Equilibrio Statico

Il corpo (puntiforme o esteso) non deve muoversi !

TRASLAZIONE $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{v}_C = 0 \qquad \vec{p}_C = 0 \qquad \left(a = 0, \sum F = 0\right)}$

ROTAZIONE $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\omega} = 0 \qquad \vec{l} = 0 \qquad \left(\alpha = 0, \sum \tau = 0\right)}$

ROTOLAMENTO
Senza Strisciamento $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\omega} = 0 \quad \leftrightarrow \quad v_{CM} = 0}$

Dunque devono essere soddisfatte :

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = 0 & \begin{cases} \sum \vec{F}_X = 0 \qquad \sum \vec{F}_Y = 0 \qquad \cancel{\sum \vec{F}_Z = 0} \end{cases} \\ \sum \vec{\tau} = 0 & \begin{cases} \cancel{\sum \vec{\tau}_X = 0} \qquad \cancel{\sum \vec{\tau}_Y = 0} \qquad \sum \vec{\tau}_Z = 0 \end{cases} \end{cases}$$

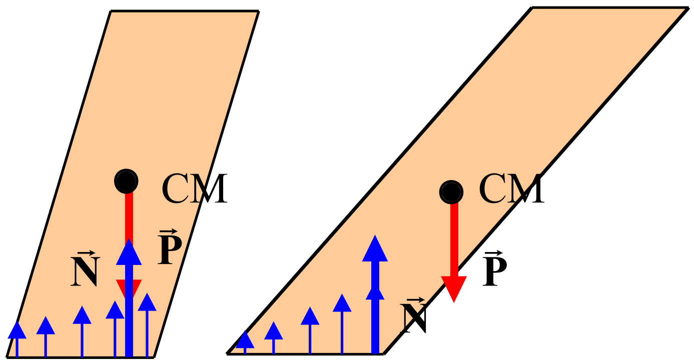
Nel caso di moti rototraslatori nel piano (x, y) basta avere $F_X = F_Y = 0$ e $\tau_Z = 0$

Equilibrio di un corpo rigido nel campo della forza peso

- Corpo rigido appoggiato su di un piano orizzontale liscio.
  - Il corpo è in equilibrio se la verticale passante per il centro di massa interseca il piano orizzontale in un punto interno al poligono di appoggio.

- Il punto di applicazione della normale N (*forza equivalente all'insieme di forze parallele esercitati sui vari punti di appoggio*) <u>deve essere un punto interno del poligono di appoggio</u>
- Se la verticale passante per il centro di massa passa per il punto di applicazione della forza peso

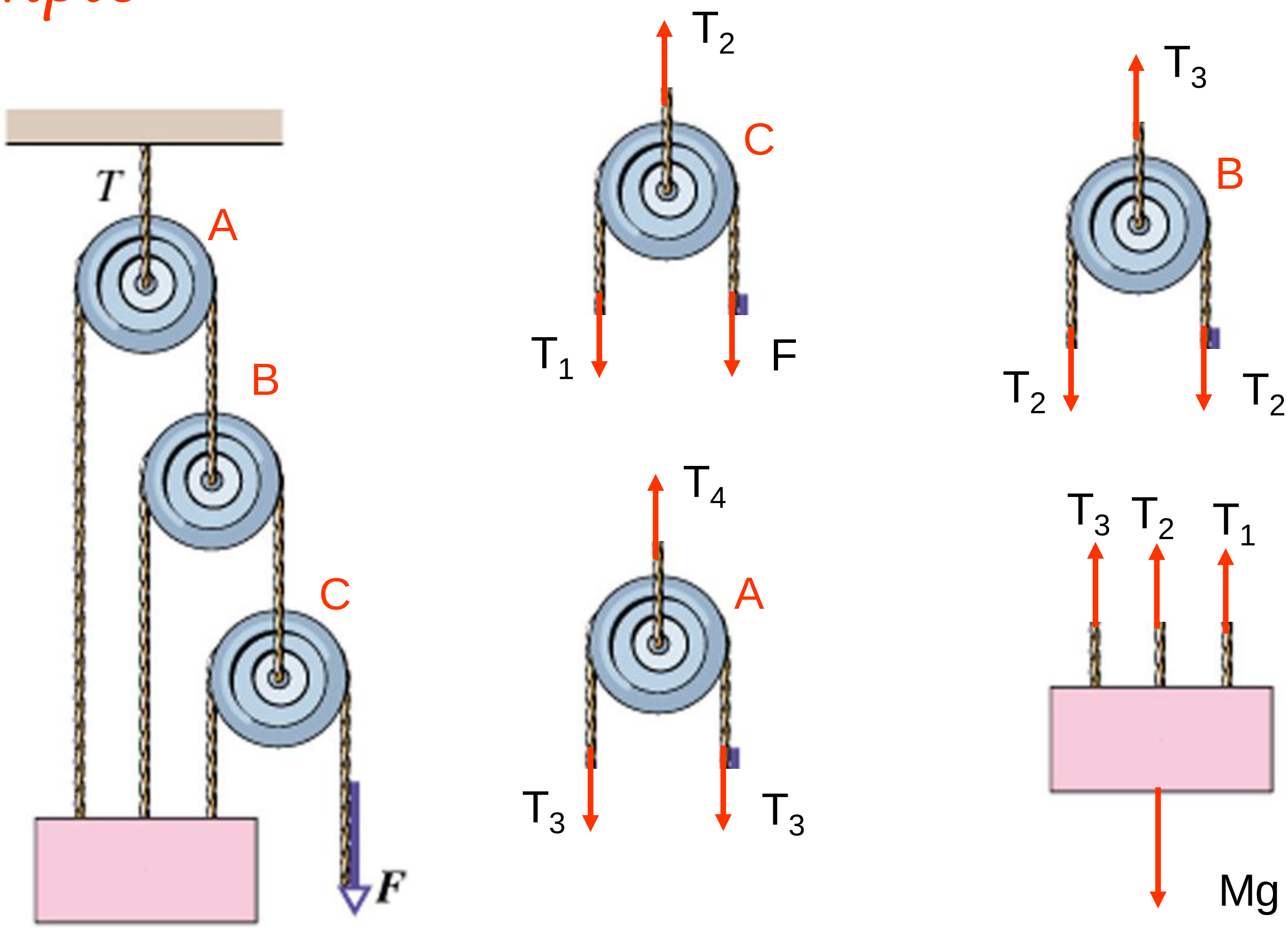
  allora la forza peso e la Normale formano una coppia di braccio nullo
  - Sono verificate le condizioni di equilibrio statico
- Altrimenti il momento di questa coppia sarà sempre diverso da zero
  - Non ci sarà equilibrio



Teorema del centro di massa

$$\vec{P} + \vec{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = -\vec{P}$$

Esempio



$F = T_1$

$T_2 = 2\,T_1$

$T_3 = 2T_2 = 4T_1$

$-mg + 7\,T_1 = 0$

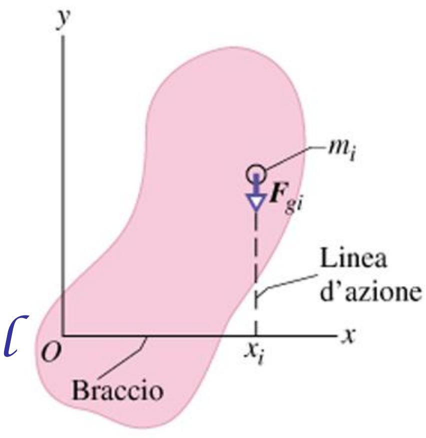
$F = T_1 = mg/\,7$

$T_4 = 8\,T_1 = mg\,8/7$

Per un CORPO ESTESO sappiamo già che vale:

$$F_{Peso} = \sum_i m_i g_i = \left(\sum_i m_i \right) \cdot g = M \cdot g$$

e per la dinamica traslazionale del corpo possiamo pensare **Mg** applicata nel Centro di Massa



(a)

Ma nella dinamica rotazionale:

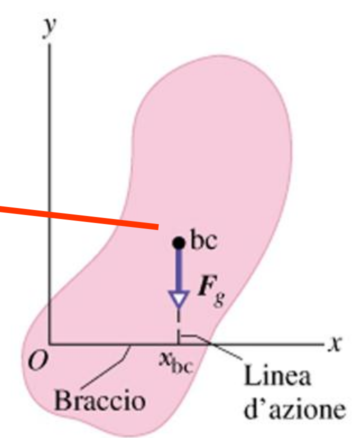
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{f} = \vec{r} \times M \cdot \vec{g}}$$

Anche in questo caso posso pensare che F_{Peso} applicata nel Centro di Massa ?

Si: se la g è la stessa ∀ punto del corpo

BARICENTRO

(punto di applicazione della forza peso)



(b)

In questo caso Baricentro e CdM **coincidono**

$$\tau_{Peso} = \vec{r}_{bc} \times M\vec{g} \;\rightarrow\; \tau = r_{bc\perp} \cdot Mg$$

Ma ***Mg*** *è diretta lungo l'asse y quindi:*

$$\tau = x_{BC} \sum_i m_i g$$

d'altra parte deve valere *<u>anche</u>*

non dipende

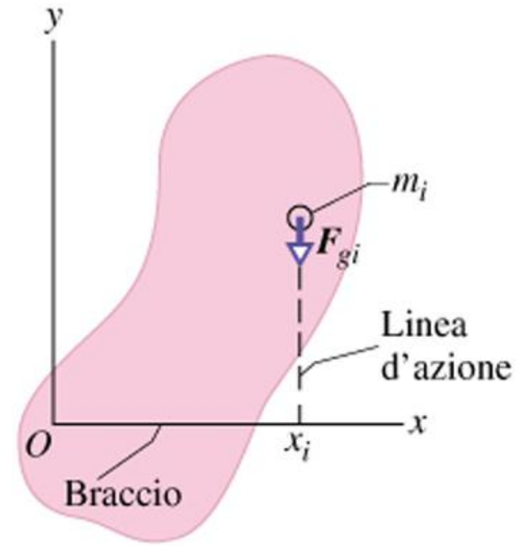
$$\tau = \sum_i x_i \left(m_i g_i\right)$$

quindi

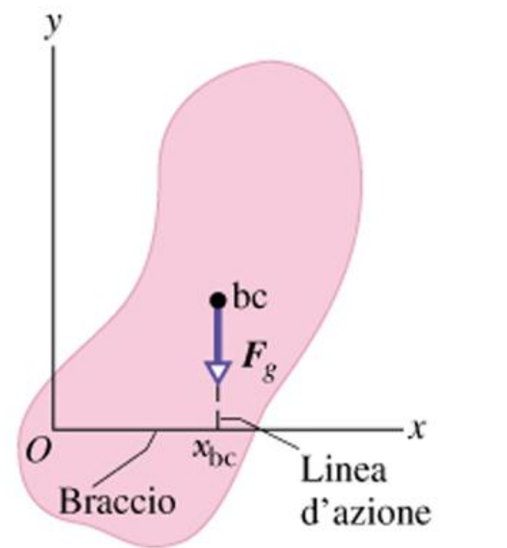
$$x_{BC} \sum_i m_i g = \sum_i x_i m_i g$$

$$x_{BC} \left(\sum_i m_i\right) \cancel{g} = \left(\sum_i m_i x_i\right) \cancel{g}$$

$$\boxed{x_{BC} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = x_{CdM}}$$

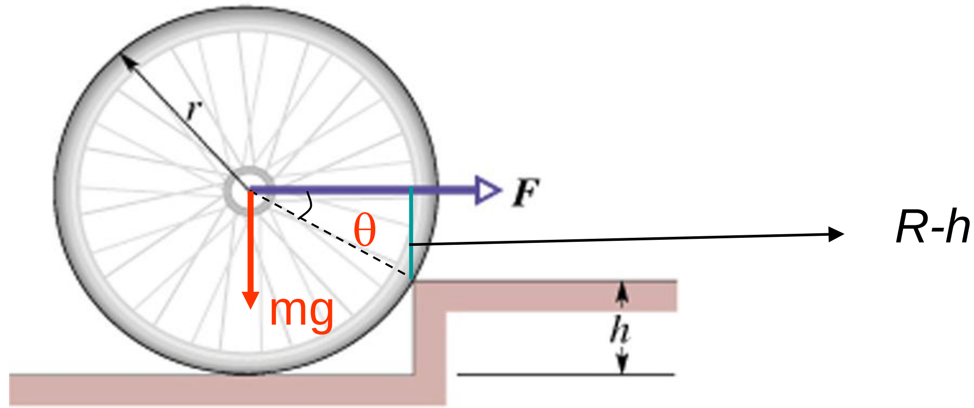


(a)



(b)

Esempio



Trovare F *affinché la ruota "salti" sul gradino*

Per i Momenti

$$\vec{R}\times\vec{F}+\vec{R}\times m\vec{g}=0 \quad\Longrightarrow\quad RF\sin\vartheta - Rmg\underbrace{\sin(90-\vartheta)}_{\cos\vartheta}=0$$

Ora $\boxed{\sin\vartheta=\dfrac{R-h}{R}}$

e $\boxed{\cos\vartheta=\sqrt{1-\dfrac{(R-h)^2}{R^2}}=\dfrac{\sqrt{2Rh-h^2}}{R}}$

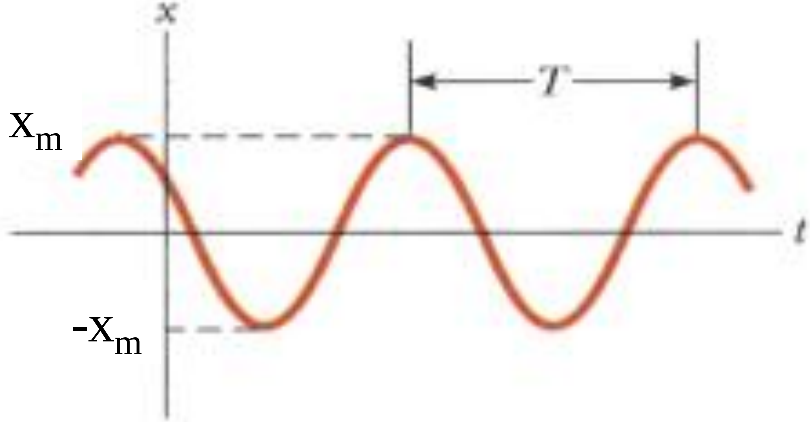
N.B.
Capire bene esercizi
Svolti par. 12.4

Dunque $\boxed{F=mg\dfrac{\sqrt{2Rh-h^2}}{R-h}}$

F > 0
h < R

Moto armonico semplice

Esempio di moto oscillatorio PERIODICO



Periodo di una oscillazione ⇨ **T**

Frequenza $\nu = \dfrac{1}{T}$

numero di oscillazioni al secondo

Siccome

$$\boxed{x(t+T) = x(t)}$$

Caso 1D

$$\overbrace{x(t)}^{\text{Spostamento all'istante } t} = \underbrace{x_m}_{\text{Ampiezza}} \cos\overbrace{(\underbrace{\omega}_{\text{Pulsazione o frequenza angolare}} \underbrace{t}_{\text{Tempo}} + \underbrace{\phi}_{\text{Angolo di fase o costante di fase}})}^{\text{Fase}}$$

$$\omega(t+T) = \omega t + \omega T = \omega t + 2\pi$$

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \nu}$$

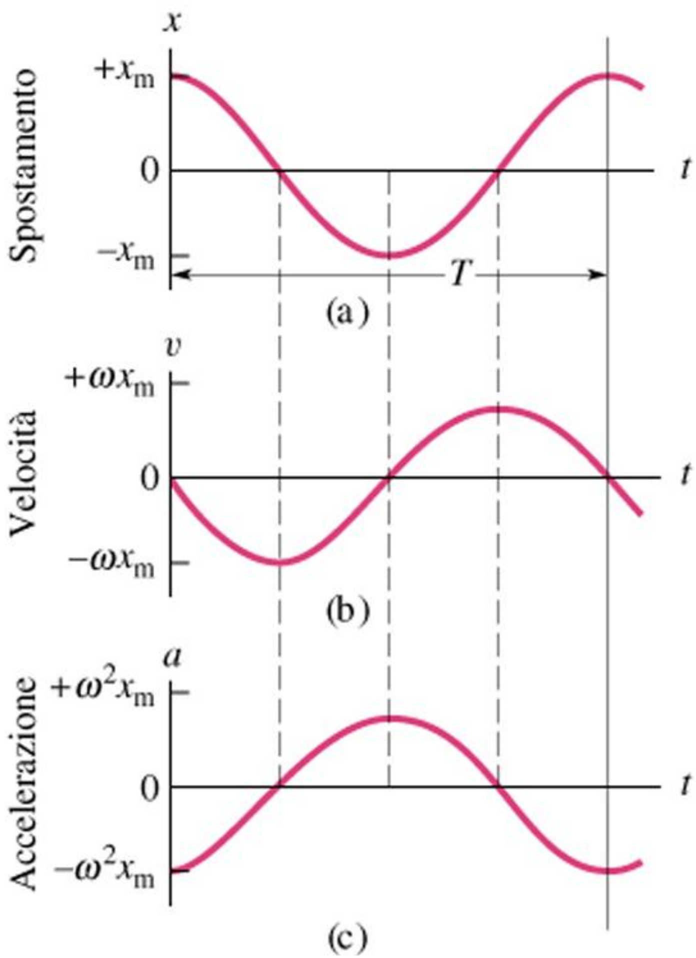
Derivando rispetto al tempo si ha:

$$v(t) = \omega \cdot x_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = -\omega^2 \cdot x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) \qquad \left[NB \quad \underbrace{a(t) = -\omega^2 \cdot x(t)}\right]$$

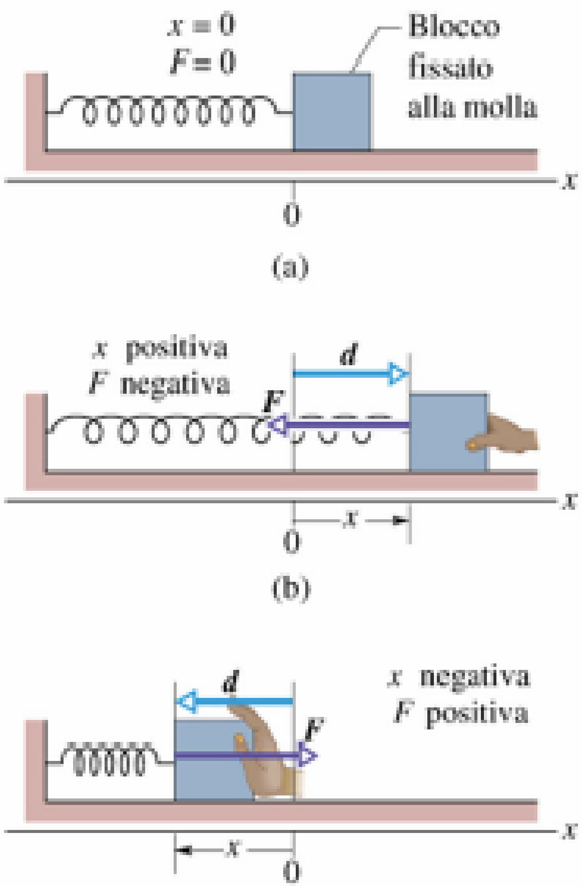
Caratteristica *fondamentale* del *Moto Armonico Semplice*

Con $\varphi = 0$



Sfasata di T/4 rispetto a x(t)
(ovvero di $\pi/2$)

Sfasata di T/4 rispetto a v(t)
(ovvero di π rispetto a x)



La forza elastica

In Natura molte situazioni possono essere assimilate alla forza di richiamo di una molla. Se si sposta dalla posizione di riposo una molla di una quantità x, questa esercita una ***forza di richiamo*** che viene parametrizzata da:

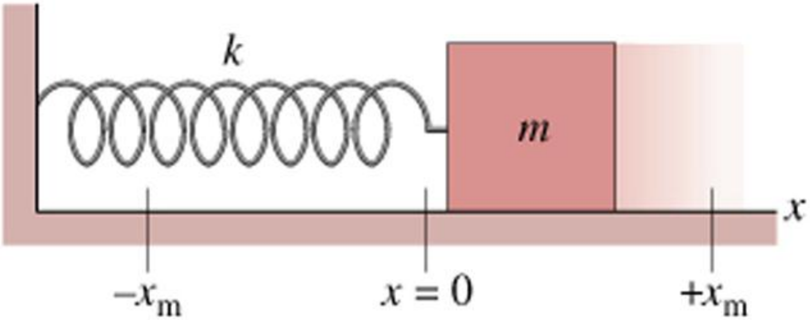
F= -k **x** (legge di Hooke)

Origine: Proprietà strutturali dei metalli ovvero interazioni a livello microscopico tra gli atomi del metallo

Soluzione: scriviamo l'equazione del moto: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow a = -\frac{k}{m}x$

L'equazione del moto è $x(t) = x_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad con \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Moto Armonico Semplice

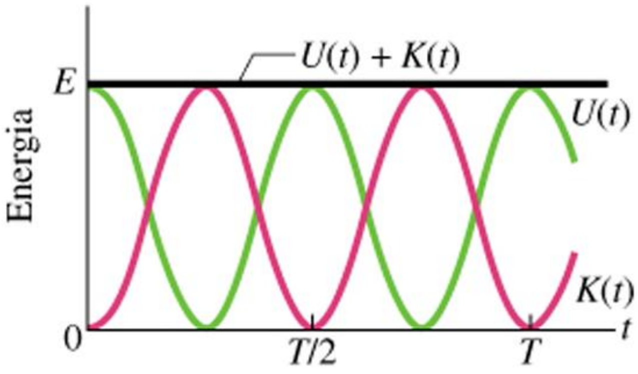


Nel sistema Corpo - Molla

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{x} \longrightarrow U = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

Ovvero $$U = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot x_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

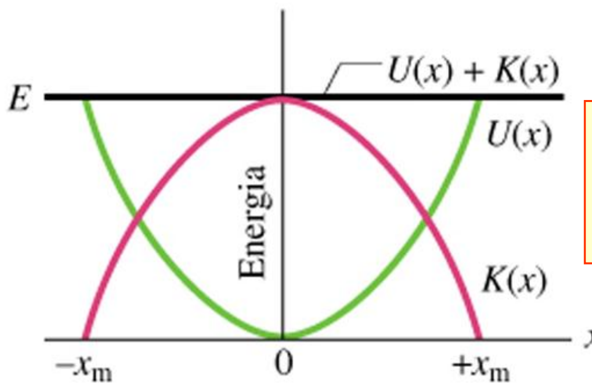
Potenziale parabolico con concavità verso l'alto



(a)

Ora $$K(t) = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} k \cdot x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

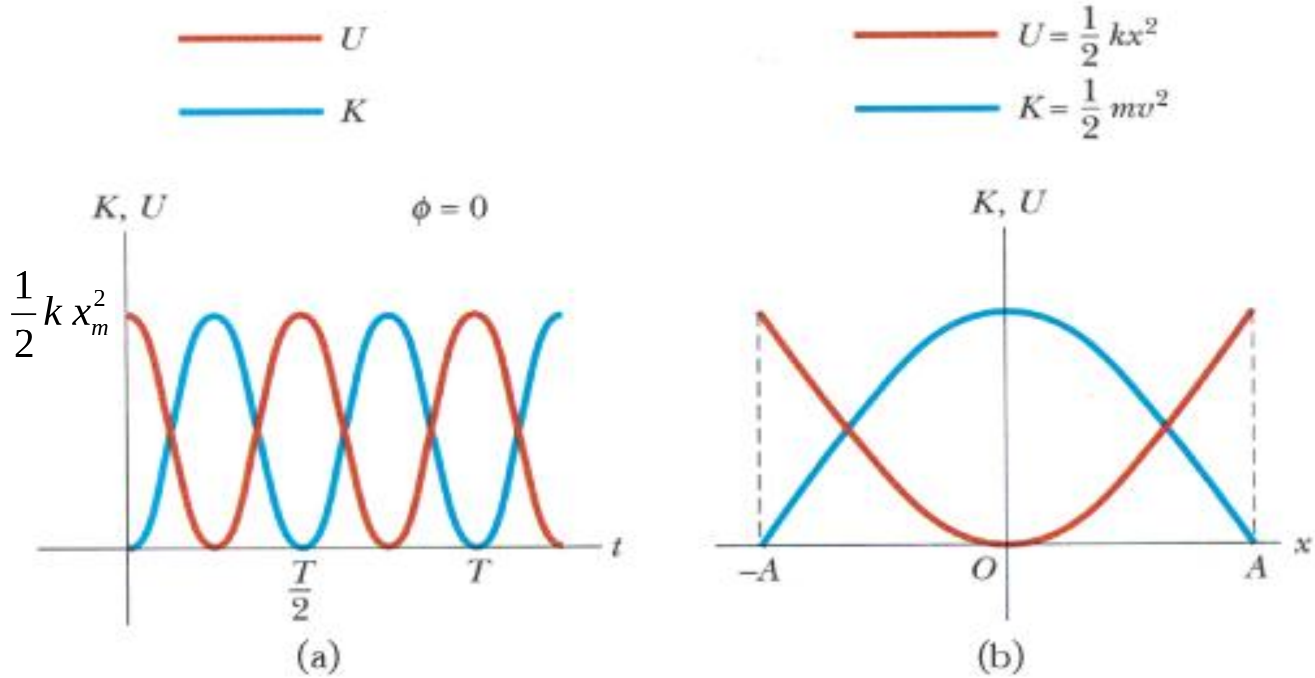
Forze Conservative → Energia si conserva



(b)

$$E(t) = K(t) + U(t) = \frac{1}{2} k \cdot x_m^2 \left(\sin^2 + \cos^2\right) = \frac{1}{2} k \cdot x_m^2$$

COSTANTE



U è minima dove ⟷ La molla è rilassata ($x = 0$)

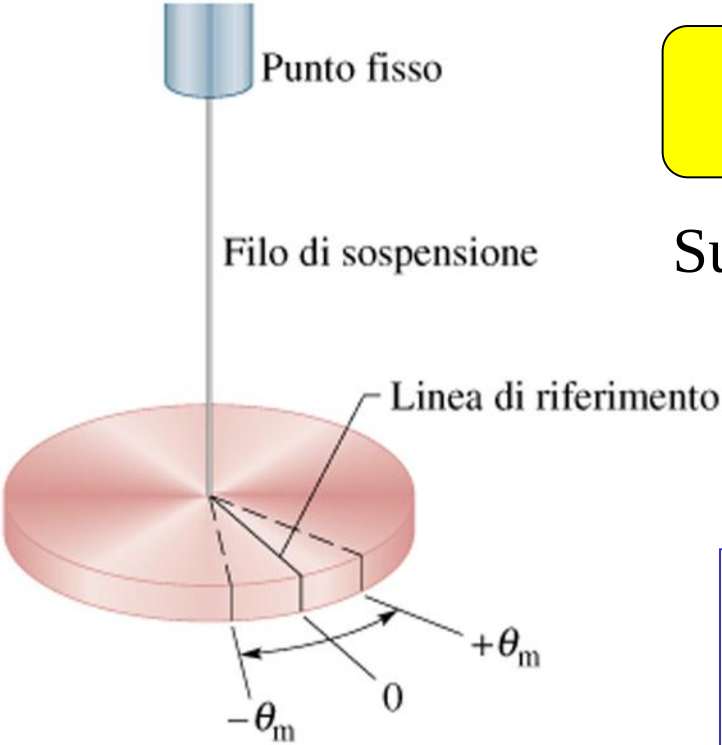
K è massima ⟷ La massa m transita a v_{max} dal punto $x=0$

U è massima dove ⟷ La molla è massimamente compressa o estesa ($x = \pm x_m$)

K è minima ⟷ In quei punti la massa si ferma e inverte il moto

U e K sono in controfase ⇨ L'energia si alterna tra potenziale e cinetica

Pendolo di Torsione



Sul filo agisce un **Momento di Torsione**

(vale per piccoli angoli θ)

$$\tau = I \cdot \alpha = -k \cdot \theta$$ ovvero

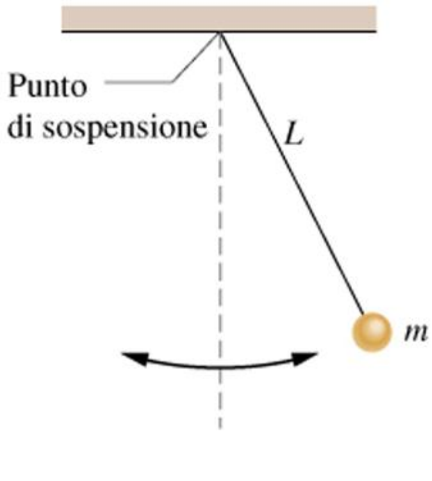
$$\alpha = -\frac{k}{I} \cdot \theta$$ del tipo $$a = -\frac{k}{m} \cdot x$$

k è detta **Costante di Torsione** e dipende dalle proprietà elastiche del filo

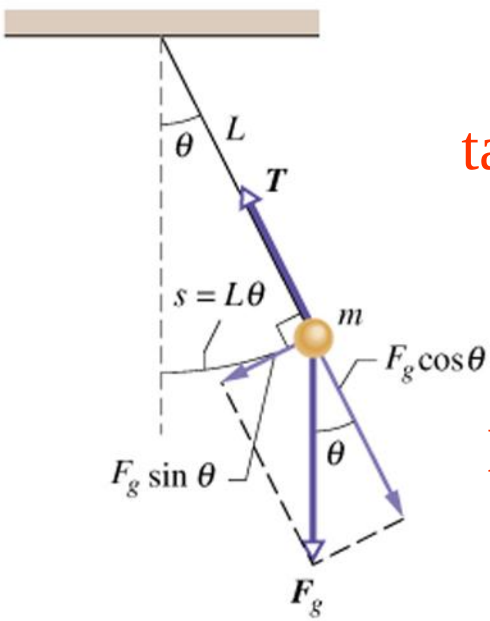
Il moto del pendolo sarà di tipo *ARMONICO SEMPLICE*

Il periodo di oscillazione è $$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$$

L'equazione del moto è $$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$



(a)



(b)

Pendolo Semplice

Lo spostamento è tangenziale alla traiettoria e la posizione di **m** è determinata da **θ**

radiale / tangenziale

$$\begin{cases} T - mg\cos\theta = m\omega^2 L \\ -mg\sin\theta = m\dfrac{d^2}{dt^2}(L\theta) \end{cases}$$

Dalla prima eq. ricaviamo ***T***

La seconda ci dà la legge oraria del moto oscillatorio

$$-\frac{g}{L}\sin\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

e se $\sin\theta \sim \theta$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta}$$

Piccoli angoli

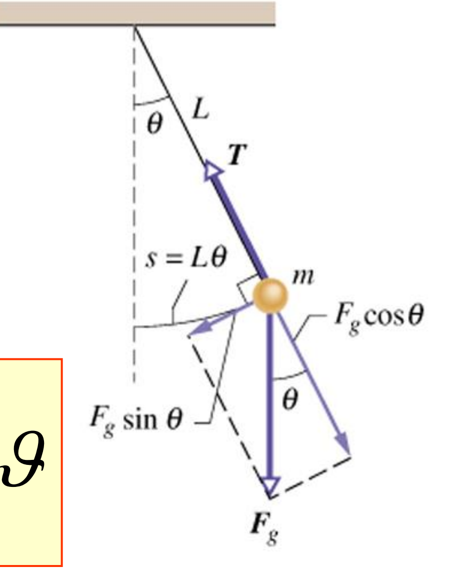
dunque $\theta(t) = \theta_m \cos(\Omega t + \varphi)$ $\Omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$

da non confondere con $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

Il periodo delle piccole oscillazioni vale $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

Alternativamente si può considerare il momento delle forze agenti su m

La sola forza che ha momento non nullo è il **peso**



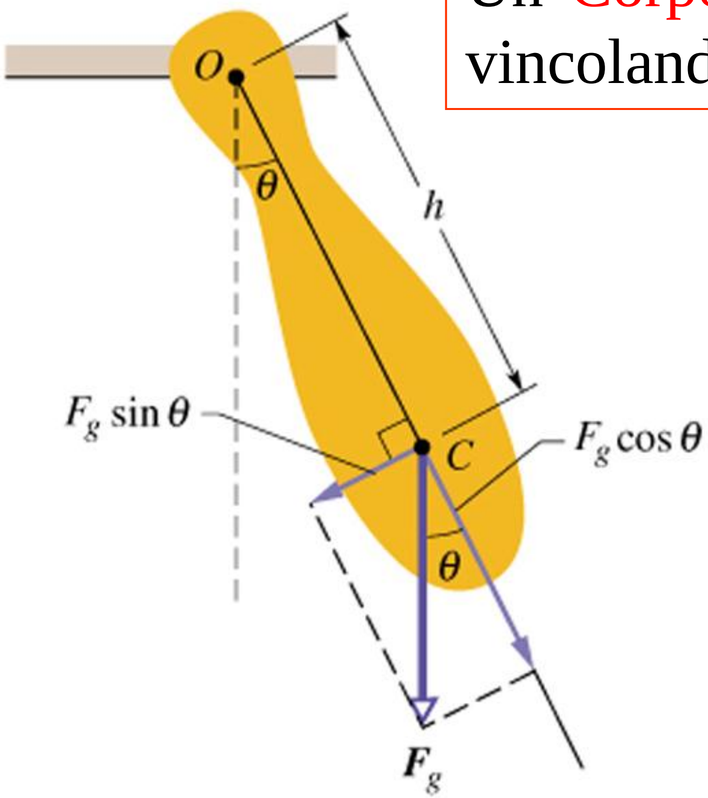
$\vec{\tau} = \vec{L} \times \vec{P} = -L \cdot mg \sin\theta\,(\vec{k})$ entrante al foglio

$\tau = I\alpha = mL^2\alpha$

$$\alpha = -\frac{g}{L}\sin\vartheta \approx -\frac{g}{L}\vartheta$$

M.A.S.

Pendolo Fisico o Composto

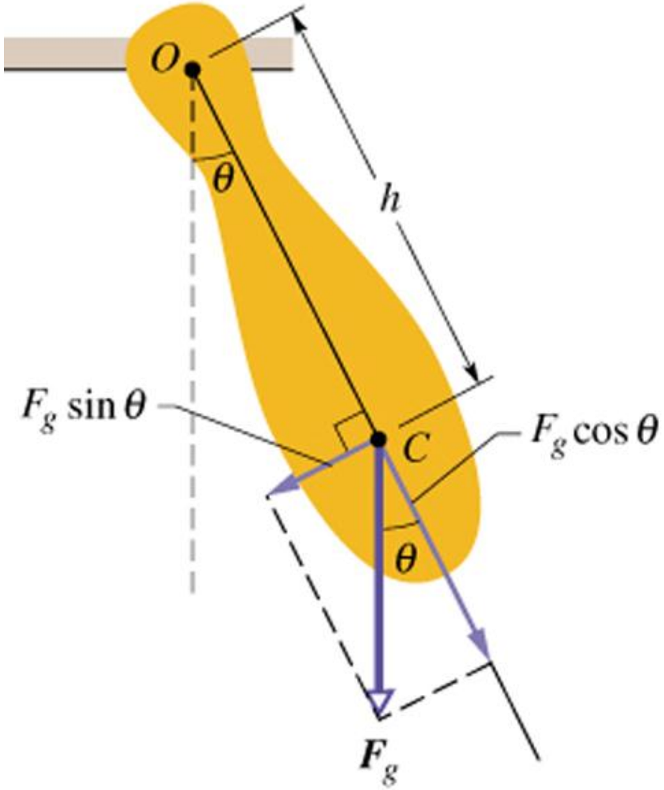


Un Corpo esteso (massa non puntiforme) "**appeso**", vincolando un suo punto "O" ad un asse Orizzontale

NO <u>Centro di Massa</u>

Si sposta il corpo rispetto alla verticale e lo si lascia andare

Compie oscillazioni in un piano Verticale, Ortogonale all'asse di rotazione



Il corpo inizia ad oscillare perché nasce un momento dovuto alla forza peso

$$\vec{\tau} = \vec{h} \times M\vec{g} = -Mgh\sin\theta(\vec{k})$$

θ è misurato rispetto alla verticale

$$\tau = I\alpha$$

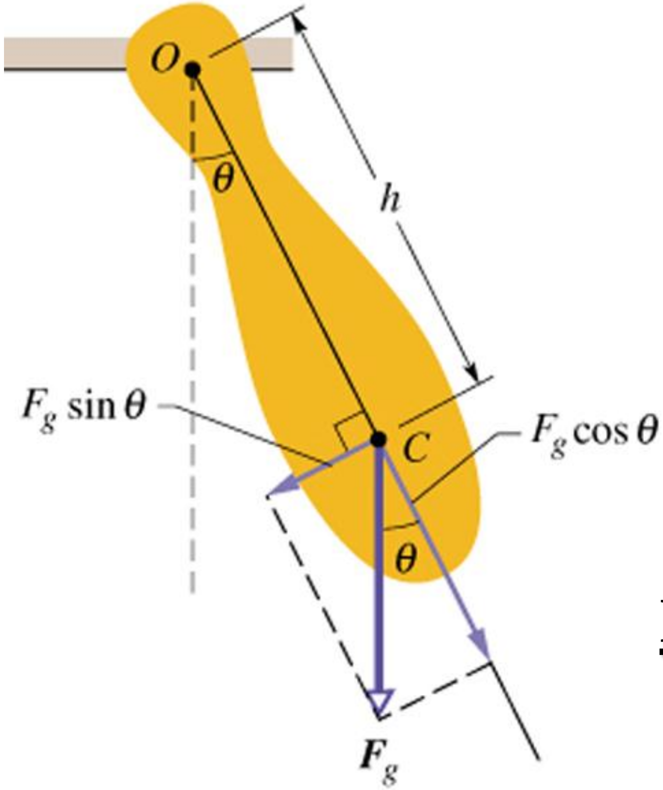
$$\vec{\alpha} = \frac{d^2\theta}{dt^2}(\vec{k})$$

Dunque

$$Mgh\sin\theta = -\frac{d^2\theta}{dt^2} I$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mgh}{I}\sin\theta$$

Non è l’equazione di un moto armonico sempl.



Per piccoli angoli $\sin\theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mgh}{I}\theta$$

h = distanza tra Vincolo e CdM

<u>Equazione di un moto armonico semplice</u>

Il corpo oscillerà secondo $\theta = \theta_{max}\cos(\omega \cdot t + \varphi)$

Dove $\omega = \sqrt{\frac{Mgh}{I}}$ e $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}}$

Se il corpo è puntiforme I = Mh² $\Rightarrow$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$ ***Pendolo Semplice***