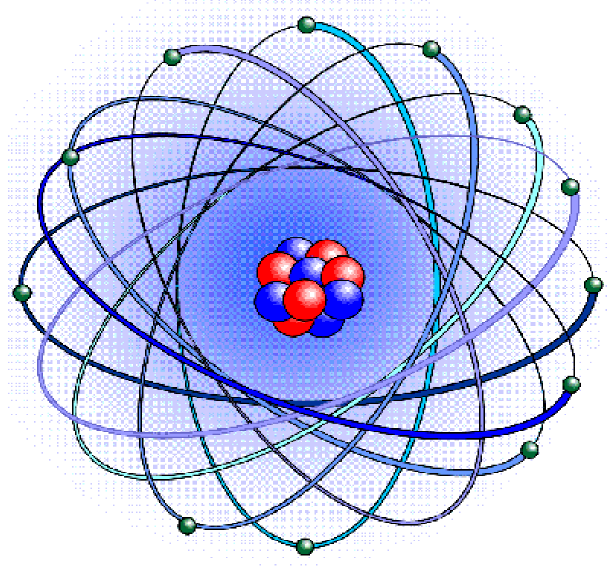


FISICA Generale
Corso C

Docente

- **Spagnolo Vincenzo**

Prorettore alla terza missione e Trasf. Tecn.

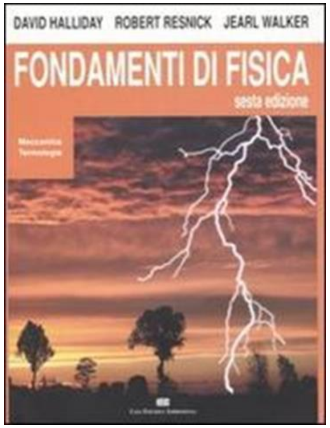
- Fisica Generale (Corsi comuni Ingegneria)
- Dispositivi e Sensori fotonici (Laurea specialistica in Ing. Ele.)

- **Ufficio**

Dipartimento Interateneo di Fisica (stanza 232-2° Piano)

- **Telefono**
  - 080. 544.23.73
- **Email:** vincenzoluigi.spagnolo@poliba.it
- **Webpage: http://polysense.poliba.it/**

Libri di testo consigliati



- **Paolo Mazzoldi, Massimo Nigro, Cesare Voci**
  - Elementi di fisica. Meccanica, termodinamica
- **David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker**
  - Fondamenti di fisica. Meccanica, termologia
- **Lucidi lezioni**

  http://polysense.poliba.it/index.php/lezioni-fisica-generale-corso-c-mod-1/

Libri di testo per esercizi

- **Pietro Pavan, Francesca Soramel**

  Problemi di fisica 1 risolti e commentati

- **Paolo Sartori, Pietro Pavan**

  Problemi di fisica 2 risolti e commentati

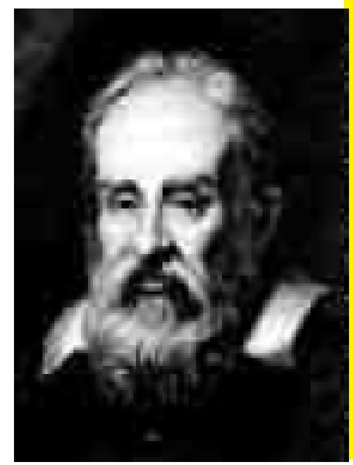
Programma (primo modulo)

- **CINEMATICA**
  - La misura in Fisica,
  - Cinematica del punto materiale
- **DINAMICA**
  - Dinamica del punto materiale
  - Dinamica dei sistemi di punti materiali
  - Dinamica del corpo rigido.
  - Urti
  - Oscillazioni
- Gravitazione

Il Metodo Scientifico

La storia della Scienza moderna inizia in Grecia: nascita della logica, della filosofia, della matematica e primi tentativi di studiare il mondo utilizzando un abbozzo di **metodo scientifico**

- Osservazioni e misure
- Costruzione di un modello matematico
- Utilizzo predittivo del modello
- Confronto tra predizioni e nuove osservazioni

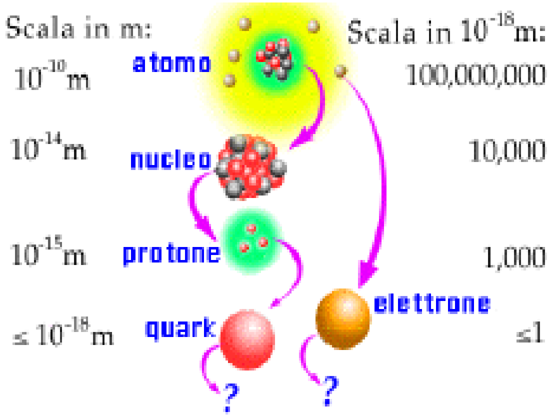


Galileo, 1564-1642

La Scienza è la grande avventura di esplorazione collettiva dell'Umanità.

Il metodo scientifico è "distribuito" e non è appannaggio di un solo soggetto. Gli scienziati non sono isolati, ma formano una comunità unica.

Da infinito…



I mattoni dell'Universo sono gli **atomi**, costituiti a loro volta da **elettroni, protoni e neutroni.**

Gli atomi si riuniscono e formano **Molecole**

Gli elettroni sono legati al nucleo dalla ***forza elettrica***.

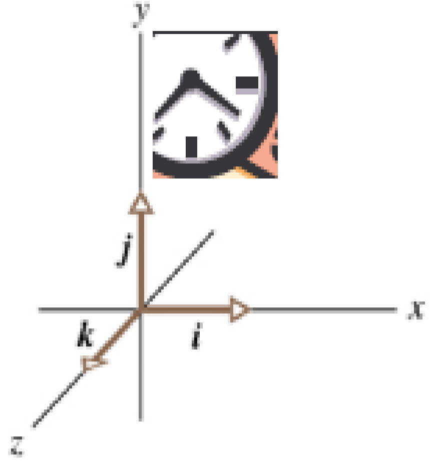
Protoni e neutroni sono legati tra loro da una forza più intensa, la ***forza forte***.

…a infinito

- Le stelle splendono per tanto tempo a causa della ***forza debole***.
- Gli oggetti celesti sono legati dalla ***forza di gravità***

1. Misurare oggetti

Sistemi di riferimento: necessari per localizzare un evento nello spazio e nel tempo



Generalmente, utilizzeremo un **S**istema di **R**iferimento **C**artesiano **O**rtogonale (SiRCO). Un evento e' localizzato con le coordinate:

(x,y,z,t)

Misure di segmenti e distanze: il METRO

•misurare un segmento significa adottare una procedura di misura, utilizzando una grandezza **omogenea** da confrontare

1/ 10.000.000 del quarto di meridiano terrestre che passa da Parigi compreso tra polo nord ed equatore

- Definizione di ***campione.*** Requisiti:

Metro Campione (1796)

- preciso
- accessibile
- riproducibile
- invariabile

Oggi: Si utilizzano le conoscenze della Fisica (quantistica, atomica, relatività…)

1 m = lunghezza percorsa dalla luce in 1/299.792.458 s

Misure di Tempo

Misura di un ***intervallo di tempo***: si utilizza un fenomeno *periodico*

Il giorno solare è stato un buon campione e per molto tempo. Tuttavia, La durata del giorno e' variabile.

1 s = tempo necessario all'atomo di ^{133}Cs per effettuare 9.192.631.770 oscillazioni

Perché un minuto ha 60 secondi, un ora 60 minuti etc…?

In Mesopotamia usavano sistema dozzinale e sessagesimale

Il Sistema Internazionale

- Misura di Massa: il Kg

Esiste un campione di massa (1 kg), un cilindro di platino-iridio conservato presso l'Ufficio Int. Pesi e Misure di Sevres

Oggi, si preferisce utilizzare come campione l'atomo di ^{12}C, il quale ha una massa di:

$$m(^{12}C) = 1.66605402\ 10^{-27}\ kg$$

- Misura di Temperatura: il Kelvin (K)

- Misura di Carica Elettrica: Il Coulomb (C)* (Cap. 11)

- Misura di quantità di sostanza: la mole (mol)

- Misura di intensità luminosa: la candela (cd)

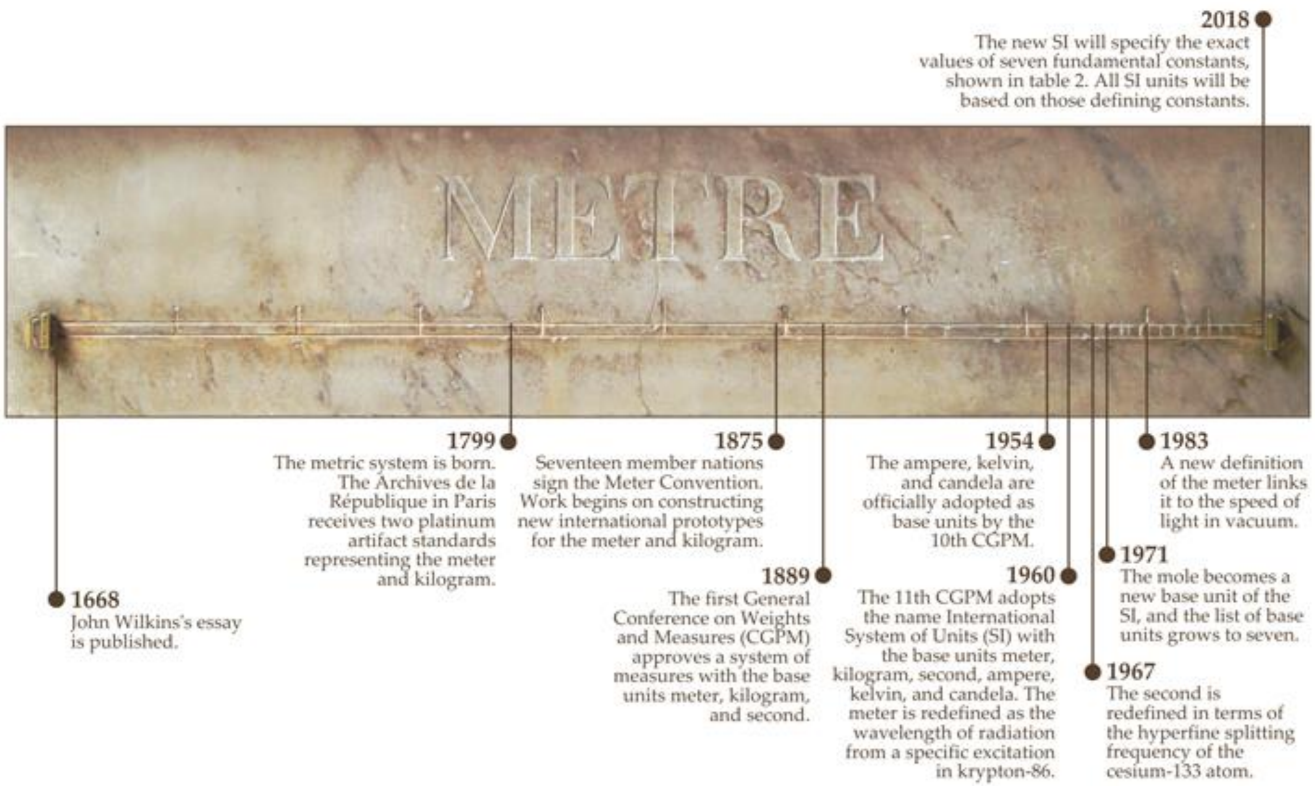


Figure 1. Evolution of the SI. *A brief timeline of the history of the International System of Units since John Wilkins's 1668 essay is scaled to a meter bar. The photograph shows a marble meter standard in Paris, dating from the 18th century. (Photo courtesy of LPLT\Wikimedia Commons.)*

Published in: David B. Newell; *Physics Today* **67,** 35-41 (2014)
DOI: 10.1063/PT.3.2448

Unità di misura derivate

- Le unità di misura di tutte le altre grandezze fisiche sono derivate da quelle fondamentali attraverso “relazioni” che legano ciascuna grandezza a quelle fondamentali.
- Per esempio la relazione che lega la velocità allo spazio percorso ed al tempo impiegato è data da:

$$v = \frac{d}{\Delta t}$$

- L’unità di misura della velocità sarà (SI): m/s
- La scelta tra grandezza fondamentale o derivata è ARBITRARIA
- equazione dimensionale $[v]=[d][\Delta t]^{-1} = [L][T]^{-1}$
- È sempre utile effettuare l’analisi dimensionale dell’espressione ottenuta!!!

Altre grandezze

- **aree**
  - Triangolo: 1/2 base x altezza
  - Parallelogramma: base x altezza
  - Cerchio: π x raggio al quadrato
- Le dimensioni $[S] = [L^2]$
- L'unità di misura il m^2.
- Il campione: un quadrato di lato 1 m.

- **Volumi**
  - Parallelepipedo: Area di base x altezza
  - Sfera: 4/3 π x raggio al cubo
- Le dimensioni $[V] = [L^3]$
- L'unità di misura il m^3.
- Il campione: un cubo di spigolo 1 m.

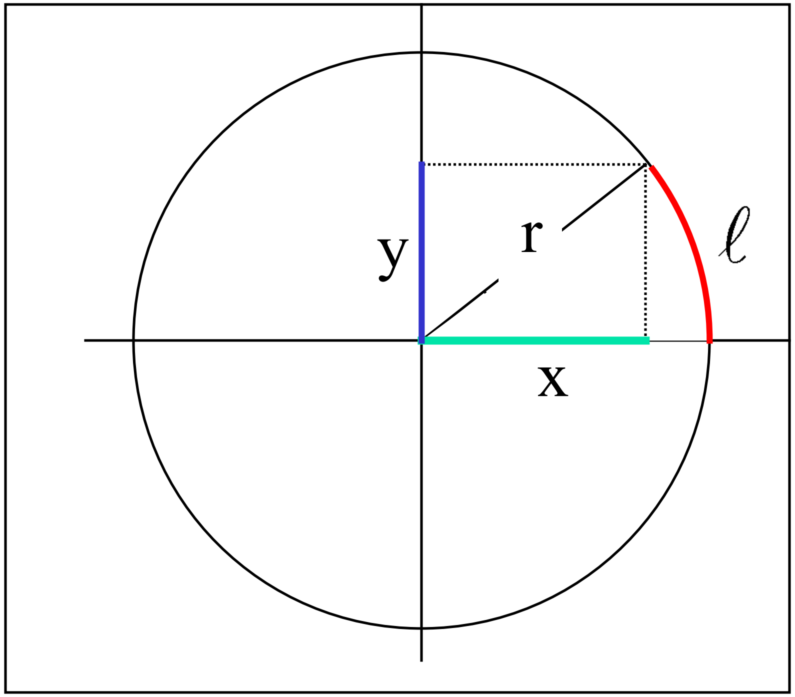
Trigonometria

$$\theta = \frac{\ell}{r}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$



Trigonometria

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Meno utilizzate:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

Formule di bisezione

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Formule di prostaferesi

Conversione tra sistemi di misura differenti

Il numero che esprime la misura di una grandezza fisica dipende dalla scelta dell'unità; cambiando unità cambia il numero che esprime la misura.

Esempio: La massa di un corpo può essere misurata in grammi o in chilogrammi.

Indichiamo con $\mathcal{G}$ una qualsiasi grandezza fisica e con 'u' e 'v' due diverse unità per la misura di $\mathcal{G}$. Le misure nelle due unità sono per definizione

$$\mathcal{G}_u \equiv \frac{\mathcal{G}}{u}, \qquad \mathcal{G}_v \equiv \frac{\mathcal{G}}{v}.$$

Il rapporto tra le misure è quindi

$$\frac{\mathcal{G}_u}{\mathcal{G}_v} = \frac{\frac{\mathcal{G}}{u}}{\frac{\mathcal{G}}{v}} = \frac{v}{u} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{G}_u = \left(\frac{v}{u}\right) \mathcal{G}_v$$

Il quoziente $\left(\frac{v}{u}\right)$, indipendente da $\mathcal{G}$, prende il nome di fattore di conversione dall'unità v all'unità u.

Esempi:

1 - Un chilogrammo vale 1000 grammi; il fattore di conversione $\left(\frac{Kg}{g}\right)$ è 10^3. Pertanto

$$m_g = 10^3 m_{Kg}$$

2 - Un chilometro è 10^3 metri. Il fattore di conversione di una distanza L da metri a chilometri è 10^{-3}:

$$L_{\mathrm{Km}} = 10^{-3} L_{\mathrm{m}}$$

3 - Nella misura di un intervallo di tempo T il fattore di conversione da secondi 's' a ore 'h' è 1/3600

$$T_{\mathrm{h}} = \frac{1}{3600} T_{\mathrm{s}}, \qquad T_{\mathrm{s}} = 3600 T_{\mathrm{h}}$$

I fattori di conversione delle grandezze derivate si esprimono mediante i fattori di conversione delle grandezze primitive che le definiscono.

Esempio: Nel Sistema Internazionale la velocità si misura in 'm/s' mentre nell'uso quotidiano si usa l'unità 'Km/h'. Il fattore di conversione è

$$\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = \left(\frac{10^{-3}\mathrm{Km}}{(1/3600)\mathrm{h}}\right) = 3.6 \left(\frac{\mathrm{Km}}{\mathrm{h}}\right).$$

Esercizio 8 Tim Montgomery, l'attuale primatista mondiale dei 100 m piani, ha stabilito un record di 9.78 s. Calcolare la velocità con cui Montgomery ha coperto la distanza in Km/h.

Esercizio 9 La velocità di rientro nell'atmosfera di una capsula spaziale è dell'ordine di 3×10^4 Km/h. Esprimere questa velocità in m/s.

Le conversioni risultano più complicate quando si usano sistemi non decimali nei quali i sottomultipli dell'unità non sono ottenute dividendo per dieci. In questo caso si hanno fattori di conversione differenti per ogni sottomultiplo. Un esempio comune è la misura del tempo in giorni (86400), ore (3600), minuti (60), secondi.

Esempio: Convertire in g, h, m, s la durata di un milione di secondi.

Soluzione: Il numero di giorni è dato da 1 000 000/86 400. La divisione deve essere eseguita calcolando il quoziente intero e il resto (come viene insegnato nelle scuole elementari):

$$1\,000\,000 = 11 \times 86\,400 + 49600$$

Il numero di giorni è 11. Il numero di ore è 49 600/3 600:

$$49\,600 = 13 \times 3600 + 2800$$

Il numero di ore è 13. Il numero dei minuti è 2800/60:

$$2800 = 46 \times 60 + 40$$

In numero dei minuti è 46 con il resto di 40 s. In conclusione

$$10^6\text{s} = 11\text{g}\,13\text{h}\,46\text{m}\,40\text{s}$$

NOTAZIONE SCIENTIFICA

Il risultato di una misura spesso è un numero molto grande o molto piccolo. Per meglio esprimere questi valori si usa la notazione scientifica:

$$\mathbf{3'560'000'000}\ m =$$

$\mathbf{3.56 \cdot 10^9}$ **m (nelle vostre calcolatrici 3.56E+9)**

oppure

$$\mathbf{0.000000492 = 4.92 \cdot 10^{-7}}\mathrm{m}$$

(nelle vostre calcolatrici 4.92E-7)

Cifre significative

Quante cifre dopo la virgola usare? Per una corretta risposta alla domanda bisognerebbe rifarsi alla teoria degli errori, non inclusa nel programma di studio di questo corso. Tuttavia il numero delle cifre utilizzate indica l'incertezza della misura; ad esempio: se misuriamo un tavolo con un **centimetro**, assumendo che l'errore è dato dalle tacche visibili ed è 1mm, allora se trovo come risultato della misura **1.2542 m** devo più correttamente indicare 1.254 m (intendendo ± 0.001). In genere per i conti dei vostri problemi **SE VOLETE DEI RISULTATI APPROSSIMATI ALLA PRIMA CIFRA DOPO LA VIRGOLA**

bastano **2 cifre** dopo la virgola. Inoltre in generale è meglio indicare la parte intera non nulla ovvero è meglio indicare $1.72\ 10^{-2}$ piuttosto che $0.172\ 10^{-3}$ anche se è la rappresentazione dello stesso numero.

Altro modo sintetico per esprimere numeri tramite l'utilizzo di multipli e sottomultipli delle unit di misura in modo da evitare le potenze di 10. Ad esempio:

12000 g=12 kg

2.35 10^{-9} s =2.35 ns (2.35 nanosecondi)

1.27$10^9$ W=1.27 GW (Gigawatt)

Per utilizzare questo modo bisogna anteporre il suffisso del multiplo-sottomultiplo alla unit di misura e ricordarsi la conversione.

FATTORE	***PREFISSO***	***Simbolo***
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
$\mathbf{10^{9}}$	giga	G
$\mathbf{10^{6}}$	mega	M
$\mathbf{10^{3}}$	kilo	k
10^{2}	etto	h
10^{-2}	centi	c
$\mathbf{10^{-3}}$	milli	m
10^{-6}	micro	
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

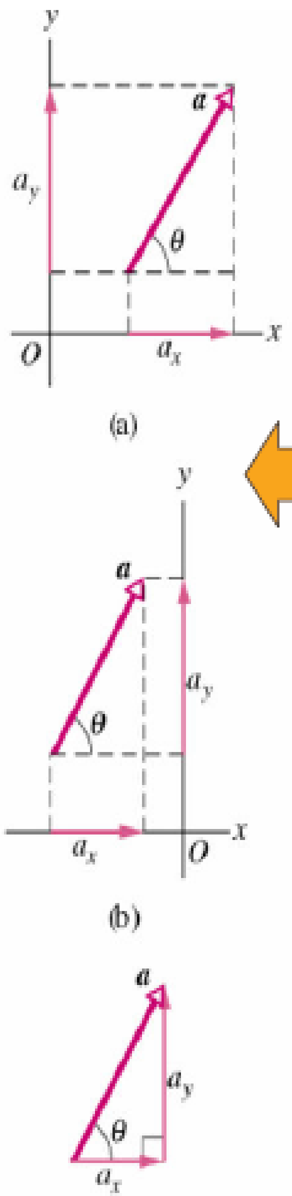
Equazioni dimensionali

Se abbiamo una equazione che lega una grandezza derivata ad una fondamentale e vogliamo determinare le unit di misura da usare si usano le **eq. Dimensionali**. La considerazione che si fa è che le equazioni della fisica stabiliscono relazioni tra **grandezze** per cui dal punto di vista delle unit di misura i 2 membri dell'equazione devono avere le **stesse unit di misura**.

Le equazioni dimensionali consentono **la verifica** della correttezza di una equazione che per esempio abbiamo ottenuto dopo una serie di passaggi: una anomalia nell'equazione dimensionale indica che un errore in qualche passaggio.

Esempio: abbiamo trovato l'equazione $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{gh}}{\mathbf{mt}}$ con g=9.8 m/s^2, h=metri e t=secondi e sapendo che **a** si esprime in m/s^2 dal confronto si ottiene: $[\mathbf{a}] = [\mathbf{g}][\mathbf{h}]/[\mathbf{m}][\mathbf{t}] \Rightarrow$ $[\mathbf{LT}^{-2}] = [\mathbf{LT}^{-2}][\mathbf{L}]/[\mathbf{M}][\mathbf{T}] \Rightarrow$ $\mathbf{ms^{-2} = ms^{-2}m/(kg\,s) =}$ $\mathbf{m^2s^{-2}kg^{-1}s^{-1} = m^2s^{-3}kg^{-1}}$ che è chiaramente incoerente.

2-Grandezze scalari e vettoriali



La ***posizione*** di un corpo in un SiRCO è definita da una terna di grandezze (x,y,z). Le grandezze che, come la posizione, hanno bisogno di 3 numeri per essere definite, sono chiamate ***vettori.***

In maniera analoga, un vettore può essere definito da (vedi esempio a lato):

- un modulo (o intensità
- dalla sua direzione
- da un verso

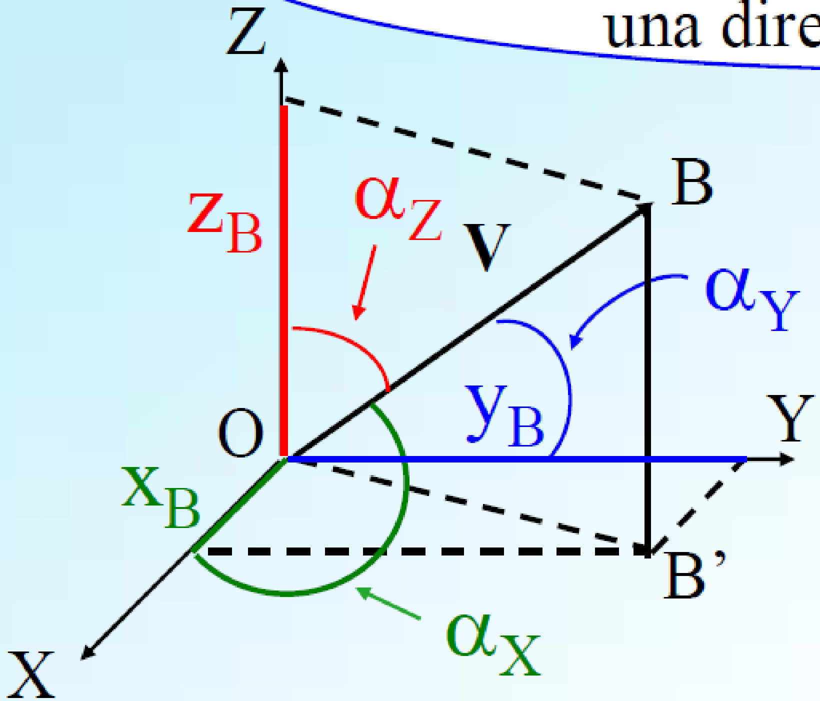
Una grandezza vettoriale viene sempre indicata in grassetto o con la freccia : $\mathbf{v}$, $\vec{v}$
Il modulo del vettore viene indicato senza freccia!

Il ***tempo*** è invece una grandezza *scalare:* si indica con il carattere normale: t

I VETTORI

grandezze scalari:
vengono definite dal loro valore numerico

grandezze vettoriali:
vengono assegnati, oltre al loro valore numerico, una direzione e un verso



modulo di **V** = lunghezza del segmento OB

direzione di **V** determinata da

$\cos \alpha_X$ $\cos \alpha_Y$ $\cos \alpha_Z$

V = OB

O (0,0,0) B (x_B, y_B, z_B)

$V_X = x_B$

$V_y = y_B$

$V_Z = z_B$

proiezioni di **OB** sui tre assi =

componenti di **V**

lungo i tre assi cartesiani

V (V_X, V_Y, V_Z)

Se il primo estremo di **V** non coincide con O

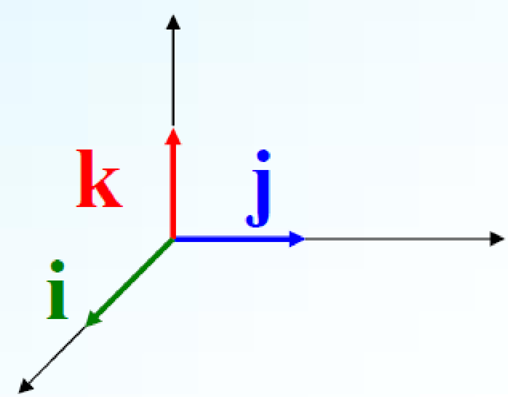
$\mathbf{V = AB}$

$A\ (x_A, y_A, z_A) \quad B\ (x_B, y_B, z_B)$

$V_X = x_B - x_A \quad V_y = y_B - y_A \quad V_Z = z_B - z_A$

Versore = vettore di lunghezza unitaria

i **j** **k** versori degli assi coordinati

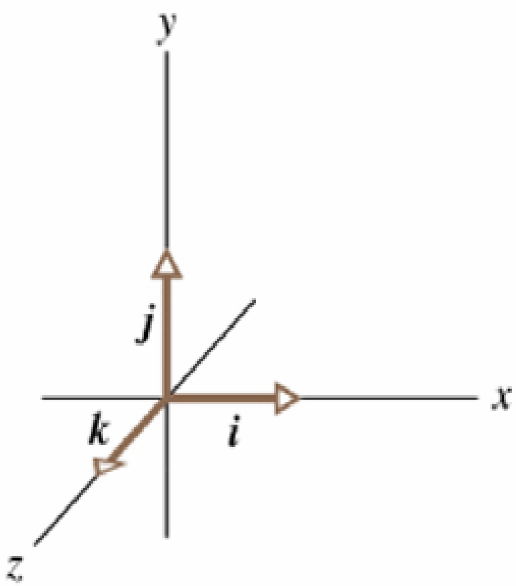


i (1,0,0)

j (0,1,0)

k (0,0,1)

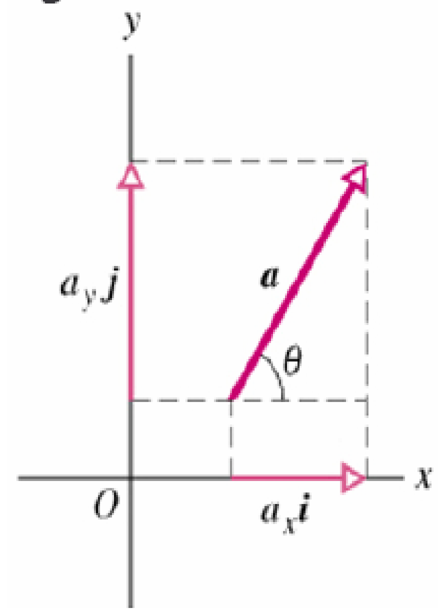
Versori



I versori unitari

Una volta scelto uno SiRCO, ciascun vettore spostamento può essere costruito con tre componenti sugli assi ortogonali:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$$
$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$



Esempio di scomposizione sulle componenti sugli assi x e y

Esercizio 2.3: mostrare che se $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$*, allora:*
$c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$, $c_z = a_z + b_z$

ALGEBRA VETTORIALE

PRODOTTO DI UN VETTORE **A** PER UNO SCALARE m

$\mathbf{B} = m\mathbf{A}$ vettore parallelo ad **A**

$|\mathbf{B}| = |m|\,|\mathbf{A}|$

verso di **B**

- concorde col verso di **A** se $m > 0$
- opposto al verso di **A** se $m < 0$

SOMMA DI DUE VETTORI **A** E **B**

$\mathbf{A}\ (A_X, A_Y, A_Z)$ $\mathbf{B}\ (B_X, B_Y, B_Z)$

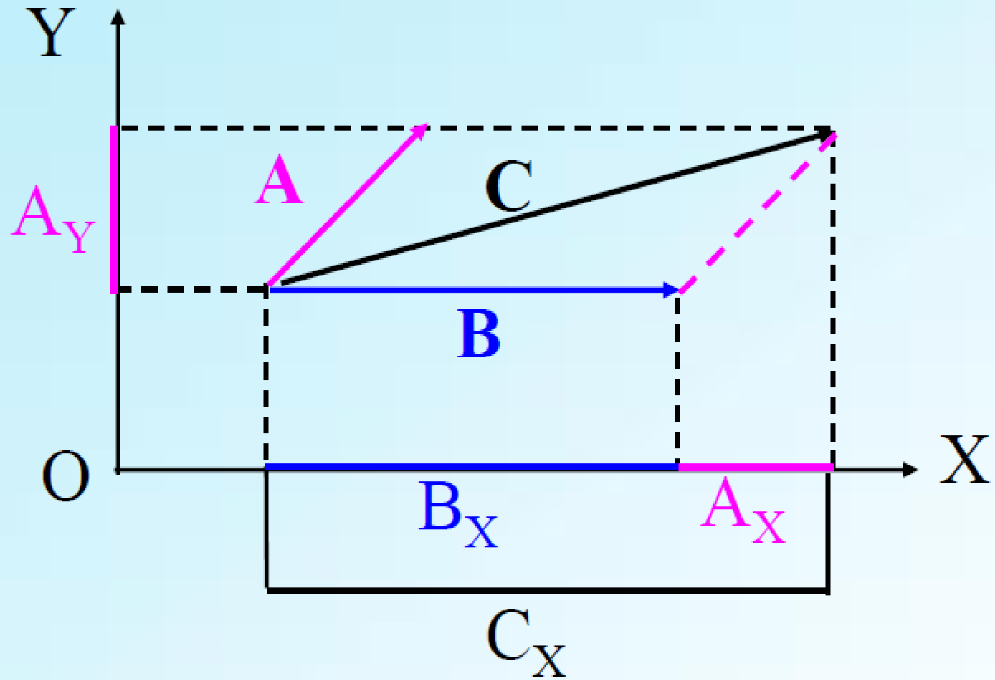
$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \qquad \mathbf{C}\ (C_X, C_Y, C_Z)}$

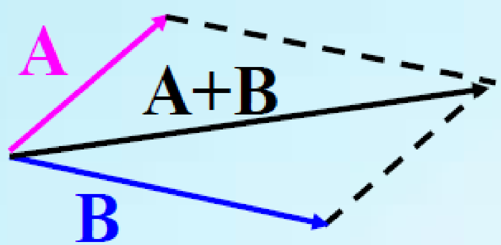
$$C_X = A_X + B_X$$

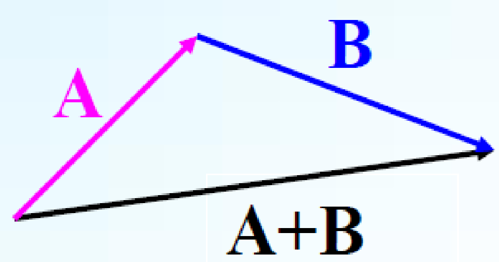
$$C_Y = A_Y + B_Y$$

$$C_Z = A_Z + B_Z$$

In un piano XY



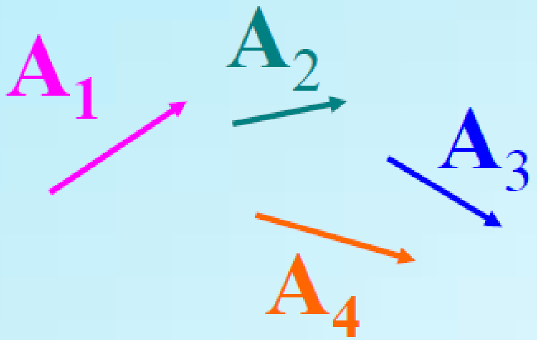


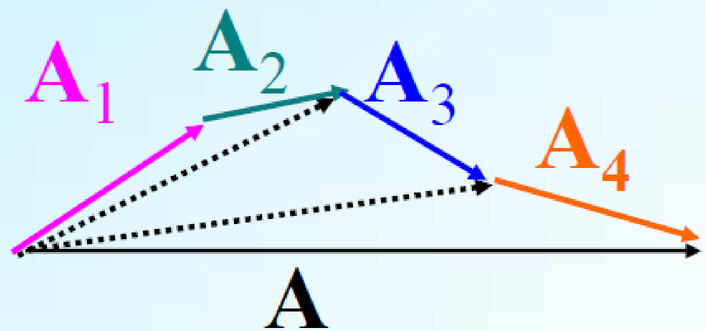


C vettore somma =
diagonale del parallelogramma
avente per lati i vettori **A** e **B**

SOMMA DI N VETTORI $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots \mathbf{A}_N$

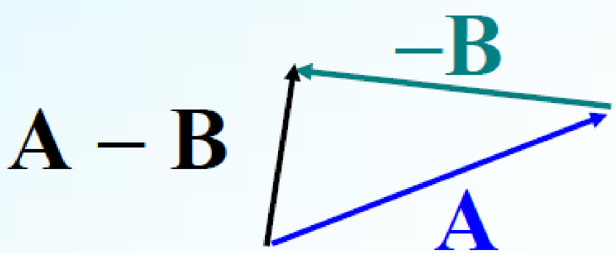
$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \ldots . \mathbf{A}_N$ vettore che congiunge il primo estremo di $\mathbf{A}_1$ con il secondo estremo di $\mathbf{A}_N$

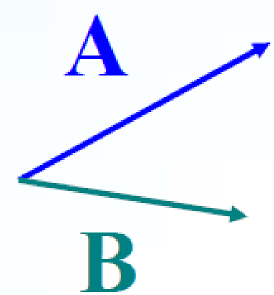


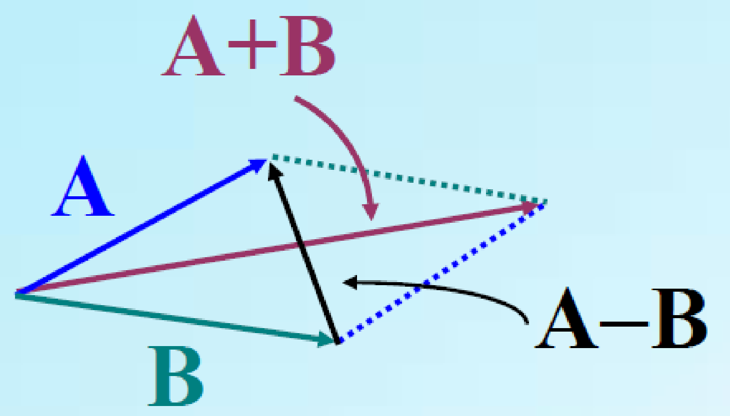


DIFFERENZA DI DUE VETTORI $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$:

somma dei vettori $\mathbf{A}$ e $-\mathbf{B}$



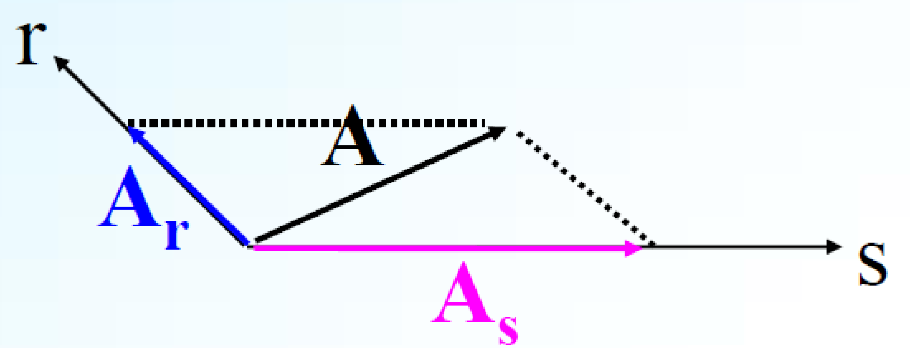




SCOMPOSIZIONE DI UN VETTORE **A**
LUNGO DUE DIREZIONI ORIENTATE r ed s:

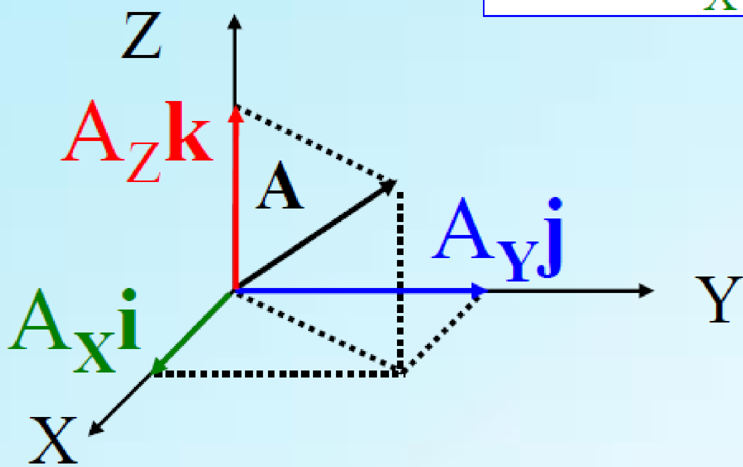
determinazione di due vettori paralleli a r ed s
la cui somma è **A**

$$\mathbf{A} = \mathbf{A_r} + \mathbf{A_s}$$

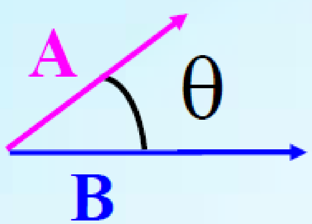


SCOMPOSIZIONE LUNGO GLI ASSI CARTESIANI ORTOGONALI

$$\mathbf{A} = A_X\,\mathbf{i} + A_Y\,\mathbf{j} + A_Z\,\mathbf{k}$$



PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI **A** e **B**



$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = A\,B\cos\theta$$

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = 0 \rightarrow \begin{cases} \mathbf{A} = 0 \\ \mathbf{B} = 0 \\ \mathbf{A} \perp \mathbf{B} \end{cases}$$

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{A} = A\,A\cos 0 = A^2$$

$$\mathbf{i} \bullet \mathbf{i} = 1 \qquad \mathbf{j} \bullet \mathbf{j} = 1 \qquad \mathbf{k} \bullet \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \bullet \mathbf{j} = 0 \qquad \mathbf{j} \bullet \mathbf{k} = 0 \qquad \mathbf{i} \bullet \mathbf{k} = 0$$

Proprietà del prodotto scalare:

proprietà commutativa

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \mathbf{B} \bullet \mathbf{A}$$

proprietà distributiva

$$\mathbf{A} \bullet (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \bullet \mathbf{B} + \mathbf{A} \bullet \mathbf{C}$$

In termini di componenti cartesiane

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = (A_X\,\mathbf{i} + A_Y\,\mathbf{j} + A_Z\,\mathbf{k}) \bullet$$

$$(B_X\,\mathbf{i} + B_Y\,\mathbf{j} + B_Z\,\mathbf{k}) =$$

$$A_X B_X + A_Y B_Y + A_Z B_Z$$

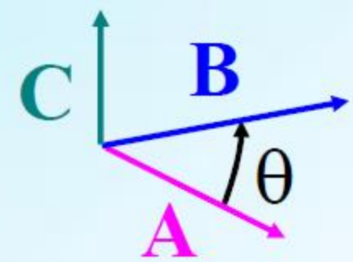
$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{A} = A^2 = A_X{}^2 + A_Y{}^2 + A_Z{}^2$$

PRODOTTO VETTORIALE DI DUE VETTORI $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}}$$

oppure

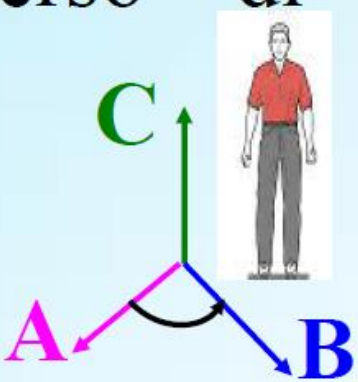
$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}}$$

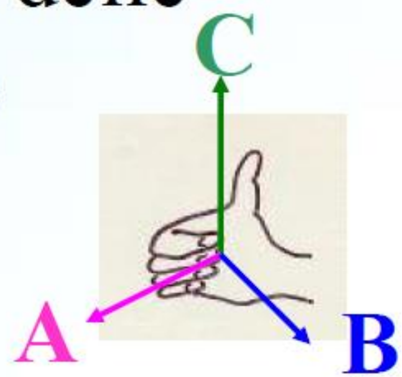


modulo di $\mathbf{C}$: $C = A\,B$ sen θ

direzione di $\mathbf{C}$: perpendicolare al piano definito da $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$

verso di $\mathbf{C}$: definito da una delle seguenti regole





Proprietà del prodotto vettoriale:

proprietà anticommutativa

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = -\,\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$$

proprietà distributiva

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{C}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0 \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} = -\,\mathbf{j} \times \mathbf{i}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} = -\,\mathbf{k} \times \mathbf{j}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} = -\,\mathbf{i} \times \mathbf{k}$$

In termini di componenti cartesiane

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_X\, \mathbf{i} + A_Y\, \mathbf{j} + A_Z\, \mathbf{k}) \times$$

$$(B_X\, \mathbf{i} + B_Y\, \mathbf{j} + B_Z\, \mathbf{k}) =$$

$$= A_X\, B_Y\, \mathbf{k} - A_X\, B_Z\, \mathbf{j} +$$

$$- A_y\, B_X\, \mathbf{k} + A_Y\, B_Z\, \mathbf{i} +$$

$$+ A_Z\, B_X\, \mathbf{j} - A_Z\, B_X\, \mathbf{i} =$$

$$= (A_Y B_Z - A_Z\, B_Y)\, \mathbf{i} + (A_Z\, B_X - A_X\, B_Z)\, \mathbf{j} +$$

$$+ (A_X\, B_Y - A_Y\, B_X)\, \mathbf{k}$$

Scrittura del prodotto vettoriale tramite le componenti

Si dimostra che il prodotto vettoriale ha componenti individuate risolvendo il seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

tenendo conto dei seguenti prodotti vettoriali:

$$\hat{\mathbf{i}} \wedge \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}},\ \hat{\mathbf{j}} \wedge \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}},\ \hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}.$$

DERIVATA DI UN VETTORE

A vettore

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad \text{vettore}$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{A}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t}$$

$$\frac{d(\mathbf{A}+\mathbf{B})}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$\frac{d(m\mathbf{A})}{dt} = m\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{A}\frac{dm}{dt}$$

Se $\quad m = \text{costante}$

$$\frac{d(m\mathbf{A})}{dt} = m\frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\bullet\mathbf{B} + \mathbf{A}\bullet\frac{d\mathbf{B}}{dt}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt}}$$

In termini di componenti cartesiane

$$\boxed{\mathbf{A} = A_X\,\mathbf{i} + A_Y\,\mathbf{j} + A_Z\,\mathbf{k}}$$

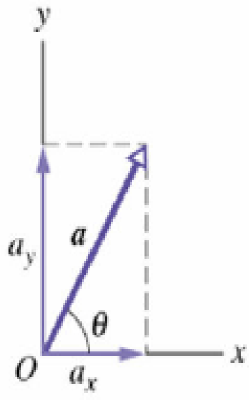
Se $\mathbf{i}$ $\mathbf{j}$ $\mathbf{k}$ costanti

$$\boxed{\frac{d\,\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_X}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_Y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_Z}{dt}\mathbf{k}}$$

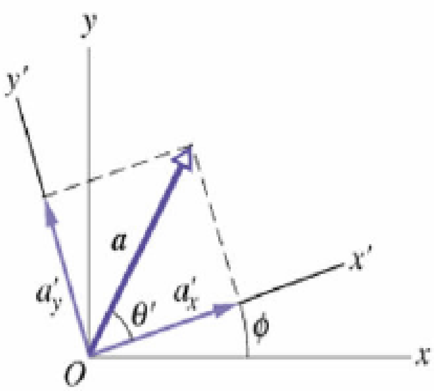
In generale

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d\,\mathbf{A}}{dt} &= \frac{dA_X}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_Y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_Z}{dt}\mathbf{k} + \\ &\quad + A_X\frac{d\,\mathbf{i}}{dt} + A_Y\frac{d\,\mathbf{j}}{dt} + A_Z\frac{d\,\mathbf{k}}{dt}\end{aligned}}$$

I vettori e le leggi della fisica



(a)



(b)

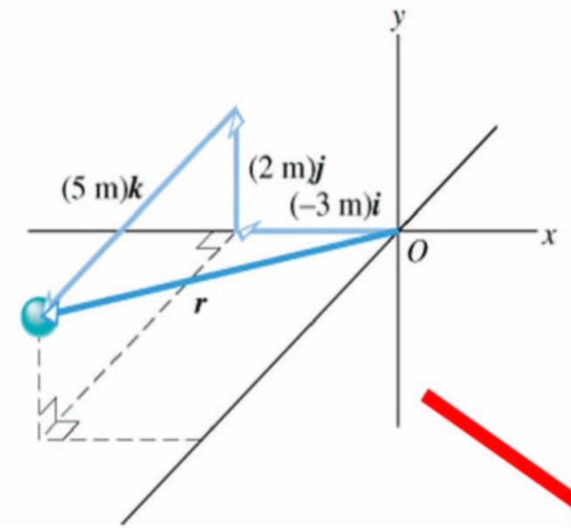
Supponiamo di avere due osservatori, ciascuno con il suo SiRCO. Nei due sistemi, i vettori **a** e **b** avranno differenti componenti; tuttavia, le operazioni di *somma*, *prodotto scalare* e *prodotto vettoriale* tra vettori rimangono immutate.

Ogni volta che ho espresso una legge in forma vettoriale, non ho bisogno di verificare se la legge resta immutata se io **traslo** (=sposto l'origine del SiRCO) o **ruoto** il SiRCO.

Esercizio 2.5: mostrare che se $\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$ allora $\mathbf{a} = (\mathbf{a}'_x + \mathbf{a}'_y)$
con: $\mathbf{a'_x = (a_x \cos\phi + a_y \sin\phi)}$ $\mathbf{a'_y = (a_x \sin\phi - a_y \cos\phi)}$

Esercizio 2.6: mostrare che se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
Allora è anche: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a'_x b'_x + a'_y b'_y + a'_z b'_z$

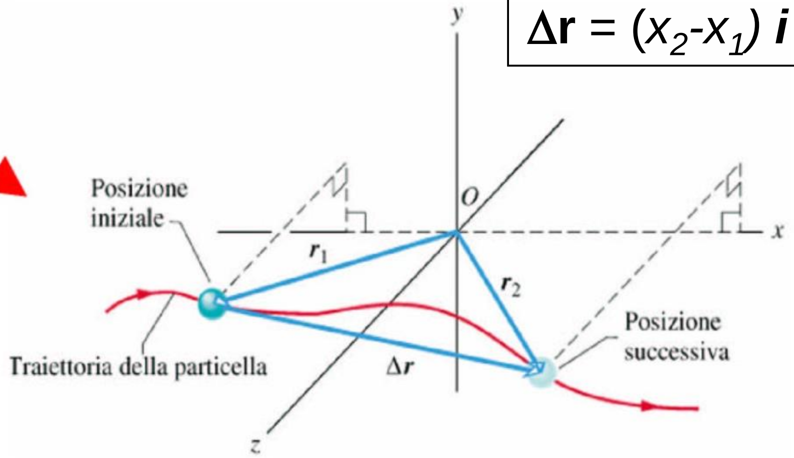
Cinematica del Punto



Un punto materiale è localizzato dal vettore posizione $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$

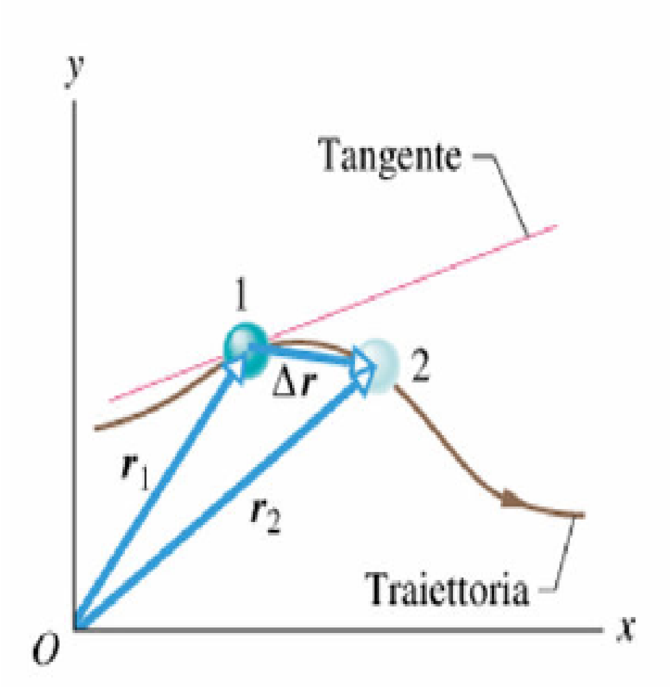
Una variazione di posizione si definisce spostamento e viene indicata da $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$

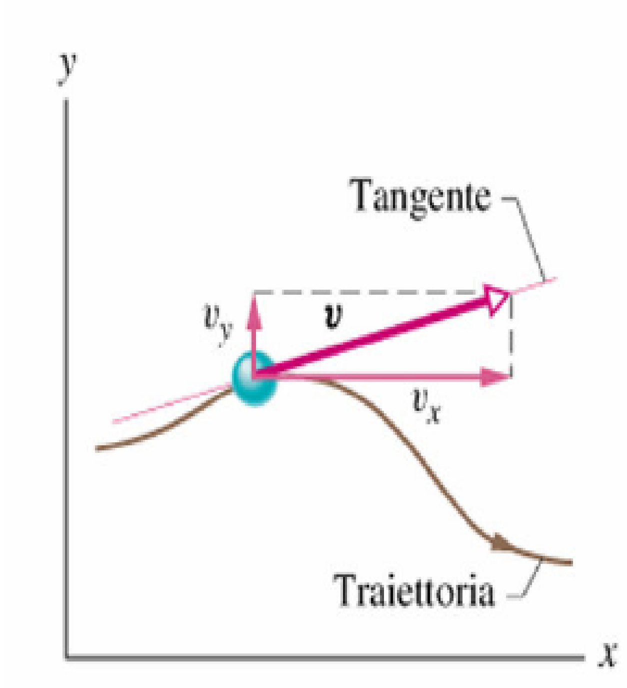
$$\Delta \mathbf{r} = (x_2 - x_1)\,\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\,\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\,\boldsymbol{k}$$



Si definisce l'insieme dei punti nello spazio toccati dal punto in istanti di tempo successivi ***traiettoria*** della particella.

Variazione della posizione





Si definisce velocità media il rapporto tra lo spostamento della particella e la durata Δt dell'intervallo in cui avviene.
Nel caso in cui l'intervallo di tempo sia infinitesimo (dt) , la direzione dello spostamento $\Delta r \rightarrow dr$ coincide con la **tangente** alla traiettoria.

Velocità

Si definisce velocità (o velocità istantanea) il rapporto: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

La velocità di una particella ha sempre la direzione della tangente alla curva che rappresenta la traiettoria.

Se la traiettoria è data in forma parametrica del tempo come:

$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$

(questa equazione si chiama legge oraria)

allora le componenti della velocita' sono:

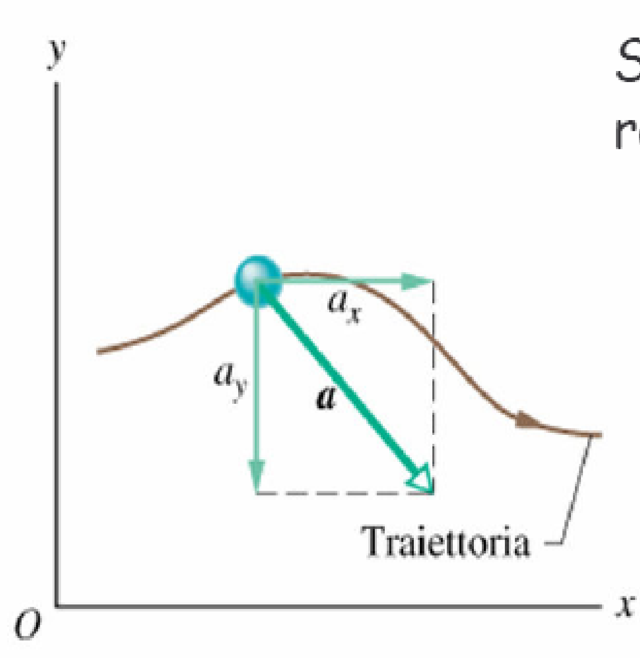
$$v_x = \frac{dx}{dt}; \qquad v_y = \frac{dy}{dt}; \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Esercizio 3.1. Calcolare le componenti della velocità se: $\mathbf{r} = kt\,\mathbf{i} - bt^2\,\mathbf{j}$.

Esercizio 3.2. Disegnate la ***traiettoria*** *della particella dell'es. 3.1* (k=4, b=1)

La velocità e' una grandezza le cui dimensioni sono [spazio]/[tempo].
Nel S.I. si misura in m/s

Accelerazione



Si definisce accelerazione di un corpo il rapporto:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

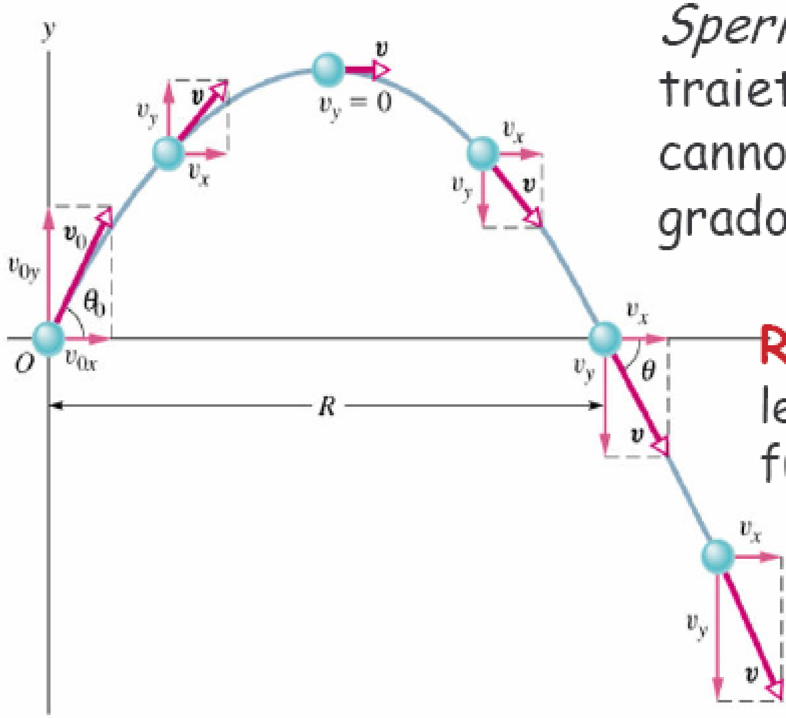
La accelerazione di una particella rappresenta la variazione di velocità al variare del tempo.

L'accelerazione e' una grandezza le cui dimensioni sono [spazio]/[tempo^2]. Nel S.I. si misura in m/s^2

Esercizio 3.2. Calcolare le componenti della accelerazione se: $\mathbf{r} = kt\,\mathbf{i} - bt^2\,\mathbf{j}$.

L'accelerazione è una grandezza molto importante. Mostreremo che il moto di un corpo (= legge oraria!) è noto se è nota l'accelerazione. In altri termini: conosci **a** per conoscere il moto!

Il problema diretto della cinematica: dalla traiettoria all'accelerazione



Sperimentalmente, è possibile conoscere la traiettoria di un oggetto lanciato da un cannone: $y=-\alpha x^2+\beta x$ (vedi figura). Siete in grado di ricavare velocità ed accelerazione?

Risposta: si. Occorre dapprima scrivere la legge oraria (parametrizzare le coordinate in funzione del tempo):

$$\begin{cases} x(t) = v_{ox}\, t \\ y(t) = \frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_{oy}\, t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

(sostituite per determinare v_{ox}, v_{oy}, g da α e β)

Troverete così che il moto lungo l'asse x avviene a velocità costante e senza accelerazione (moto rettilineo uniforme), mentre lungo l'asse delle y avviene con velocità che aumenta linearmente col tempo, ed accelerazione costante (moto uniformemente accelerato). *I due moti sono indipendenti l'uno dall'altro*

Una volta nota la traiettoria, si possono ricavare dalla definizione velocità ed accelerazione del corpo in movimento. Nel nostro caso:

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} = v_{xo}; \qquad a_x = \frac{dv_x(t)}{dt} = 0$$

$$v_y = \frac{dy(t)}{dt} = gt + v_{yo}; \qquad a_y = \frac{dv_y(t)}{dt} = g$$

Il problema inverso: dalla accelerazione alla traiettoria.

Il punto fondamentale sarà che avremo una legge che ci permetterà di conoscere l'accelerazione di un corpo note le sue **interazioni** con gli altri corpi. In tal caso, si potrà risolvere il problema inverso della cinematica: ossia potremo risalire dalle *interazioni* tra corpi al *moto* dei corpi stessi. Se conosciamo le interazioni, potremo lanciare satelliti, far muovere come vogliamo gli elettroni nei tubi catodici della TV…

Meccanica:

Modi e Cause del moto dei corpi

Cinematica:

Tipo di moto del Corpo s(t), v(t), a(t)

Dinamica:

Relazione tra cause ("Forze") e moto {F} ⇔ {s, v, a}

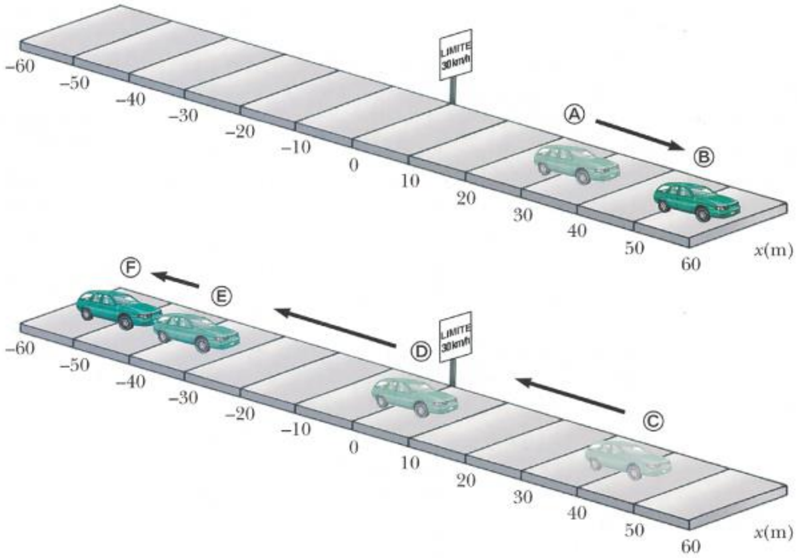
Se conosco il tipo di moto ⇒ Scopro quali forze lo provocano

Se conosco le forza agenti sul corpo ⇒ Derivo la "legge oraria"

Punto Materiale
Sistemi di punti materiali
Corpi Estesi (Rigidi)

⇔ *ENERGIA*

Moto rettilineo 1-dimensionale



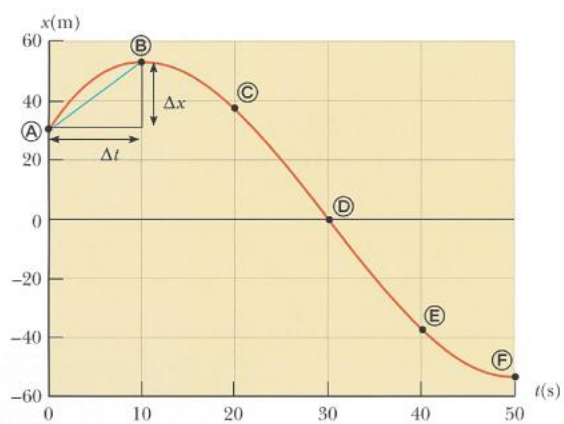
(a)

-Moto avviene lungo una linea retta

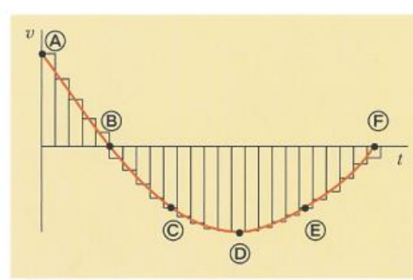
-Caratteristiche; x, v, a

-Oggetto puntiforme

Per il calcolo dello spostamento Δx occorre determinare le posizioni iniziali e finali, per cui



(b)



(c)

$$\Delta x = x_f - x_i$$

Lo spostamento è una grandezza vettoriale

$$\Delta\vec{x}$$

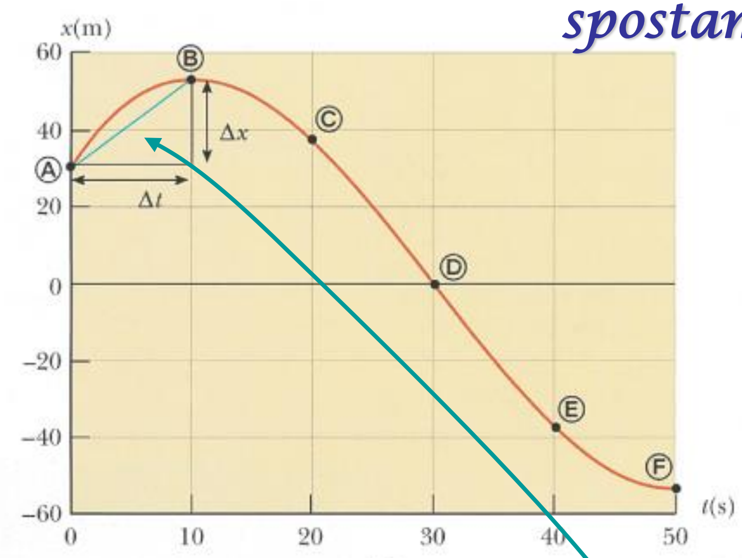
Direzione (La retta)

Verso (+ , -)

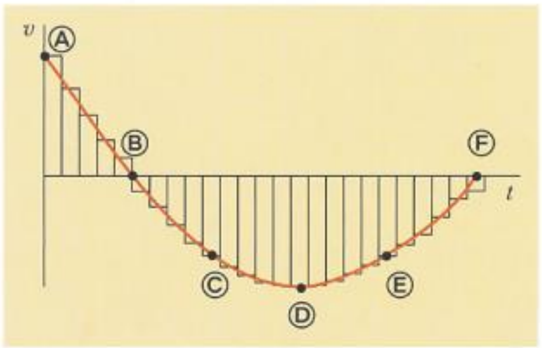
Modulo (Distanza)

Moto rettilineo 1-dimensionale: Velocità

Per il calcolo della velocità occorre analizzare l'andamento dello spostamento nel tempo x(t)



(b)



(c)

La Velocità è una grandezza vettoriale

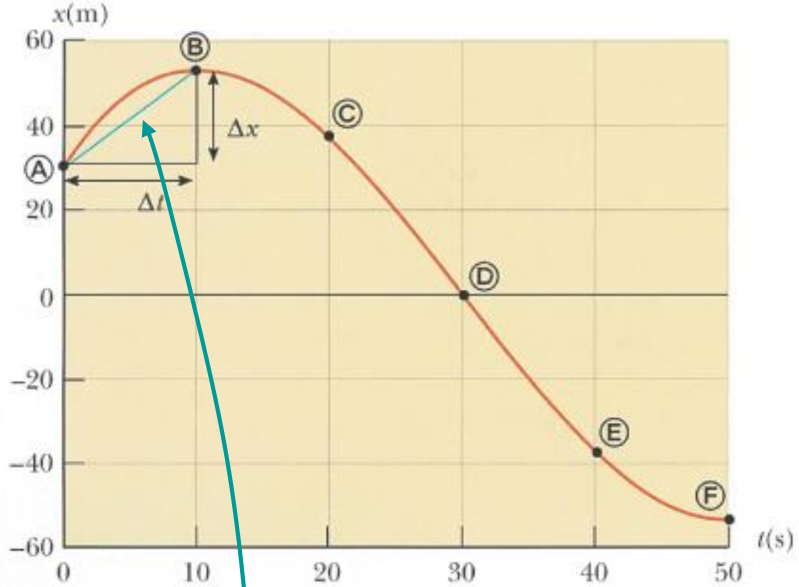
$$\vec{v} \begin{cases} \text{Direzione (La retta)} \\ \text{Verso (+ , -)} \\ \text{Modulo (rapidità di movimento)} \end{cases}$$

La velocità media si calcola come
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

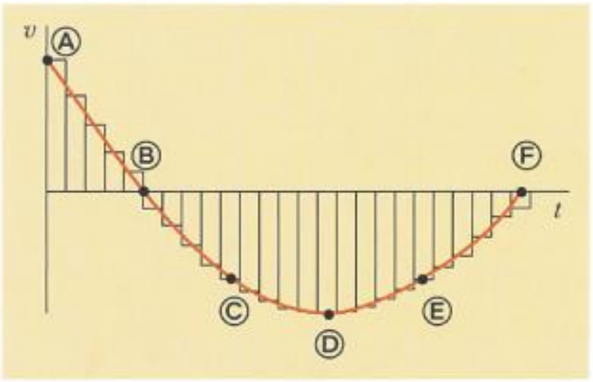
$$[v] = \frac{[l]}{[t]} \quad u.d.m. \quad \frac{m}{s}$$

Corrisponde alla pendenza del segmento AB

$$1\frac{km}{h} = \frac{1000m}{3600s} = \frac{1}{3.6}\frac{m}{s}$$



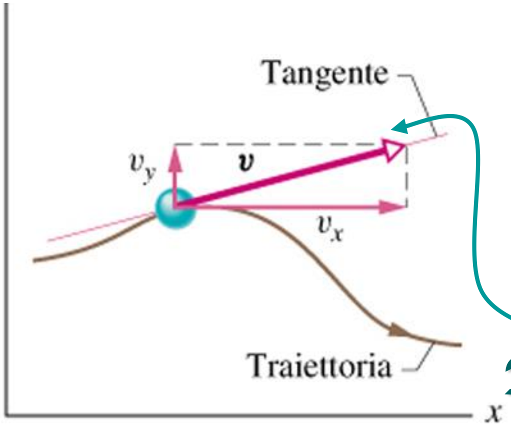
(b)



(c)

Nel tratto AB la velocità media è v > 0 ⟹ *Il corpo avanza*

Negli altri tratti la velocità media è v < 0 ⟹ *Il corpo retrocede*



Se facciamo tendere l'intervallo di tempo $\Delta t \to 0$

otteniamo la <u>*velocità istantanea*</u>

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}}$$

Dal punto di vista matematico ciò corrisponde a ricavare la pendenza della retta tangente alla traiettoria

Problema 2.3

Un punto materiale si muove sull'asse x secondo la legge:
$\mathrm{x} = 7.8 + 9.2\mathrm{t} - 2.1\mathrm{t}^3$
con t in secondi e x in metri. Qual'è la velocità al tempo t=3.5s?

La velocità è $\mathrm{v} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}$ per cui $\mathrm{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(7.8 + 9.2\mathrm{t} - 2.1\mathrm{t}^3) = 9.2 - 3 \cdot 2.1t^2 = 9.2 - 6.3t^2$

Per cui al tempo t=3.5s si ha **v=-68m/s**

Piccolo promemoria per le derivate fondamentali

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \neq 0)$$
$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$
$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

La Velocità istantanea è una grandezza vettoriale

$\vec{v}$ $\begin{cases} \text{Direzione (La retta)} \\ \text{Verso (avanza, retrocede)} \\ \text{Modulo (rapidità di movimento)} \\ \text{Pendenza tangente a } x(t) \end{cases}$

Ora se la velocità è costante ⇨ $\frac{dx}{dt} = k$ ⇨ $\int_{x_1}^{x} dx = \int_{t_1=0}^{t} dt \cdot k$

Ovvero: $x = k \cdot t + x_1$

Se la velocità varia nel tempo ⇨ *Accelerazione media*

$$\boxed{\overline{a} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}}$$

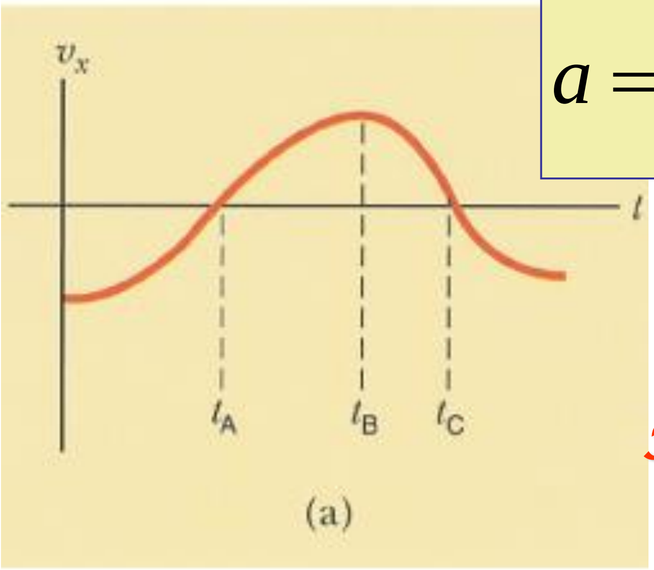
$[a] = \frac{[l]}{[t]^2}$ u.d.m. $\frac{m}{s^2}$

Se facciamo tendere l'intervallo di tempo

$\Delta t \to 0$ *otteniamo la* *<u>accelerazione istantanea</u>*

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}}$$

Dal punto di vista matematico ciò corrisponde a ricavare la pendenza della retta tangente alla curva v(t)



(a)

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$$

Dal punto di vista matematico ciò corrisponde a ricavare la pendenza della retta tangente alla curva v(t)

Ovviamente se v = costante $\Rightarrow$ $a = \bar{a} = 0$

MOTO RETTILINEO UNIFORME (M. R. U.)

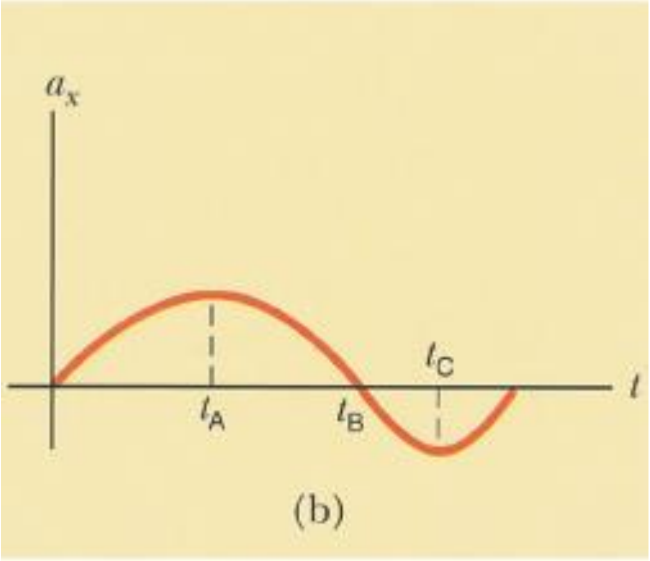
$$a = \bar{a} = costante$$

MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELLERATO (M. U. A.)

$$\frac{dv}{dt} = a \Rightarrow \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = a$$

$$\int_{v_0}^{v} v \cdot dv = \int_{x_0}^{x} a \cdot dx \Leftarrow v \cdot dv = a \cdot dx$$

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2a \cdot (x - x_0)}$$



(b)

MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELLERATO (M.U.A.)

1 $\boxed{a = \bar{a} = costante}$

$$\frac{dv}{dt} = a \Rightarrow dv = a \cdot dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a \cdot dt \Rightarrow \boxed{v = v_0 + a \cdot t}$$ 2

Ora ricordiamo che $v = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \cdot dt \Rightarrow dx = (v_0 + at) \cdot dt$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} (v_0 + at) \cdot dt$$

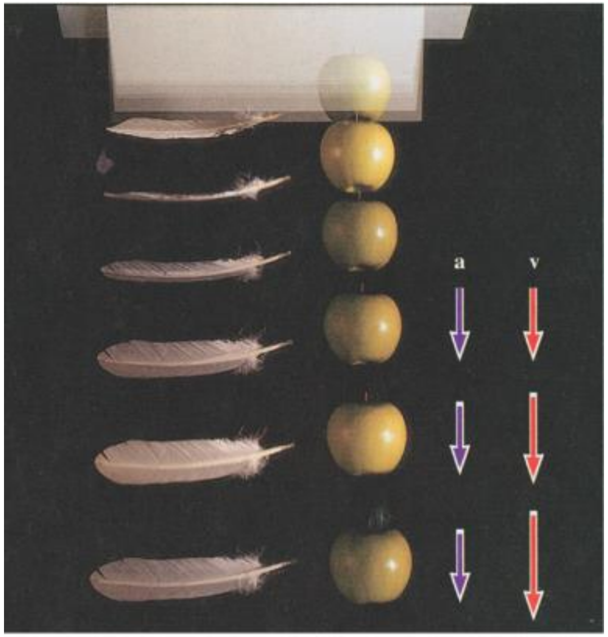
3 $$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$$

1 + 2 + 3 *Rappresentano le equazioni del M. U. A.*

---

se $a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ v = v_0 \\ x = x_0 + v_0 t \end{cases}$ *equazioni del M. R. U.*

CADUTA LIBERA DEI CORPI



Ogni corpo dotato di massa cade con una accelerazione a=-g con g=9.8 m/s²

y

$$\begin{cases} a = -g \\ v = v_0 - g \cdot t \\ y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Queste equazioni valgono per ogni corpo indipendentemente dalla sua forma e dal materiale di cui è composto, a patto di essere nelle vicinanze della superficie terrestre

Il vettore $\vec{g}$ è diretto verso il centro della Terra

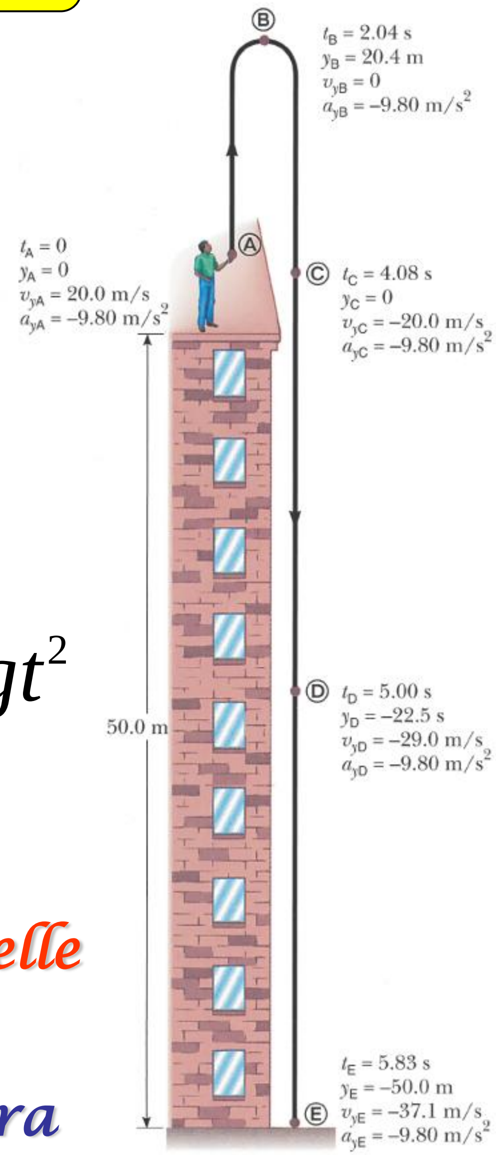
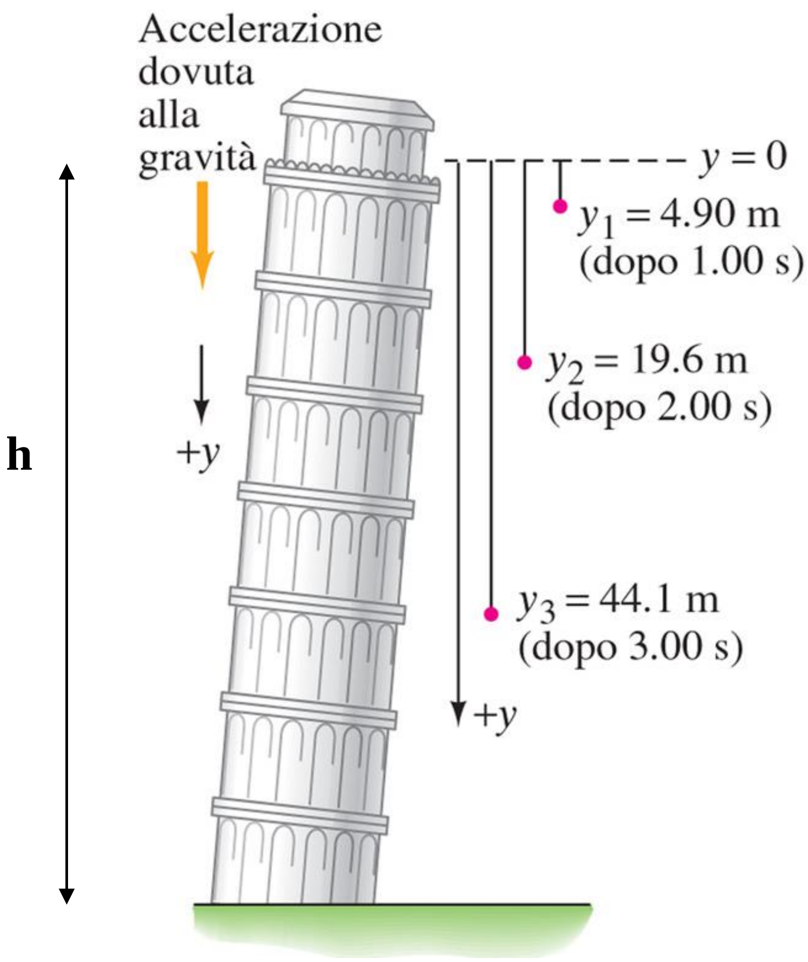


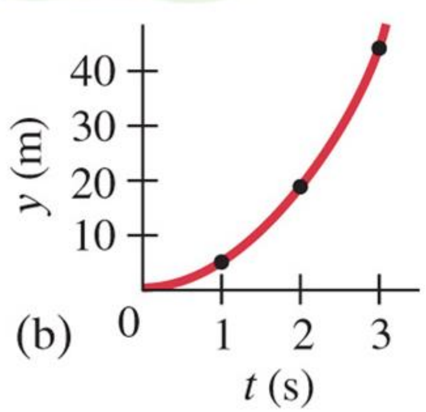
Figura 2.16

(Esempio 2.10) Posizione, velocità e accelerazione per vari istanti di tempo per una particella in caduta libera lanciata inizialmente verso l'alto con una velocità $v_y = 20.0$ m/s.

Applicazione: caduta libera (v_0=0)



$$y(t) = \frac{1}{2} g t^2$$



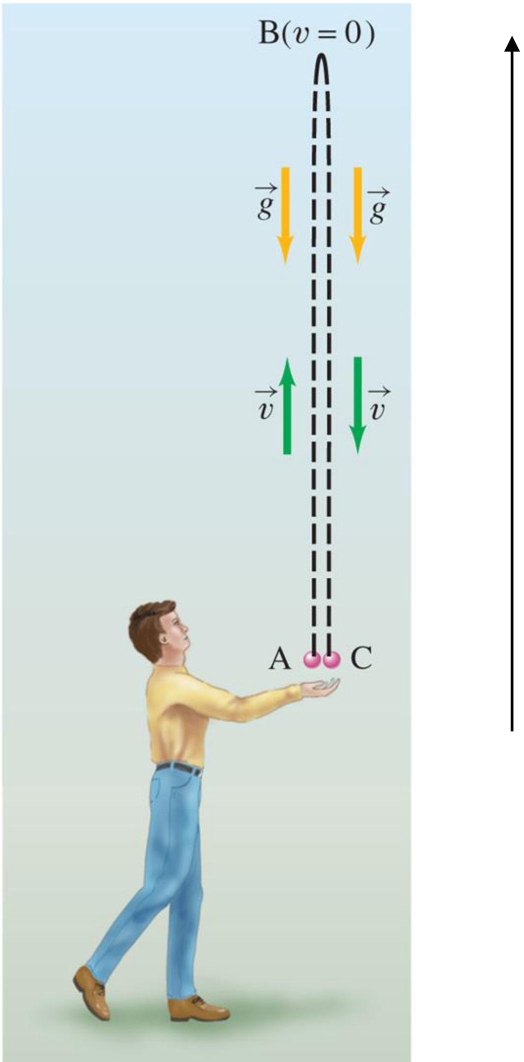
Tempo di caduta

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Velocità al suolo

$$v_c = \sqrt{2hg}$$

Applicazione: lancio verso l'alto



Supponiamo che una palla venga lanciata verso l'alto con modulo della velocità pari a 15m/s. Determinare:

a) il tempo che impiega per raggiungere la quota massima;

b) l'altezza massima;

c) gli istanti di tempo per i quali la palla passa ad 8m dalla posizione iniziale;

d) il tempo totale prima di tornare tra le mani del lanciatore;

e) la velocità in questo istante.

Moto Rettileo Unif. accelerato

TEORIA

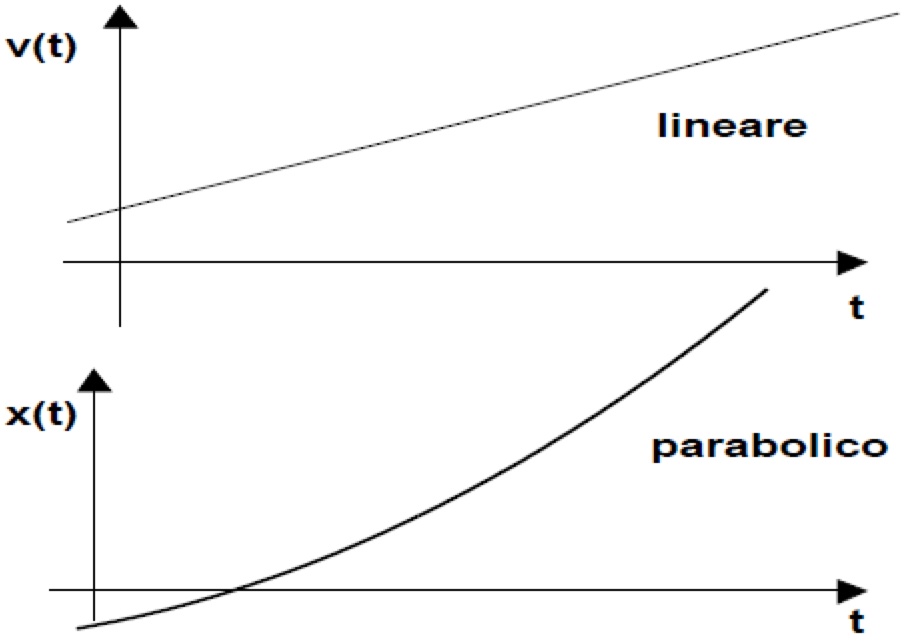
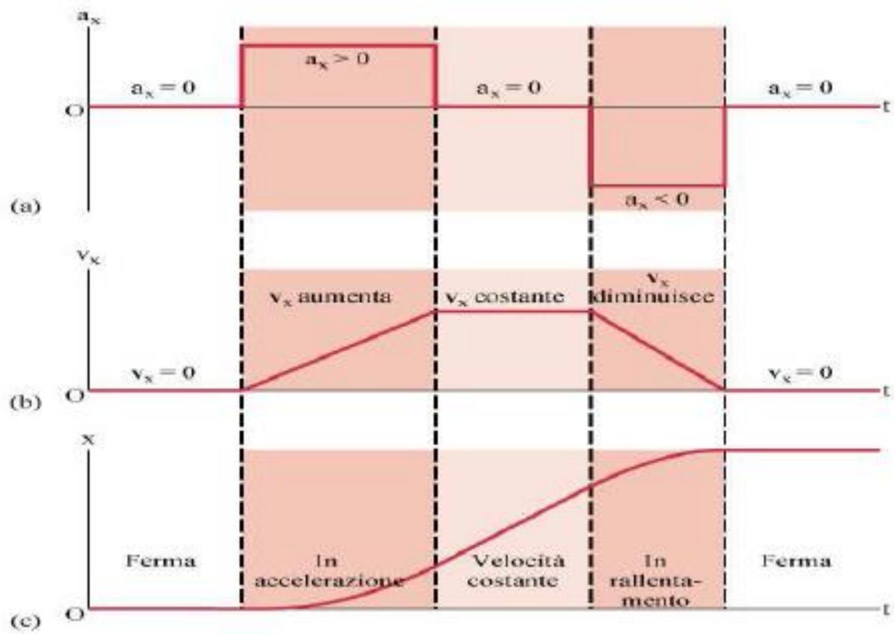
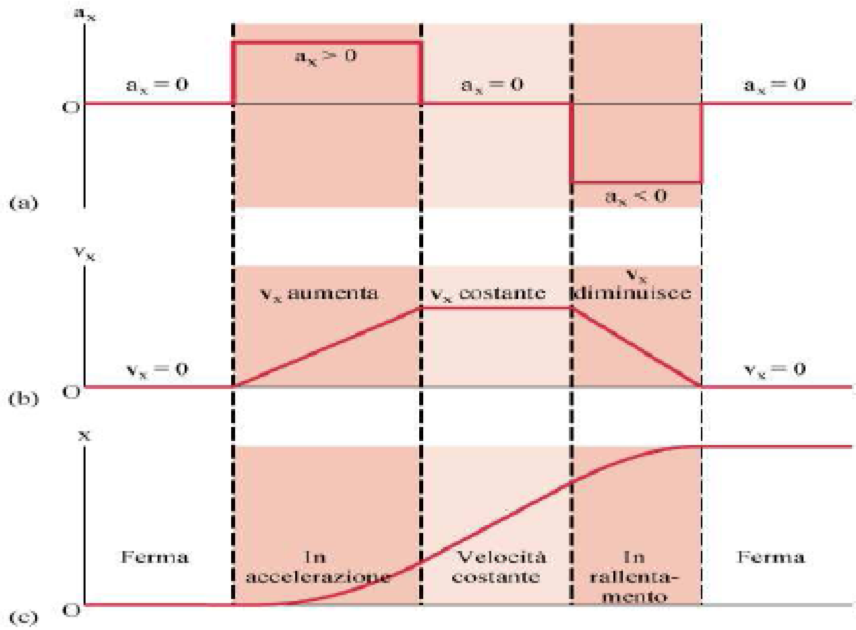


Figura: Grafici orari di velocità e posizione nel moto acc.

Come interpretare rapidamente il diagramma orario

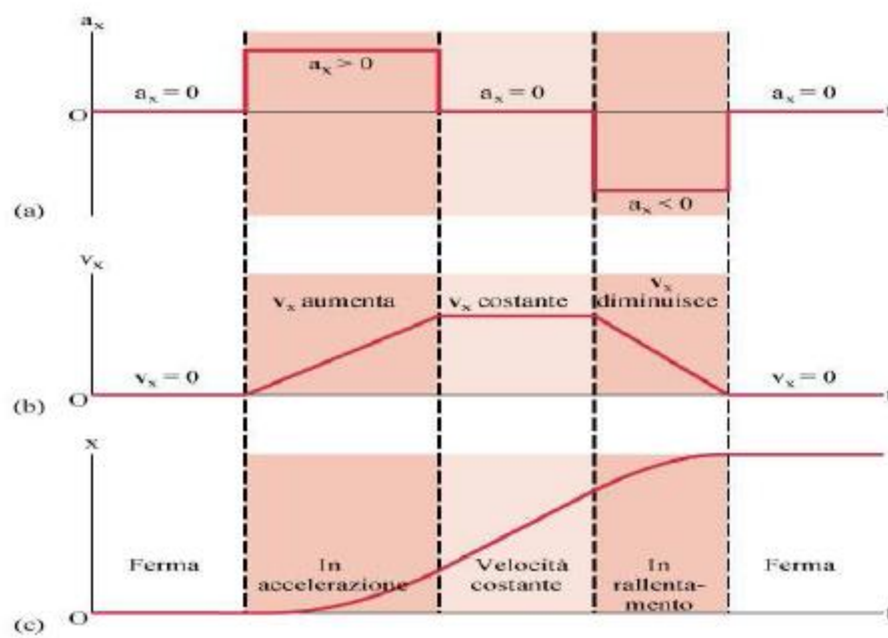
Guardando la figura in basso abbiamo un diagramma orario relativo al moto di una automobile.

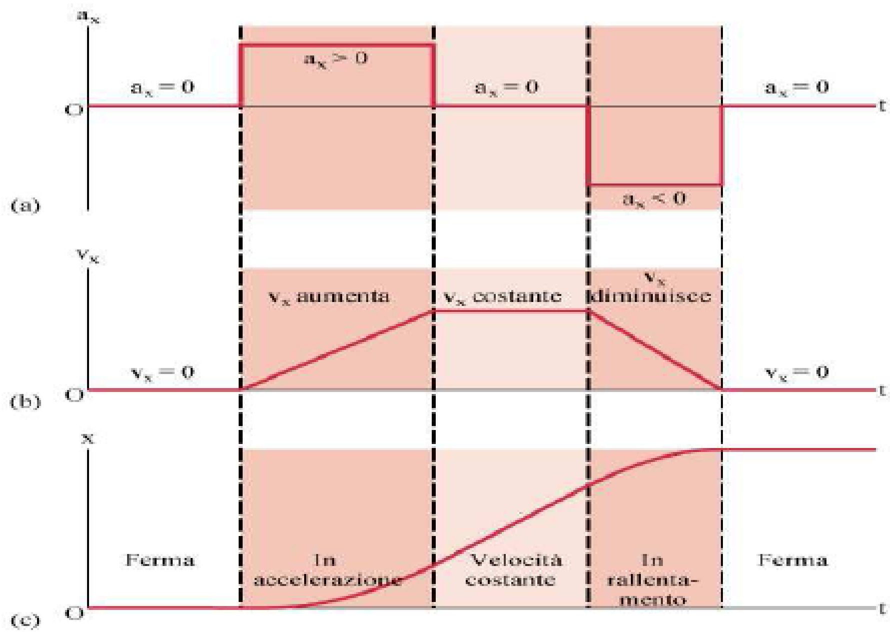




L'auto è inizialmente ferma poi accelera raggiungendo una certa velocità . Procede a velocità costante per un pò poi decelera ed infine si ferma. Infatti essendo la velocità la derivata prima della posizione **rappresenta anche la pendenza** del diagramma orario **(quindi la velocità è positiva se la funzione è crescente, negativa se decrescente)**.

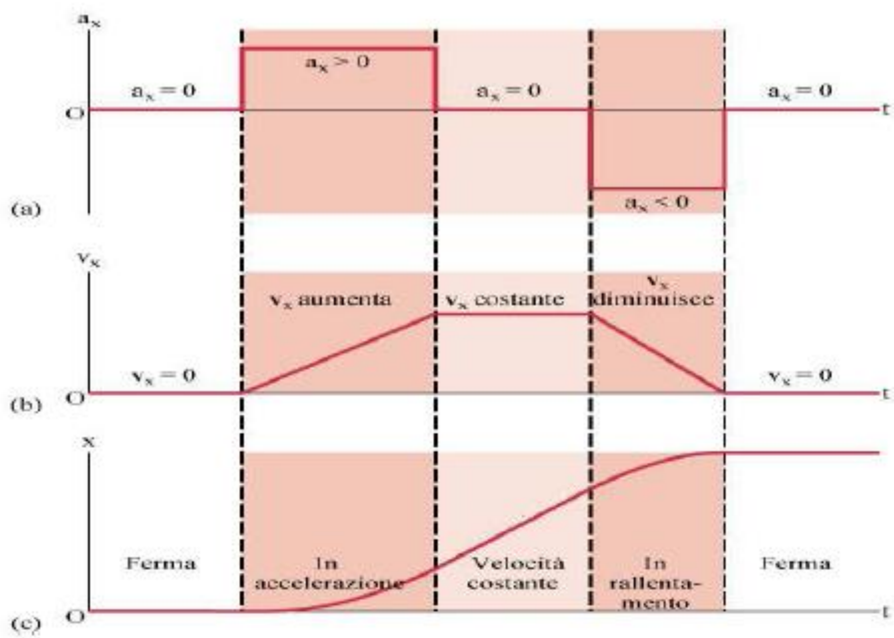
Nel grafico inferiore vediamo infatti che la pendenza è nulla nella prima regione (partendo da t=0), positiva dalla 2 alla 4 e nulla di nuovo nll'ultima.





Il grafico della velocità che ricaveremmo dal diagramma orario è nella figura b) intermedia. Sempre analizzando la c) possiamo anche dedurre informazioni sull'accelerazione: l'accelerazione è la derivata seconda (rispetto al tempo) e quindi per il diagramma orario rappresenta il tipo di concavità della curva: nella regione 1 abbiamo una retta quindi a=0, nella 2 una curva con concavità verso l'alto quindi $\mathbf{a} > \mathbf{0}$

Come interpretare rapidamente il diagramma orario



nella 3 di nuovo una retta **a=0**, nella **quarta** regione la concavità è verso il **basso** quindi **a** $<$ **0** ed infine l'ultima regione di nuovo a=0.