



# Capitolo 6

## Campo magnetico

# 6.1 Introduzione

La proprietà della magnetite di attrarre la limatura di ferro è nota sin dal VII secolo a.C. I materiali che possiedono tale proprietà sono detti **magnetici** e generano, analogamente alle cariche elettriche, un campo, detto **campo magnetico**  $\vec{B}$ , che esercita una forza, la **forza magnetica**, su un magnete di prova.

Le osservazioni sperimentali sui magneti, però, mostrano delle differenze rispetto al campo elettrostatico: si osserva che **ogni magnete ha due poli** (positivo e negativo) e, a differenza del caso elettrico, **non esistono** poli magnetici (**monopoli**) isolati. Questo evidenzia una differente natura del campo magnetico, anche se la definizione operativa ripercorre le stesse metodologie usate per il campo elettrico.

Analizziamo le evidenze sperimentali che hanno portato ad una formulazione rigorosa delle leggi dell'elettromagnetismo.

Nell'800 **Oersted** dimostrò con i suoi esperimenti come un **ago magnetico** fosse **deviato dalla presenza di correnti** e che, utilizzando **limatura di ferro**, si potesse avere **evidenza delle linee di campo magnetico generate da fili percorsi da corrente** (linee **uscanti dal polo Nord** ed **entranti nel polo Sud**). Successivamente, **Ampere** dimostrò che le **interazioni magnetiche sono manifestazioni delle interazioni tra cariche in movimento** e, di conseguenza, per spiegare il comportamento dei magneti permanenti bisogna ipotizzare l'esistenza di correnti microscopiche (**correnti amperiane**).

# 6.2 Forza di Lorentz

Consideriamo una regione di spazio in cui sia presente un campo magnetico  $\vec{B}$ . Supponiamo di porre in tale regione una carica elettrica  $q$  di massa  $m$  in moto con velocità  $\vec{v}$ . Essa risentirà di una forza magnetica, detta **forza di Lorentz**

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

La forza di Lorentz esercitata da  $\vec{B}$  su  $q$  ha:

- **Modulo** pari a  $F_L = qvB \sin \theta$ , con  $\theta$  l'angolo tra il vettore  $\vec{v}$  ed il vettore  $\vec{B}$ .
- **Direzione** perpendicolare al piano individuato dai vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$
- **Verso** determinato dalla regola della mano destra

La forza di Lorentz è sempre ortogonale alla velocità e, quindi, alla traiettoria della carica. L'assenza di una componente tangenziale alla traiettoria ci dice che  $\vec{F}_L$  è una forza centripeta ed il lavoro compiuto per spostare una carica da A a B è:

$$W = \vec{F}_L \cdot d\vec{s} = 0$$

Dal teorema dell'energia cinetica  $\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W$

ricaviamo che **sotto l'azione della forza di Lorentz la velocità della carica cambia in direzione, ma non in modulo.**

## Tesla

Il campo magnetico si misura in Tesla:

$$1 T = \frac{1 N}{1 A \cdot 1 m}$$

# 6.3 Seconda legge elementare di Laplace

Come abbiamo visto, la corrente elettrica nei conduttori è associata al moto degli elettroni  $e$ , a partire dalla loro velocità di deriva, possiamo definire una densità di corrente  $\vec{j} = -nev_d$ . Se un conduttore percorso da corrente è immerso in un campo magnetico, ciascun elettrone risentirà della forza di Lorentz  $\vec{F}_L$ . Se consideriamo un tratto del filo di lunghezza infinitesima  $ds$  e sezione  $\Sigma$ , la forza agente sugli elettroni contenuti in tale volume è

Orientato come  $\vec{j}$  !

$$d\vec{F} = n \Sigma ds \vec{F}_L = -n\Sigma ds e \vec{v}_d \times \vec{B} = \Sigma ds \vec{j} \times \vec{B} = i \vec{ds} \times \vec{B}$$

Questa relazione è detta **seconda legge elementare di Laplace** ed esprime il fatto che **un filo percorso da corrente immerso in un campo magnetico sente una forza perpendicolare al piano che contiene il filo ed il campo magnetico.**

La forza esercitata su un filo indeformabile di lunghezza finita si ottiene integrando la relazione precedente tra i suoi estremi

$$\vec{F} = \int_P^Q i d\vec{s} \times \vec{B}$$

Se il **campo magnetico** è **uniforme** e il **filo** è **rettilineo**, di lunghezza  $L$ ,

$$\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$$

Se, invece, il **campo magnetico** è **uniforme** ma il **filo conduttore** è **curvilineo**

$$\vec{F} = i \left( \int_P^Q \vec{ds} \right) \times \vec{B} = i\overrightarrow{PQ} \times \vec{B}$$

Ovvero, la **forza magnetica** che un **campo magnetico uniforme** esercita su un **filo percorso da corrente** non **dipende** dalla forma del filo, ma **solo dalla lunghezza del segmento che unisce i suoi estremi**.

Osserviamo che, nel caso di un **circuito** (filo chiuso  $\Rightarrow \overrightarrow{PQ}=0$ ) la **forza magnetica risultante** è **nulla**.

## 6.4 Momenti torcenti su circuiti piani

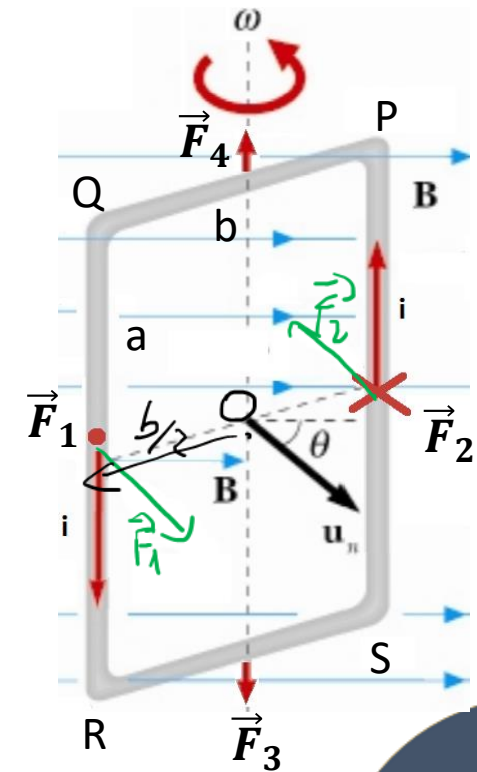
Consideriamo una **spira rettangolare** di lati  $a$  e  $b$  percorsa da corrente  $i$  ed immersa in un **campo magnetico uniforme**, con il quale forma un angolo  $\theta$ , come mostrato in figura.

Ogni segmento della spira è soggetto ad un forza magnetica.

- $\overline{QR}$  : la forza  $\vec{F}_1$  ha modulo  $aiB$ , è perpendicolare al piano contenente  $\vec{B}$  e  $\overline{QR}$  e ha verso uscente dal foglio
- $\overline{SP}$  : la forza  $\vec{F}_2$  ha stesso modulo e direzione di  $\vec{F}_1$  ma verso entrante nel foglio
- $\overline{RS}$  : la forza  $\vec{F}_3$  ha modulo  $biB\cos\theta$  e ha direzione e verso dell'asse  $y$  della spira
- $\overline{PQ}$  : la forza  $\vec{F}_4$  ha stesso modulo e direzione di  $\vec{F}_3$  ma verso opposto

Osserviamo che  $\vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$  si annullano, mentre  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  costituiscono una coppia di forza che genera un momento di modulo

$$M = i a B b \sin\theta = i \Sigma B \sin\theta$$



Definiamo il **momento magnetico della spira**

$$\vec{m} = i \Sigma \hat{u}_n$$

parallelo e concorde a  $\hat{u}_n$  e avente modulo pari al prodotto dell'intensità di corrente che attraversa la spira per l'area della spira.

Possiamo allora concludere che il **momento torcente che agisce sulla spira** è

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = i \Sigma \hat{u}_n \times \vec{B}$$

Tale relazione resta valida per una spira di qualunque forma. Osserviamo che **l'effetto di un campo magnetico uniforme su una spira percorsa da corrente è quello di farla ruotare, sino a che il piano della spira non diventa perpendicolare al campo magnetico ( $\hat{u}_n \perp \vec{B}$ ).**

Consideriamo ora una spira percorsa da corrente, avente momento di inerzia ed immersa in campo magnetico uniforme. Supponiamo che la spira si trovi inizialmente in una posizione di equilibrio e venga spostata di un piccolo angolo rispetto a tale posizione. Sulla spira agirà un momento

$$M = -mB \sin\theta \approx -mB\theta = \frac{dL}{dt} = I\alpha = \frac{Id^2\theta}{dt^2}$$

Il segno negativo indica che il momento delle forze richiama sempre la spira alla sua posizione di equilibrio.

Dalle relazioni precedenti ricaviamo l'equazione del moto armonico della spira

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad \omega = \sqrt{\frac{mB}{I}}$$

La spira compie delle piccole oscillazioni attorno all'asse di rotazione, con periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{i\Sigma B}}$$

Dalla misura del periodo è quindi possibile ricavare l'intensità del campo magnetico.

In analogia con il campo elettrico, possiamo determinare una **energia potenziale magnetica**

$$U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -i \Sigma B \cos\theta$$

Legata al momento torcente dalla relazione

$$M = -\frac{dU_m}{d\theta} = -m B \sin\theta$$

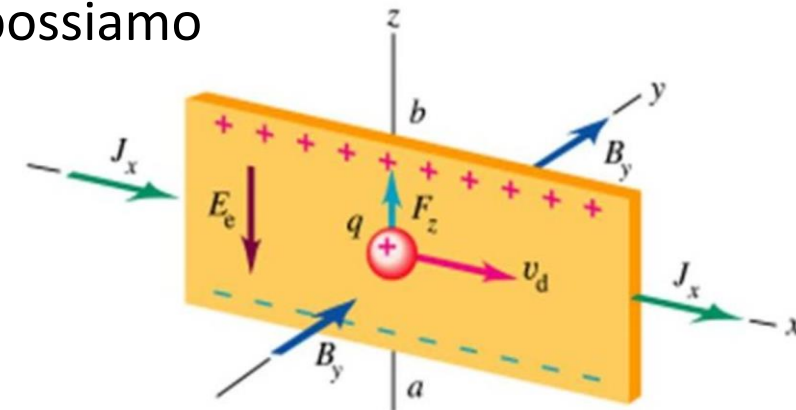


# 6.5 Effetto Hall

Consideriamo una lamina conduttrice percorsa da corrente  $i$  diretta verso l'asse delle  $x$  ed immersa in campo magnetico uniforme  $\vec{B}$  concorde con l'asse  $y$ . Supponiamo che la lamina abbia sezione  $\Sigma = ab$  ( $b$  lungo l'asse  $z$ ,  $a$  lungo l'asse  $y$ ).

Mentre scorrono all'interno della lastra, i portatori di carica sentiranno l'effetto della forza di Lorentz  $\vec{F}_L$  che li farà deviare verso gli estremi della lastra (gli elettroni si accumuleranno sul bordo inferiore). Alla forza di Lorentz possiamo associare un campo elettromotore  $\vec{E}_H$ , anche noto come **campo di Hall**

$$\vec{E}_H = \frac{\vec{F}_L}{q} = \vec{v}_d \times \vec{B} = \frac{\vec{J}}{ne} \times \vec{B}$$



Sotto l'azione del campo elettromotore  $\vec{E}_H$  si creerà un accumulo di carica dei due segni sugli estremi opposti della lamina. Questa separazione di carica, a sua volta, instaurerà un campo elettrostatico  $\vec{E}_e$  lungo l'asse  $z$ , opposto a  $\vec{E}_H$ .

Si giungerà ad una situazione di equilibrio in cui le forze esercitate dai due campi si bilanceranno:

$$e\vec{E}_H + e\vec{E}_e = \mathbf{0}$$



$$eE = ev_d B$$

Riprendendo la relazione tra densità di corrente, intensità di corrente e campo magnetico, otteniamo

$$E = v_d B = \frac{j}{n e} B = \frac{iB}{ne\Sigma}$$

Infine, possiamo ricavare la differenza di potenziale agli estremi della lamina (**tensione di Hall**)

$$V = Eb = \frac{iB}{nea}$$

Le sonde ad effetto Hall si basano proprio sull'effetto Hall e possono essere usate per:

- 1) misurare campi magnetici tramite la misura della differenza di potenziale
- 2) determinare la concentrazione dei portatori maggioritari nel conduttore ed il loro segno (dal segno del potenziale tra i due lati), noto il campo magnetico.

# 6.6 Moto di una particella carica in un campo magnetico

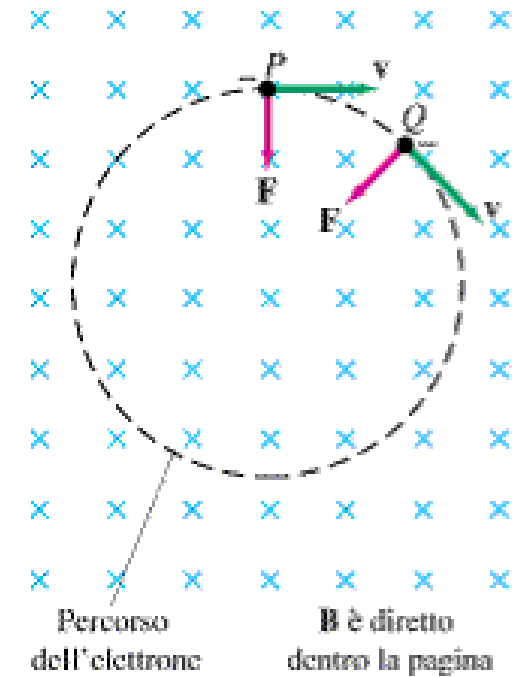
Riprendiamo il caso studiato quando abbiamo introdotto la forza di Lorentz. Consideriamo una carica elettrica  $q$  di massa  $m$  in moto con **velocità iniziale  $\vec{v}$ , ortogonale al campo magnetico**. La forza di Lorentz devia continuamente la particella, facendola muovere di **moto circolare**. Dalla seconda Legge di Newton otteniamo

$$qvB = ma_c = m \frac{v^2}{r}$$

da cui possiamo ricavare il raggio di curvatura  $r = \frac{mv}{qB}$

ed il periodo di rotazione  $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m v}{v q B} = \frac{2\pi m}{q B}$

Nel caso generale in cui la **velocità iniziale** ha una **componente parallela al campo magnetico**, il moto risultante sarà la combinazione di un moto circolare, sul piano contenente  $\vec{v}$  e  $\vec{F}$ , e rettilineo, lungo la direzione di  $\vec{B}$ , ovvero la particella carica si muoverà di **moto elicoidale**.



Vediamo ora cosa accade ad una carica elettrica  $q$  (in figura, negativa) di massa  $m$  in moto con **velocità iniziale**  $\vec{v}$  in una regione dello spazio in cui siano presenti **un campo magnetico ed un campo elettrico, entrambi uniformi, incrociati ed ortogonali a  $\vec{v}$** .

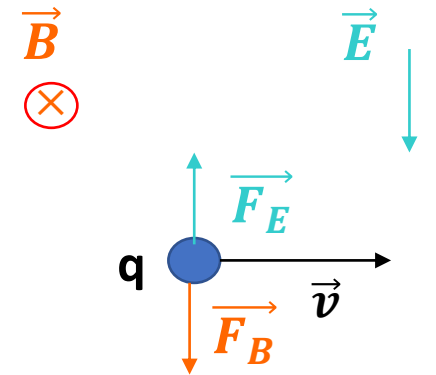
È possibile creare le condizioni affinché la **forza totale** agente sulla carica (cui spesso ci si riferisce col nome di **forza di Lorentz**) sia nulla, ovvero la forza elettrostatica e quella magnetica siano uguali ed opposte:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \mathbf{0}$$

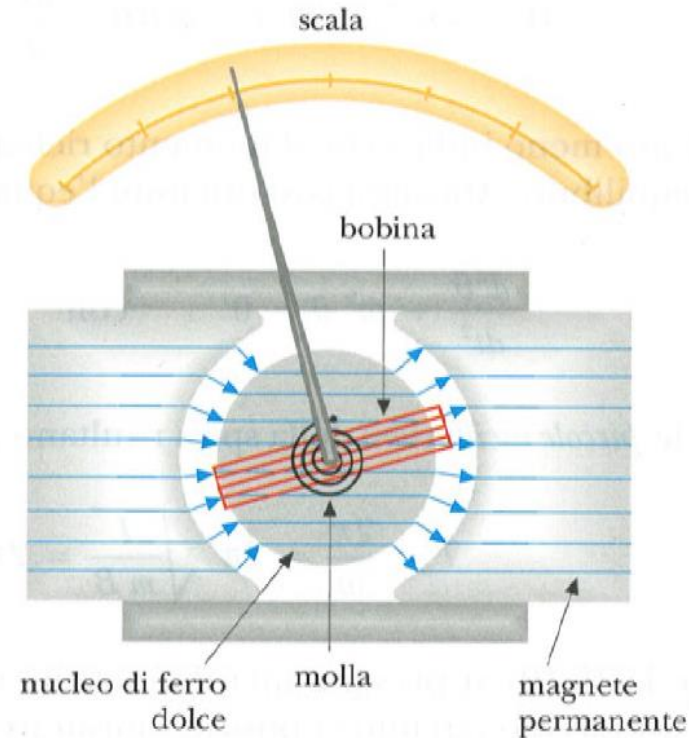
Da cui ricaviamo

$$E = B v$$

I due campi possono essere scelti opportunamente in modo da creare un selettore di velocità. Il selettore di velocità è, a sua volta, il primo stadio di uno spettrometro di massa.



# Funzionamento del Galvanometro



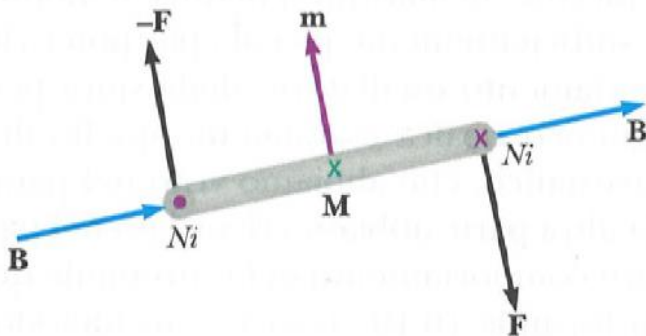
Nucleo di ferro dolce per rendere sempre perpendicolari le linee di campo alla superficie del cilindro, quindi ai lati verticali della bobina

$$\vec{m} = i \Sigma \hat{u}_n \quad \vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = i \Sigma \hat{u}_n \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad M = Ni\Sigma B$$

Quando passa la corrente, la bobina subisce un momento torcente opposto alle molle di richiamo

$$k\theta = Ni\Sigma B \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{Ni\Sigma B}{k}$$

Se la scala è lontana  $l$  dal centro dall'asse della bobina, lo spostamento  $s_0$  sulla scala è  $s_0 = \theta \cdot l$  quindi  $\theta = s_0/l$



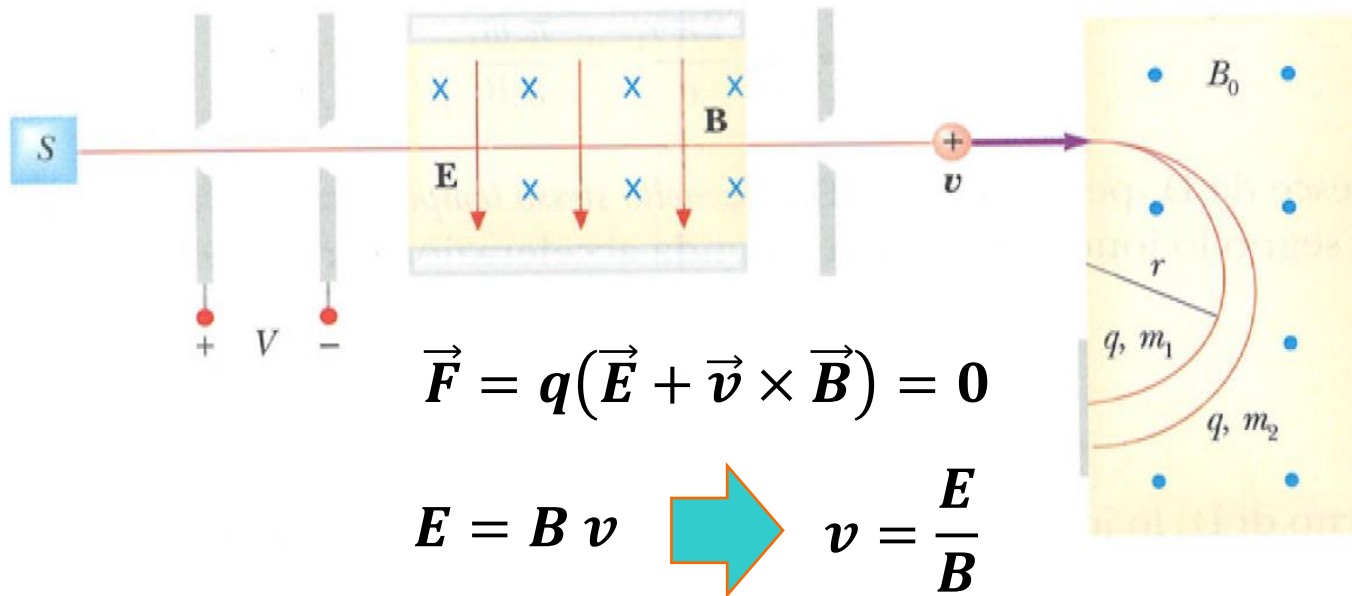
$$i = \left( \frac{ks_0}{N\Sigma B l} \right) n = S n$$

$S$  è la sensibilità dello strumento

# Spettrometro di massa di Bainbridge

CAMPI  
MAGNETICI  
Selettore di  
velocità e  
spettrometro di  
massa

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = qV$$



$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0$$

$$E = Bv \quad \Rightarrow \quad v = \frac{E}{B}$$

$$qvB_0 = ma_c = m \frac{v^2}{r}$$

$$r = \frac{mv}{qB_0} = \frac{E}{BB_0} \frac{m}{q}$$

Gli ioni vengono prodotti dalla sorgente e accelerati sotto la ddp  $V$ . Successivamente vengono fatti transitare in una zona in cui insistono sia un campo magnetico che elettrico che generano forze opposte: si sceglie l'intensità di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  in maniera tale che solo gli ioni con velocità  $v$  passino indisturbati. Infine gli ioni selezionati accedono alla zona interessata dal solo campo magnetico  $\mathbf{B}_0$  e a secondo del rapporto  $m/q$  descriveranno semicirconferenze di raggi diversi.