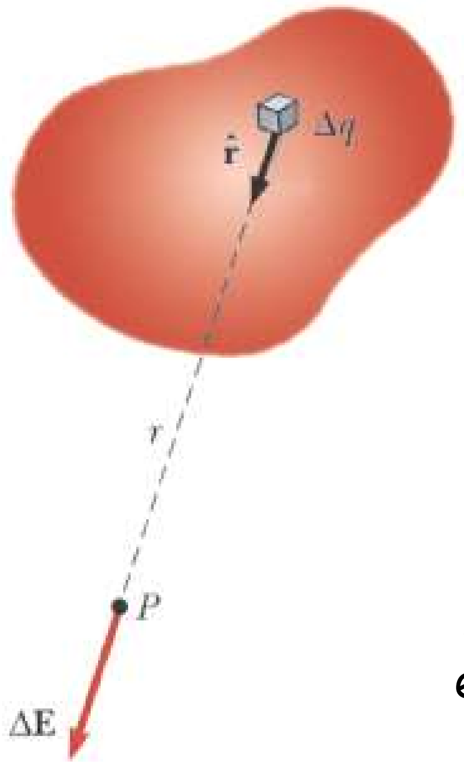
*Data una distribuzione di carica **Q**(x, y, z) estesa, come trovare il campo Elettrico ?*



Dovremmo integrare il campo **dE** generato da ogni elemento di carica **dq** che compone il corpo

$$E = \int \underbrace{f(x, y, z)dxdydz}_{dE}$$

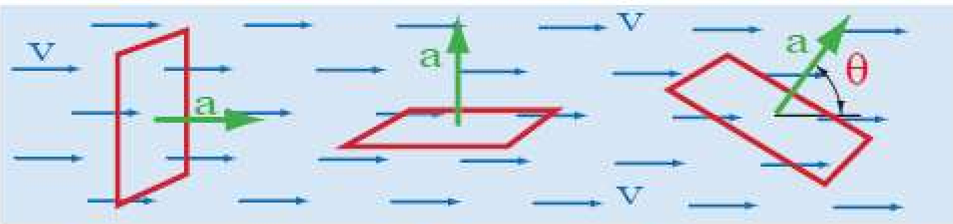
Se però la distribuzione di carica presenta simmetrie elevate (piano, sfera, linea retta) allora il calcolo è più semplice se si utilizza la

LEGGE DI GAUSS

La legge di Gauss mette in relazione i campi elettrici in tutti i punti di una superficie chiusa (Gaussiana) con le cariche racchiuse dalla superficie stessa

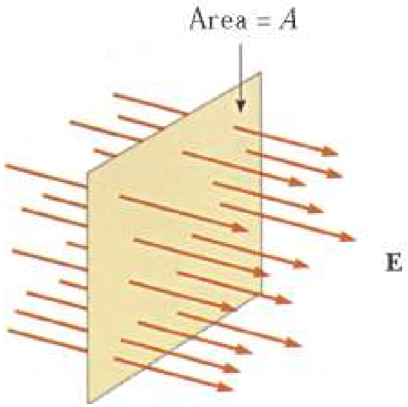
Definizione di Flusso

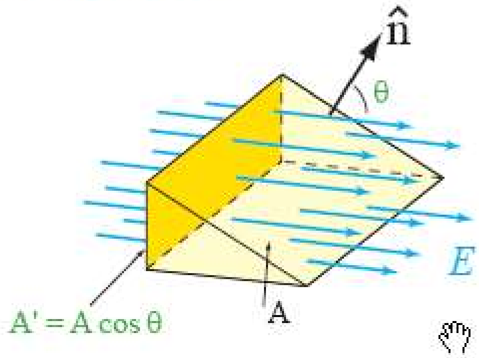
Volume d'acqua per secondo attraverso una superficie



$\Phi = v\, a$ $\quad\quad$ $\Phi = 0$ $\quad\quad$ $\Phi = v\, a \cos\theta$

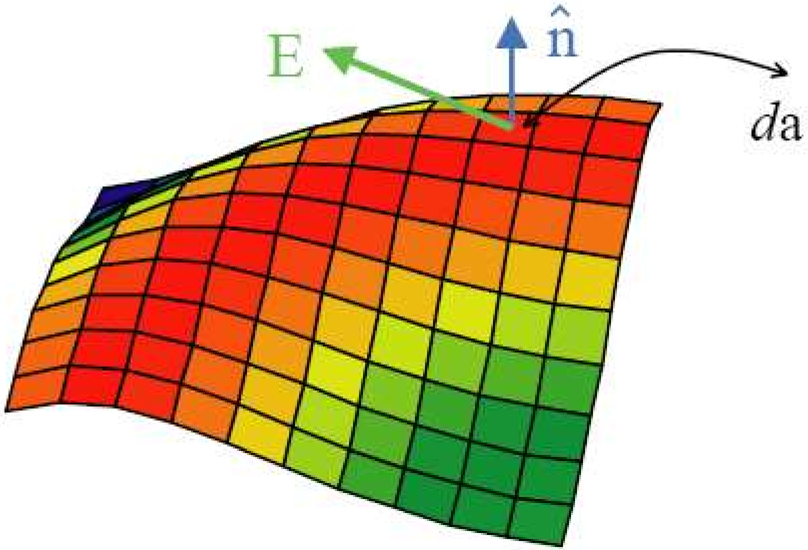
Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie





$$\Phi = E\, A \cos\theta = \vec{E}\cdot\hat{n}\, A = \vec{E}\cdot\vec{A}$$

Definizione di flusso attraverso una superficie non piana



$$\Phi(E) = \int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, da \quad \text{superficie aperta}$$

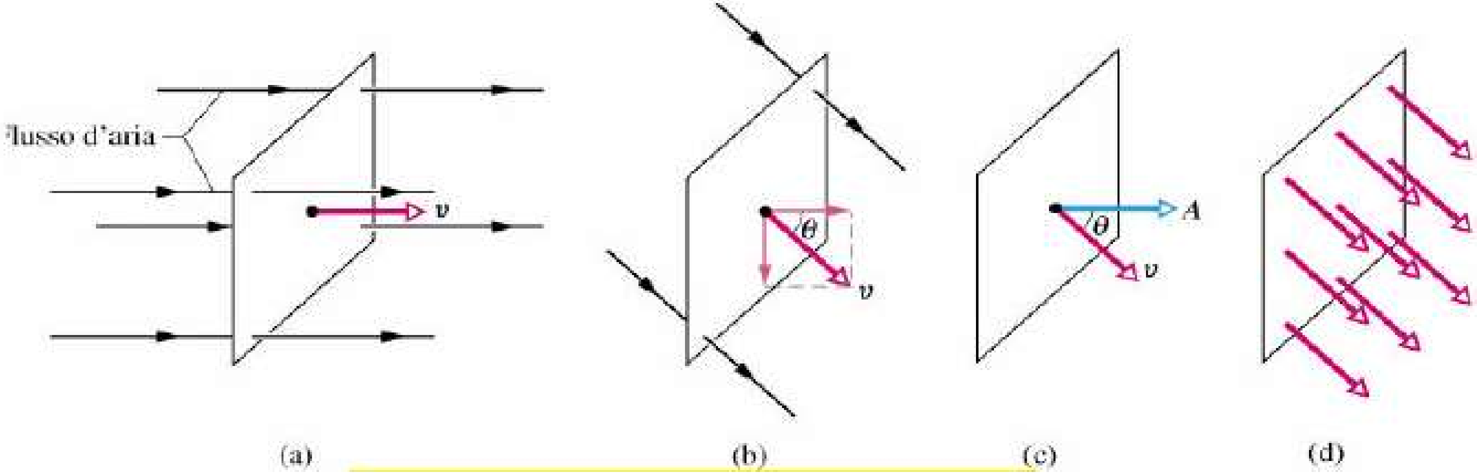
$$\Phi(E) = \oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, da \quad \text{superficie chiusa}$$

Nel caso di una superficie chiusa, per convenzione la normale è orientata verso l'esterno

13. Il Flusso di E e la Legge di Gauss

Flusso di una grandezza vettoriale

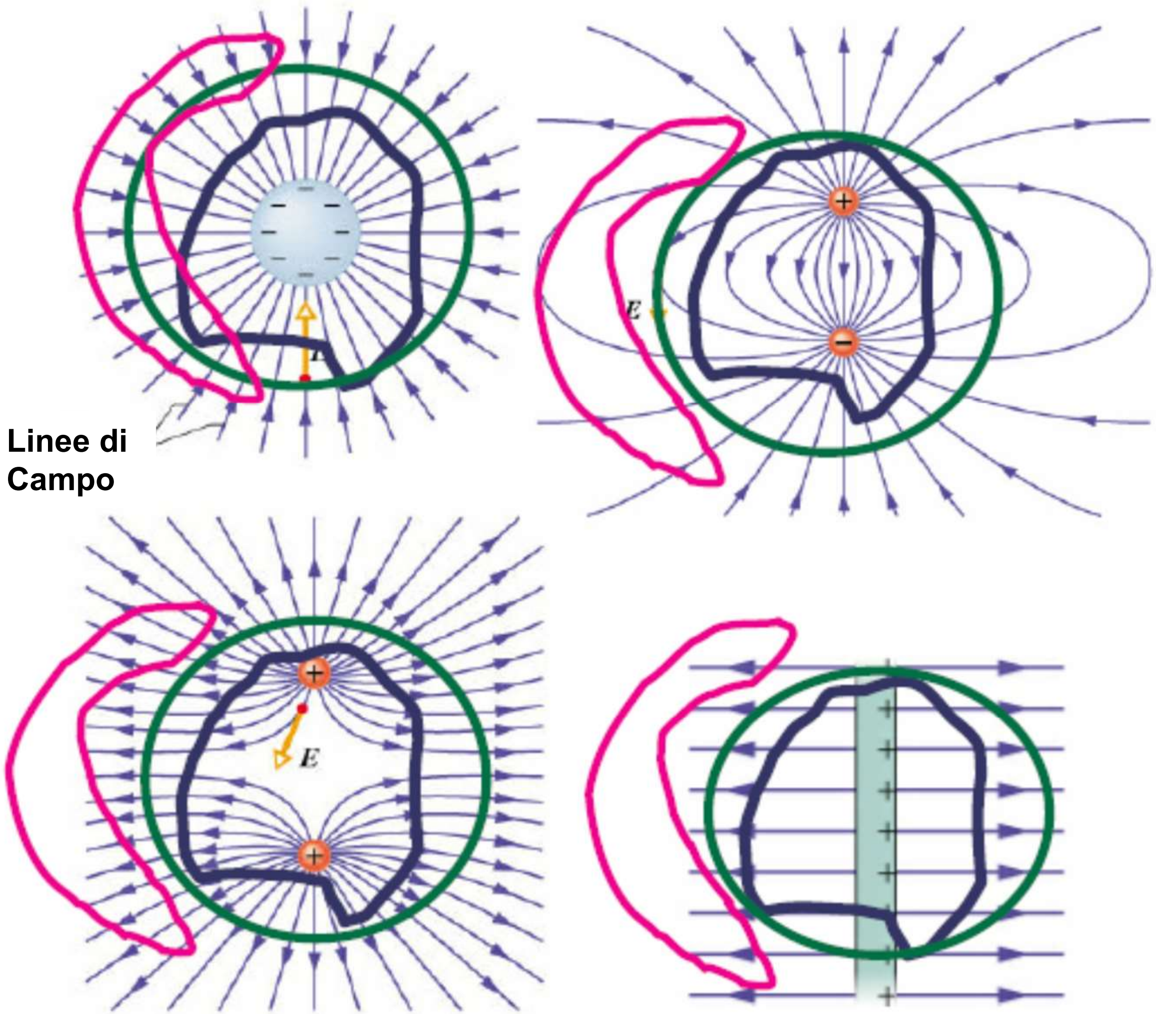
Il "**flusso**" Φ di una grandezza vettoriale (ad es., di un liquido): e' un numero (***scalare*** !) che e' proporzionale alla quantità di liquido che intercetta una certa area. Dipende: (i) dal modulo v del vettore; (ii) dell'area A; (iii) dall'orientazione dell'area rispetto al vettore (θ).



$$\Phi = vA\cos\vartheta = \vec{v} \cdot \vec{A}$$

Nel seguito, considereremo il *flusso del campo elettrico*

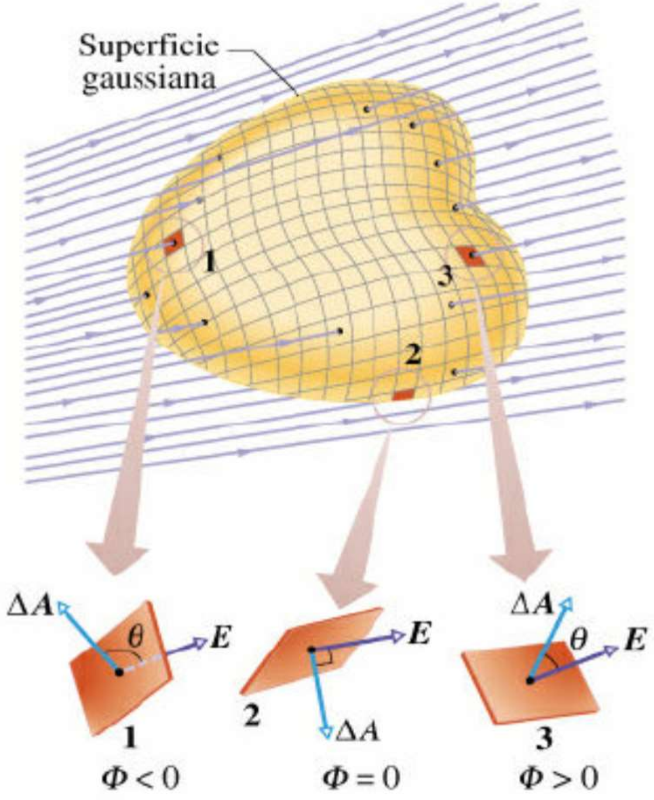
Conteggio delle linee di forza di $\mathbf{E}$



Sperimentalmente: il **numero di linee** del campo vettoriale $\mathbf{E}$ che attraversano una qualunque *superficie chiusa* e' direttamente proporzionale alla **carica** racchiusa dalla superficie. Questo deve significare un qualche tipo di relazione tra il **flusso** attraverso una qualunque superficie e la carica elettrica

Il flusso Elettrico Φ attraverso una superficie gaussiana è proporzionale al numero di linee di campo elettrico passanti attraverso la superficie

Flusso attraverso superficie chiusa



Se il campo vettoriale **E** varia da punto a punto, e se la superficie S e' qualunque, il calcolo del flusso e' sempre possibile, sebbene più complicato matematicamente.

$$\Phi = \sum \vec{E} \cdot \Delta\vec{A} \rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

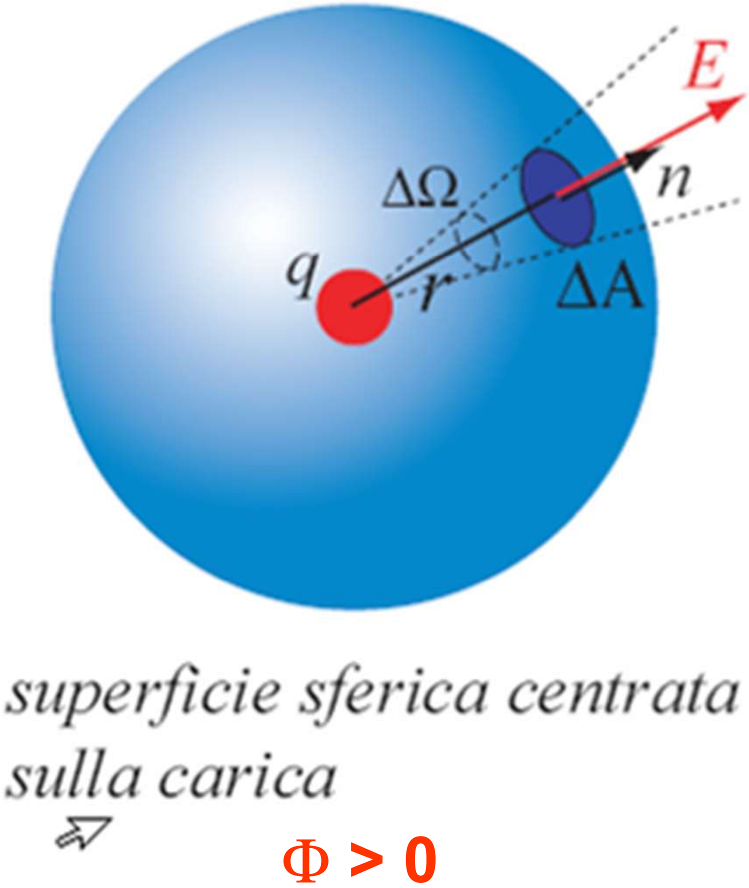
Il cerchio indica che la superficie e' chiusa

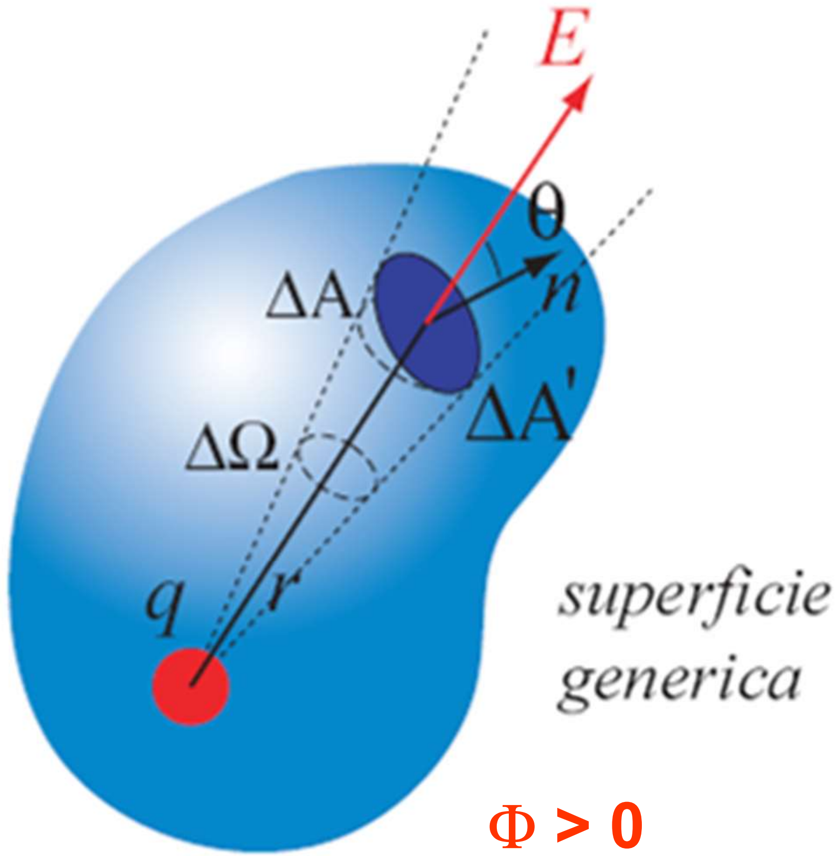
Legge di Gauss

Il flusso di un campo elettrico attraverso una qualunque superficie chiusa e' uguale alla carica racchiusa all'interno della superficie, diviso la costante ε_0.

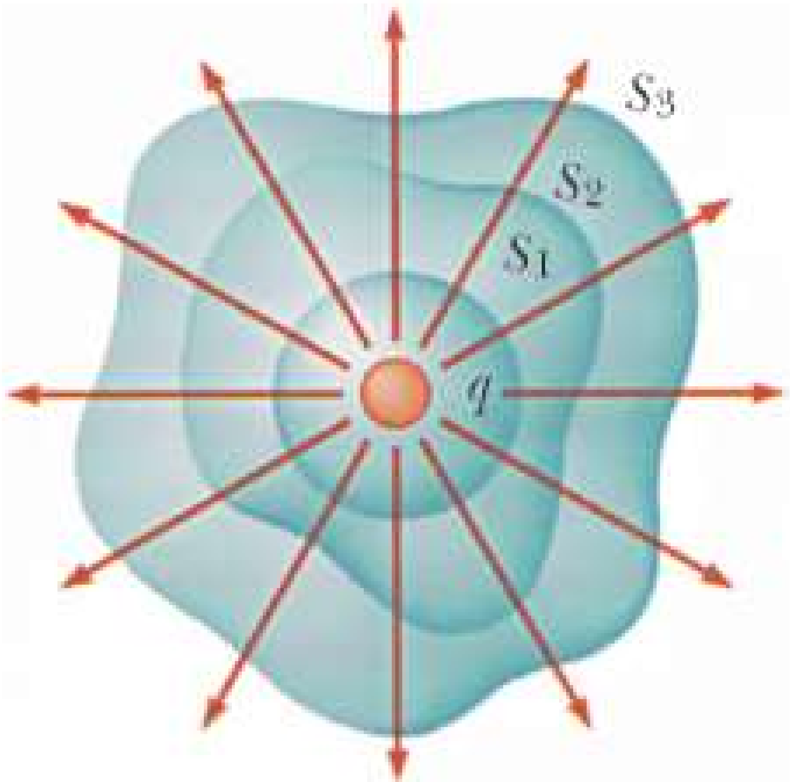
$$\boxed{\Phi_E \equiv \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}$$

Flusso del campo elettrico di una carica puntiforme attraverso una superficie chiusa che la racchiude



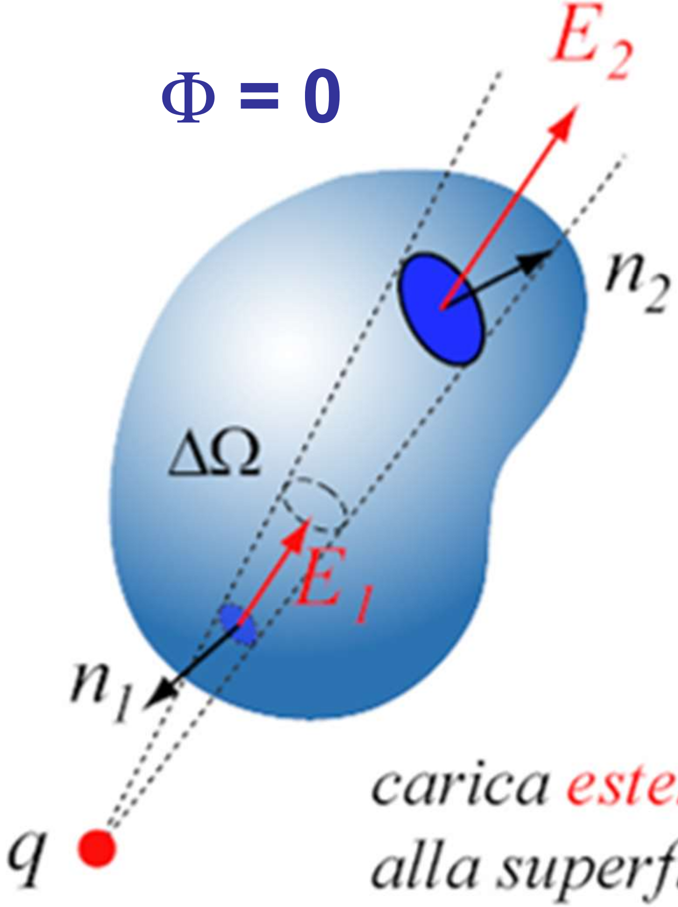


Flusso del campo di una carica puntiforme attraverso una superficie generica



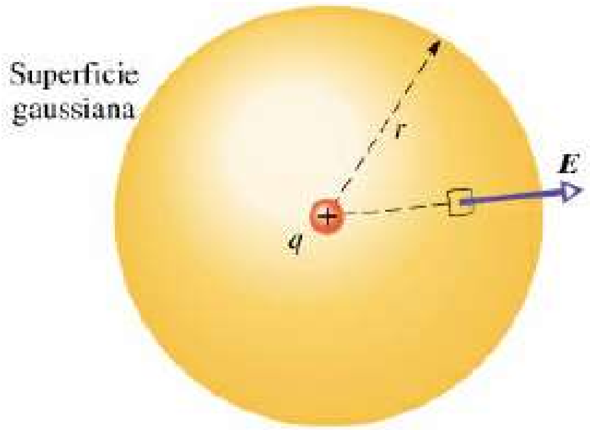
carica *interna*
alla superficie

$\Phi > 0$



carica *esterna*
alla superficie

Legge di Gauss = legge di Coulomb



Dimostriamo la legge di Gauss a partire dalla legge di Coulomb, nel semplice caso di una carica puntiforme. Consideriamo come superficie chiusa una sfera con al centro la carica q.

$$\Phi_E \equiv \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint \left(\frac{q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_o r^2}\right) \cdot (dA \cdot \hat{r}) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{1}{r^2} \oint_{sfera} dA\hat{r} \cdot \hat{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

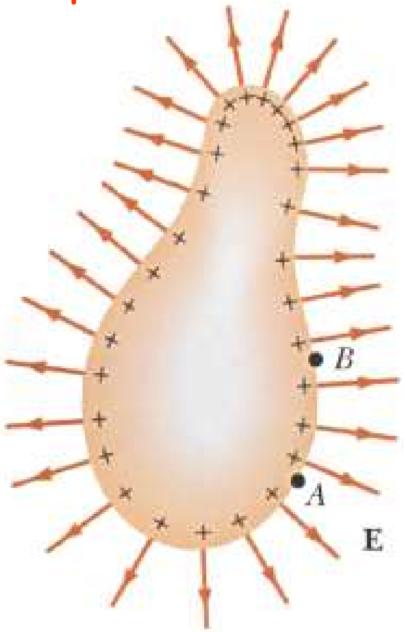
Analogamente, dalla Legge di Gauss si può ottenere la L. di Coulomb.
La L. di Gauss e' una delle equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo, ed in casi di simmetria, può essere utilizzata per determinare il campo elettrico.

Per la legge di Gauss, se una carica viene fornita ad un conduttore isolato, questa si dispone totalmente sulla sua superficie esterna. Nessuna carica può trovarsi entro il conduttore.

Applicazione ai conduttori

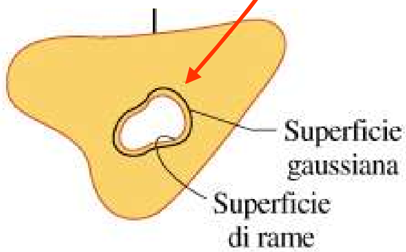
Evidenze sperimentali mostrano come all'interno di un conduttore E=0

Se fornisco una carica ad un conduttore isolato essa si dispone totalmente sulla superficie esterna. Nessuna carica può trovarsi entro il corpo del conduttore

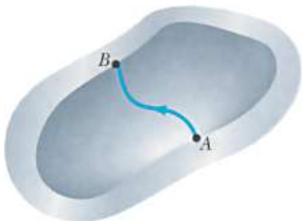


Se il conduttore è cavo e calcolo il flusso attraverso una superficie prossima alla cavità ma contenuta nel corpo, poiché all'interno del corpo E=0 anche il flusso totale sarà nullo

Non vi è carica sulla superficie interna. Essa rimane tutta sulla superficie esterna del conduttore



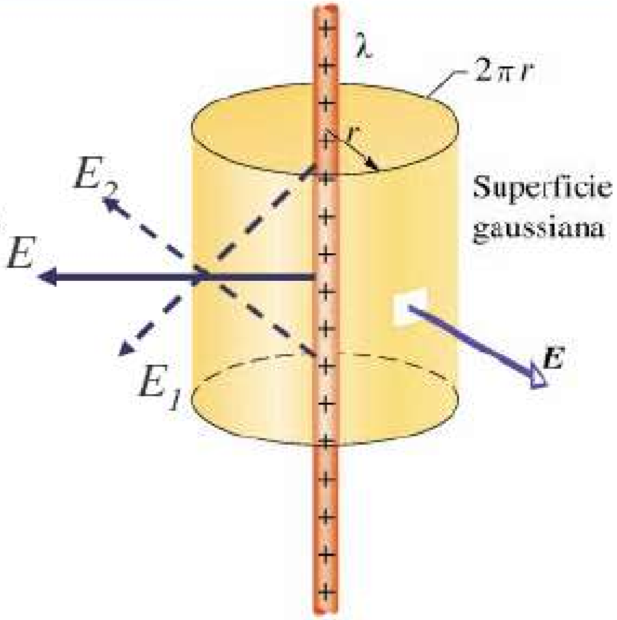
Se "*allargo*" la cavità le cose non cambiano



Il campo Elettrico è prodotto dalle cariche e non dal conduttore

Esempio: Legge di Gauss per problema a simmetria cilindrica

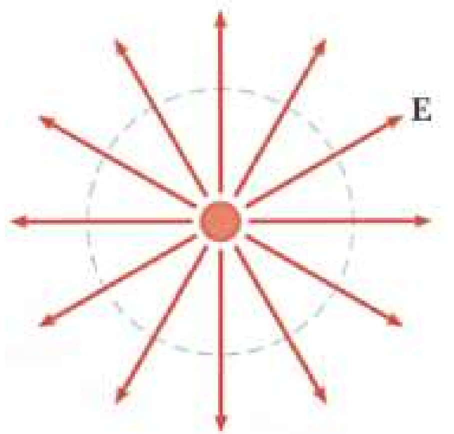
Consideriamo un filo conduttore indefinito, su cui e' disposta una cerca quantità di carica λ per unità di lunghezza.
Il campo elettrico E non può che essere perpendicolare alla superficie laterale del cilindro (vedi figura), ed il modulo può essere determinato con la **Legge di Gauss**:



$$\Phi_E \equiv \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(2\pi r h) = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q_{\text{int}}}{(2\pi r h)\varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$$

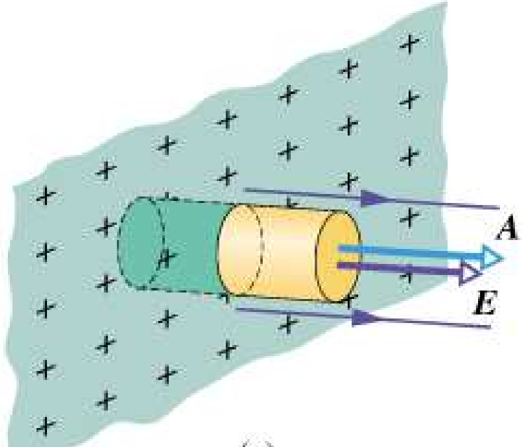
$$non\ \frac{1}{r^2}$$



Filo infinito →Distribuzione di carica infinta → Q_{tot} infinita

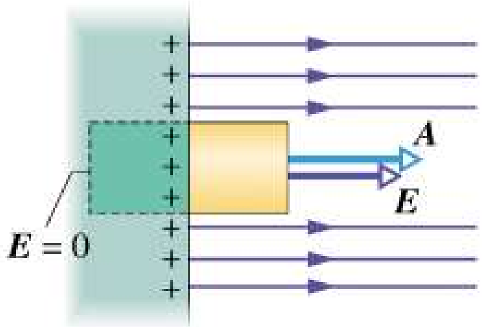
Conduttori isolati

La carica in eccesso su un conduttore si distribuisce sulla sua superficie, ma in generale NON in maniera uniforme. La densità di carica $\sigma = dq/dA$ varia da punto a punto sulla superficie. In una regione di area sufficientemente piccola, con la LdGauss si può stimare il campo elettrico E in prossimità di A.



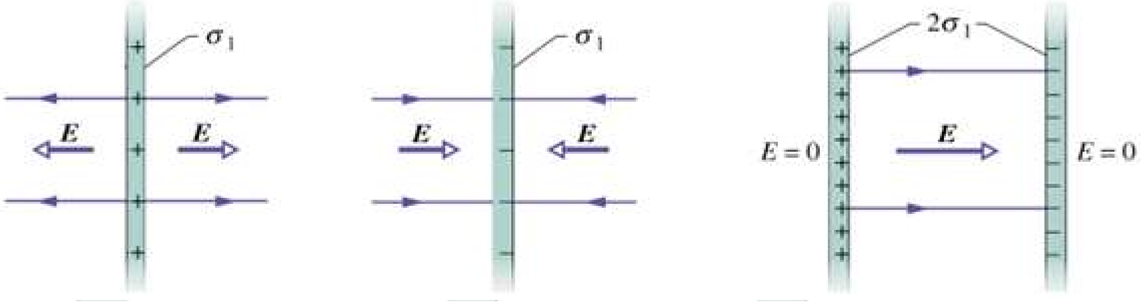
(a)

$$\Phi_E = EA = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q_{\text{int}}}{A\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



(b)

Due piastre conduttrici parallele



$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

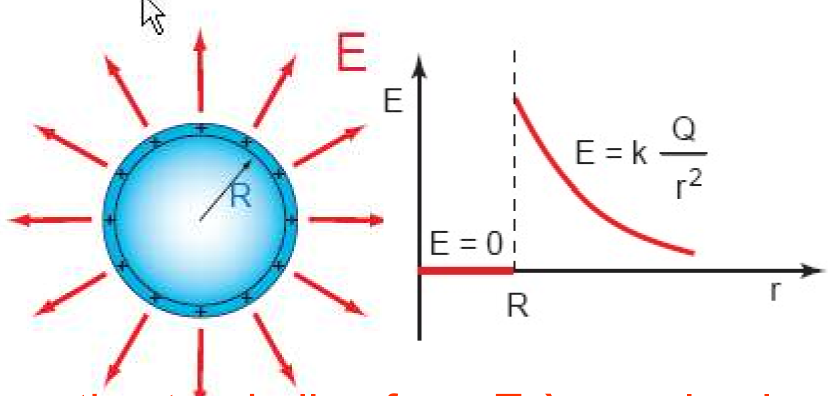
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \text{(dentro)}$$

$$E = 0 \text{ (fuori)}$$

Esempio importante di dispositivo in cui "immagazzinare" il campo Elettrico E

Legge di Gauss: simmetria Sferica

guscio uniformemente carico



Per il teorema di Gauss

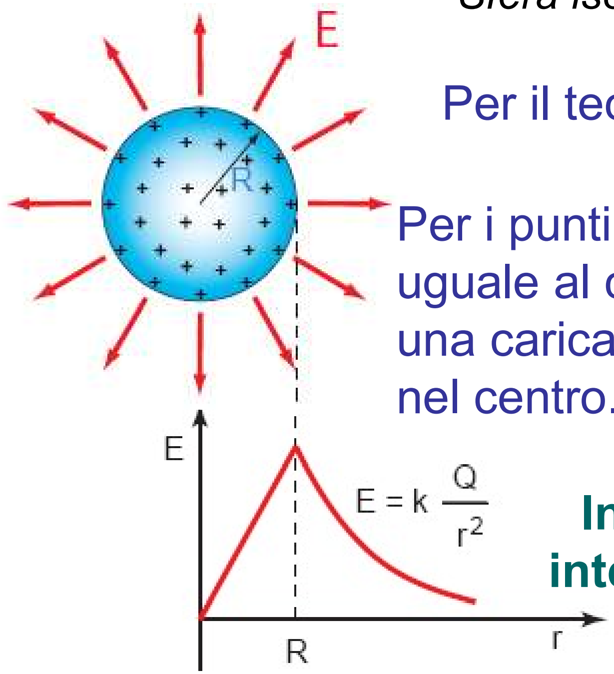
$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \bullet d\mathbf{S} = E\, 4\, \pi\, r^2 = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Per i punti esterni alla sfera, **E** è uguale al campo che avrebbe prodotto una carica puntiforme pari a Q posta nel centro. In un punto P' interno alla sfera carica

$$Q_{INT} = 0 \Rightarrow \Phi_E = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = 0$$

Sfera isolante piena



Per il teorema di Gauss

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \bullet d\mathbf{S} = E\, 4\, \pi\, r^2 = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Per i punti esterni alla sfera, **E** è uguale al campo che avrebbe prodotto una carica puntiforme pari a Q posta nel centro.

Densità di carica

In un punto P' interno alla sfera carica

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{Q}{4/3 \cdot \pi R^3} \qquad q(r) = \rho \cdot 4/3 \cdot \pi r^3 = \dfrac{Q r^3}{R^3} \\ E = \dfrac{q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \cdot r \end{cases}$$