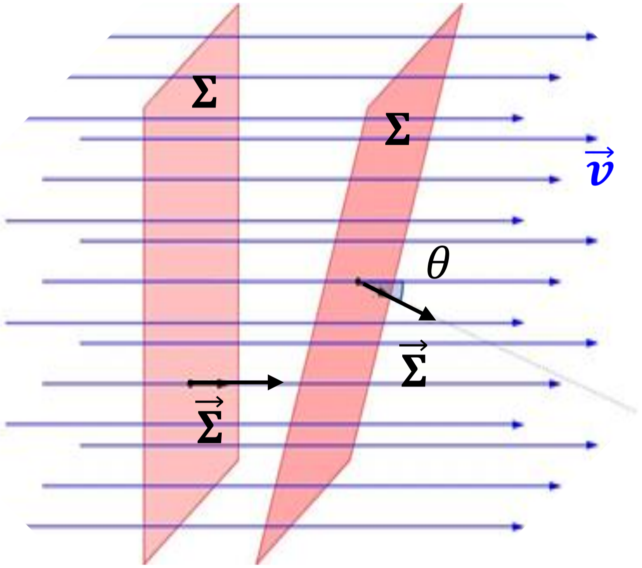
Capitolo 3

Teorema di Gauss

3.1 Flusso di un campo vettoriale

Il concetto di flusso può essere facilmente compreso partendo dai fluidi. Consideriamo un fluido incomprimibile in scorrimento, in regime stazionario, come quello mostrato in figura, ove sono rappresentate le linee di forza del campo delle velocità $\vec{v}$ degli elementi fluidi in moto in un liquido incomprimibile.

Consideriamo una sezione $\mathbf{\Sigma}$ del tubo attraverso la quale scorre il fluido. **Il flusso del campo di velocità attraverso Σ è la quantità in volume del fluido che scorre attraverso la sezione, nell'unità di tempo** (portata volumetrica).



Osserviamo che tale **flusso dipende da come è orientata $\mathbf{\Sigma}$**: è massimo quando la sezione è ortogonale alla velocità ed è minima (nulla) quando la sezione è parallela alla velocità. Il flusso dovrà allora dipendere dall'angolo θ tra il campo delle velocità e la superficie.

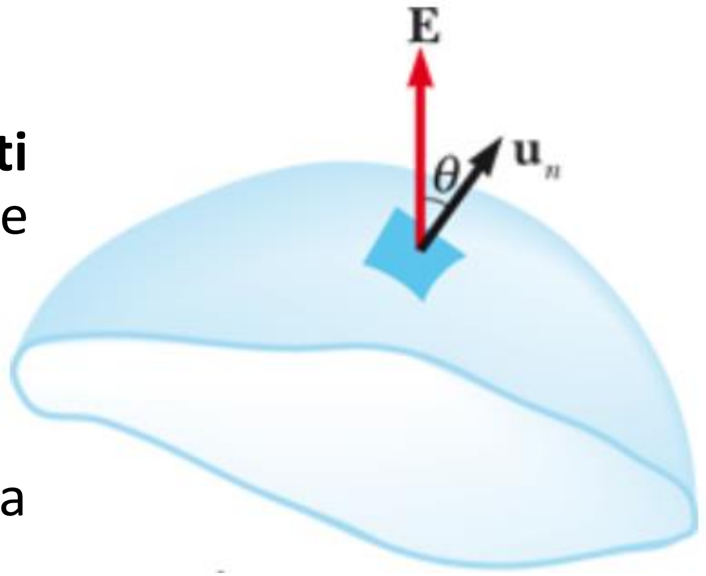
Definiamo **vettore superficie** $\vec{\mathbf{\Sigma}}$ il vettore avente **modulo pari all'area della superficie**, **direzione e verso pari a quelli della normale orientata $\widehat{u_n}$** a $\mathbf{\Sigma}$ (ovvero direzione perpendicolare al piano della superficie e verso uscente).

Il **flusso del campo $\vec{v}$ attraverso la superficie Σ** è definito come

$$\mathbf{\Phi}_{\mathbf{\Sigma}}(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{\mathbf{\Sigma}}$$

3.2 Flusso del campo elettrostatico

Consideriamo una regione dello spazio in cui sia presente un **campo elettrico uniforme**. Supponiamo di voler calcolare il **flusso del campo elettrico attraverso una superficie finita Σ** (di forma qualsiasi).



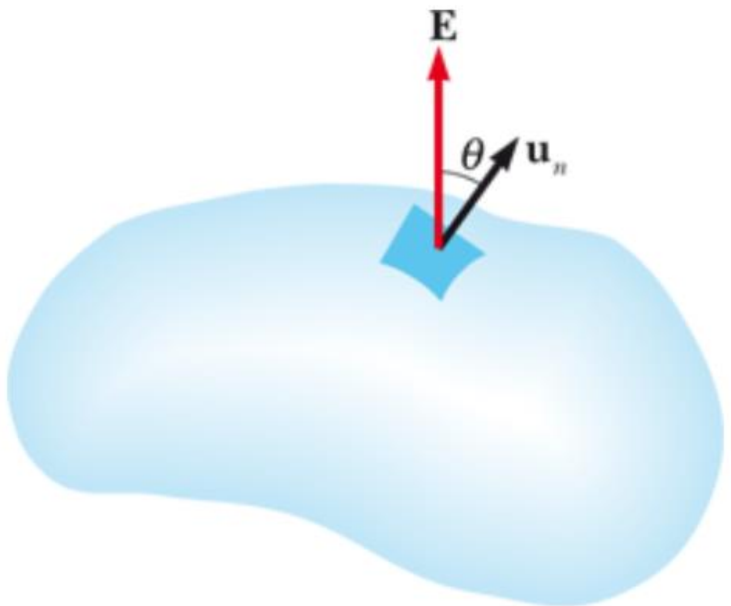
In questo caso è necessario **suddividere la superficie in elementi infinitesimi** $\boldsymbol{d\Sigma}$, in modo da poter definire univocamente il versore normale $\widehat{\boldsymbol{u_n}}$ per ciascun elementino di superficie.

Il **flusso del campo elettrostatico attraverso la superficie** $\boldsymbol{\Sigma}$ sarà data dalla «**somma**» **dei flussi infinitesimi** $\boldsymbol{d\Phi}$ **attraverso le superfici** $\boldsymbol{d\Sigma}$

$$\boldsymbol{\Phi_\Sigma(\vec{E})} = \int d\boldsymbol{\Phi} = \int_{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\vec{E}} \cdot \boldsymbol{\overrightarrow{d\Sigma}} = \int_{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\vec{E}} \cdot \widehat{\boldsymbol{u_n}}\, \boldsymbol{d\Sigma}$$

Nel caso in cui la superficie $\boldsymbol{\Sigma}$ sia **chiusa**, ovvero una superficie che **racchiude un volume**, scriveremo

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\vec{\boldsymbol{E}}) = \oint_{\boldsymbol{\Sigma}} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \widehat{\boldsymbol{u}_n}\, \boldsymbol{d\Sigma}$$



Per le zone in cui il prodotto $\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \widehat{\boldsymbol{u}_n}$ è positivo, parleremo di «flusso uscente» dalla superficie, viceversa, diremo che il flusso è «entrante». Qualora l'integrale dia risultato nullo, diremo che il **flusso netto** è «nullo», ovvero che il flusso entrante eguaglia in modulo il flusso uscente.

Mantenendo l'analogia con i fluidi diciamo che il flusso del campo elettrico è proporzionale al **numero netto di linee di campo** che attraversano la superficie (<u>differenza tra il numero di linee uscenti ed il numero di linee entranti</u>).

3.3 Teorema di Gauss

Il teorema di Gauss lega il **flusso del campo elettrostatico attraverso una superficie chiusa** alle **cariche sorgenti**. Nei casi in cui la distribuzione di carica che genera il campo elettrostatico presenti un **elevato grado di simmetria**, questo teorema è uno strumento estremamente utile per derivare l'espressione del campo.

Teorema di Gauss

Il teorema di Gauss afferma che il **flusso del campo elettrostatico attraverso una superficie chiusa dipende esclusivamente dalle cariche racchiuse dalla superficie** ed è pari al rapporto tra la somma algebrica delle **cariche interne al volume Ω** delimitato dalla superficie e la costante dielettrica del vuoto:

$$\boldsymbol{\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

Si noti che il campo $\vec{E}$ al primo membro è quello generato da **tutte** le cariche sorgenti, mentre al secondo membro appaiono **solo** le cariche interne alla superficie.

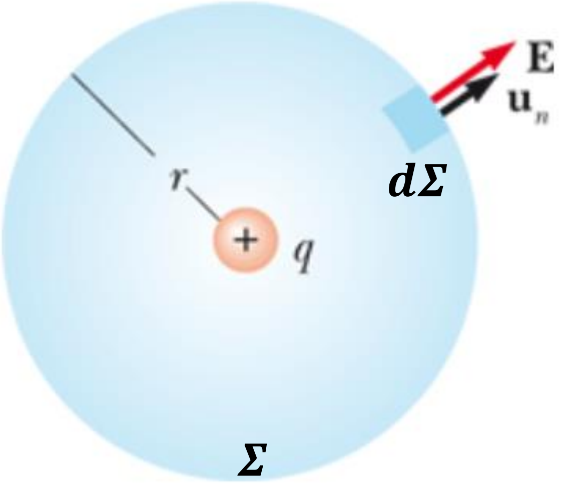
Se la superficie racchiude una **distribuzione discreta di carica**, avremo $\boldsymbol{\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}}$

Mentre, per una **distribuzione continua di carica**, avremo $\boldsymbol{\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_\Omega dq}$

Come ogni teorema, anche quello di Gauss va dimostrato.

Cominciamo con il caso semplice in cui vogliamo calcolare il flusso del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme positiva, attraverso una superficie sferica $\boldsymbol{\Sigma}$ concentrica con la carica.

Dividiamo la superficie sferica in elementi infinitesimi $\boldsymbol{d\Sigma}$. Per ciascun elemento, la normale alla superficie sarà parallela al raggio vettore che individua il suo centro e, quindi, sarà anche parallela al campo elettrostatico.



Quindi, per ciascun elemento infinitesimo di superficie

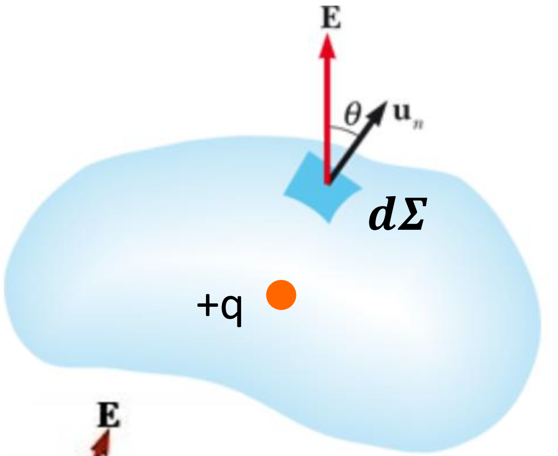
$$\vec{E}\cdot\overrightarrow{d\Sigma} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\widehat{u_r}\cdot\widehat{u_n}\,d\Sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}d\Sigma$$

Il flusso totale del campo elettrostatico attraverso $\boldsymbol{\Sigma}$ è

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint_\Omega d\Phi = \oint_\Sigma \vec{E}\cdot\overrightarrow{d\Sigma} = \oint_\Sigma \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}d\Sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}q\oint_\Sigma d\Sigma =$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}q\,4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Calcoliamo ora il flusso del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme, attraverso una superficie chiusa generica che racchiuda la carica sorgente.

Anche in questo caso, cominciamo con il suddividere la superficie sferica in elementi infinitesimi $\boldsymbol{d\Sigma}$. A differenza del caso precedente, però, la normale alla superficie non è più parallela al raggio vettore che individua il suo centro.

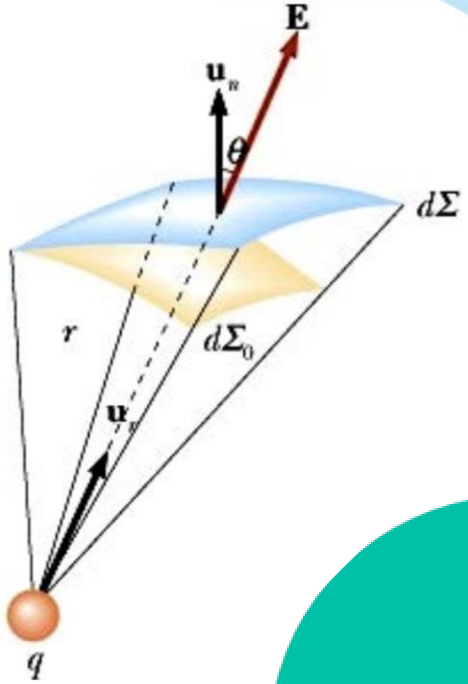


Sia θ l'angolo tra $\widehat{\boldsymbol{u_r}}$ e $\widehat{\boldsymbol{u_n}}$. Il flusso infinitesimo sarà

$$d\boldsymbol{\Phi} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi\varepsilon_0}} \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{r^2}} \widehat{\boldsymbol{u_r}} \cdot \widehat{\boldsymbol{u_n}}\, \boldsymbol{d\Sigma} = \frac{\boldsymbol{q}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi\varepsilon_0}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r^2}} \boldsymbol{cos\theta\, d\Sigma} = \frac{\boldsymbol{q}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi\varepsilon_0}} \frac{\boldsymbol{d\Sigma_0}}{\boldsymbol{r^2}}$$

Proiezione di $\boldsymbol{d\Sigma}$ sul piano perpendicolare a $\widehat{\boldsymbol{u_r}}$, $\boldsymbol{d\Sigma_0}$!

$\dfrac{\boldsymbol{d\Sigma_0}}{\boldsymbol{r^2}}$ è l'angolo solido **infinitesimo $\boldsymbol{d\Omega}$ sotto cui $\boldsymbol{d\Sigma_0}$ è vista da q**.



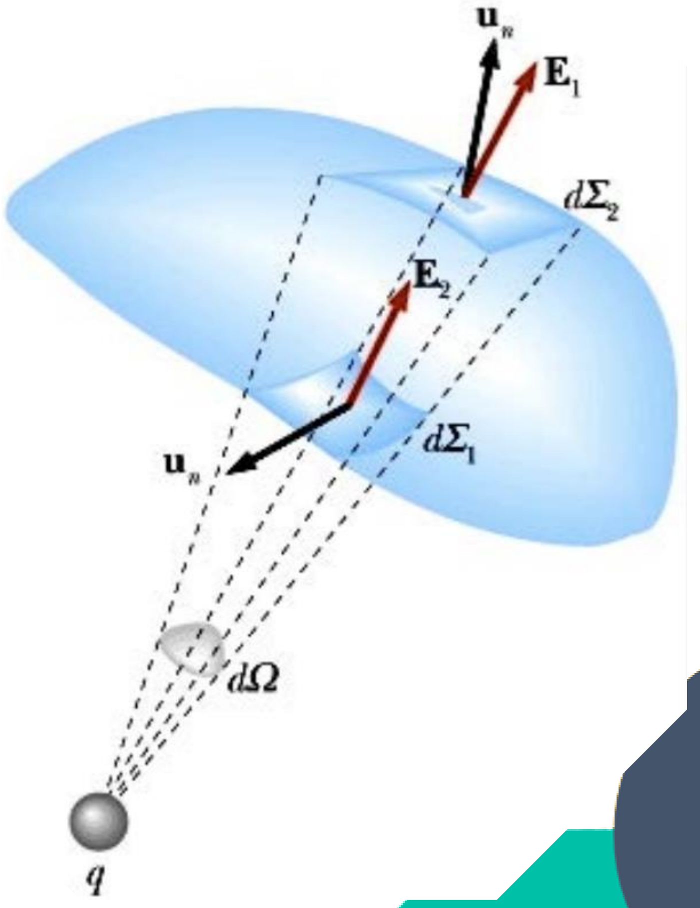
Il flusso totale del campo elettrostatico attraverso $\boldsymbol{\Sigma}$ è

$$\boldsymbol{\Phi_\Sigma(\vec{E})} = \oint_{\boldsymbol{\Omega}} d\boldsymbol{\Phi} = \oint_{\boldsymbol{\Omega}} \frac{\boldsymbol{q}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi\varepsilon_0}} d\boldsymbol{\Omega} = \frac{\boldsymbol{q}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi\varepsilon_0}} \oint_{\boldsymbol{\Omega}} d\boldsymbol{\Omega} = \frac{\boldsymbol{q}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi\varepsilon_0}} \mathbf{4}\boldsymbol{\pi} = \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$$

Supponiamo, ora, che la superficie chiusa di forma generica non racchiuda la carica sorgente q.

Osserviamo che, se scegliamo una qualsiasi superficie infinitesima $d\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{1}}$, l'angolo solido $\boldsymbol{d\Omega}$ che sottende tale superficie «vede» anche una seconda superficie infinitesima $d\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{2}}$.

Il vettore campo elettrico ha direzione uscente, su una superficie infinitesima, ed entrante, sull'altra. Il verso dei vettori superficie sarà, invece, uscente, per entrambe le superfici.



I flussi infinitesimi attraverso le due superfici valgono

$$d\boldsymbol{\Phi}_1 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{r^2}}\,\widehat{\boldsymbol{u_r}}\cdot\widehat{\boldsymbol{u_n}}\,\boldsymbol{d\Sigma_1} = -\frac{\boldsymbol{q}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi\varepsilon_0}}\boldsymbol{d\Omega}$$

$$d\boldsymbol{\Phi}_2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{r^2}}\,\widehat{\boldsymbol{u_r}}\cdot\widehat{\boldsymbol{u_n}}\boldsymbol{d\Sigma_2} = \frac{\boldsymbol{q}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi\varepsilon_0}}\boldsymbol{d\Omega}$$

Da cui segue immediatamente che il flusso totale è nullo.

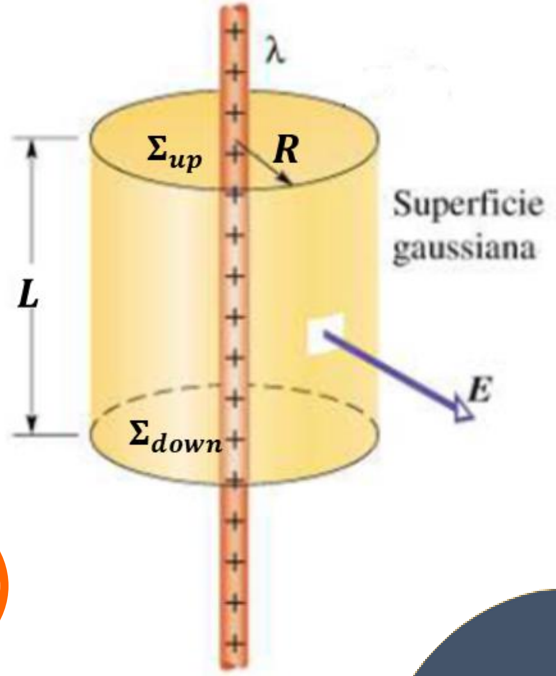
Esercizio 3.1

Una carica **q** è uniformemente distribuita all’interno di una sfera di raggio **R**. Determinare il campo elettrico all’esterno (**r** > **R**) e all’interno della sfera (**r** < **R**).

3.4 Applicazioni del Teorema di Gauss

Come anticipato, il teorema di Gauss si rivela uno strumento molto utile per trovare l'espressione del campo elettrostatico generato da distribuzioni carica aventi particolari simmetrie. Vediamo alcuni esempi.

3.4.1 Distribuzione lineare di carica



Consideriamo un filo su cui è uniformemente distribuita una carica $\boldsymbol{Q}$ con densità lineare $\boldsymbol{\lambda}$. In questo caso si ha una evidente **simmetria cilindrica**, per cui scegliamo come superficie gaussiana un cilindro che abbia come asse centrale proprio il filo, come mostrato in figura.

Il flusso del campo elettrostatico sarà:

Termini nulli!

$$\boldsymbol{\Phi}(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma = \int_{Sup.Lat.} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma + \int_{\Sigma_{up}} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma + \int_{\Sigma_{down}} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma$$

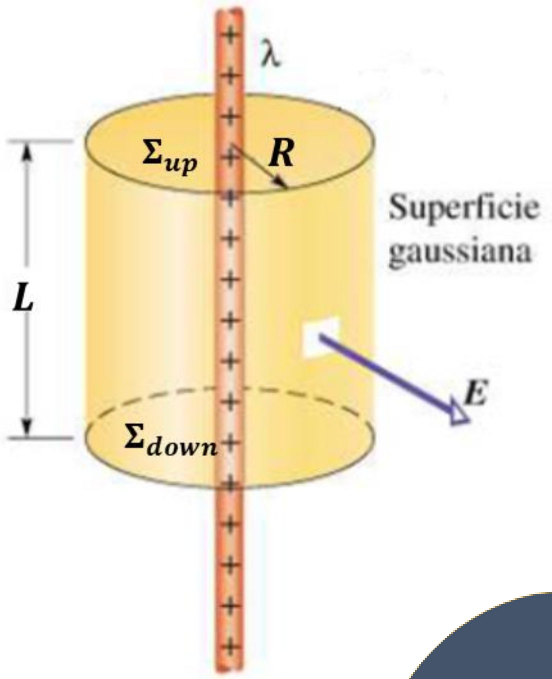
La simmetria del sistema ci dice che il campo elettrostatico sarà perpendicolare al filo, quindi parallelo ai vettori superficie infinitesimi che compongono la superficie laterale e perpendicolare a quelli che compongono le superfici di base.

Quindi

$$\boldsymbol{\Phi}(\vec{E}) = \int_{Sup.Lat.} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma = \int_{Sup.Lat.} E d\Sigma = E \int_{Sup.Lat.} d\Sigma = E(2\pi RL)$$

Per il teorema di Gauss,

$$\boldsymbol{\Phi}(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \oint_{\Omega} dq = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^L \lambda\, dq = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$



Uguagliando le due espressioni troviamo: $E(2\pi RL) = \dfrac{\lambda L}{\varepsilon_0}$

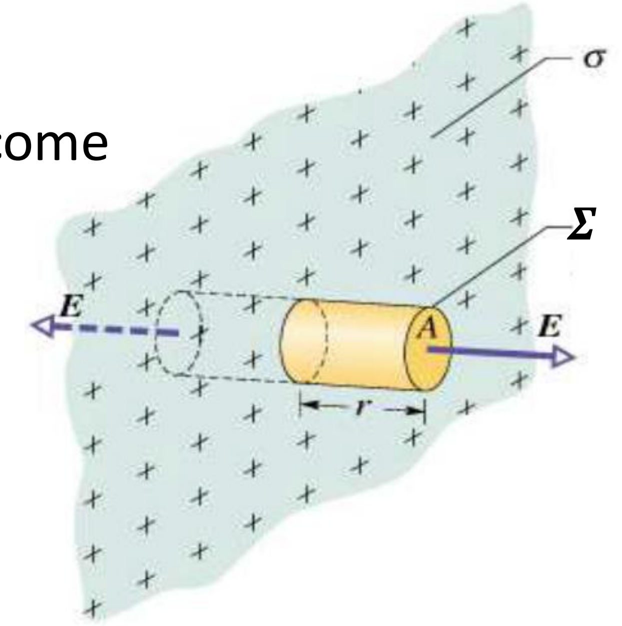
Da cui ricaviamo che il campo elettrostatico generato da una distribuzione lineare di carica è:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

3.4.2 Distribuzione piana di carica

Consideriamo una superficie sottile ed infinitamente estesa con una densità superficiale di carica **σ**.
Le ragioni di simmetria portano a stabilire che il campo elettrico deve essere ortogonale al piano.

Scegliamo come superficie gaussiana un cilindretto che attraversi la superficie come in figura. Il flusso del campo elettrostatico attraverso $\boldsymbol{\Sigma}$ è:



$$\boldsymbol{\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma = \int_{Sup.Lat.} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma + \int_{\Sigma_{destra}} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma + \int_{\Sigma_{sin}} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma}$$

La simmetria del sistema ci dice che, in questo caso, il flusso attraverso la superficie laterale è nullo, mentre quello attraverso le due basi è uguale.
Otteniamo:

$$\boldsymbol{\Phi(\vec{E}) = 2\int_{\Sigma_{destra}} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma = 2\int_{\Sigma_{destra}} E d\Sigma = 2E\int_{\Sigma_{destra}} d\Sigma = 2E\pi R^2}$$

Usando il teorema di Gauss ricaviamo:

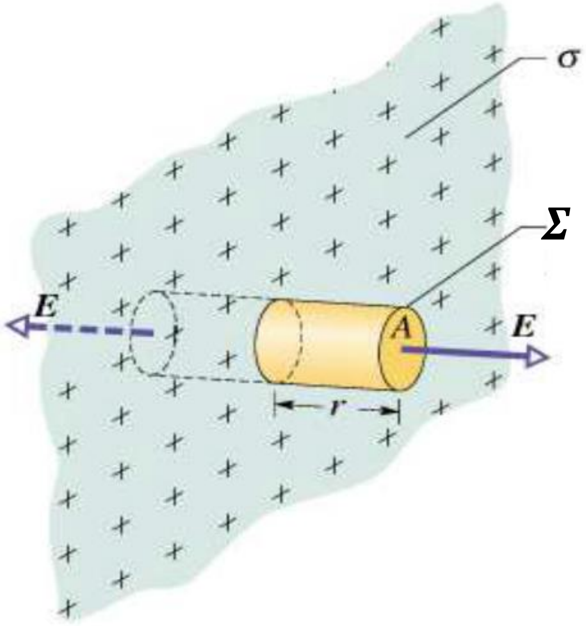
$$\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_{\Omega} dq = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R \sigma 2\pi x dx = \frac{\sigma\pi R^2}{\varepsilon_0}$$

Eguagliamo le due espressioni del flusso ricaviamo:

$$2E\pi R^2 = \frac{\sigma\pi R^2}{\varepsilon_0}$$

E ricaviamo:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



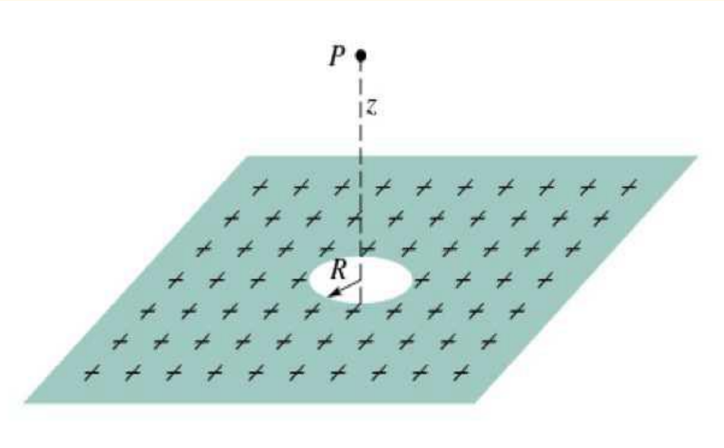
Esercizio 3.2

Su un cavo sottile rettilineo molto lungo è presente una carica negativa con **λ = 3.6 nC/m**. Il cavo viene circondato con una distribuzione uniforme cilindrica di raggio **r = 1.5 cm** e coassiale al cavo. Scegliere la densità di carica superficiale **σ** del cilindro in modo che il flusso del campo elettrico dal cilindro sia nullo.

Esercizio 3.3

Una sfera di raggio **R** ha una carica positiva distribuita nel suo volume secondo la legge **$\rho = A \cdot r$** con **r** la distanza dal suo centro. Calcolare l'espressione del campo elettrico all'interno della sfera e il potenziale nel punto **r = R/2** rispetto l'infinito.

Esercizio 3.4



Su una superficie piana isolante molto estesa è distribuita uniformemente una carica con densità **σ**. Un piccolo foro circolare di raggio **R** viene ricavato nel punto centrale del foglio, come mostrato
in figura. Si ignori la distorsione delle linee di campo su tutti i bordi e si calcoli il campo elettrico nel punto **P**, a una distanza **z** dal centro del foro lungo il suo asse.