Capitolo 8

Legge di Faraday

8.1 Introduzione

Sino ad ora abbiamo visto che le cariche elettriche sono sorgenti sia di campi elettrici (se statiche) che di campi magnetici (se in movimento). A parte questa connessione tra i due campi, non abbiamo riscontrato altri legami.

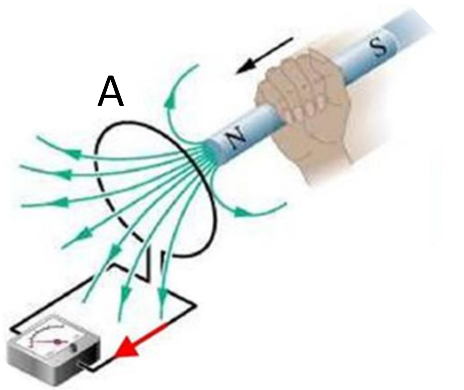
Gli esperimenti condotti in maniera indipendente da Faraday e Henry hanno invece evidenziato un legame tra elettricità e magnetismo.

In particolare, essi dimostrarono che **un campo magnetico variabile nel tempo genera un campo elettrico non conservativo il quale**, a sua volta, **può generare una forza elettromotrice e far scorrere corrente in un circuito chiuso**. **Un fenomeno analogo si ottiene nei casi di moto relativo tra un circuito ed un campo magnetico costante**.

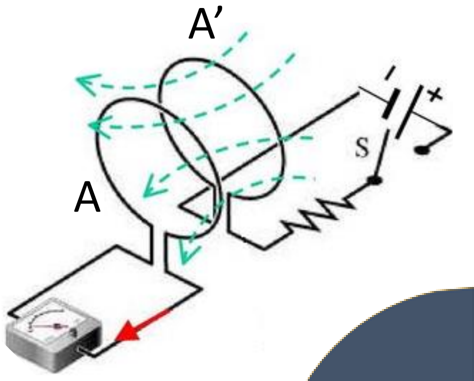
Infine, come anticipato nell'introduzione del capitolo 1 sull'elettrostatica, Maxwell dimostrò che, viceversa, un campo elettrico variabile nel tempo dava origine ad una campo magnetico.

8.2 Legge di Faraday dell’induzione elettromagnetica

Consideriamo un circuito costituito da una spira A ed un galvanometro e supponiamo di immergere il circuito nel campo magnetico di un magnete.



Se avviciniamo o allontaniamo il magnete dal circuito, il galvanometro segnerà il passaggio di una corrente i attraverso il circuito, in un verso o in quello opposto, mentre la corrente misurata è nulla se il magnete è fermo.

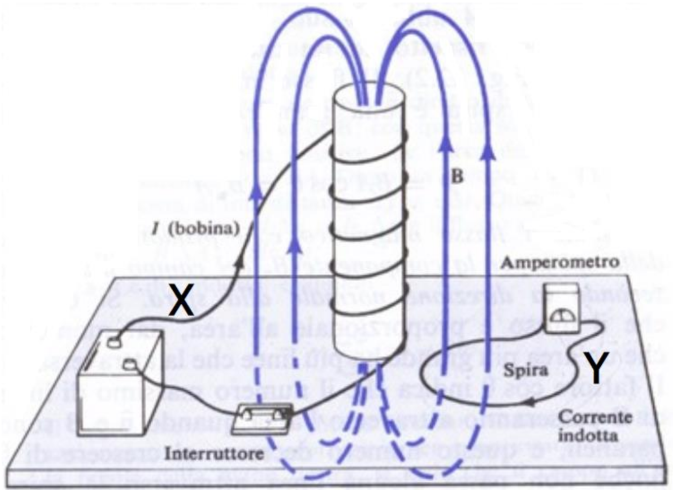


Lo stesso fenomeno si verifica se, piuttosto che nel campo magnetico di un magnete, **il circuito viene immerso nel campo generato da un secondo circuito**, costituito da una spira A’ ed un generatore, in cui circola corrente i'.

In entrambi i casi, la corrente i che circola nel circuito contenente la spira A è detta **corrente indotta**, **generata da una forza elettromotrice $\mathcal{E}_i$ originata dal moto relativo tra una spira ed un campo magnetico**.

Consideriamo adesso l'esperimento eseguito per la prima volta da Faraday. Una spira A connessa ad un amperometro costituisce il circuito Y, posto vicino al circuito X formato da un solenoide con nucleo di ferro, collegato ad un generatore ed un interruttore.

Sia il circuito X che il circuito Y rimangono fermi per tutta la durata dell'esperimento. Si osserva **che nel momento in cui l'interruttore viene chiuso, l'amperometro segna il passaggio di corrente, per poi riportarsi a zero. Una corrente non nulla viene anche misurata nel momento in cui l'interruttore viene aperto**.



Basandosi su queste evidenze sperimentali, Faraday concluse che **la variazione del campo magnetico nel tempo genera una forza elettromotrice in un circuito**. Infatti, la corrente si manifesta nel breve intervallo di tempo impiegato dal campo magnetico del solenoide per passare da 0 a $\vec{B}$, alla chiusura, e da $\vec{B}$ a 0, all'apertura dell'interruttore.

Tutti questi fenomeni sono spiegati dalla **legge di Faraday**.

Se consideriamo una linea chiusa *s*, esiste un numero infinito di superfici $\boldsymbol{\Sigma}$ che Hanno *s* come contorno. Valutiamo il flusso del campo magnetico attraverso due superfici $\boldsymbol{\Sigma_1}$ e $\boldsymbol{\Sigma_2}$ aventi contorno s. Poiché le linee del campo magnetico sono linee chiuse, deduciamo che il flusso del campo magnetico attraverso $\boldsymbol{\Sigma_1}$ sarà uguale a quello attraverso $\boldsymbol{\Sigma_2}$, ovvero il flusso del campo magnetico è lo stesso attraverso qualunque superficie poggiata ad *s*. Definiamo tale flusso, **flusso concatenato con la linea chiusa *s*.**

La legge di Faraday afferma che **la variazione**, **nel tempo**, **del flusso del campo magnetico concatenato con un circuito genera, in tale circuito, una forza elettromotrice indotta la cui espressione è**

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt}$$

Osserviamo che il flusso del campo magnetico può variare nel tempo se, nel tempo, variano:

- **Il campo magnetico;**
- **l'area della spira o la parte di area immersa nel campo magnetico;**
- **l'orientazione della spira rispetto a $\vec{B}$.**

Se $\boldsymbol{R}$ è la resistenza del circuito, **la corrente indotta che circola nel circuito** è

$$\boldsymbol{i} = \frac{\mathcal{E}_i}{\boldsymbol{R}} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{R}}\frac{\boldsymbol{d\Phi}(\vec{\boldsymbol{B}})}{\boldsymbol{dt}}$$

Ricordando la definizione di forza elettromotrice, otteniamo

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{\boldsymbol{E}}_i \cdot \boldsymbol{d\vec{s}} = -\frac{\boldsymbol{d\Phi}(\vec{\boldsymbol{B}})}{\boldsymbol{dt}}$$

Weber

Il flusso del campo magnetico si misura in Weber:

$$\mathbf{1}\,\boldsymbol{Wb} = \mathbf{1}\boldsymbol{V} \cdot \mathbf{1}\boldsymbol{s}$$

La variazione del flusso del campo magnetico concatenato al circuito, nel tempo, origina un campo elettrico indotto $\vec{\boldsymbol{E}}_i$ la cui circuitazione non è nulla. Il campo elettrico indotto, quindi, **è** un campo **non conservativo**.

Il **segno negativo** nella legge di Faraday ha un significato ben preciso e molto importante, spiegato dalla **legge di Lenz**. Essa esprime il fatto che **la corrente indotta nella spira ha un verso tale da generare un campo magnetico che, a sua volta, si opponga alla variazione di campo magnetico che l'ha prodotta**. Vedremo che la legge di Lenz è una conseguenza della legge di conservazione dell'energia.

8.3 Origine della f.e.m. indotta

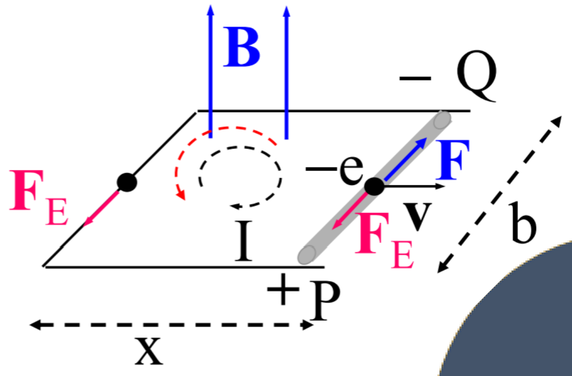
Riprendiamo la legge di Faraday

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{\boldsymbol{E}}_i \cdot d\vec{\boldsymbol{s}} = -\frac{d\Phi(\vec{\boldsymbol{B}})}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \widehat{\boldsymbol{u}_n}\, d\boldsymbol{\Sigma}$$

dove **Σ** è una qualsiasi superficie appoggiata alla linea chiusa *s* (che può coincidere con un circuito).

Consideriamo un circuito rettangolare conduttore avente un lato mobile, di lunghezza ***b***, posto in un campo magnetico uniforme. Se la barretta si muove di moto traslatorio con velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$, sugli elettroni delle sbarretta agisce la forza di Lorentz. Definiamo allora un campo elettromotore indotto

$$\vec{\boldsymbol{E}}_i = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}_L}{-e} = \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$$



che origina una f.e.m. nel circuito

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{s}} = \int_P^Q \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{s}} = -\boldsymbol{vBb}$$

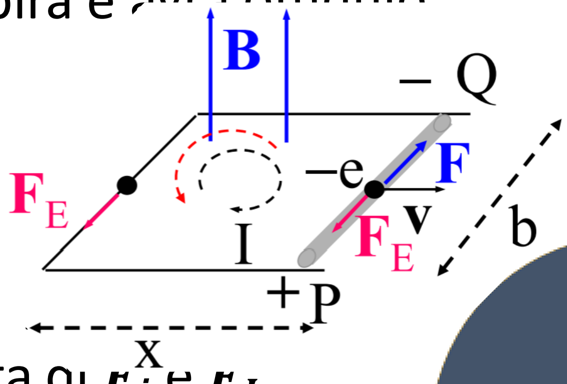
D'altra parte, se calcoliamo la variazione nel tempo del flusso del campo magnetico attraverso l'area della spira $\boldsymbol{x \cdot b}$, otteniamo

$$\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \widehat{u_n} d\Sigma = \frac{d}{dt}(Bbx) = Bb\frac{dx}{dt} = Bbv$$

Questo risultato, cambiato di segno, è esattamente uguale all'espressione della forza elettromotrice indotta. Possiamo allora concludere che l'origine del campo elettrico e della f.e.m. indotti risiede nella forza di Lorentz.

Se invece consideriamo una spira ferma e immersa in un campo magnetico che varia nel tempo, la legge di Faraday ci dice che questa variazione induce un campo elettrico. Supponendo per semplicità che la spira sia tonda di raggio $\boldsymbol{r}$, il campo elettrico indotto sarà tangente alla spira e avrà modulo

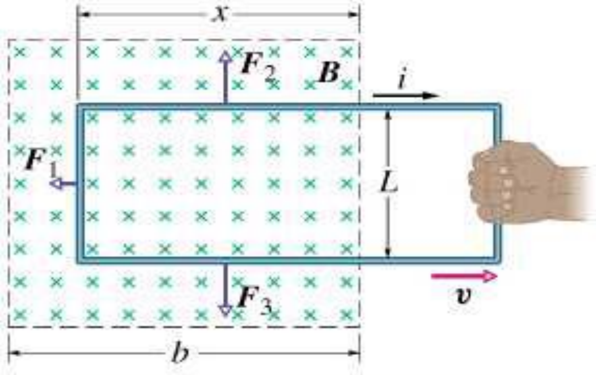
$$\vec{E}_i = \frac{\mathcal{E}_i}{2\pi r} = -\frac{1}{2\pi r}\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{1}{2\pi r}\frac{d}{dt}\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \widehat{u_n} d\Sigma = -\frac{\pi r^2}{2\pi r}\frac{\partial B}{\partial t} =$$



Gli elettroni nella spira si muoveranno sotto l'azione del campo elettrico esercita una forza $\vec{F}_i = -e\vec{E}_i$. Iniziato il moto, essi sentiranno l'azione combinata di $\vec{F}_i$ e $\vec{F}_L$.

Possiamo allora concludere che, **in ogni caso, la f.e.m. indotta ha origine nella forza di Lorentz** complessiva $\vec{F}_L = -e(\vec{E}_i + \vec{v} \times \vec{B})$

Esercizio 8.1



Supponiamo una spira rettangolare inizialmente immersa in una regione con un campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ costante ed uniforme. Ad un certo momento la spira viene trascinata fuori dalla regione ad una velocità costante $\vec{\mathbf{v}}$. Qual è la forza necessaria a muovere la spira a velocità costante?

Esercizio 8.2

Una spira circolare è immersa in una zona in cui è presente un campo magnetico variabile nel tempo $\vec{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{t})$. Determinare l'espressione del campo elettrico indotto $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{i}}$.

Esercizio 8.3

Abbiamo una spira rettangolare di larghezza **L = 3 m** e altezza **H = 2 m**. Il campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ è variabile e non uniforme con espressione **B = 4** $\mathbf{t^2 x^2}$ ed entrante nel foglio. Quali sono modulo e direzione della f.e.m. indotta per **t = 0.1 s**?

8.4 Applicazioni della legge di Faraday

8.4.1 Generatore di corrente alternata

Consideriamo una spira rettangolare che ruoti con velocità angolare ω attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. All'istante t generico, la spira forma un angolo θ con la direzione del campo magnetico $\vec{B}$. Il flusso del campo magnetico vale

$$\Phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \widehat{u_n} d\Sigma = B\Sigma cos\theta = B\Sigma cos(\omega t)$$

La f.e.m. nel circuito risulta

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \omega B\Sigma sen(\omega t)$$

La f.e.m. varia sinusoidalmente tra $\mathcal{E}_{min} = -\omega B\Sigma$ ed $\mathcal{E}_{max} = \omega B\Sigma$. Se R è la resistenza della spira, nel circuito scorre una **corrente alternata**

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{\omega B\Sigma}{R} sen(\omega t)$$

Anche la potenza elettrica varia nel tempo. **La potenza media**, in un periodo di rotazione della spira, **è equivalente a quella erogata da un generatore avente f.e.m. efficace** $\mathcal{E}_{eff}$= $\mathcal{E}_{max}/\sqrt{2}$ **e vale**

$$\mathcal{P}_m = \frac{\mathcal{E}_{max}^2}{2R}$$

8.4.2 Misure di campo magnetico

Abbiamo visto che se una spira di resistenza R viene mossa in un campo magnetico, in essa scorre corrente data

$$\boldsymbol{i} = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

Se allora vogliamo calcolare la carica che è complessivamente fluita nella spira tra due istanti di tempo dobbiamo integrare:

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i\,dt = -\frac{1}{R}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}dt = -\frac{1}{R}\int_{t_1}^{t_2} d\Phi(\vec{B}) = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$$

Osserviamo che il valore della **carica non dipende dalla legge temporale con cui varia il flusso del campo magnetico, ma solo dal valore iniziale e finale** di $\Phi(\vec{B})$. Questa relazione, nota come **legge di Felici**, fornisce un metodo semplice per misurare l'intensità del campo magnetico.

Ad esempio, data una bobina piatta costituita da N spire di area $\boldsymbol{\Sigma}$, posta in un campo magnetico $\vec{B}$, uniforme, e poi spostata in una zona di campo nullo, possiamo misurare l'intensità di $\vec{B}$ attraverso:

$$q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = \frac{NB\Sigma}{R} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{qR}{N\Sigma}$$

8.5 Autoinduzione

Un circuito percorso da corrente produce, qualunque sia la sua forma, un campo magnetico $\vec{B}$ in accordo con la legge di Ampere-Laplace. **Il flusso di questo campo è** ovviamente **concatenato al circuito stesso** e, per questa ragione, viene detto **autoflusso**. Considerata una qualsiasi superficie $\boldsymbol{\Sigma}$ appoggiata al circuito, l'autoflusso di $\vec{B}$ attraverso $\boldsymbol{\Sigma}$ è

$$\boldsymbol{\Phi}(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \widehat{u_n} d\Sigma = \int_{\Sigma} \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \widehat{u_r}}{r^2} \right) \cdot \widehat{u_n} d\Sigma$$

Henry

L'autoinduttanza si misura in Henry:

$$1\ H = \frac{1W}{1A} = 1\Omega 1s$$

Osserviamo che sia il campo magnetico che il suo flusso dipendono dalla corrente che scorre nel circuito. Perciò, possiamo riscrivere l'equazione precedente come

$$\boldsymbol{\Phi}(\vec{B}) = Li$$

Il fattore L viene detto **coefficiente di autoinduzione** o **induttanza** del circuito e **dipende dalla forma del circuito e dalle proprietà magnetiche del mezzo**.

8.6 Induttanza di un solenoide

Abbiamo già visto che il campo magnetico di solenoide infinitamente lungo e costituito da spire compatte è diretto lungo l'asse. Se $\boldsymbol{n}$ è la densità di spire, $\boldsymbol{\Sigma}$ la sezione delle spire e $\boldsymbol{i}$ la corrente che le attraversa, il modulo del campo magnetico è

$$\boldsymbol{B = \mu_0\, n\, i}$$

Il flusso del campo magnetico attraverso una sezione del solenoide è dato dal prodotto del flusso del campo magnetico prodotto da una spira per il numero $\boldsymbol{N}$ di spire. Se consideriamo un tratto di solenoide lungo $\boldsymbol{l}$, il flusso del campo magnetico generato dalle spire contenute in questo tratto è

$$\boldsymbol{\Phi_s(\vec{B}) = N\, \Phi_1(\vec{B}) = NB\Sigma = (nl)\mu_0 n i \Sigma = \mu_0 n^2 \Sigma\, l\, i}$$

Possiamo allora ricavare l'espressione dell'**induttanza di un tratto $\boldsymbol{l}$ di solenoide**

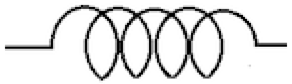
$$\boldsymbol{L = \mu_0 n^2 \Sigma\, l}$$

E l'**induttanza per unità di lunghezza** è

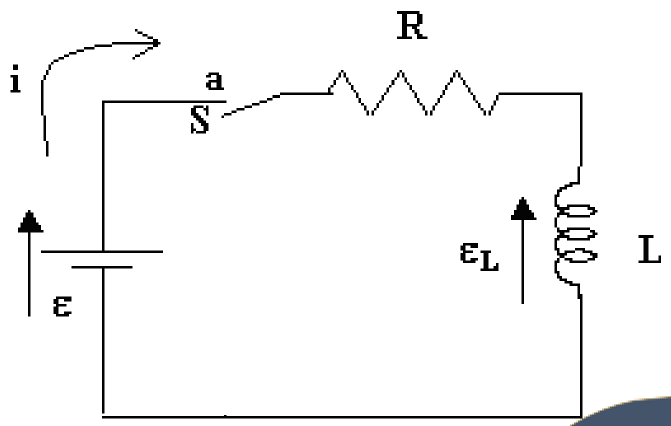
$$\boldsymbol{L_l = \mu_0 n^2 \Sigma}$$

8.7 Circuiti con induttori - Circuito RL

Un circuito con induttanza non nulla è detto induttivo. Nei casi in cui l'**induttanza** è **concentrata in un tratto del circuito, come ad esempio in un avvolgimento** del circuito, questo «tratto» di conduttore si chiama **induttore** ed è rappresentato come elemento circuitale dal simbolo in figura.



Osserviamo che, **quando la corrente in un circuito non è costante**, **si** ha una variazione nel tempo dell'autoflusso del campo magnetico che, a sua volta, **genera una f.e.m. indotta nel circuito**, detta **f.e.m. di autoinduzione**, che possiamo dedurre dalla legge di Faraday-Lenz:



$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

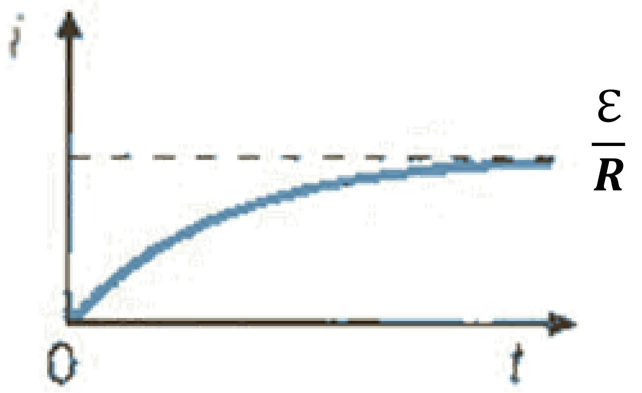
Consideriamo un **circuito RL**, composto da un resistore avente resistenza R e da un induttore con induttanza L, in serie con un generatore di forza elettromotrice $\mathcal{E}$. Supponiamo di inserire un interruttore S che, alla sua chiusura, consente il passaggio della corrente nella maglia. Nel momento in cui l'interruttore viene spostato nella posizione *a*, alla f.e.m. $\mathcal{E}$ si aggiunge una f.e.m. di autoinduzione $\mathcal{E}_L$.

Applichiamo la seconda legge di Kirchhoff alla maglia:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{Ri}$$

Che possiamo riscrivere come

$$\mathcal{E} - \boldsymbol{L}\frac{\boldsymbol{di}}{\boldsymbol{dt}} - \boldsymbol{Ri} = \mathbf{0}$$



Questa equazione differenziale del primo ordine ha soluzione

$$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{t}) = \frac{\mathcal{E}}{\boldsymbol{R}}\left(\mathbf{1} - \boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{t}}\right)$$

La costante $\tau = \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{R}}$ è detta **costante di tempo induttiva** del circuito.

La corrente, inizialmente nulla, cresce lentamente sino al valore a regime ($\boldsymbol{i} = \frac{\mathcal{E}}{\boldsymbol{R}}$). Una volta raggiunto il valore di regime, il circuito diventa puramente resistivo.

Osserviamo che la presenza dell'induttore impedisce alla corrente di aumentare in maniera istantanea. La differenza tra il valore della corrente a regime ed il valore della corrente che effettivamente scorre nel circuito ci suggerisce che, durante il transitorio, si manifesta una ulteriore corrente, di segno opposto a quello della corrente che possiamo calcolare Applicando la legge di Ohm al resistore, detta **extracorrente di chiusura**.

Calcoliamo la potenza erogata dal generatore quando la corrente ha valore $\boldsymbol{i}$:

$$\boldsymbol{P} = \mathcal{E}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{i}\frac{\boldsymbol{di}}{\boldsymbol{dt}} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{P_L} + \boldsymbol{P_R}$$

La potenza erogata dal generatore viene in parte spesa per far circolare corrente nel circuito e trasformato in calore per effetto Joule, in parte speso contro la forza elettromotrice di autoinduzione per far aumentare la corrente. Nell'intervallo di tempo necessario a far aumentare la corrente nel circuito da 0 a $\boldsymbol{i}$, viene speso il lavoro

$$\boldsymbol{W_L} = \int_0^i \boldsymbol{L}\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{di} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{i}^2$$

Osserviamo che $\boldsymbol{W_L}$ dipende solo dai valori iniziale e finale della corrente, per cui possiamo definire un'**energia intrinseca della corrente**

$$U_L = \int_0^i \boldsymbol{d}U_L = \int_0^i \boldsymbol{L}\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{di} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{i}^2$$

che è l'energia immagazzinata nell'induttore e necessaria a creare il campo magnetico al suo interno.

Per un solenoide, poiché il campo magnetico è tutto contenuto all'interno, si può definire una densità di energia magnetica

$$u_L = \frac{U_L}{\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{\mu_0}\boldsymbol{n}^2\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{\Sigma}\frac{\boldsymbol{B}^2}{\boldsymbol{n}^2\boldsymbol{\mu_0^2}} = \frac{\boldsymbol{B}^2}{\mathbf{2}\boldsymbol{\mu_0}}$$

8.8 Legge di Ampère-Maxwell

Nel vuoto, il campo magnetico obbedisce alla legge di Ampere:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \mu_0 i_c$$

con i_c la corrente concatenata alla linea C su cui è calcolata la circuitazione di $\vec{B}$.

Abbiamo visto che, nel caso di un **circuito RC**, possiamo definire una corrente di spostamento fittizia che attraversa il condensatore, che ben rappresenta gli effetti della variazione del campo elettrico (e del suo flusso) all'interno del condensatore. Se prendiamo in considerazione tutti i tipi di correnti che possono essere presenti all'interno di un circuito, otteniamo allora la **Legge di Ampère-Maxwell**

$$\oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \mu_0 \left(i_c + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_\Sigma(\vec{E})}{dt} \right)$$

la quale stabilisce che i **campi magnetici possono essere prodotti sia da cariche in movimento, ovvero dalle correnti di conduzione, sia da variazioni, nel tempo, del flusso del campo elettrico.**

Osserviamo che, in una regione di spazio in cui non siano presenti cariche di conduzione in movimento $(\boldsymbol{i_c} = \mathbf{0})$ ma abbia luogo una variazione del campo elettrico nel tempo, la legge di Ampère-maxwell diventa

$$\oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$

Dove si pone $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$.

Osserviamo che l'equazione appena trovata presenta una simmetria rispetto alla legge di Faraday

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

In particolare, osservando e confrontando queste due equazioni, possiamo concludere, come fu intuizione di Maxwell, che **il campo elettrico e quello magnetico sono strettamente correlati e la variazione, nel tempo, di uno di questi due campi, dà luogo alla comparsa dell'altro**.

8.9 Equazioni di Maxwell

Tutte le proprietà dei campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ studiate sino ad ora, nel vuoto, sono riassunte dalle seguenti quattro equazioni, note come **equazioni di Maxwell**

Legge di Gauss per $\vec{E}$ $$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \widehat{u_n} d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}$$ Le cariche elettriche sono sorgenti di $\vec{E}$

Legge di Gauss per $\vec{B}$ $$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \widehat{u_n} d\Sigma = 0$$ Il campo magnetico è solenoidale (non esistono i monopoli magnetici)

Legge di Faraday $$\oint_{C} \vec{E} \cdot \vec{ds} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$ Un campo magnetico variabile nel tempo è sorgente di $\vec{E}$

Legge di Ampere-Maxwell $$\oint_{C} \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_0 \left(i_c + \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right)$$ Cariche di conduzione e campi elettrici variabili nel tempo sono sorgenti di $\vec{B}$

La soluzione di queste equazioni permette di determinare, note q ed i_c, i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ i quali agiscono su una carica di prova q_0 mediante la forza di Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$