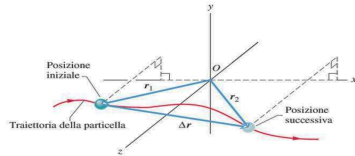


## 1 Cap 2- Moti nello spazio

Un punto nello spazio si muove in generale descrivendo una curva che può essere in un piano come nello spazio. Il punto materiale P può essere seguito considerando il **vettore posizione** o **raggio vettore** che congiunge l'origine con il punto P.  $\vec{r}(t) = \vec{OP} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$  (ovvero  $\vec{r}(t) = \vec{OP} = x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y + z(t)\hat{u}_z$ ) dove  $x\hat{i}$ ,  $y\hat{j}$ ,  $z\hat{k}$  ( $x\hat{u}_x$ ,  $y\hat{u}_y$ ,  $z\hat{u}_z$ ) sono le componenti di  $\vec{r}$  lungo gli assi cartesiani e (x,y,z) sono le coordinate di P rispetto l'origine. Quando un corpo si muove il suo vettore posizione si sposta ad esempio, come in figura, all'istante  $t_1$  il vettore posizione è  $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$  e all'istante  $t_2$  sarà  $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$



di conseguenza il vettore spostamento è  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  indicato in figura (RIVEDERE regola **parallelogramma**) che in termini delle componenti diventa:  $\Delta\vec{r} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}) = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$  che possiamo anche scrivere in modo sintetico:  $\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k} = \Delta x\hat{u}_x + \Delta y\hat{u}_y + \Delta z\hat{u}_z$  (Lo spostamento nello spazio si ottiene sommando vettorialmente gli spostamenti sui 3 assi come se fossero indipendenti)

## 2 Velocità media ed istantanea

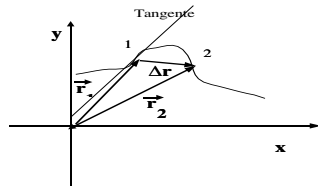
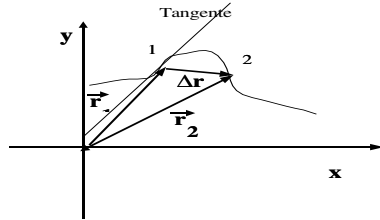
La definizione non cambia rispetto al capitolo precedente solo che come appena detto vanno indicate le operazioni **vettorialmente**:  $\mathbf{v}_M = \bar{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$  è la velocità media che possiamo scrivere nella forma  $\mathbf{v}_M = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{u}_x + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{u}_y + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{u}_z$  e quella istantanea è definita come

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Ma come definiamo la derivata di un vettore in generale???

Osserviamo tramite la figura che al tendere dell'intervallo  $\Delta t \rightarrow 0$

si ha che la il punto 2 si avvicina a 1 e  $\Delta\vec{r}$  tende a coincidere con la direzione della tangente alla **traiettoria** ne concludiamo che **la velocità**



**istantanea è un vettore che è sempre tangente alla traiettoria del punto materiale, indipendentemente dalla scelta del sistema di riferimento.** Di conseguenza si può scrivere la velocità istantanea in coordinate **intrinseche** come  $\vec{v} = v\hat{u}_t$ . Dalla precedente equazione abbiamo anche che

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \\ &= \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}\end{aligned}$$

scomponendo il vettore  $v$  inoltre possiamo sempre dire che

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} = v_x\hat{u}_x + v_y\hat{u}_y + v_z\hat{u}_z$$

Per cui si deve avere che

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{dx}{dt} \\v_y &= \frac{dy}{dt} \\v_z &= \frac{dz}{dt}\end{aligned}$$

Le componenti **cartesiane** del vettore velocità si ottengono derivando rispetto al tempo le coordinate del punto

## Parte I part II

### 3 Appendice C.4-Derivata di un vettore

#### Derivata di un vettore

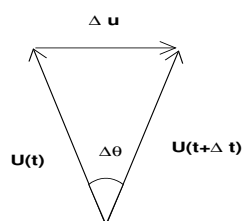
Per le derivate di un vettore teniamo conto che valgono le usuali regole di derivazione. Calcoliamo la derivata di un vettore partendo dal caso della derivata di  $\vec{a}$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}$$

Ora possiamo rappresentare il vettore secondo un sistema di assi cartesiani  $\vec{a} = a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y + a_z \hat{u}_z$  e nell'ipotesi che gli assi sono **fissi** allora la derivata di partenza diventa  $\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d(a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y + a_z \hat{u}_z)}{dt} = \frac{da_x}{dt} \hat{u}_x + \frac{da_y}{dt} \hat{u}_y + \frac{da_z}{dt} \hat{u}_z$  Che coincide con l'espressione ricavata prima, nel caso in cui come vettore  $\vec{a}$  si utilizzi il vettore posizione  $\vec{r}$

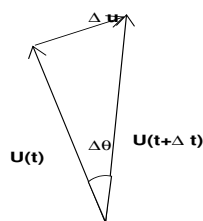
#### Derivata di un versore $u(t)$

Il versore è un vettore di modulo unitario, quindi il suo modulo non varia nel tempo. Vediamo come si deriva un versore quando la sua direzione cambia nel tempo. Ci aspettiamo che la derivata darà luogo sempre ad un vettore. L'esempio di seguito ci aiuterà a capire che direzione ha



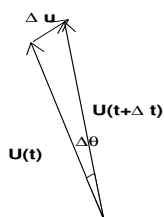
la derivata del versore.

con  $|\Delta \hat{u}| =$



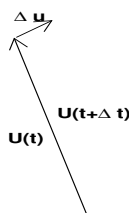
$$R\Delta\theta = |\hat{u}(t)|\Delta\theta$$

con  $|\Delta \hat{u}| = R\Delta\theta =$



$$|\hat{u}(t)|\Delta\theta$$

con  $|\Delta \hat{u}| = R\Delta\theta = |\hat{u}(t)|\Delta\theta$



La regola del parallelogramma ci suggerisce che la differenza  $\Delta \hat{u} = \hat{u}(t + \Delta t) - \hat{u}(t)$  segue la congiungente tra  $\hat{u}(t)$  e  $\hat{u}(t + \Delta t)$  per cui  $|d\hat{u}| = |\hat{u}(t)|d\theta = d\theta$  e direzione perpendicolare a  $\hat{u}(t)$  che possiamo anche scrivere come  $d\hat{u} = d\theta \hat{u}_N$  e  $\hat{u}_N$  è un versore perpendicolare a  $\hat{u}$ . Di conseguenza la derivata sarà  $\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_N$ . **La derivata di un versore è un vettore perpendicolare al versore stesso,**

di modulo  $\frac{d\theta}{dt}$  e quindi in genere esso non è un versore. Inoltre se definiamo la quantità  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  e diamo direzione perpendicolare al piano in cui sta ruotando il vettore  $\hat{\mathbf{u}}_t$  e verso secondo la rotazione come indicata dalla mano destra, abbiamo che si può scrivere  $\frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{\mathbf{u}}$  che troveremo utile ad utilizzarsi nei moti circolari.

## Parte II part III

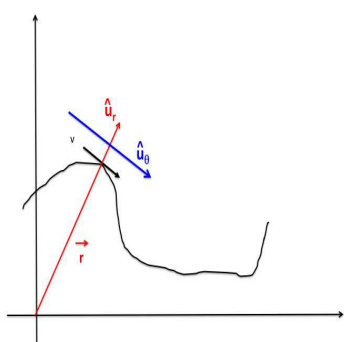
### Derivata di un vettore (scrittura intrinseca)

Se rappresentiamo un vettore nella sua forma indipendente dai sistemi di riferimento cioè  $\vec{v} = v\hat{\mathbf{u}}$  possiamo ricavare la derivata del vettore utilizzando quando appena ricavo:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{u}} + v\frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} \quad \text{quindi} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{u}} + v\frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{u}}_N$$



### Componenti polari della velocità



Introducendo dei versori  $\vec{\mathbf{u}}_r$  e  $\vec{\mathbf{u}}_\theta$  con direzione radiale (verso il centro di curvatura) e perpendicolare al primo l'altro (coordinate polari), la velocità può scomporsi così :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{\mathbf{u}}_r)}{dt} = \\ &= \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{u}}_r + r\frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} = \\ &= \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{u}}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{u}}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta \end{aligned}$$

La componente radiale  $\vec{v}_r$  dipende dalla variazione del **modulo della**

**velocità** mentre la componente  $\vec{v}_\theta$  tangenziale dipende dalla **variazione della direzione del vettore velocità**.

## Parte III part IV

### 4 Problema 4.2

Un punto materiale si muove in modo che le sue coordinate variano nel tempo secondo le espressioni:

$$\begin{aligned}x &= 0.3t^2 + 7.2t + 28 \\y &= 0.22t^2 - 9.1t + 30\end{aligned}$$

Le unità di misura sono m e s. Determinare la velocità del punto (modulo direzione e verso) al tempo  $t=15$  s.

**Soluzione:**

$v_x = \frac{dx}{dt} = 0.3 \cdot 2 \cdot t + 7.2$   $v_y = 0.22 \cdot 2 \cdot t - 9.1$  e  $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$  Quindi per  $t=15$ s si ha  $\vec{v} = (0.6 \cdot 15 + 7.2) \hat{i} + (0.44 \cdot 15 - 9.1) \hat{j} = 16.2 \hat{i} - 2.5 \hat{j}$  il modulo di  $v$  è  $v = \sqrt{16.2^2 + 2.5^2} = 16.39$  m/s mentre l'angolo con l'asse  $x$  del vettore  $v$  è

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-2.5}{16.2} \Rightarrow \theta = -8.77^\circ$$

## 5 2.2 - Accelerazione istantanea

L'accelerazione **media** è definita come  $\mathbf{a}_M = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$  e quella istantanea di conseguenza è

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

le cui componenti saranno quindi  $a_x = \frac{dv_x}{dt}$   $a_y = \frac{dv_y}{dt}$  e  $a_z = \frac{dv_z}{dt}$  per cui  $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$

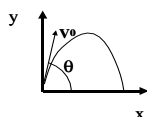
Quindi il vantaggio nell'uso delle componenti è quello che per stabilire il moto considerato **basta considerare** il “moto delle singole componenti” **trattate indipendentemente l'una dall'altra**, di conseguenza ogni componente si tratta come nella **cinematica 1D** ed il moto risultante è dato dalla composizione dei moti delle varie componenti.

**Esempio:**

1.  $\vec{a} = 2\hat{i} \Rightarrow$  il moto è **accelerato** sull'asse x e il moto è **rettilineo uniforme** sugli altri assi
2.  $\vec{a} = \text{costante} \Rightarrow \vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} = \overrightarrow{\text{costante}}$  e affinché un vettore sia costante lo devono essere tutte le sue componenti quindi  $a_x = \text{costante}$   $a_y = \text{costante}$   $a_z = \text{costante}$  ovvero **su ogni asse c'è un moto uniformemente accelerato.**

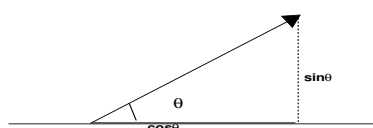
## Parte IV part V

### 6 2.4-2.5 - Moto del proiettile



È il moto di un punto materiale in caduta libera e con una velocità iniziale  $\vec{v}_0$  qualunque. Il punto materiale in queste condizioni è detto **proiettile**. L'accelerazione è quella di gravità diretta verso il basso. A differenza

al moto 1D della caduta libera, **velocità iniziale ed accelerazione** non sono tra loro **paralleli** ed il moto di conseguenza avviene nel piano definito da questi due vettori (moto 2d). Se usiamo il s.rif. in figura si ha:  $\vec{a} = -g\hat{j}$  e  $\vec{v}_0 = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$  Come si procede?  $\Rightarrow$  Si analizzano **separatamente i moti sugli assi cartesiani** su ognuno dei quali si considera la cinematica (1d) indipendentemente dallo stato di moto sugli altri assi:



$$\text{Asse x} \left\{ \begin{array}{l} v_{0x} = v_0 \cos \theta \\ a_x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{moto rett. uniforme}$$

$$\text{Asse y} \left\{ \begin{array}{l} v_{0y} = v_0 \sin \theta \\ a_y = -g \end{array} \right. \Rightarrow \text{moto uniform. acc.}$$

Avendo indicato con  $\theta$  l'angolo che il vettore velocità  $\vec{v}_0$  forma con l'asse delle x. Pertanto il moto è rettilineo uniforme sull'asse x ( $a=0$  e  $v_x=\text{costante}$ ) ed uniformemente accelerato sull'asse y di conseguenza valgono le seguenti equazioni:

$$\text{Asse x} \left\{ \begin{array}{l} a_x = 0 \\ v_x = v_{0x} \quad (1) \\ x = x_0 + v_{0x}t \quad (2) \end{array} \right\} \Leftarrow (\text{moto rett.uni.f.})$$

$$\text{Asse y} \left\{ \begin{array}{l} a_y = -g \\ v_y = v_{0y} - gt \quad (3) \\ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (4) \end{array} \right\} \Leftarrow (\text{moto unif.acc.})$$



Da questo sistema si può ricavare tutto l'occorrente per determinare i parametri del moto e la traiettoria seguita. Per la traiettoria ad esempio bisogna eliminare la variabile "t" tra la (2) e la (4)

## Parte V

### Traiettoria moto proiettile

#### Traiettoria moto proiettile

sostituendo  $v_{0x} = v_0 \cos \theta$  la (2) si riscrive come  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 \cos \theta \cdot \mathbf{t}$  da cui  $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{v_0 \cos \theta}$  che possiamo adesso sostituire nella (4):  $\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = v_0 \sin \theta \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{v_0 \cos \theta}\right) - \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{v_0 \cos \theta}\right)^2$  che infine riscriviamo come (quando  $x_0 = 0$ ):

$$y = y_0 + \tan \theta \cdot x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta)^2}$$

che è l'equazione di una parabola. Pertanto la **traiettoria nel moto del proiettile è una parabola.**

#### calcolo velocità nel moto del proiettile

Se invece occorre conoscere le due componenti della velocità in funzione delle posizioni dobbiamo usare i due sistemi separatamente ed eliminando ancora il tempo t. Il moto orizzontale continua ad essere **rettilineo uniforme** e quindi la comp.x è a velocità costante  $v_0 \cos \theta$ . Il moto verticale è invece uniform. accelerato. Ricavando il tempo dalla (3) e inserendola nella (4) si ottiene:  $v_y - v_0 \sin \theta = -gt \Rightarrow \mathbf{t} = -\frac{v_y - v_0 \sin \theta}{g}$  di conseguenza la (4) diventa

$$v_y^2 = (v_0 \sin \theta)^2 - 2g(y - y_0)$$

che si può usare per trovare la velocità **comp. y** in funzione dell'altezza. Dopo di che ci calcoliamo  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

#### Altezza massima del proiettile

In particolare la relazione appena trovata la usiamo per trovare la **Massima altezza raggiunta**: il proiettile sale fintanto che la sua componente y della velocità è **positiva**, quando cambia segno il moto sull'asse y si inverte ed il proiettile ricomincia a cadere. La massima altezza si trova allora richiedendo che  $v_y = 0$  ovvero che  $(v_0 \sin \theta)^2 - 2g(y - y_0) = 0$  da questa quindi si ha che

$$y_{\max} = y_0 + \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g}$$

## 7 gittata

Si definisce **gittata orizzontale R** il percorso in **orizzontale** necessario affinché il proiettile ripassi per la stessa quota **iniziale** ovvero  $y = y_0$ . Quindi poniamo nelle equazioni  $x - x_0 = R$  e  $y - y_0 = 0$  e otteniamo

$$\begin{cases} \mathbf{R} = (v_0 \cos \theta)t \\ \mathbf{0} = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

ed eliminando il tempo  $t$  tra queste due equazioni otteniamo

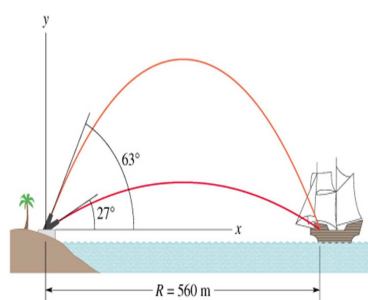
$$\mathbf{R} = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta)$$

Da questa notiamo che la gittata è massima quando l'angolo di lancio (alzo) è pari a  $45^\circ$  (ovvero  $\sin(2\theta) = 1$ ) Attenzione **non si deve** usare questo risultato quando  $y \neq y_0$

## Parte VI

### 8 Problema svolto 4.7

Una nave è posta a 560 m dal forte che difende il porto di un'isola. Il forte è dotato di un cannone che lancia proiettili alla velocità  $v_0 = 82\text{m/s}$ . Con quale angolo di elevazione (o alzo) si devono lanciare i proiettili per colpire la nave?



Il problema si risolve in 1 passaggio se applichiamo la formula della gittata:  $\mathbf{R} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta)$  risolvendo si ottiene  $\theta = 27^\circ$  oppure  $\theta = 63^\circ$ . Tuttavia è bene ricavarla direttamente dalla

cinematica:

$$x : \text{moto rett. unif.} \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{v}_0 \cos \theta t \quad (1)$$

$$y : \text{motounif.acc.} \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{v}_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

avendo riferito l'isola e la nave alla stessa quota iniziale  $y_0 = 0$  Da (1) ricaviamo  $t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$  che mettiamo nella (2) che diventa:

$$v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \Rightarrow v_0 \sin \theta - \frac{1}{2} g \frac{x}{v_0 \cos \theta} = 0$$

Da cui si ricava appunto la  $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta = \frac{gx}{v_0^2}$

## 9 Problema 4.15

Un fucile è puntato orizzontalmente contro un bersaglio alla distanza di 30 m. Il proiettile colpisce il bersaglio 1.9 cm sotto il centro. Determinare il tempo di volo del proiettile e la velocità del proiettile all'uscita del fucile.

Sull'asse x abbiamo  $x = v_0 t$  sull'asse y abbiamo la caduta:  $y = -\frac{1}{2} g t^2$  il tempo lo otteniamo da quest'ultima eq.  $t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$  con  $y = 1.9 \cdot 10^{-2} \text{ m}$  si ha  $t = 0.062 \text{ s}$  la velocità invece si ricava dalla prima eq.  $v_0 = \frac{x}{t} = \frac{30}{0.062} = 484 \text{ m/s}$ .

## 10 Problema 4.23

Un aereo, in picchiata a velocità costante con angolo di  $37^\circ$  rispetto l'orizz., sgancia un proiettile alla quota 730 m dal suolo. Il proiettile colpisce il terreno dopo 5 s. Qual'è la velocità dell'aereo?

In questo caso abbiamo  $v_{0x} = v_0 \cos \theta$  e  $v_{0y} = -v_0 \sin \theta$  (verso il basso) Per cui l'eq. del moto del proiettile è

$$\text{Asse x} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_x = \mathbf{v}_0 \cos \theta \\ \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 \cos \theta t \end{array} \right.$$

$$\text{Asse } y \left\{ \begin{array}{l} v_y = -v_0 \sin \theta - gt \\ y = y_0 - v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right.$$

Di queste equazioni inserendo  $t=5$  s nell'ultima equazione con la condizione  $y=0$  si ha  $0 = y_0 - v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow v_0 = \frac{y_0 - \frac{1}{2}gt^2}{t \sin \theta} = 202 \text{ m/s}$

## Parte VII

### Es.3.3-Serway

In un bar, l'avventore lancia il boccale della birra lungo il banco. Il barista non si accorge del lancio e il boccale cade verso il suolo. Se il banco è alto 0.86m e il boccale cade a 1.4m dalla base del banco, determinare la velocità iniziale del boccale e la velocità nel momento in cui tocca il suolo.

### Es.3.4-Serway

Un calciatore lancia il pallone ad una distanza di 36m dalla porta. Il pallone deve evitare la traversa che è alta 3.05m. Sapendo che il pallone parte con angolo  $53^\circ$  e velocità 20m/s, determinare se il pallone passa sopra o sotto la traversa.

### Problema

Un proiettile viene lanciato verso l'alto da un balcone posto ad altezza **47.3 m** con inclinazione **40.0 °** rispetto l'orizzontale e velocità iniziale  $v_0$ . Determinare dove cade nel suolo, sapendo che  $v_0=3.0 \text{ m/s}$ .