



Capitolo 1

Elettrostatica

1.1 Introduzione

La descrizione dei fenomeni fisici può essere ricondotta a quattro interazioni fondamentali:

gravitazionale (oggetto del corso di Fisica Generale – mod. a), **elettromagnetica** (oggetto del corso di Fisica Generale – mod. b), **nucleare debole e forte**.

Fenomeni di elettromagnetismo, quali la proprietà dell'ambra strofinata di attrarre dei piccoli filamenti di paglia o la capacità della magnetite di attrarre metalli come il ferro, erano noti sin dal VII secolo a.C. Vennero, così, introdotti i concetti di **carica elettrica** e **magnete** e si osservò che **corpi elettrizzati** (ovvero dotati di carica) e **corpi magnetizzati** (dotati di poli magnetici) esercitavano **forze reciproche attrattive o repulsive**.

Tra la fine del '700 e l'inizio dell' '800 gli scienziati giunsero ad una formulazione quantitativa delle leggi che governavano le interazioni tra cariche e tra magneti, a partire da delle leggi empiriche. A lungo gli studi furono condotti in modo parallelo, dando vita alle due branche della fisica note come **elettrostatica e correnti e magnetismo**.

Le due discipline furono considerate indipendenti sino agli inizi dell' '800, quando Oersted, Faraday e poi Ampere osservarono dei **legami tra fenomeni elettrici e magnetici**. Grazie alle intuizioni di Maxwell si giunse, infine, alla formulazione di 4 leggi, note come **leggi di Maxwell**, che rappresentano le **equazioni generali dell'elettromagnetismo**.

Nel XVI secolo Gilbert effettuò uno studio sistematico sulle «proprietà elettriche» dei materiali. In primo luogo, egli osservò che esistevano materiali che, se strofinati, acquistavano la capacità di attrarre corpuscoli leggeri, mentre altri no.

Tale osservazione ha condotto in primo luogo all'introduzione di una grandezza fisica, la **carica elettrica**, che **misura lo stato di elettrizzazione dei corpi**.

La carica elettrica

La carica elettrica è una proprietà intrinseca della materia e può avere **segno positivo o negativo**. **Cariche di segno uguale si respingono**, mentre **cariche di segno opposto si attraggono**.

Le evidenze sperimentali sull'elettrizzazione dei corpi (in particolare sul diverso comportamento delle sostanze quando venivano strofinate con un panno di lana) portarono, poi, a distinguere i materiali in **isolanti** e **conduttori**.

Isolanti e conduttori

Sono **isolanti** le sostanze come l'ambra o il vetro che, se strofinate (ad esempio con un panno di lana), vengono elettrizzate, ovvero diventano elettricamente cariche. Sono **conduttori** i materiali che non presentano alcuna elettrizzazione e, se strofinati, restano elettricamente neutri. La differenza di comportamento è legata alla struttura atomica o molecolare del materiale e va ricercata nella **presenza** (conduttori) o **assenza** (isolanti) **di cariche che si possono muovere facilmente** all'interno del materiale.

Il comportamento elettrico dei corpi si può spiegare, dunque, attraverso un'indagine sulla **struttura elettrica della materia** e sulla **natura dei suoi costituenti**.

Nel modello semiclassico, i costituenti fondamentali della materia ordinaria stabile sono gli atomi, a loro volta costituiti da un nucleo, in cui si trovano **protoni** (particelle a **carica positiva**) e **neutroni** (particelle a **carica nulla**), attorno al quale orbitano gli **elettroni** (particelle a **carica negativa**).

La carica dell'elettrone è la più piccola carica osservata sperimentalmente e, per questo, è detta **carica elementare**. Il suo valore si misura in **Coulomb** (C) e vale **$e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C**.

Nel processo di **elettrizzazione per strofinio** di un materiale isolante, quindi, si ha una separazione meccanica delle cariche ed un successivo **trasferimento di elettroni** da un materiale all'altro.

Poiché non esistono frazioni della carica elementare (come dimostrato dall'esperimento di Millikan), lo spostamento riguarda un **numero intero di elettroni**. Possiamo quindi concludere che la **carica** è una **grandezza fisica quantizzata**.

Principio di conservazione della carica elettrica

Sperimentalmente si osserva che, su scala sia microscopica che macroscopica, in un sistema isolato **la carica si conserva**, ovvero la **somma algebrica delle cariche non varia nel tempo**.

1. Elettrizzazione per strofinio

Si consideri un sistema isolato costituito da una **bacchetta di vetro** neutra ed un **panno** neutro. La carica totale del sistema è $Q_{\text{tot}} = 0 + 0 = 0$

Se si strofina la bacchetta col panno, la bacchetta si carica di una carica $+Q$ ed il panno di una carica uguale ed opposta $-Q$. Il sistema (bacchetta + panno) ha ancora carica complessiva nulla:

$$Q'_{\text{tot}} = +Q + (-Q) = 0 = Q_{\text{tot}} !!!$$

2. Elettrizzazione per contatto

Si consideri un sistema isolato costituito da una **bacchetta di bachelite** carica negativamente (-Q) ed una **sfera di metallo** neutra.

La carica totale del sistema è $Q_{\text{tot}} = -Q + 0 = -Q$

Se si mette in contatto la bacchetta con la sfera (ovvero se le fate toccare), una parte degli elettroni in eccesso della bacchetta si trasferirà sul conduttore e si distribuirà su tutta la sua superficie. Senza altri dati, non sappiamo calcolare con precisione qual è la nuova carica di ciascun elemento del sistema ma, per la conservazione della carica, possiamo sicuramente dire che la carica totale del sistema è $Q'_{\text{tot}} = -Q = Q_{\text{tot}}$

3. Elettrizzazione per contatto bis

Si consideri adesso un sistema isolato costituito da una **bacchetta di vetro** carica positivamente (+Q) ed una **sfera di metallo** neutra, successivamente messe a contatto. Valgono le stesse considerazioni del caso 2:

$$Q_{\text{tot}} = +Q + 0 = +Q ; Q'_{\text{tot}} = +Q = Q_{\text{tot}}$$

In questo caso, però, il trasferimento di carica durante il contatto avviene dalla sfera (neutra) alla bacchetta (carica), nella zona di contatto. Infatti, sono gli elettroni, ovvero le cariche negative, a potersi «muovere liberamente» nella materia, mentre i nuclei, carichi positivamente, rimangono fissi nelle loro posizioni.

4. Elettrizzazione per induzione

Si consideri un sistema isolato costituito da una **bacchetta di bachelite** carica negativamente (-Q) ed una **sfera di metallo** neutra.

La carica totale del sistema è $Q_{\text{tot}} = -Q + 0 = -Q$

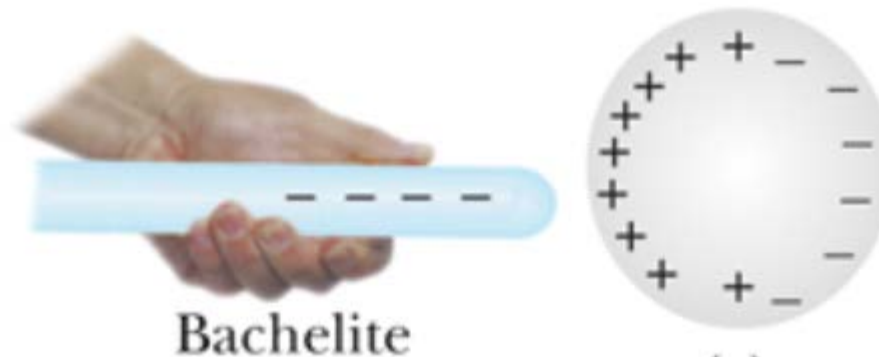
Se si avvicina la bacchetta alla sfera, senza toccarla, gli elettroni liberi della sfera si porteranno sulla parte di superficie sferica più lontana alla bacchetta, poiché respinti da quest'ultima, lasciando, dunque, un eccesso di carica positiva sull'altra calotta del conduttore.

Possiamo quindi concludere che:

i) la carica della bacchetta è e rimane -Q;

ii) la sfera rimane **globalmente neutra** (cioè la sua carica totale è sempre 0) **MA esibisce un eccesso di carica +Q**, in prossimità della bacchetta, ed un eccesso di carica -Q, sulla parte opposta della superficie;

iii) la carica complessiva del sistema (bacchetta + sfera) è $Q'_{\text{tot}} = -Q + 0 = -Q = Q_{\text{tot}}$.



5. Elettrizzazione per induzione bis

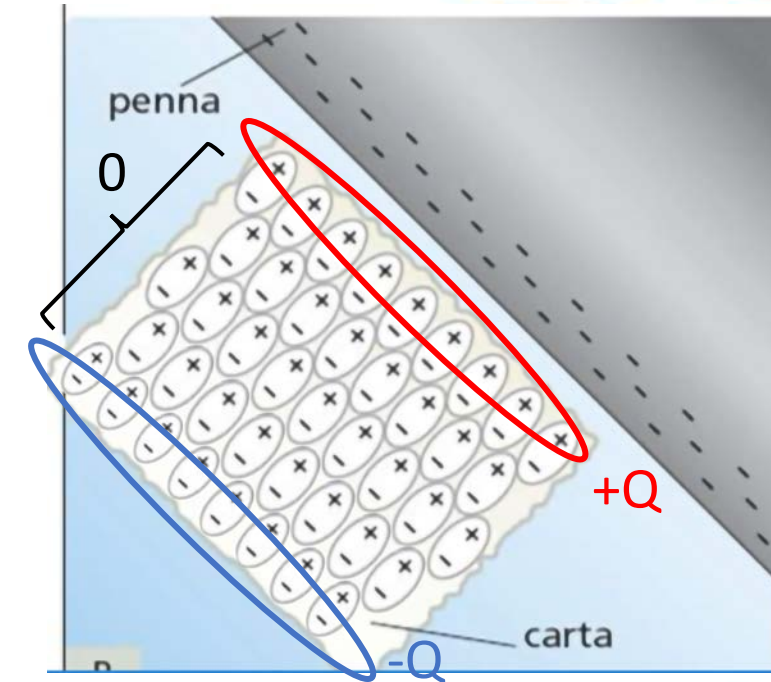
Si consideri adesso un sistema isolato costituito da una **bacchetta di plastica** carica negativamente ($-Q$) ed un **foglio di carta** (isolante) neutro.

Come nel caso 4, la carica totale del sistema è $Q_{\text{tot}} = -Q + 0 = -Q$

Se si avvicina la bacchetta al foglio, senza toccarlo, l'isolante subisce un effetto di **polarizzazione**: **pur rimanendo neutri** (vi ricordo che gli elettroni, negli isolanti, sono «legati»), **gli atomi si «deformano»**, con gli elettroni che si spostano, entro i confini dell'atomo, nella zona più lontana dalla bacchetta.

Possiamo quindi concludere che:

- i) la carica della bacchetta è e rimane $-Q$;
- ii) gli atomi del foglio si polarizzano, con un effetto complessivo di polarizzazione del foglio stesso;
- iii) il foglio rimane **globalmente neutro MA esibisce un eccesso di carica $+Q$** , in prossimità della bacchetta, ed un eccesso di carica $-Q$, sulla parte opposta;
- iv) la carica complessiva del sistema (bacchetta + foglio) è $Q'_{\text{tot}} = -Q + 0 = -Q = Q_{\text{tot}}$.



1.2 Legge di Coulomb

Si considerino due cariche puntiformi, q_1 e q_2 , poste in un sistema isolato e sia \vec{r} il vettore posizione che individua la carica q_2 rispetto a q_1 .

È bene ricordare che un vettore può essere sempre espresso come prodotto di uno scalare, pari al modulo del vettore stesso, per un versore.

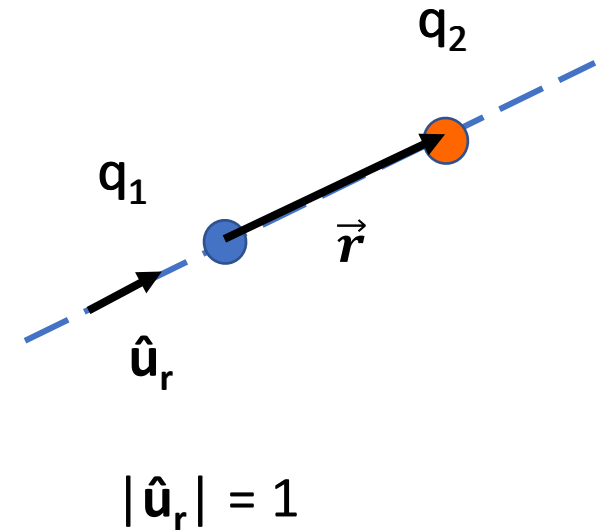
$$\vec{r} = |\vec{r}| \hat{u}_r = r \hat{u}_r$$

L'espressione scalare della forza che agisce tra due cariche fu trovata empiricamente da Coulomb, il quale usò una bilancia di torsione simile a quella usata da Cavendish per determinare la costante gravitazionale G . La forza (**grandezza vettoriale!**) che la carica q_1 esercita su q_2 è data dalla **Legge di Coulomb**:

$$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}_r \quad k = 8.99 \cdot 10^9 \frac{N m^2}{C^2}$$

Per ragioni pratiche che appariranno più avanti, è conveniente esprimere la costante k in funzione della **costante dielettrica del vuoto** ϵ_0 :

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N m^2}$$



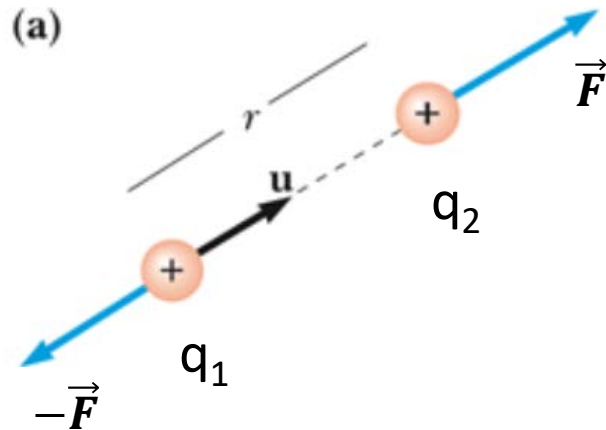
La forza esercitata da q_1 su q_2 avrà, quindi:

- **Modulo** pari a $k \frac{q_1 q_2}{r^2}$ o, analogamente, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$
- **Direzione** data dalla retta congiungente le due cariche
- **Verso** determinato dal prodotto $q_1 q_2$: uguale a \hat{u}_r , se $q_1 q_2 > 0$, opposto a \hat{u}_r , se $q_1 q_2 < 0$

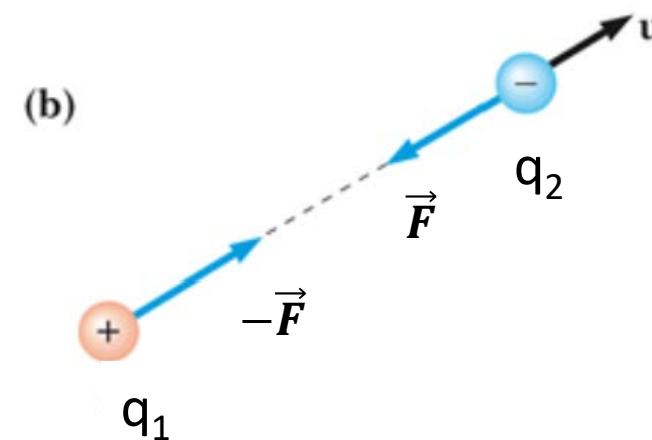
In accordo con il terzo principio della dinamica (principio di azione e reazione), se q_1 esercita una forza $\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2}$ su q_2 , allora q_2 eserciterà, a sua volta, una forza su q_1 , $\vec{F}_{q_2 \rightarrow q_1}$, pari ed opposta a $\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2}$:

$$\vec{F}_{q_2 \rightarrow q_1} = -\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2}$$

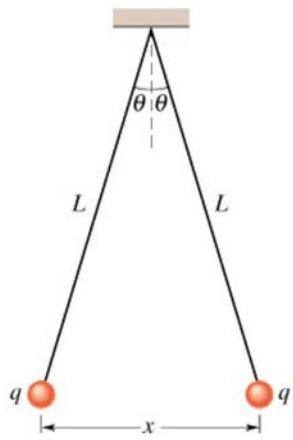
Si può alleggerire il formalismo indicando $\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2}$ con \vec{F}_{12} o \vec{F} . $\vec{F}_{q_2 \rightarrow q_1}$ sarà, allora, $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ o $-\vec{F}$.



**Cariche dello stesso segno:
Forze repulsive**



**Cariche di segno opposto:
Forze attrattive**



1.1 Due palline di egual massa sono appese con dei fili di lunghezza L ed hanno la stessa carica q . Si assuma θ piccolo e si trovi la x all'equilibrio. Si assuma $L = 1\text{m}$, $q = 2\text{ nC}$ e $m = 2 \cdot 10^{-3}\text{ kg}$.

Consideriamo, adesso, un sistema isolato formato da un numero $n > 2$ di cariche, che possiamo indicare con $q_0, q_1, \dots, q_i, \dots, q_{n-1}$.

Sperimentalmente si verifica che, **qualunque sia il valore di n** , è valido il **principio di sovrapposizione**.

Principio di sovrapposizione

Se in una regione di spazio sono presenti n cariche, **la forza prodotta su ciascuna** di esse dall'azione simultanea delle altre è pari alla risultante delle forze che ciascuna di queste cariche esercita singolarmente, ovvero è **pari alla somma delle forze che ciascuna carica eserciterebbe in assenza delle altre**.

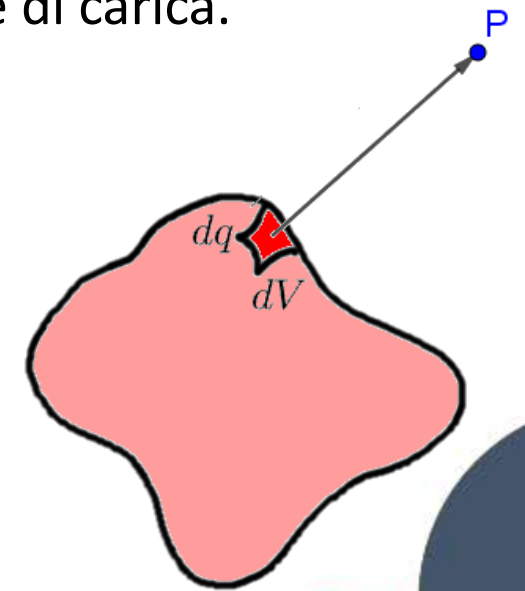
Ad esempio, la forza esercitata su q_0 è
$$\vec{F}_0 = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{F}_{i0} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_0}{r_i^2} \hat{u}_i$$

Si può, quindi, concludere, che la forza con cui interagiscono due cariche non viene alterata dalla presenza di altre cariche.

La carica elettrica ha una natura granulare. Tuttavia, nello **studio macroscopico** dei fenomeni elettrici si trattano corpi carichi di dimensioni svariati ordini di grandezza maggiori di quelle della carica elementare (raggio classico di $e \sim 10^{-15}$ m). Per questa ragione, le distribuzioni di carica di tali corpi possono essere trattate come **distribuzioni continue di carica** e si ricorre a **tecniche differenziali** (derivate, integrali) per risolvere problemi pratici.

Le distribuzioni di carica sono dette **continue** se sono **uniformemente distribuite all'interno di una regione dello spazio (uni-, bi- o tri-dimensionale)**. In tal caso, si introduce la **densità media di carica** del corpo (densità **lineare** λ , **superficiale** σ o **volumetrica** ρ) e si calcola la **la forza totale** sommando vettorialmente il contributo di ciascun elemento **infinitesimo** della distribuzione di carica.

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{Q}{L} = \frac{dq}{dL} & dq &= \lambda dL & d\vec{F} &= q_0 \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \hat{u}' \\ \sigma &= \frac{Q}{S} = \frac{dq}{dS} & dq &= \sigma dS & & \\ \rho &= \frac{Q}{V} = \frac{dq}{dV} & dq &= \rho dV & \vec{F} &= \int d\vec{F} = \int q_0 \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \hat{u}' \end{aligned}$$



Tutte le osservazioni sulle interazioni tra cariche hanno condotto all'introduzione del concetto di **Campo Elettrostatico**.

1.3 Campo Elettrostatico

I fenomeni di interazione a distanza tra cariche possono essere spiegati supponendo l'esistenza di un **campo (perturbazione dello spazio) elettrostatico** generato dalla presenza, in un punto dello spazio, di una carica elettrica.

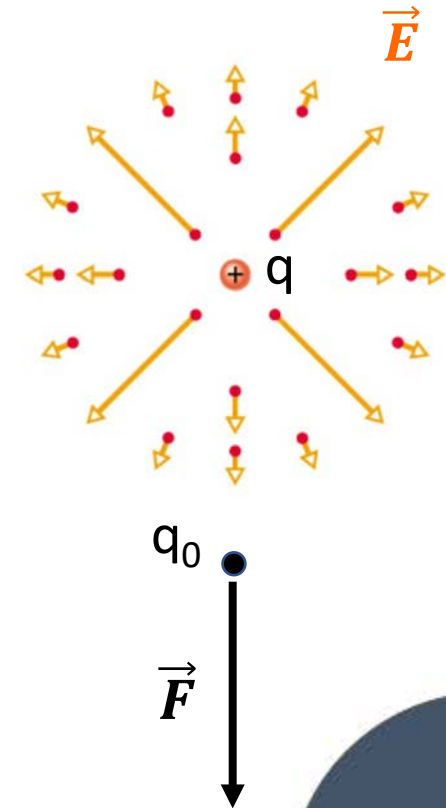
Una carica generica q in un punto O dello spazio, dunque, genera attorno a sé un **campo di forze (vettoriale)**, che indicheremo con \vec{E} .

È utile introdurre anche il concetto di **carica di prova**, ovvero di una **carica puntiforme, positiva e di piccola entità**, che indicheremo con q_0 e che ci permetta di esplorare i punti dello spazio intorno ad un corpo carico.

Se, a questo punto, introduciamo una carica di prova q_0 , essa interagirà con il campo elettrico manifestando una forza. In questo modo le due cariche non interagiscono direttamente ma tramite l'azione di un campo.

La forza elettrostatica sentita da q_0 per effetto di q può essere scritta come:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \hat{u}_r = q_0 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r \right)$$



L'espressione di \vec{F} permette di dare la seguente **definizione operativa** di \vec{E} :

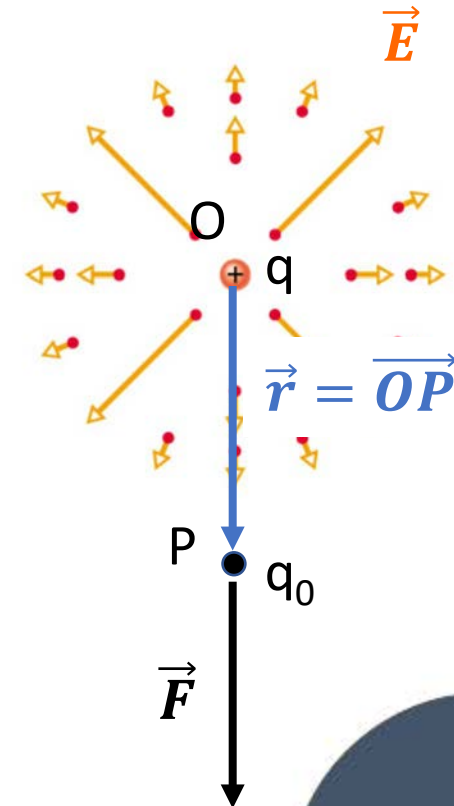
Il campo elettrostatico

Considerata una carica sorgente q posta in un punto dello spazio O ed una carica di prova q_0 posta in un punto P a distanza r da O , il **campo elettrostatico generato da q nel punto P** è il **vettore** dato dal **rapporto tra la forza esercitata da q su q_0 e la carica di prova q_0** : $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$

Il campo elettrostatico avrà, quindi:

- **Modulo** pari a $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$
- **Direzione** pari a quella della forza elettrica
- **Verso** pari a quello della forza elettrica (perché state dividendo per uno scalare positivo!)

e si misurerà in $\frac{N}{C}$.



1.3.1 Campo elettrico generato da una carica puntiforme

In presenza di un'unica carica sorgente puntiforme, l'espressione del campo elettrico si ottiene direttamente dall'espressione della forza di Coulomb:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{q_1 q_0}{q_0 4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r$$

1. Carica sorgente positiva

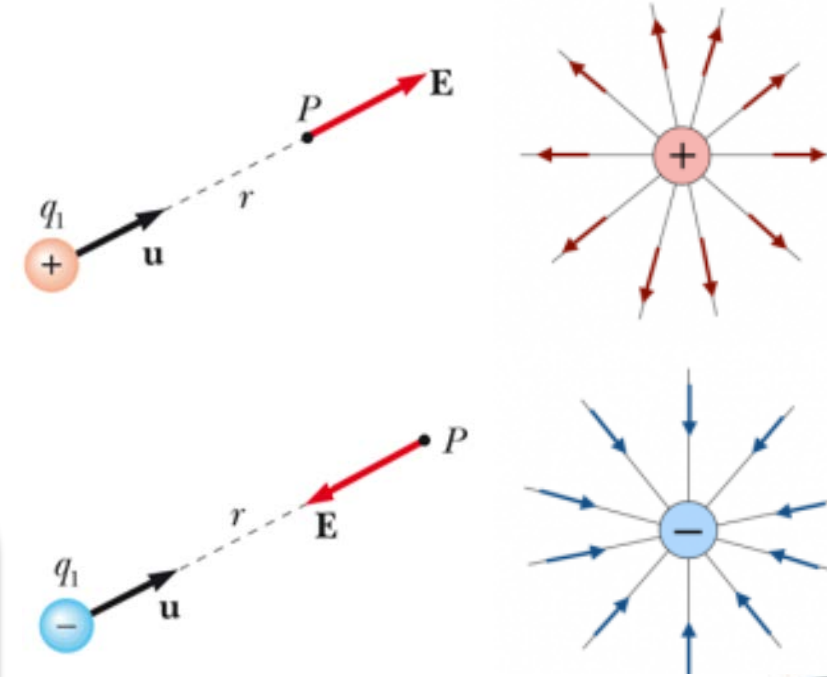
Il campo elettrostatico avrà **verso uscente** dalla carica

2. Carica sorgente negativa

Il campo elettrostatico avrà **verso entrante** nella carica

Linee di forza del campo elettrostatico o Linee di campo

Linee geometriche continue costruite a step infinitesimi, partendo da un generico punto nello spazio in cui è presente un campo elettrico e muovendosi di un tratto infinitesimo lungo la direzione del campo. Il campo elettrostatico è **tangente** alla linea di campo in ogni suo punto. Per continuità, due linee di campo non possono **mai intersecarsi** nello spazio vuoto.



1.3.2 Campo elettrico generato da un sistema discreto di cariche

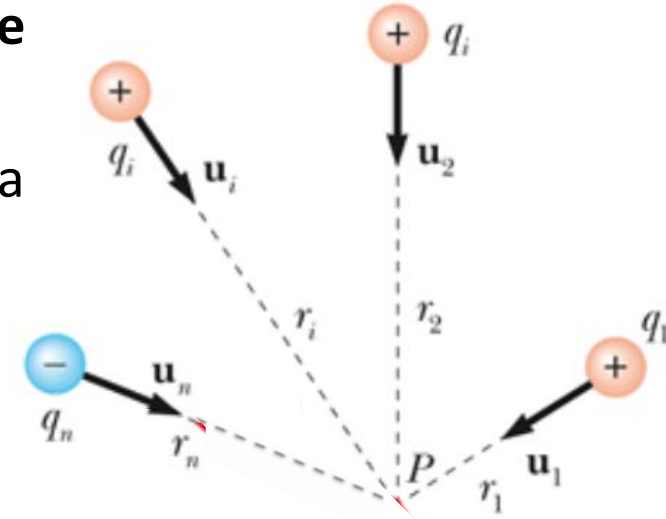
Se in una regione di spazio sono presenti più cariche contemporaneamente, possiamo applicare il **principio di sovrapposizione** e **sommare vettorialmente** i campi generati dalle singole cariche.

Per un sistema di n cariche ($q_1, \dots, q_i, \dots, q_n$), il campo esercitato su una carica di prova q_0 è:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \frac{q_i q_0}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{u}_i = q_0 \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{u}_i$$



$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{\vec{F}_i}{q_0} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{u}_i$$



1.3.3 Campo elettrico generato da un sistema continuo di cariche

Riprendiamo quanto detto per la forza elettrostatica generata da distribuzioni di carica **continue**, ovvero **uniformemente distribuite all'interno di una regione dello spazio (uni-, bi- o tri-dimensionale)**. In tal caso, si introduce la **densità media di carica** del corpo (densità **lineare** λ , **superficiale** σ o **volumetrica** ρ) e si calcola il **campo elettrico** sommando vettorialmente il contributo di ciascun elemento **infinitesimo** del corpo.

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \hat{u}'$$



$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \hat{u}'$$

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{dq}{dL}$$

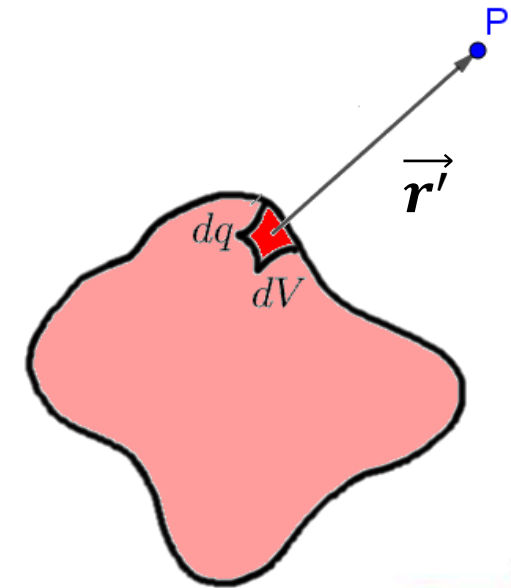
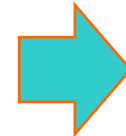
$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{dq}{dS}$$

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{dq}{dV}$$

$$dq = \lambda dL$$

$$dq = \sigma dS$$

$$dq = \rho dV$$



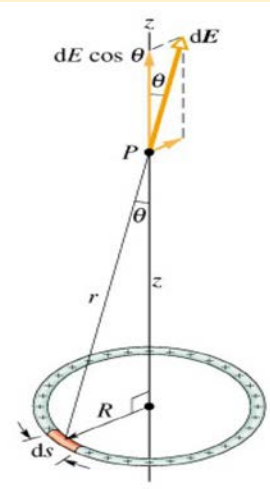
Esercizio 1.2

Due cariche $q_1 = 8q$ e $q_2 = -2q$ si trovano a distanza L l'una dall'altra. In che punto possiamo collocare una carica positiva qualunque in modo che resti in equilibrio?

Esercizio 1.3

Una carica Q è distribuita uniformemente nel volume di una sfera di raggio R secondo la legge $\rho = Ar$ essendo r la distanza dal centro. Determinare la carica totale Q .

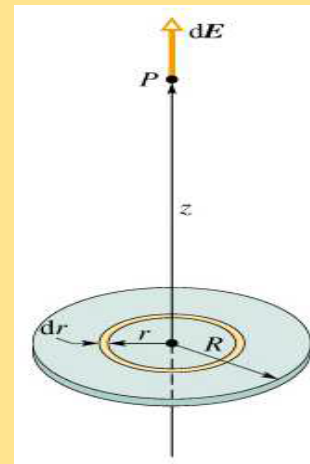
Esercizio 1.4



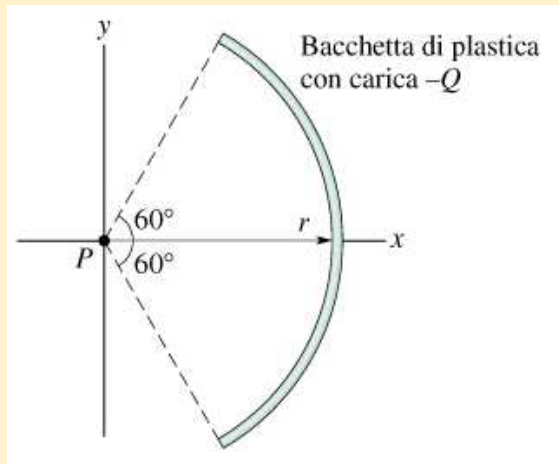
Un anello di raggio R ha una densità lineare di carica positiva uniforme λ , con carica totale Q . Calcolare il campo elettrico lungo l'asse dell'anello, in un punto P posto a distanza z dal centro dell'anello stesso.

Esercizio 1.5

Un disco di raggio R ha una densità superficiale di carica positiva uniforme, con carica totale Q . Calcolare il campo elettrico lungo l'asse del disco, in un punto P posto a distanza z dal centro dell'anello stesso.



Esercizio 1.6



Trovare nel punto P il campo elettrico della bacchetta di plastica incurvata ed avente una carica $-Q$ distribuita uniformemente.

Esercizio 1.7

Una bacchetta isolante di lunghezza L possiede una carica $-q$ uniformemente distribuita sulla sua lunghezza. Determinare il campo su un punto P posto sullo stesso asse della bacchetta e a distanza a da uno degli estremi

1.4 Campo di un dipolo elettrico

Un **dipolo elettrico** è costituito da due cariche di uguale modulo q ma segno opposto, collocate ad una certa distanza d tra loro.

Possiamo calcolare con facilità il campo del dipolo nei punti dell'asse del dipolo sommando (vettorialmente) i campi elettrostatici generati dalle due cariche.

Indichiamo con \vec{E}_+ ed \vec{E}_- rispettivamente i campi generati dalla carica positiva e da quella negativa. Poiché le cariche sorgenti sono uguali in valore assoluto, $|\vec{E}_+| = |\vec{E}_-|$.

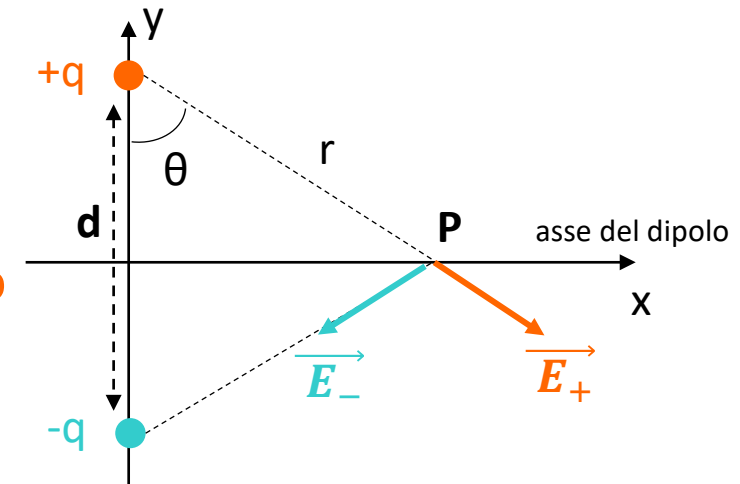
Il campo complessivo è diretto lungo la direzione y !

$$E_x = |\vec{E}_+| \sin\theta - |\vec{E}_-| \sin\theta = 0$$

$$E_y = -|\vec{E}_+| \cos\theta - |\vec{E}_-| \cos\theta = -2 |\vec{E}_-| \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{d}{2r} \quad \Rightarrow \quad |\vec{E}_{TOT}| = 2|\vec{E}_-| \frac{d}{2r} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

dove abbiamo introdotto il **momento di dipolo** $\vec{p} = q\vec{d}$ vettore che ha direzione data dalla congiungente le due cariche e verso che **va dalla carica negativa alla positiva**.

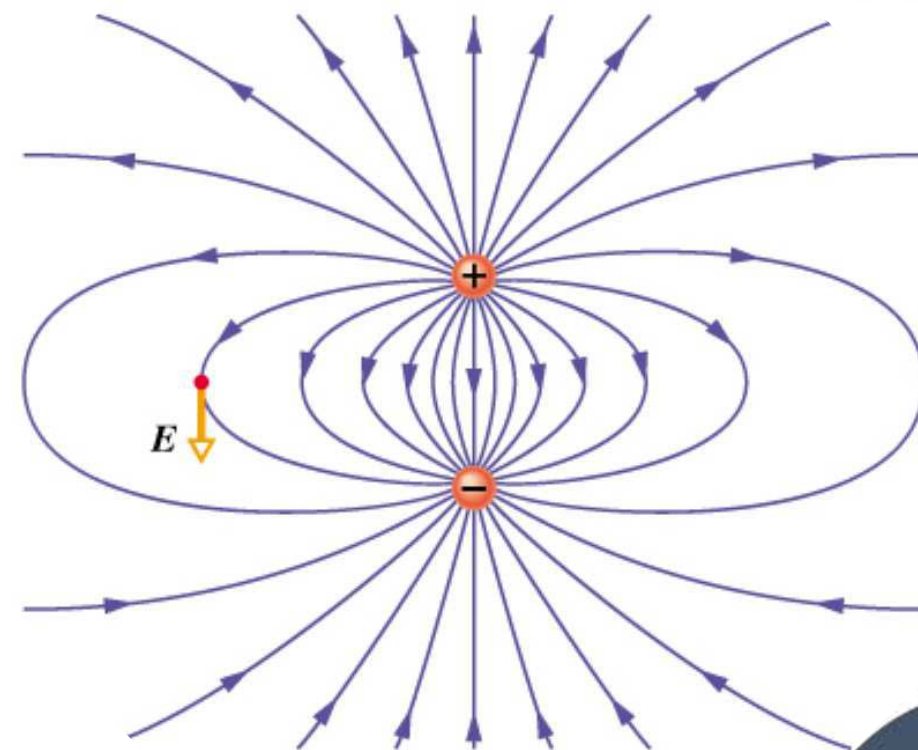


Il campo elettrostatico generato da un dipolo elettrico nei punti del suo asse è allora pari a:

$$\vec{E}(\text{asse}) = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

La derivazione dell'espressione del campo elettrostatico in altri punti del piano è più complicata e vedremo un modo alternativo per ricavarla nel capitolo sul potenziale elettrostatico.

In figura potete però osservare le linee di forza che costituiscono una rappresentazione del campo nello spazio. Osservate che le linee di campo sono sempre «uscenti» dalla carica positiva ed «entrantanti» nella carica negativa del dipolo.



1.4 Esperimento di Millikan

Attraverso un forellino nella piastra superiore F passano in questa zona goccioline d'olio, nebulizzato con uno spruzzatore, alcune delle quali risultano cariche. Lo spazio tra i dischi è opportunamente illuminato e il moto verticale delle gocce, che avviene in aria, è osservato con un telescopio, fornito di oculare micrometrico: si può così misurare lo spazio percorso da una goccia in un dato tempo e quindi la sua velocità di caduta.

$$ma = m'g - 6\pi\eta r v \qquad m'g = (\rho - \rho_a) \frac{4}{3} \pi r^3 g$$

In assenza di campo E

$$v_0 = \frac{m'g}{6\pi\eta r} = \frac{2(\rho - \rho_a)gr^2}{9\eta}$$

E dalla misura di v_0 si può calcolare r . Applicando invece il campo E:

$$ma = m'g - qE - 6\pi\eta r v \qquad v_1 = \frac{m'g - qE}{6\pi\eta r} = v_0 - \frac{qE}{6\pi\eta r} \qquad \Delta v_1 = \frac{E}{6\pi\eta r} \Delta q$$

I Δq che si misurano sono sempre multipli della carica elementare $e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

