1 2.2-accelerazione nel moto piano

Moto piano: componenti intrinseche dell'accelerazione
Scriviamo l'accelerazione nelle sue componenti partendo dalle coordinate intrinseche (cosa utile per i moti circolari)

$$\vec{v} = v\hat{u}_T \Rightarrow$$
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_N$$

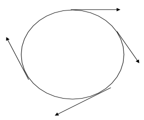
ma abbiamo anche che $\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$ per cui si ottiene

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

Le due componenti sono $\vec{a}_c = \frac{v^2}{R}\hat{u}_N$ **accelerazione centripeta** e $\vec{a}_c = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T$ **accelerazione tangenziale** La rappresentazione si può usare anche quando la traiettoria non è circolare ed in tal caso il raggio descritto è quello di una circonferenza tangente alla traiettoria nel punto P (circonferenza osculatrice) e il raggio viene detto **raggio di curvatura**

2 2.3-Moto-circolare uniforme

Una particella la cui traiettoria è una circonferenza o un arco di circonferenza si dice essere in moto circolare, **moto circolare uniforme** se si muove su esso con velocità **costante in modulo**.



Nonostante la velocità sia costante in **modulo**, come si vede dalla figura la sua direzione cambia **continuamente** (il vettore velocità è sempre tangente alla traiettoria) e se $\Delta\vec{v} \neq 0$ si può calcolare l'accelerazione.

Dalla precedente dimostrazione se il modulo di v è costante allora l'accelerazione di questo moto è sempre diretta **radialmente** e verso il centro della circonferenza, per questo motivo è detta **ACCELERAZIONE CENTRIPETA** $\vec{a}_C$

3 2.3 Moto Circolare

Il moto circolare può essere descritto sia tramite la descrizione dello spazio percorso lungo la circonferenza, sia tramite gli angoli percorsi. A tal fine occorre ricordarsi che: $\mathbf{s} = \mathbf{R}\theta$ Per cui per variazioni infinitesime si ha $\mathbf{ds} = \mathbf{Rd}\theta$ e possiamo introdurre anche per le grandezze angolari velocità ed accelerazione: $\omega = \frac{\mathbf{d}\theta}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}}\frac{\mathbf{ds}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{R}}$ velocità angolare e $\alpha = \frac{\mathbf{d}\omega}{\mathbf{dt}}$ accelerazione angolare Nel moto circolare uniforme ω è costante e l'accelerazione angolare è nulla (c'è però una accelerazione centripeta) Vediamo nel moto circolare vario che succede: $a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \alpha R$ Per cui si possono ottenere le descrizioni cinematiche angolari:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)dt$$
$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)dt$$

e nel caso di moto **circolare uniformemente accelerato** si ha $\omega = \omega_\mathbf{0} + \alpha\mathbf{t}$ e $\theta = \theta_\mathbf{0} + \omega_\mathbf{0}\mathbf{t} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\alpha\mathbf{t}^\mathbf{2}$

Parte I

4 Notazione vettoriale della velocità angolare

Notazione vettoriale della velocità angolare
La velocità angolare ha caratteristiche vettoriali: il vettore viene definito attribuendo come modulo l'espressione di ω calcolata in precedenza, la direzione perpendicolare al piano su cui si trova la circonferenza ed un verso tale che dalla punta del vettore $\vec{\omega}$ il moto appaia **antiorario**. Da questa definizione quindi risulta che $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Tramite le grandezze angolari si

può indicare l'accelerazione del moto circolare:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) =$$
$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \omega \times \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow$$
$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Il primo termine è l'accelerazione **tangenziale** $\vec{a_t}$ il secondo è invece l'accelerazione **centripeta** $\vec{a_N}$

Parte II

5 Periodo nel moto circolare uniforme

Il tempo necessario a compiere un giro sulla circonferenza viene definito **Periodo T**. Nel moto circolare uniforme vengono percorsi (a causa della costanza in modulo della velocità) **archi uguali in tempi uguali** per cui possiamo scrivere che: $\mathrm{s = v \cdot t} \Rightarrow \quad 2\pi\mathrm{R = v \cdot T} \Rightarrow$

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{2\pi R}}{\mathbf{v}} \tag{1}$$

Possiamo anche definire la **velocità angolare** $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}$ che ha il significato di rapidità di spostamento angolare. Vediamo che relazioni esistono tra queste quantità : la definizione di angolo è $\theta = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{R}}$ da cui $\mathbf{s} = \mathbf{R}\theta \Rightarrow \frac{\mathbf{ds}}{\mathbf{dt}} = |\vec{v}| = \frac{\mathbf{R}\mathbf{d}\theta}{\mathbf{dt}} = \omega\mathbf{R} \Rightarrow$

$$\mathbf{v} = \omega\mathbf{R} \tag{2}$$

e sostituendo l'eq.(3) in (2) otteniamo

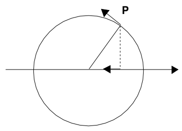
$$\omega = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{T}}$$

con la quale abbiamo il legame tra il periodo e la velocità angolare.

6 1.6 Moto armonico semplice

Nel moto armonico semplice, un punto oscilla intorno una posizione media con una legge del tipo $\mathbf{x(t) = A}\sin(\omega\mathbf{t} + \phi)$ A ampiezza ϕ è la fase e ω

la pulsazione Tale moto è ad esempio quello che appare come moto delle proiezioni sugli assi cartesiani del moto circolare uniforme di un punto sulla circonferenza Il moto armonico semplice è la proiezione di un moto circolare uniforme su un diametro dello stesso cerchio su cui si svolge il moto.



Il moto circolare uniforme è un moto periodico ed il periodo è $\mathbf{T} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\omega}$ Infatti

$$\mathbf{x(t) = x(t+T)} \Rightarrow$$
$$\mathbf{x_M} \sin(\omega \mathbf{t} + \phi) = \mathbf{x_M} \sin(\omega(\mathbf{t}+\mathbf{T}) + \phi) \Rightarrow$$
$$\mathbf{x_M} \sin(\omega \mathbf{t} + \phi) = \mathbf{x_M} \sin(\omega \mathbf{t} + \omega \mathbf{T} + \phi) \Rightarrow$$

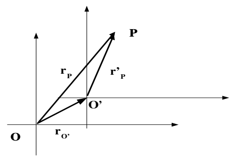
e poichè la funzione sin assume gli stessi valori ogni 2π allora si deve avere che $\omega T = 2\pi \Rightarrow \mathbf{T} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\omega}$ e $\nu = \frac{\omega}{\mathbf{2\pi}}$ e la ϕ è la fase quando t=0. Infine si definisce **frequenza** $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ Il moto armonico semplice è un moto accelerato: $v_x(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$ e derivando ancora $a_x(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t+\phi) = -\omega^2 x(t)$ In sostanza la velocità risulta avere un massimo in corrispondenza del centro di oscillazione e si annulla agli estremi del moto, l'accelerazione è invece sempre opposta allo spostamento e quindi nulla al centro di oscillazione e massima agli estremi. Si può dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinchè il moto sia **armonico** è che sia soddisfatta l'equazione (diff.) $\mathbf{\frac{d^2x(t)}{dt^2}} + \omega^{\mathbf{2}}\mathbf{x(t) = 0}$

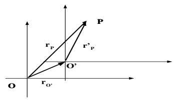
7 2.6-Moti relativi

Sappiamo che la velocità di un corpo dipende dal sistema di riferimento (sinora considerato fermo). Prima di considerare gli effetti del movimento dobbiamo vedere come si cambia sistema di riferimento:

Dalla figura scegliendo un qualunque punto P nello spazio si ha che indicando con O l'origine del sistema fisso, con O' quello mobile otteniamo che $\vec{r}_{\mathrm{p}} = \vec{r}_{\mathrm{o'}} + \vec{r}\,'_{\mathrm{p}}$ con le seguenti notazioni:

- $\vec{r}_{\mathrm{p}}$ è il raggio vettore che individua P rispetto ad O
- $\vec{r}_{\mathrm{o'}}$ è il vettore che individua O' rispetto ad O





- $\vec{r}\,'_{\rm p}$ è il vettore che individua P rispetto ad O'

Questi vettori variano nel tempo ma istante per istante mantengono questa relazione. Se la deriviamo per il tempo si ottiene che $\frac{\rm d}{\rm dt}\vec{r}_{\rm P} = \frac{\rm d}{\rm dt}\vec{r}_{\rm O'} + \frac{\rm d}{\rm dt}\vec{r}\,'_{\rm p}$ ovvero$\vec{v}_{\mathbf{P}} = \vec{v}_{\mathbf{O'}} + \vec{v}\,'_{\mathbf{P}}$ (la velocità nel sistema fisso è data dalla somma vettoriale della velocità del sistema mobile con la velocità del punto rispetto al sistema mobile).Nel caso in cui O' si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad O allora l'equazione appena trovata (che vale in generale) implica che per le accelerazioni si avrà $\vec{a}_{\mathbf{P}} = \vec{a}\,'_{\mathbf{P}}$ ovvero che le accelerazioni nei due sistemi di riferimento sono le stesse.

8 Problema 4.9

Problema 4.9
Un pilota di caccia vola ad una velocità di 694 m/s. Qual'è l'accelerazione di cui risente se percorre una traiettoria circolare di raggio R=5.8 Km?

$\mathbf{a_c} = \frac{\mathbf{v^2}}{\mathbf{R}} =$ Attenzione unità misura$= \frac{\mathbf{694^2}}{\mathbf{5800}} = \mathbf{83\ m/s^2} \cong 8.5g$

9 4.35E

4.35E

Un satellite terrestre si muove con orbita circolare alla quota di 640 Km sopra la Terra, con un periodo di rotazione di 98 min. Qual'è la velocità del satellite? Qual'è la sua accelerazione centripeta?

T=98 min $\mathbf{T=\frac{2\pi R}{v} \Rightarrow v=\frac{2\pi R}{T}}$ R=640+6400 Km =7040 Km $\mathbf{v=\frac{2\pi\cdot 7040\cdot 10^3}{98\cdot 60}\ m/s} =$ $7522,7\ m/s$ $\mathbf{v = 7522,7\ m/s = 7522\frac{\frac{1}{1000}Km}{\frac{1}{3600}h} \cong 27000\ Km/h}$ $\mathbf{a_c=\frac{v^2}{R}=\frac{7522,7^2}{7040\cdot 10^3}=8m/s^2}$

10 4.41P

4.41P

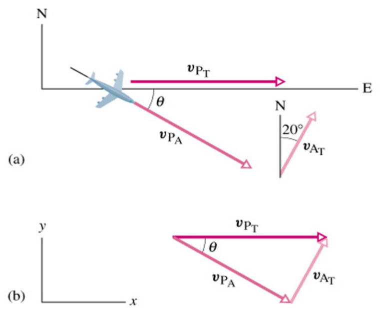
La ruota del luna park ha raggio R=15 m e compie 5 giri in 1 minuto.

1. Qual'è il periodo?
2. Qual'è l'accelerazione centripeta nel punto più in alto?
3. Qual'è l'accelerazione centripeta nel punto più basso?

$\mathbf{T=\frac{1min}{5}=\frac{60s}{5}=12\ s}$ **Il periodo è il tempo impiegato a compiere un giro** L'accelerazione centripeta non cambia ed è $a_c=\frac{v^2}{R}=\frac{(\omega R)^2}{R}=\omega^2 R=(\frac{2\pi}{T})^2\ R=\frac{4\pi^2}{T^2}R=\frac{4\pi^2}{12^2}\cdot 15=4.11 m/s^2$

11 Esercizio 4.11 -moti relativi

Un aereo si muove verso EST ma la sua prora è orientata come in figura. L'aereo ha una velocità relativa all'aria Va=215 Km/h con angolo θ verso SUD rispetto EST. Vi è un vento con velocità Vv=65Km/h che forma un angolo di 20°a EST rispetto NORD. Qual'è la velocità dell'aereo rispetto al suolo?



$\vec{V}_{pt}=\vec{V}_{pa}+\vec{V}_{at}$ con V_{pt} la velocità dell'aereo rispetto al terreno, V_{pa} la velocità dell'aereo rispetto al vento e l'ultima è la velocità del vento rispetto terra. Scomponiamo l'eq. sugli assi:

$$v_{y,pt}=v_{y,pa}+v_{y,at} \Rightarrow$$
$$0=-(215\ km/h)\sin\theta+(65\ km/h)\cos 20^\circ$$

da cui $\theta=16.5^\circ$ per l'altra componente si risolve l'eq. ottenendo $v_{pt}=228\ km/h$

Problema 4.8

12 Problema 4.8

Problema 4.48
Un fiume largo 200m ha una corrente che scende a velocità uniforme di 1.1 m/s verso est. Un uomo vuole attraversare da sud verso nord il fiume col suo motoscafo capace di navigare alla velocità di 4m/s rispetto l'acqua. Sapendo che il punto di approdo della parte opposta si trova 82m più a monte del punto esattamente di fronte a dove parte l'uomo, determinare qual'è la direzione cui occorre puntare la barca per arrivare all'approdo in linea retta.

$\vec{v}_a = \vec{v}_b + \vec{v}_f$ equazione che possiamo scrivere vettoriale La retta che dobbiamo seguire è parallela alla velocità risultante (*) per cui l'angolo formato con l'asse x è $\tan\theta = -\frac{\mathbf{200}}{\mathbf{82}} = \mathbf{-2,43} \Rightarrow \theta = \mathbf{180 - 67,7^\circ} = \mathbf{112,3^\circ}$ x: $\mathbf{v_{ax}} = \mathbf{v_b}\cos\phi + \mathbf{v_f}$ con ϕ l'angolo rispetto al fiume (asse x) y: $\mathbf{v_{ay}} = \mathbf{v_b}\sin\phi$ e $\frac{\mathbf{v_{ay}}}{\mathbf{v_{ax}}} = \tan\theta = \mathbf{-2,43}$ $\frac{\mathbf{v_a}\sin\theta}{\mathbf{v_a}\cos\theta} = \tan\theta = \mathbf{-2,43} = \frac{\mathbf{v_b}\sin\phi}{\mathbf{v_b}\cos\phi + \mathbf{v_f}}$ si risolve con le formule trigonometriche e la sostituzione $\tan(\phi/2) = x$ **Soluzione: $\mathbf{\Phi = 127.1^\circ}$ Soluzione esercizio alternativo (attraversamento di fronte):$\mathbf{\Phi = 105^\circ}$**