f$ - (Energia propria)$_i$ = L^{ext}

Sistema isolato: $L^{ext} = 0$ ⇨ Energia propria = cost