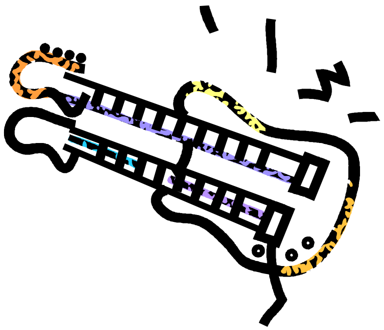
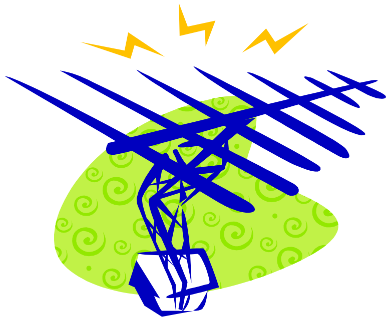
CAPITOLO 2

Fenomeni oscillatori

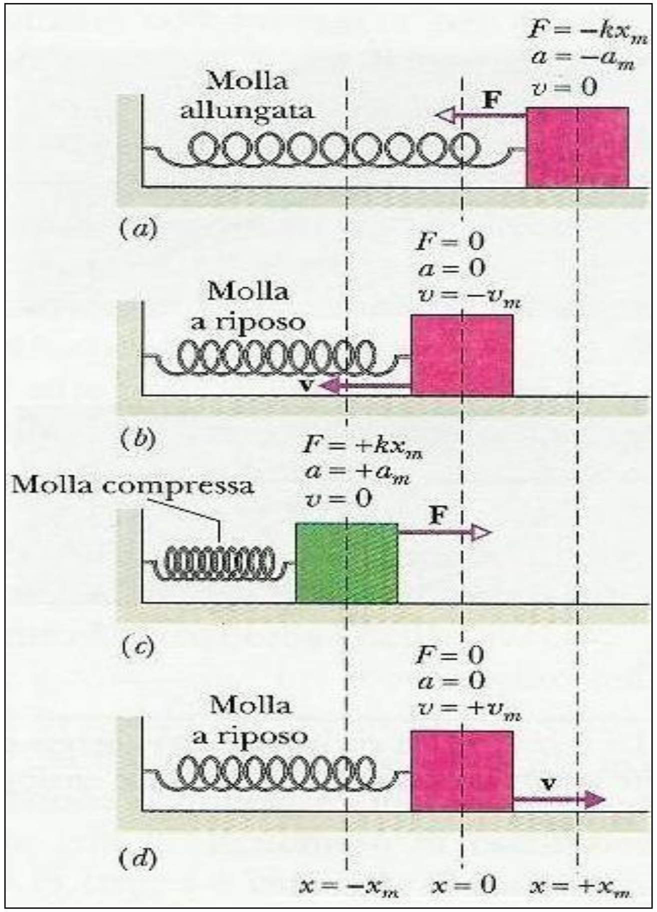
I fenomeni oscillatori di tipo meccanico ed elettromagnetico, ci circondano costantemente nella vita quotidiana. Esempi di oscillazioni meccaniche sono il pendolo oscillante di un orologio, la corda di una chitarra che vibra; mentre esempi di oscillazioni elettromagnetiche, sono quelle degli elettroni che si muovono avanti e indietro nei circuiti responsabili della trasmissione e della ricezione di segnali radio e TV.





La caratteristica comune di tutti questi sistemi oscillanti è la formulazione che descrive le loro oscillazioni.

Consideriamo il sistema meccanico massa – molla denominato *oscillatore armonico semplice.*



Applicando la seconda legge di Netwon $F = ma$ si ottiene l'equazione dell'oscillatore armonico semplice:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Ovvero:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

ω = *pulsazione* o *frequenza angolare* [rad/s].

la cui soluzione è una funzione *x(t)* che descrive la posizione dell'oscillatore armonico semplice in funzione del tempo.

Una soluzione dell'equazione del moto dell'oscillatore armonico semplice è:

$$\boxed{x(t) = Asen(\omega t + \varphi)}$$

dove:

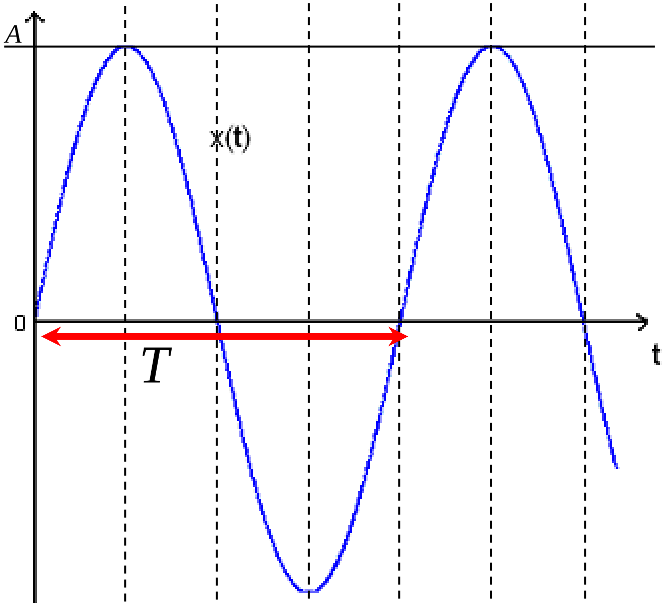
- A è lo spostamento massimo ossia *ampiezza* del moto oscillatorio;
- $(\omega t+\phi)$ è la *fase* del moto;
- ϕ è la *fase iniziale* o *costante di fase*.

L'ampiezza A e la costante di fase ϕ dell'oscillazione sono determinate dalle condizioni iniziali che sono lo spostamento e la velocità al tempo t_0 :

$$\boxed{x(t_0) = Asen(\omega t_0 + \varphi)}$$

$$\boxed{x'(t_0) = A\omega cos(\omega t_0 + \varphi)}$$

Il tempo necessario per un'oscillazione completa è chiamato *periodo* T



$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

La *frequenza* f è il numero di oscillazioni complete per unità di tempo, quindi:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Si ricava quindi la relazione che lega la *pulsazione ω alla frequenza* (o al *periodo*):

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

La posizione del corpo è:

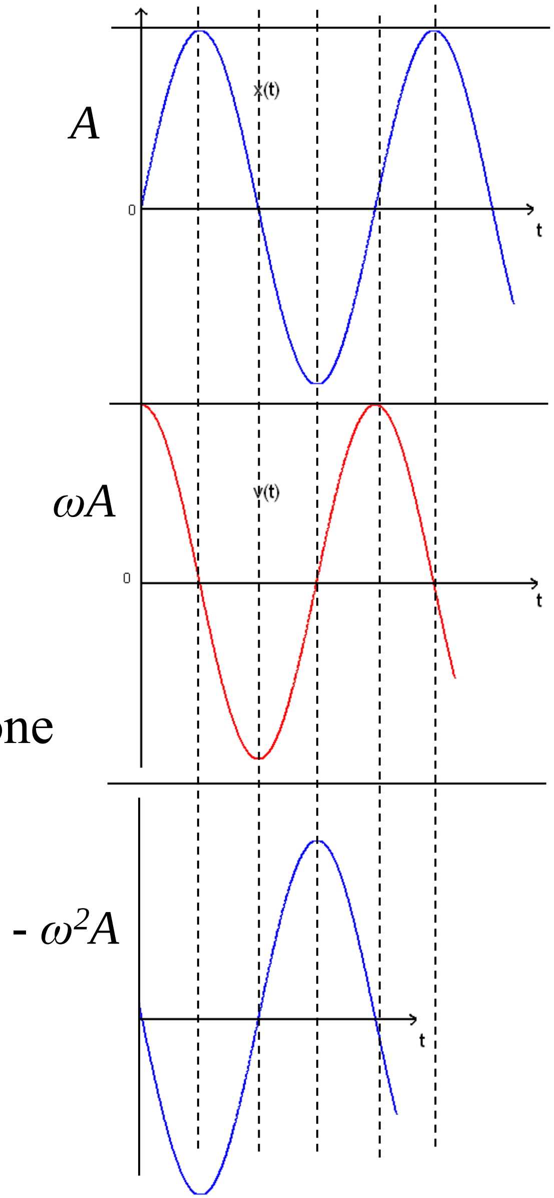
$$\boxed{x(t) = A sen(\omega t + \varphi)}$$

Derivando rispetto al tempo si ricava la velocità:

$$\boxed{v(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi)}$$

Derivando ancora si ottiene l'andamento dell'accelerazione in funzione del tempo:

$$\boxed{a(t) = -\omega^2 A sen(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)}$$



L'equazione differenziale dell'oscillatore armonico semplice:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

PROPRIETA'

- se $x(t)$ è soluzione dell'equazione, lo è anche $ax(t)$ con a costante;

- se $y(t)$ è un'altra soluzione, anche $z(t) = x(t) + y(t)$ è soluzione;
  cioè la combinazione lineare di più soluzioni è ancora soluzione dell'equazione.

Nel caso più generale si ottiene una equazione non omogenea:

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega^2 x(t)= f(t)}$$

dove *f(t)* è una generica funzione del tempo che in particolare può essere costante.

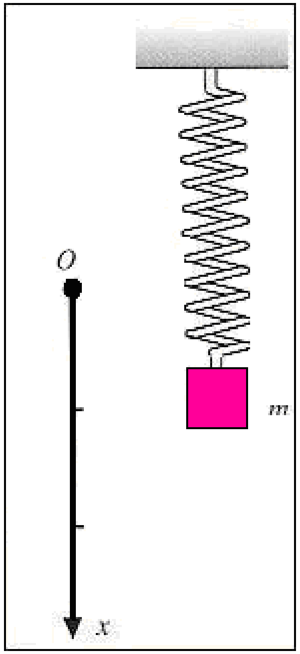
Si dimostra che in questo caso la soluzione più generale è:

$$\boxed{x(t) = Asen(\omega t+\varphi)+x_p(t)}$$

Con $x_p(t)$ soluzione particolare dell'equazione non omogenea

e $Asen(\omega t+\varphi)$ soluzione della omogenea associata

Un classico esempio è quello di un punto materiale *m* appeso a una molla di costante elastica *k* . L'equazione del moto è:



$$\boxed{ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx}$$

ovvero, posto $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ si ha :

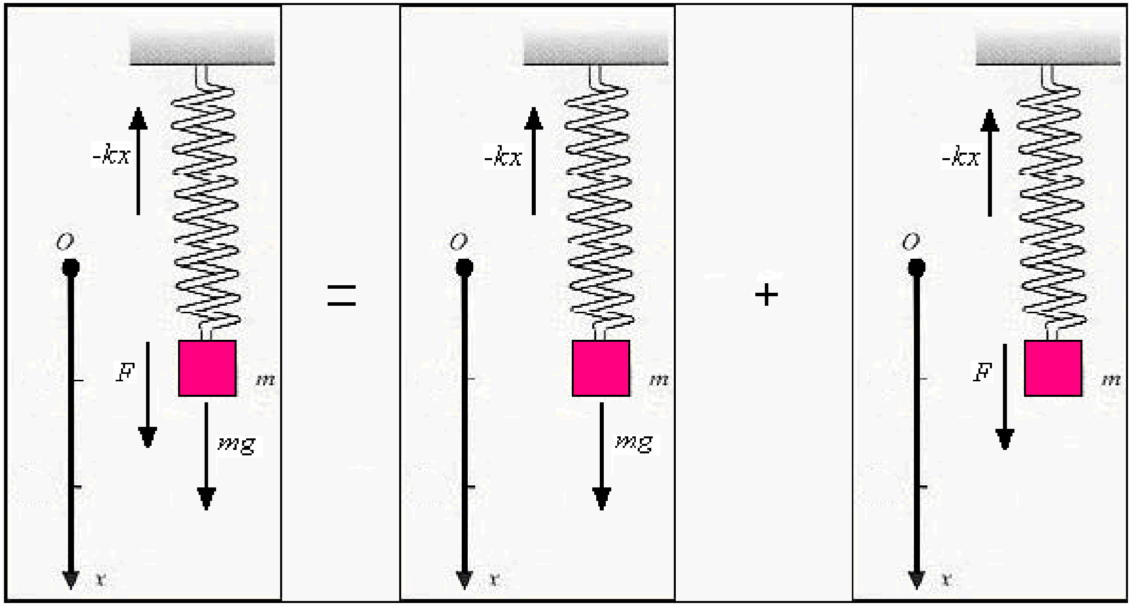
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = g}$$

E' una equazione non omogenea, con il termine noto costante. Una soluzione

particolare è $x_p(t) = \dfrac{mg}{k}$ per cui la soluzione generale è:

$$\boxed{x(t) = Asen(\omega t + \varphi) + \frac{mg}{k}}$$

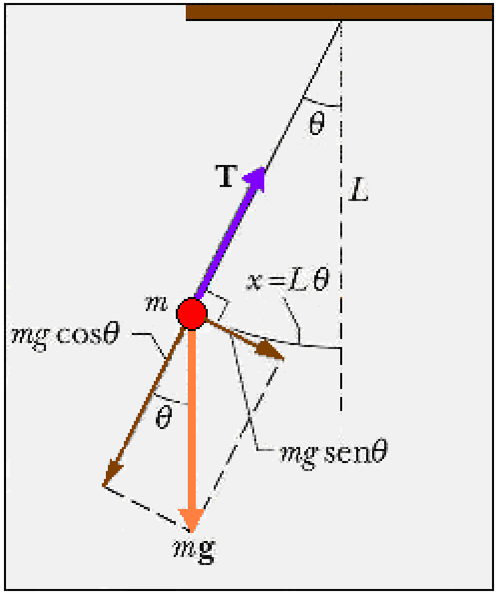
Conseguenza della linearità dell'equazione che descrive il moto armonico è il principio di sovrapposizione degli effetti:



Se in corrispondenza di $f_1(t)$ si ha come soluzione $x_1(t)$ e in corrispondenza di $f_2(t)$ si ha $x_2(t)$ allora se il termine noto è $f_1(t)+f_2(t)$ la soluzione è : $x_1(t)+x_2(t)$

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2)+\omega^2(x_1+x_2)=\frac{d^2x_1}{dt^2}+\omega^2x_1+\frac{d^2x_2}{dt^2}+\omega^2x_2=f_1+f_2}$$

L'equazione del moto si ricava applicando la legge:



$$\boxed{\tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

τ = momento prodotto da una forza
α = accelerazione angolare
I = momento di inerzia del pendolo

Il momento della forza di richiamo è :

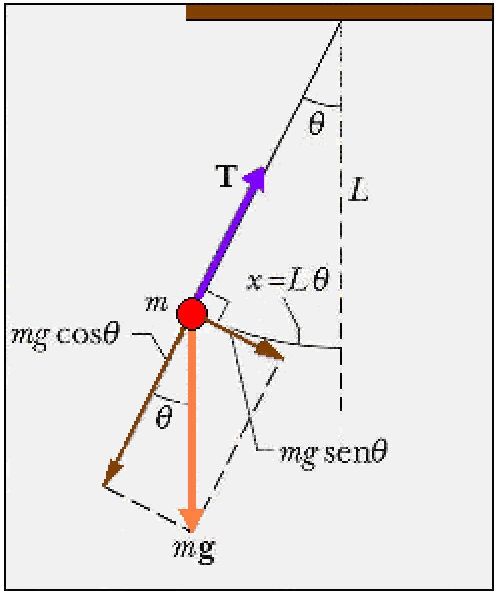
$$\boxed{\tau = -Lmg\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Con L = braccio rispetto al perno della forza di richiamo e
I = momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione

$$\boxed{I = mL^2}$$

L' equazione del moto diventa :

$$\tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



$$\tau = -Lmg\,\mathrm{sen}\,\theta = I\alpha \rightarrow -Lmg\,\mathrm{sen}\,\theta = mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Considerando $sen\theta \approx \theta$ si ha :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

Assumendo $\boxed{\frac{g}{L} = \omega^2}$ l'equazione assume la seguente forma :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

Una soluzione dell'equazione del moto del pendolo semplice è:

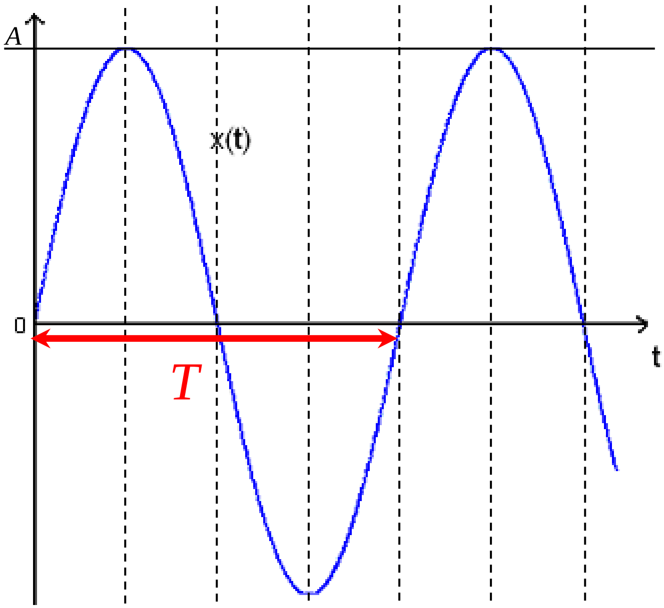
$$\boxed{\theta(t) = A sen(\omega t + \varphi)}$$

dove:

- A è lo spostamento angolare massimo ossia *ampiezza* del moto oscillatorio;
- $(\omega t+\phi)$ è la *fase* del moto;
- ϕ è la *fase iniziale* o *costante di fase*.

L'ampiezza A e la costante di fase ϕ dell'oscillazione sono determinate dalle condizioni iniziali.

Il tempo necessario per un’oscillazione completa è chiamato *periodo* *T*

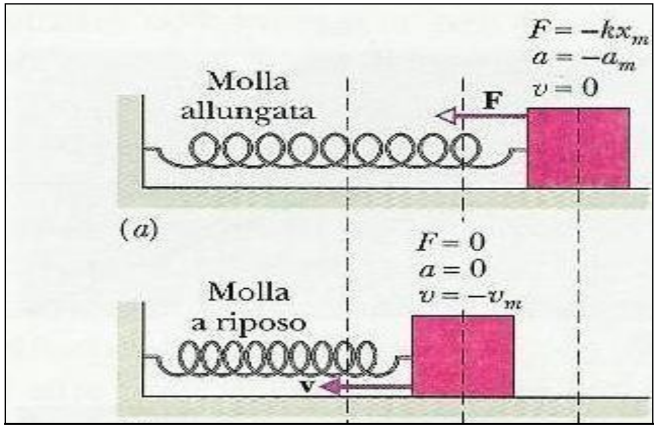


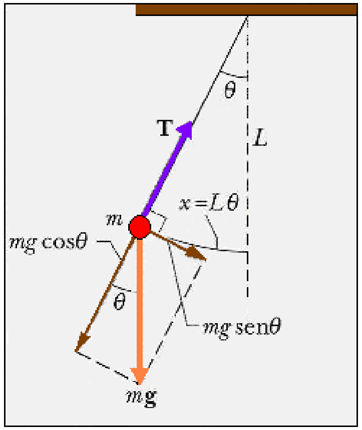
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

La *frequenza* *f* è il numero di oscillazioni complete per unità di tempo, quindi:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

È evidente l'analogia tra le espressioni matematiche di questi due sistemi meccanici





$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0} \longleftrightarrow \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\theta=0}$$

$$\boxed{x(t)} \longleftrightarrow \boxed{\theta(t)}$$

$$\boxed{m} \longleftrightarrow \boxed{I}$$

$$\boxed{\frac{k}{m}} \longleftrightarrow \boxed{\frac{g}{L}}$$

Per il moto armonico di un sistema non soggetto a forze dissipative, l'energia meccanica totale

$$\boxed{E = E_K + E_P}$$

si conserva, cioè resta costante durante il moto.

L'energia potenziale E_P è in ogni istante:

$$\boxed{E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 sen^2(\omega t + \varphi)}$$

L'energia cinetica E_K è invece in ogni istante:

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}$$

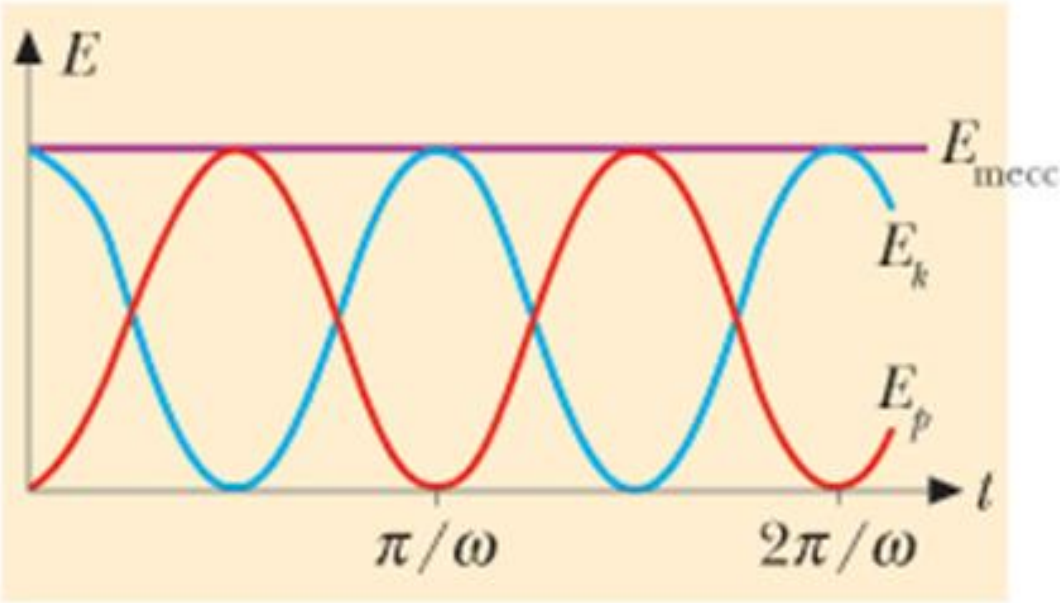
$$\boxed{E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}$$

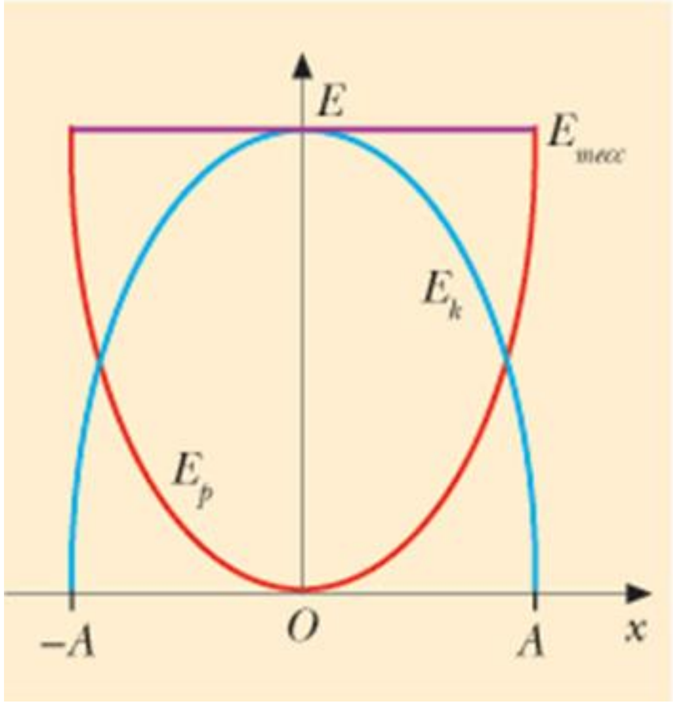
L' energia meccanica totale è quindi :

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)+\frac{1}{2}kA^2 sen^2(\omega t+\varphi)$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kA^2$$

Essa è *costante* e ha il valore di $\boxed{\frac{1}{2}kA^2}$


E
E_mecc
E_k
E_p
t
π/ω
2π/ω


E
E_mecc
E_k
E_p
−A
O
A
x

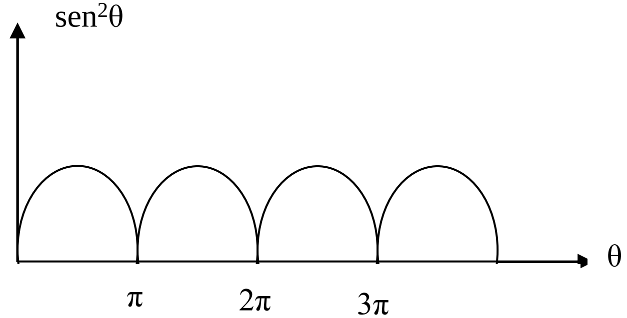
Consideriamo ora il valore medio dell' energia nell' oscillatore armonico : Mentre i valori medi di posizione, velocità e accelerazione in un periodo, sono tutti nulli, infatti:

$$< sen\theta >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} sen\theta d\theta = \frac{1}{2\pi}[-\cos\theta]_0^{2\pi} = 0$$

il valore medio dell' energia nell'oscillatore armonico non è nullo:

$$< sen^2\theta >= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sen^2\theta d\theta =< \cos^2\theta >= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}$$

Infatti la funzione $\text{sen}^2\theta$ ha un andamento del tipo:



I valori medi di energia potenziale e cinetica sono quindi :

$$\boxed{< E_P >= \frac{1}{2} kA^2 < sen^2(\omega t + \varphi) >= \frac{1}{4} kA^2 = \frac{1}{2} E_{tot}}$$

e

$$\boxed{< E_K >= \frac{1}{2} kA^2 < \cos^2 (\omega t + \varphi) >= \frac{1}{4} kA^2 = \frac{1}{2} E_{tot}}$$

Essi sono eguali, per cui in media l’energia meccanica totale è per metà cinetica e per metà potenziale.

$$sen(a \pm b) = sena * \cos b \pm \cos a * senb$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a * \cos b \pm sena * senb$$

in particolare

$$sen(a + \frac{p}{2}) = \cos a \qquad sen(a - \frac{p}{2}) = - \cos a$$

$$\cos(a + \frac{p}{2}) = - sena \qquad \cos(a - \frac{p}{2}) = sena$$

Inoltre

$$sen(- a) = - sena \qquad \cos(- a) = \cos a$$

Formule trigonometriche

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

α	α	sinα	cosα	tanα	cotα
0°	0	0	1	0	∞
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0

Formule di addizione

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Formule trigonometriche

Formule di duplicazione

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \\ 1 - 2\sin^2\alpha \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Formule parametriche

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos\alpha &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan\alpha &= \frac{2t}{1-t^2} \end{aligned}\right\} \quad \left(t = \tan\frac{\alpha}{2}\right)$$

Formule di prostaferesi

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

Formule di bisezione

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

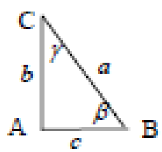
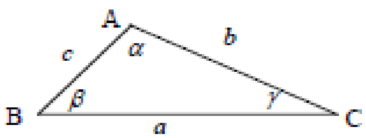
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \\ \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \end{cases}$$

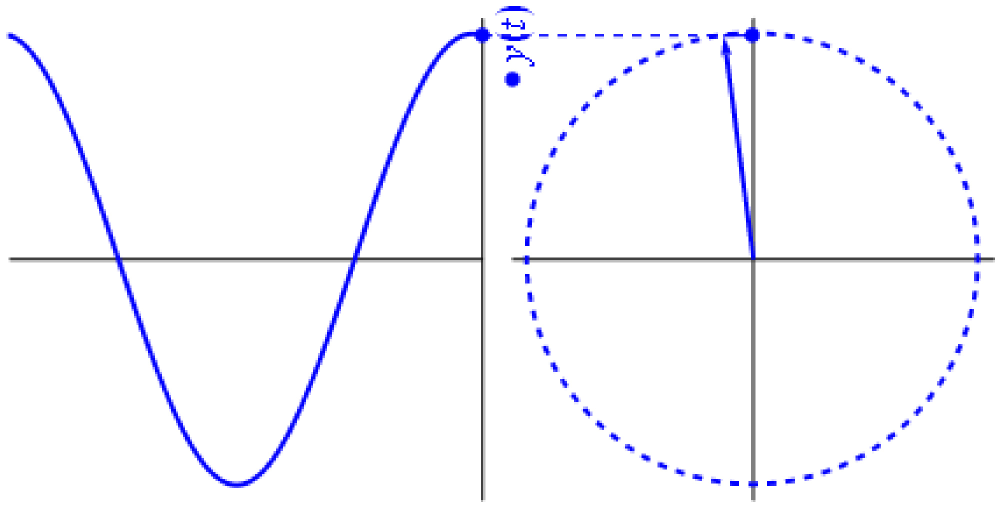
Formule di triplicazione

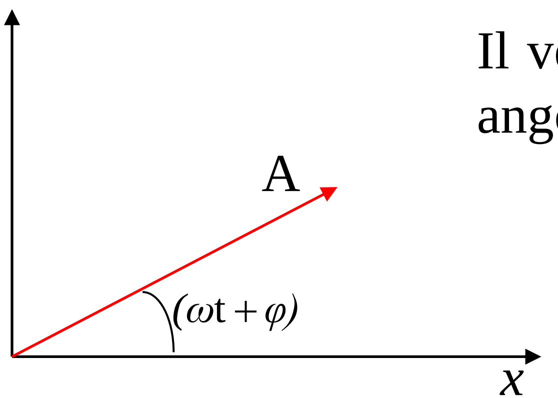
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

Triangoli rettangoli	**Triangoli qualunque**
	
$b = a\sin\beta = a\cos\gamma = c\tan\beta$ $a = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{b}{\cos\gamma}$; $\tan\beta = \frac{b}{c}$	$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$
$c = a\sin\gamma = a\cos\beta = b\tan\gamma$ $a = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{c}{\cos\beta}$; $\tan\gamma = \frac{c}{b}$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
	$Area(\mathrm{ABC}) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

Il moto armonico può essere considerato come la proiezione di un moto circolare uniforme

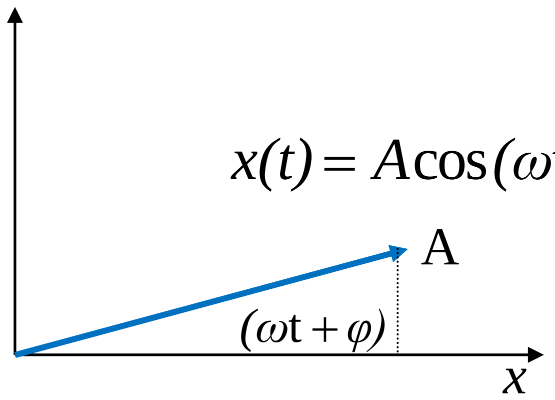




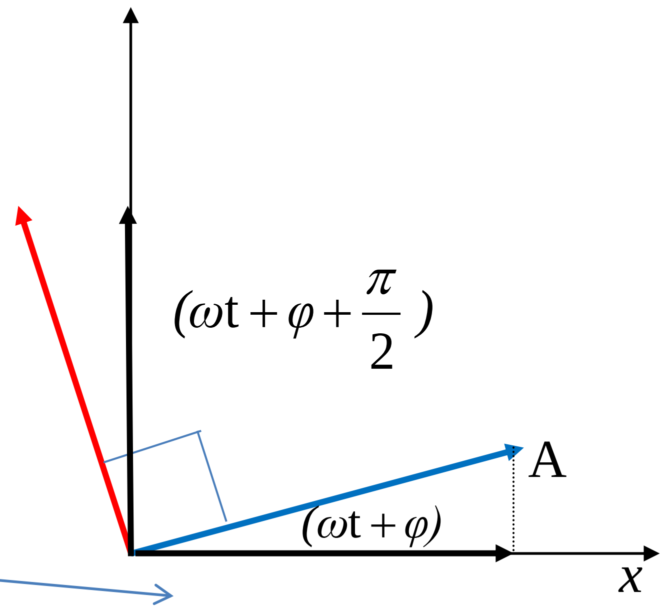
Il vettore A ruota in senso antiorario con velocità angolare ω e prende il nome di "fasore"

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

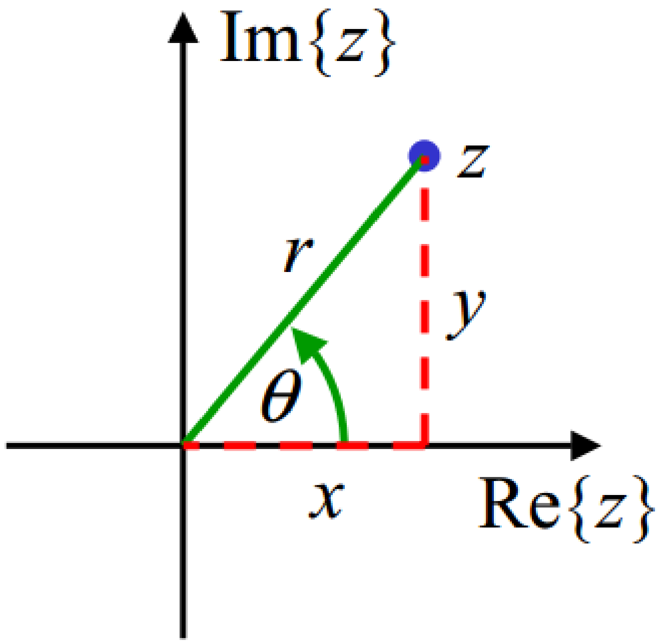


$$A sen(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) = A\cos(\omega t + \varphi)$$



La funzione **cos** anticipa la funzione **sen** di π/2

La funzione **sen** e' ritardata rispetto alla funzione **cos** di π/2



Identità di Eulero :

$$\boxed{e^{\pm i\phi} = \cos\phi \pm i\sin\phi}$$

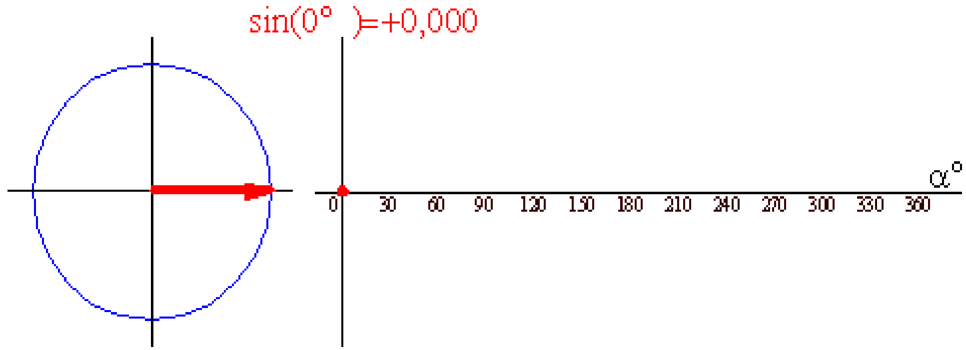
E' possibile considerare $\cos\phi$ e $\mathrm{sen}\,\phi$ come la parte reale e la parte immaginaria di $e^{i\phi}$

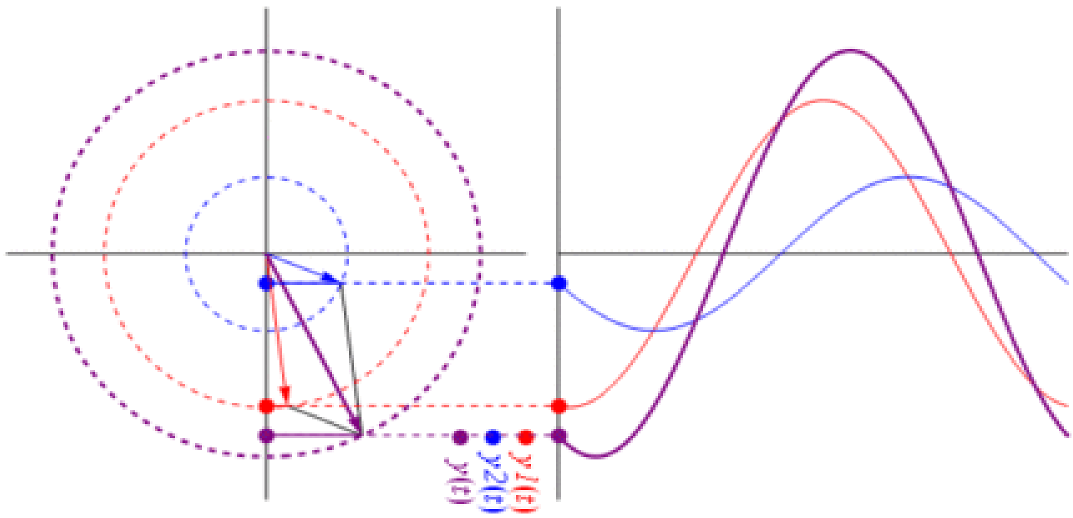
$$\cos\phi = \mathrm{Re}(e^{i\phi})$$
$$\sin\phi = \mathrm{Im}(e^{i\phi})$$

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}(Ae^{i(\omega t+\phi)}) = \mathrm{Re}(Ae^{i\phi}e^{i\omega t}) = \mathrm{Re}(A^* e^{i\omega t})}$$

$$\boxed{A^* = Ae^{i\phi}}$$

Composizione di moti Armonici





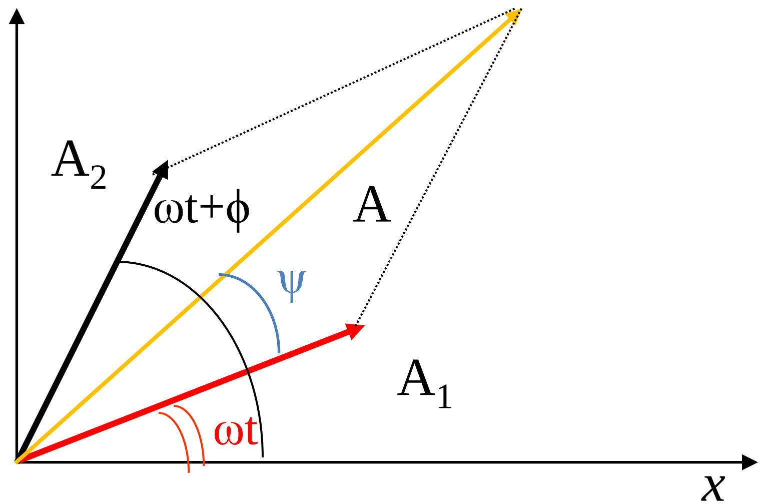
Consideriamo la somma di due moti armonici lungo lo stesso asse caratterizzati dalla stessa pulsazione :

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti la somma è un moto armonico con la stessa pulsazione:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \psi)$$



Teorema di "Carnot"

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi)}$$

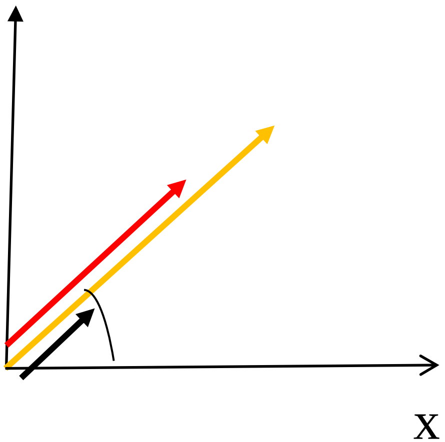
$$tg\psi = \frac{A_2 sen\phi}{A_1 + A_2\cos\phi}$$

L'ampiezza del moto risultante dipende dalla differenza di fase $\phi = \phi_2 - \phi_1$

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi)}}$$

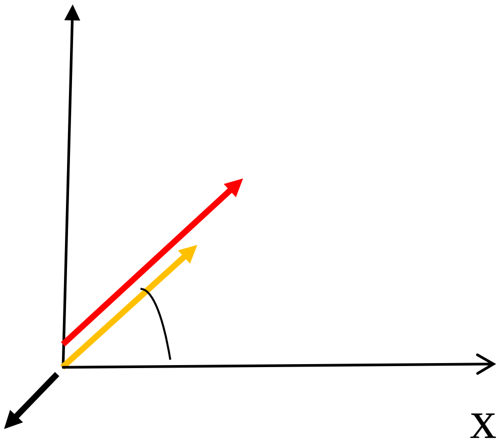
massima per $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, ...$

$$\boxed{A_1 + A_2}$$

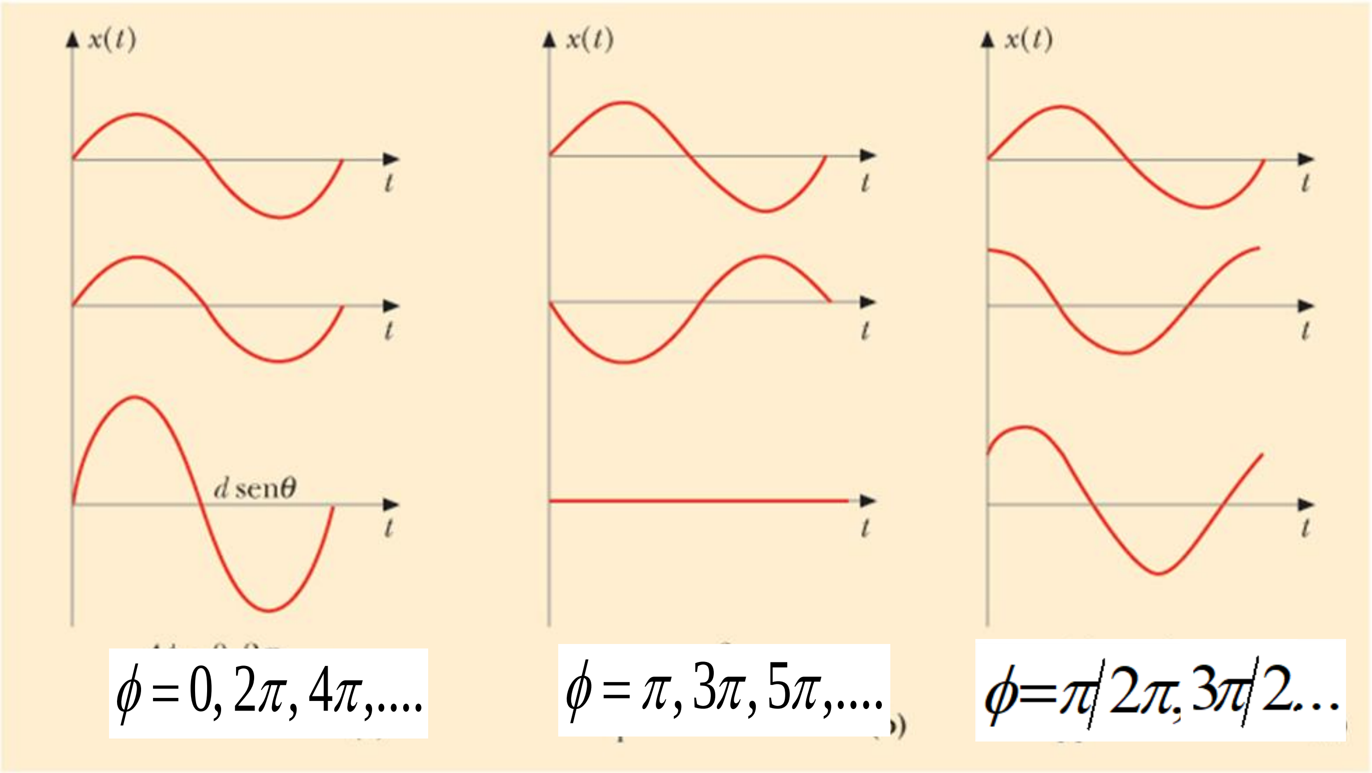


minima per $\phi = \pi, 3\pi, 5\pi....$

$$\boxed{|A_1 - A_2|}$$



I risultati della sovrapposizione di due moti armonici di eguale periodo lungo lo stesso asse, sono riportati di seguito:



$\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots.$

$\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots.$

$\phi = \pi/2\pi, 3\pi/2\ldots$

Usiamo la notazione dei numeri complessi

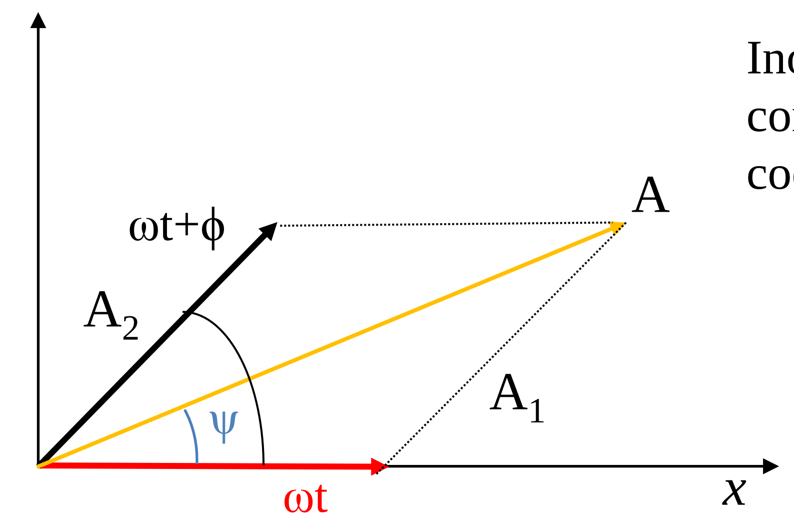
$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t) \qquad x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\bar{x}_1 = A_1 e^{i(\omega t)} \qquad \bar{x}_2 = A_2 e^{i(\omega t + \phi)}$$

$$A_1 e^{i(\omega t)} + A_2 e^{i(\omega t + \phi)} = A e^{i(\omega t + \psi)}$$

Moltiplicando ambo i membri per il suo complesso coniugato si ottiene

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi)}$$



Inoltre, se sviluppiamo il primo e secondo membro con la formula di Eulero ed eseguiamo il rapporto tra i coefficienti di parte immaginaria e reale, si ottiene

$$tg\,\psi = \frac{A_2 sen\phi}{A_1 + A_2 \cos\phi}$$

Consideriamo la somma di due moti armonici lungo lo *stesso asse* caratterizzati da diversa pulsazione :

$$x_1(t) = A\ \cos(\omega_1 t)$$

$$x_2(t) = A\ \cos(\omega_2 t)$$

Formule di prostaferesi

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

Per semplicità supponiamo che

$$A_1 = A_2 = A \qquad \text{e} \qquad \phi_1 = \phi_2 = 0$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t = 2A\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\,\cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t$$

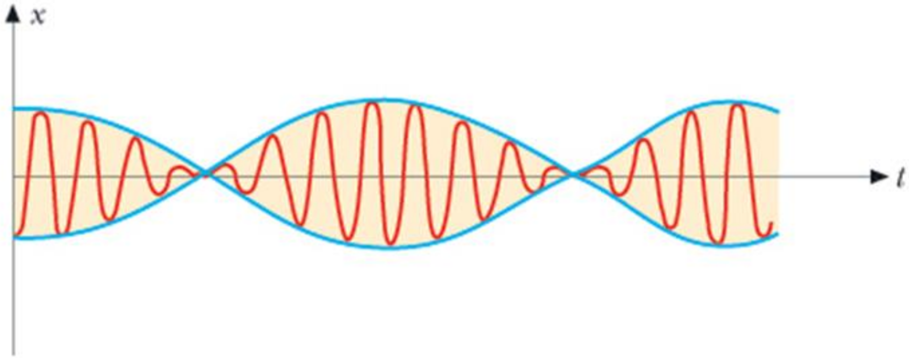
Se $\omega_1 \sim \omega_2$ si ha un nuovo moto oscillatorio :

$$\boxed{x(t) = A(t)\cos\omega t = 2A\cos\Omega t\,\cos\omega t}$$

caratterizzato da :

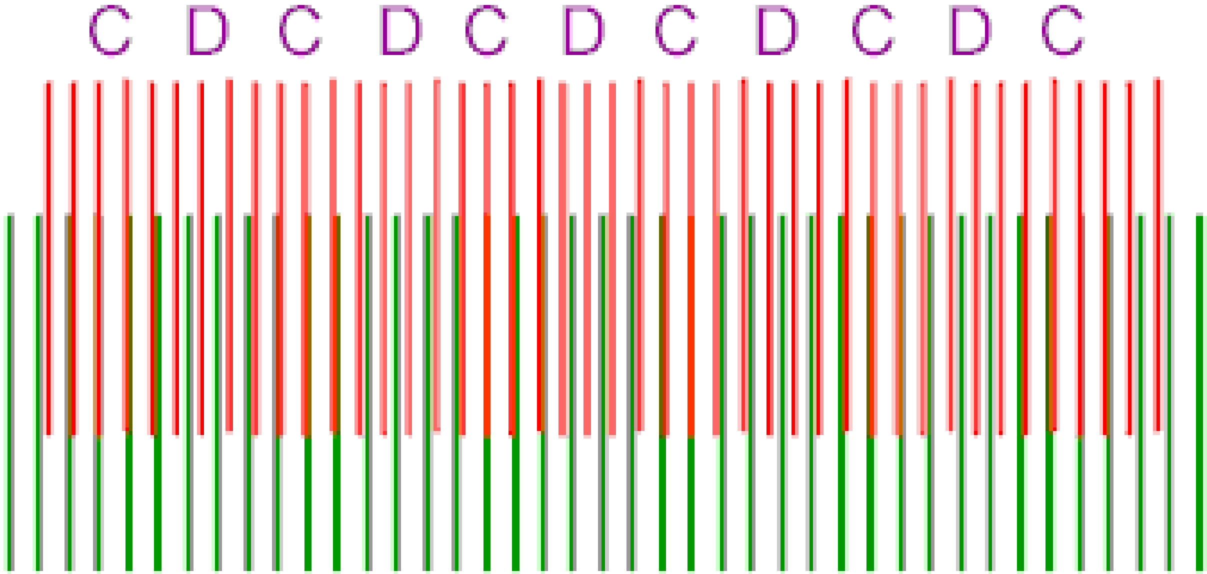
- una nuova pulsazione $\omega = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$;
- un' ampiezza modulata con pulsazione $\Omega = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}$.

Si parla di *modulazione di ampiezza*, caratteristica del fenomeno del :



Battimenti

This "line drawing" shows how two patterns of slightly different spacing show the phenomena of beat interference. The pattern is best seen when you look from a distance of about a meter.



Consideriamo la somma di due moti armonici su assi ortogonali caratterizzati dalla stessa pulsazione :

$$\boxed{x(t) = A\cos\omega t} \quad , \quad \boxed{y(t) = B\cos(\omega t + \phi)}$$

Se i moti sono in fase $\phi = 0$

$$\boxed{\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{A}{B}}$$

Il punto si muove lungo un segmento di retta tra le posizioni -*A*, -*B* e *A*, *B*; tale retta forma con l'asse *x* l'angolo :

$$\boxed{\theta = \mathrm{arctg}\frac{B}{A}}$$

Se i moti sono in opposizione di fase $\phi = \pi$

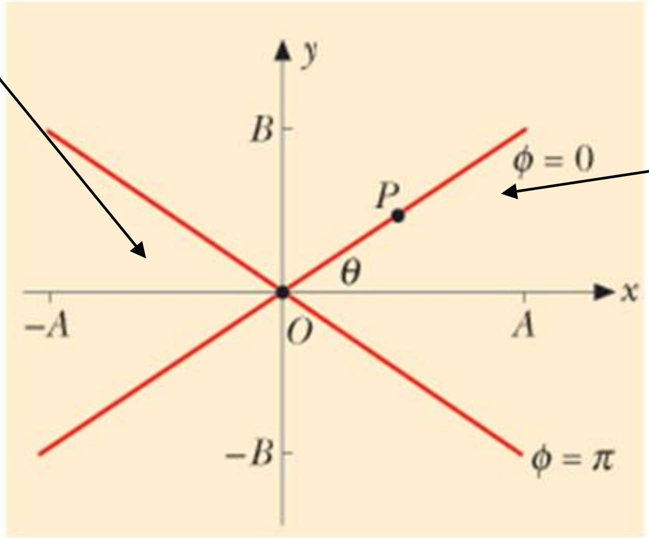
$$\boxed{\frac{x(t)}{y(t)} = -\frac{A}{B}}$$

e

$$\boxed{\theta = -arctg\,\frac{B}{A}}$$

IN OPPOSIZIONE DI FASE

IN FASE



$$OP = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A^2 + B^2}\ \text{sen}\ \omega t$$

Se i moti sono in quadratura di fase $\phi = \dfrac{\pi}{2}$

$$\boxed{x(t) = A\cos\omega t}$$

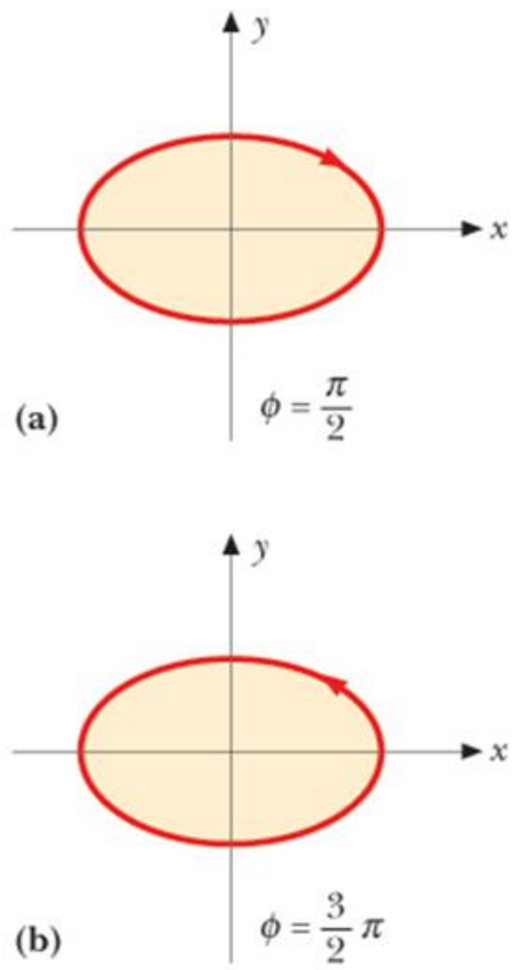
$$\boxed{y(t) = B\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

quindi:

$$\boxed{\left(\frac{x(t)}{A}\right)^2 + \left(\frac{y(t)}{B}\right)^2 = 1}$$

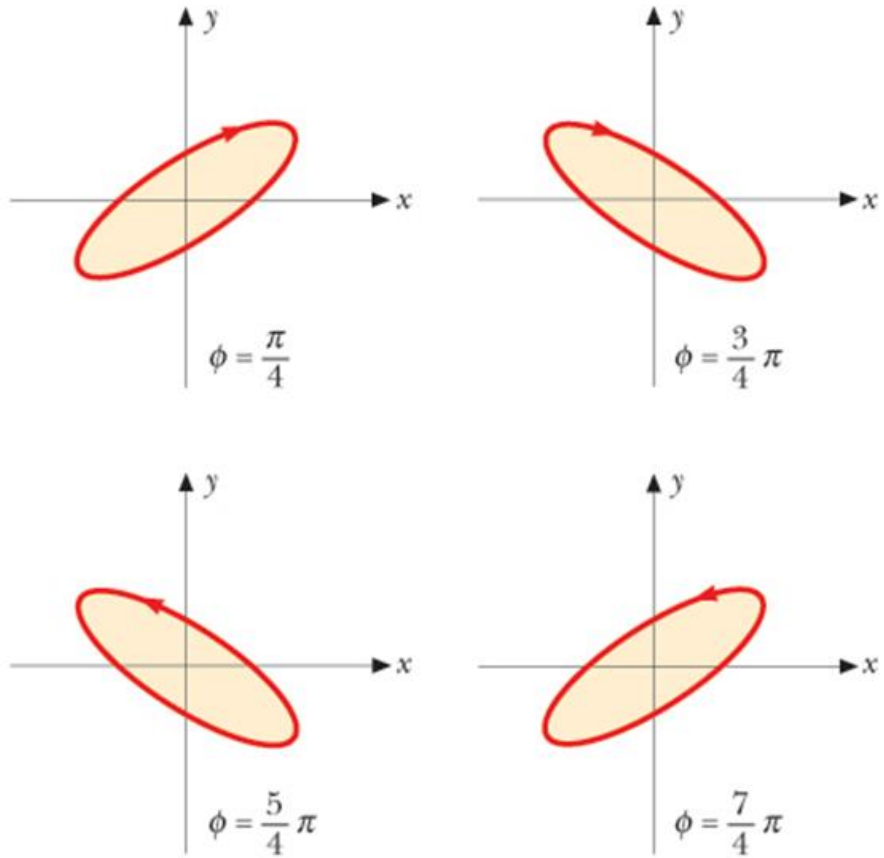
che rappresenta l'equazione di un' *ellisse* percorsa in senso orario

Se i moti sono in quadratura di fase ma con $\phi = \dfrac{3}{2}\pi$ il moto è in senso antiorario



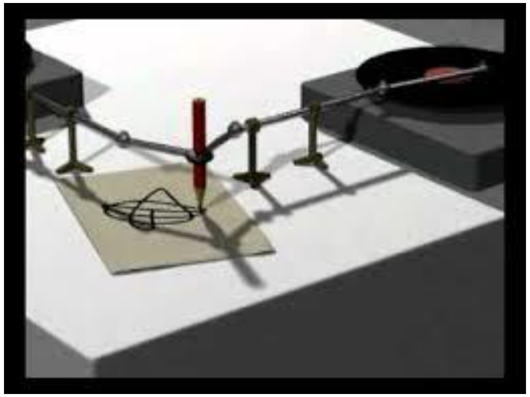
In particolare se A è uguale a B l’ellisse degenera in una circonferenza

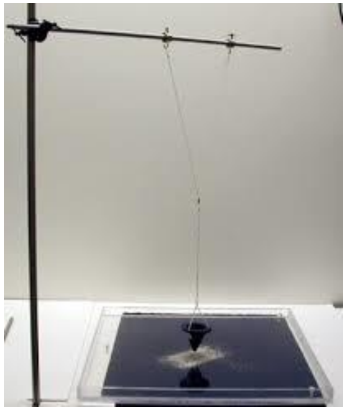
Se i moti hanno una differenza di fase generica

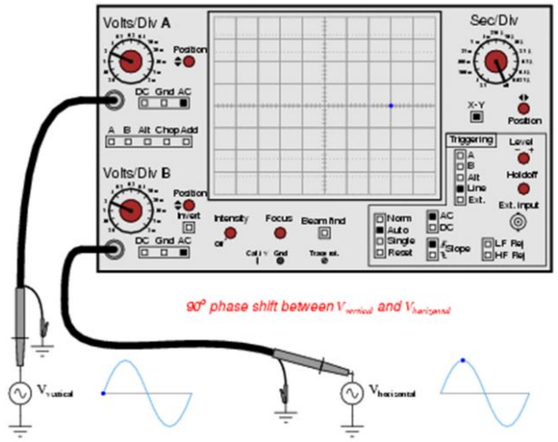


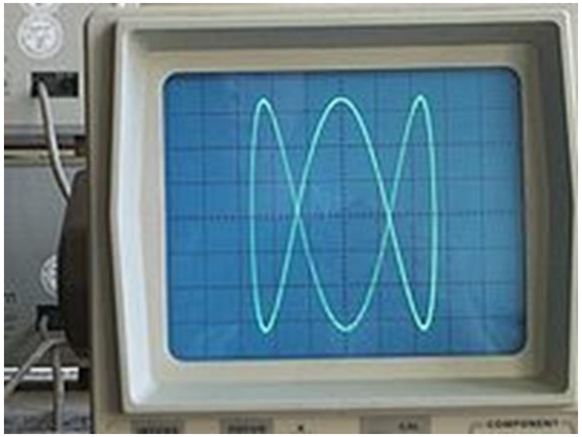
La traiettoria è <u>sempre</u> un’ ellisse, con gli assi non paralleli agli assi cartesiani (anche se $A = B$)

Figure di Lissajous



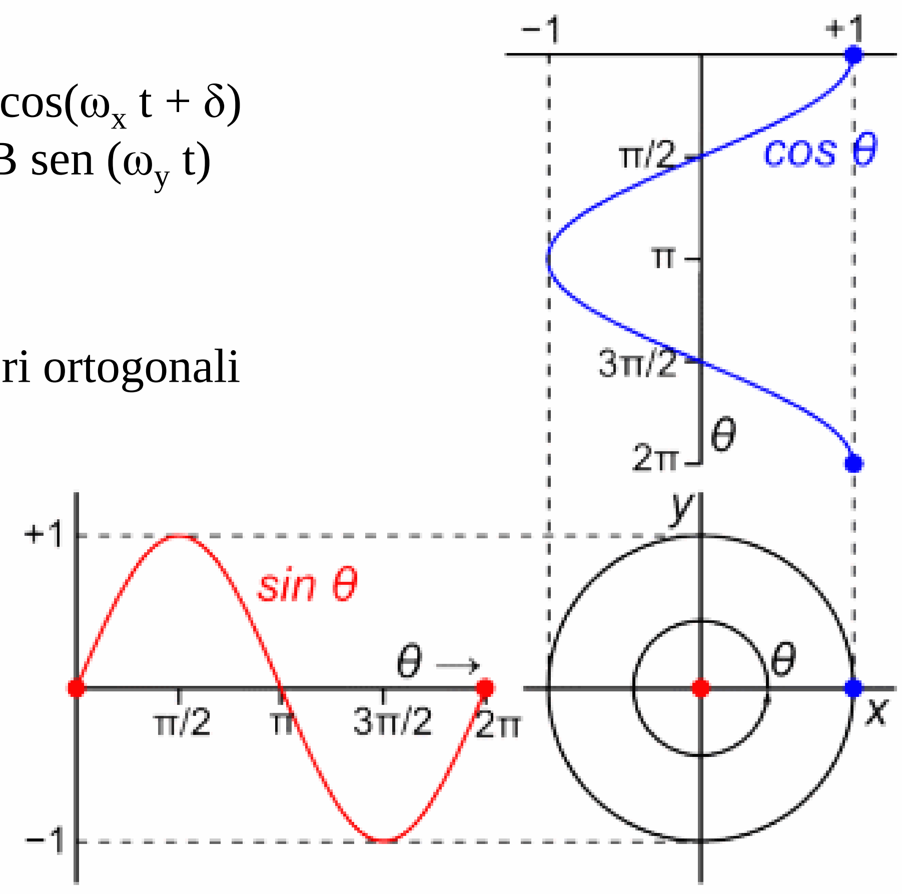






In matematica e in fisica, per figura di Lissajous si intende il grafico di una curva data dal sistema di equazioni parametriche:

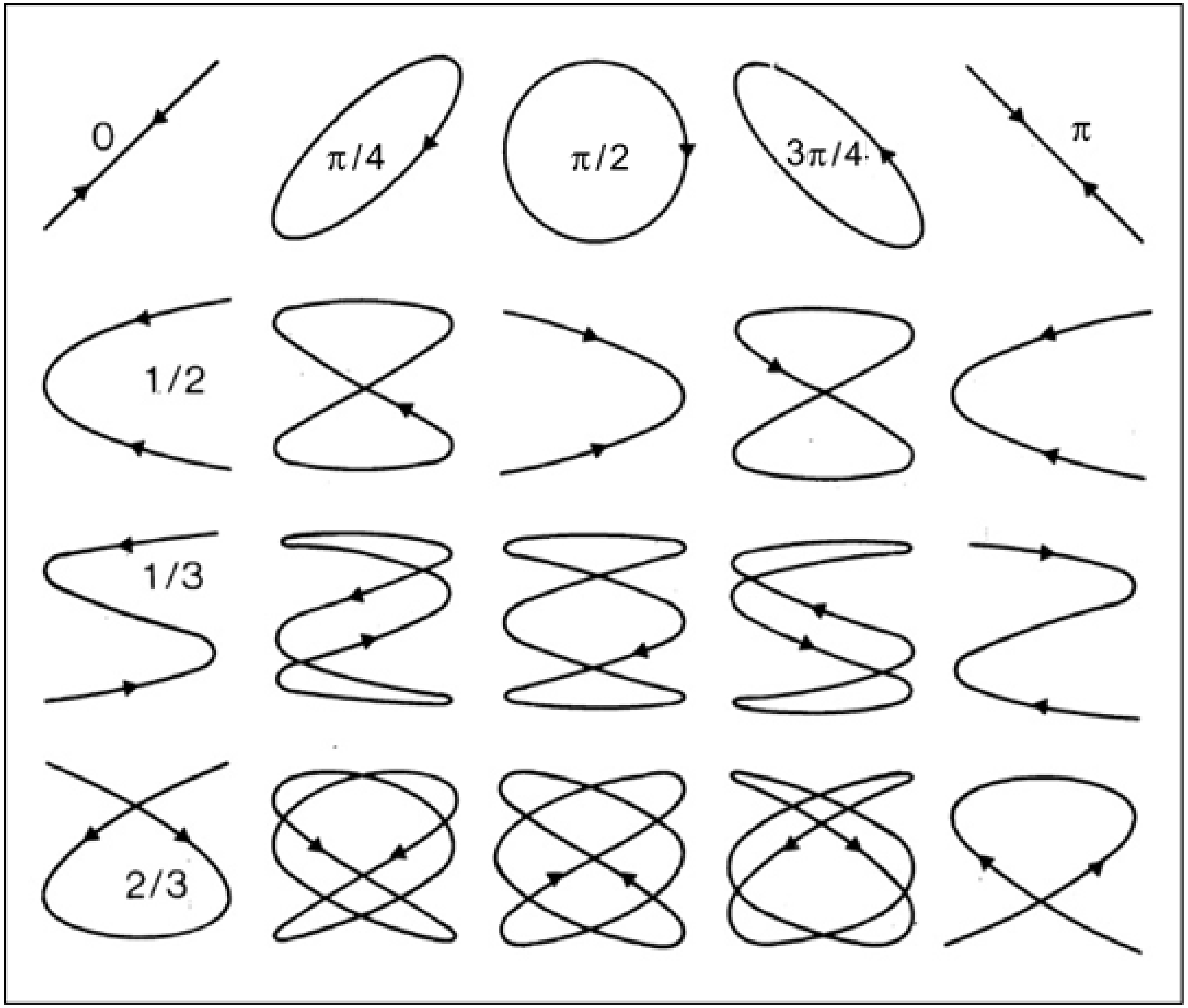
$$X = A\cos(\omega_x t + \delta)$$
$$Y = B\,\text{sen}\,(\omega_y t)$$

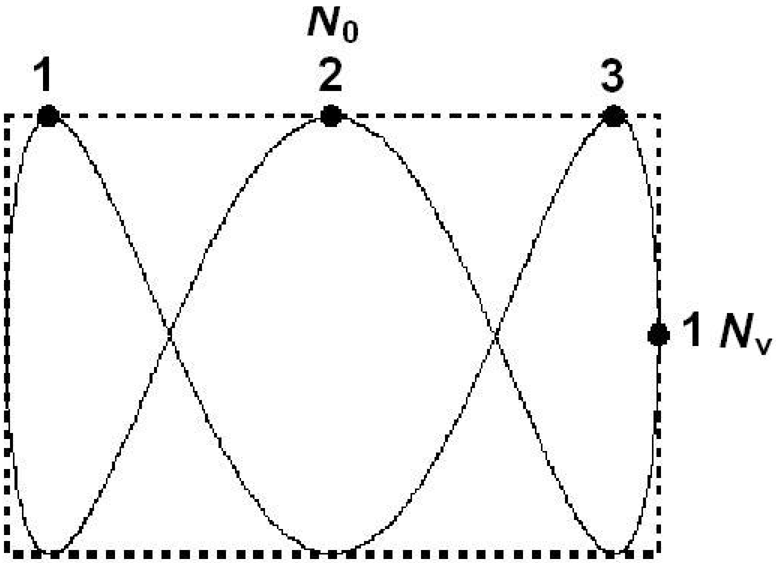


dove A e B sono le ampiezze,
ω_x e ω_y sono le pulsazioni e
δ è la differenza di fase dei due moti oscillatori ortogonali

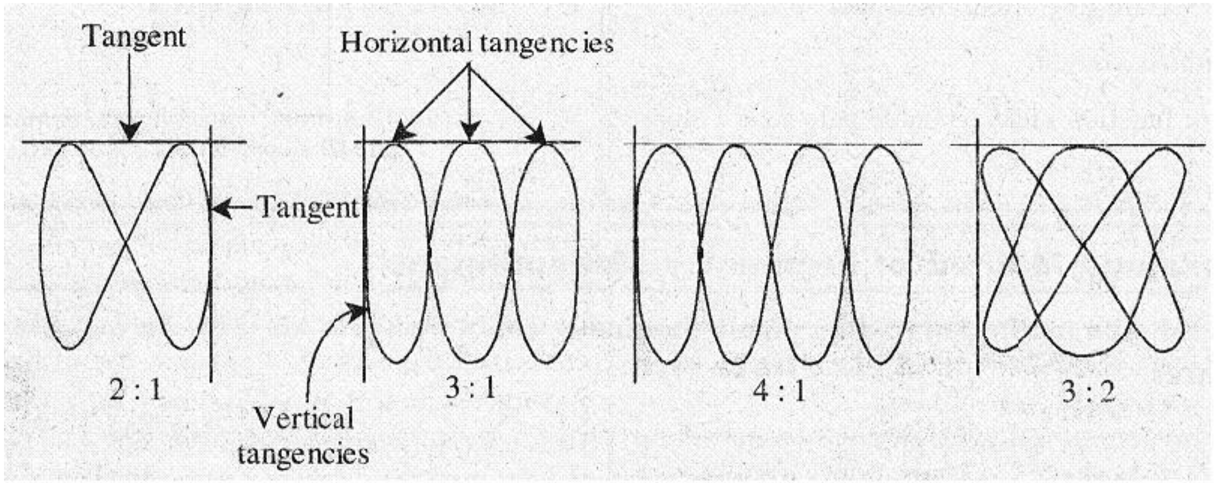
δ

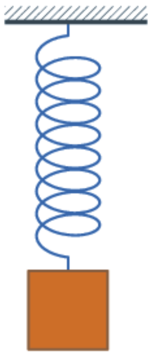
ω_x / ω_y



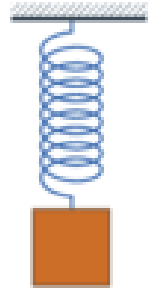


Misura del rapporto di frequenza tra due segnali mediante il conteggio del numero dei punti di tangenza. In questo caso $N_O = 3$ e $N_V = 1$: *il rapporto di frequenza è quindi pari a* $N_O / N_V = 3$

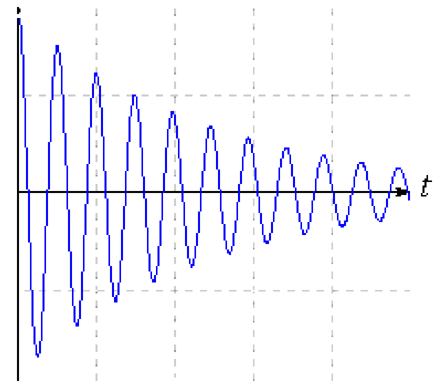


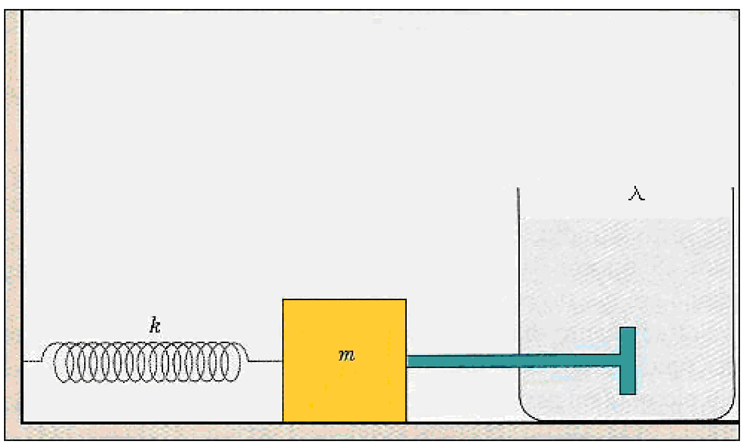


Oscillatore ideale



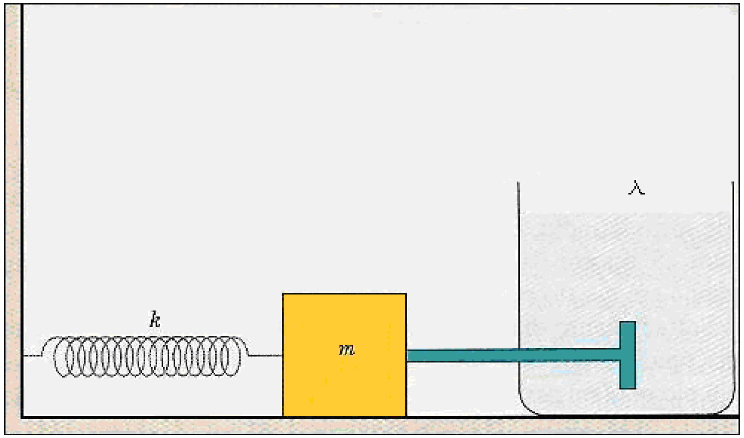
In presenza di smorzamento





Consideriamo un oscillatore armonico <u>smorzato da una forza viscosa</u>:

$$\boxed{f_{att} = -\lambda v}$$



$$\boxed{f_{att} = -\lambda v}$$

Applicando la seconda legge di Netwon

$F = ma$

$$\boxed{-kx - \lambda v = ma} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0}$$

La legge matematica che regola il moto di questo sistema risulta essere :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0}$$

Definendo, il *coefficiente di smorzamento* e la *pulsazione propria* rispettivamente :

$$\boxed{\gamma=\frac{\lambda}{2m}} \qquad \boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

l' *equazione differenziale dell' oscillatore armonico smorzato* diventa:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0}$$

Il tipo di soluzione dipende dalla relazione tra i parametri fisici dell'oscillatore. Ci sono tre casi possibili :

Parametro relativo alla forza di attrito

- Smorzamento debole

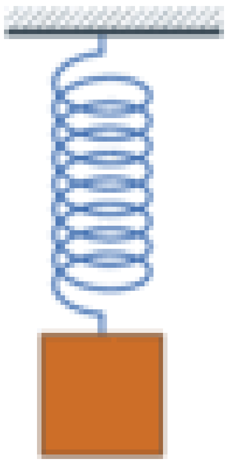
$$\boxed{\omega_0^2 > \gamma^2} \Rightarrow \boxed{k > \frac{\lambda^2}{4m}}$$

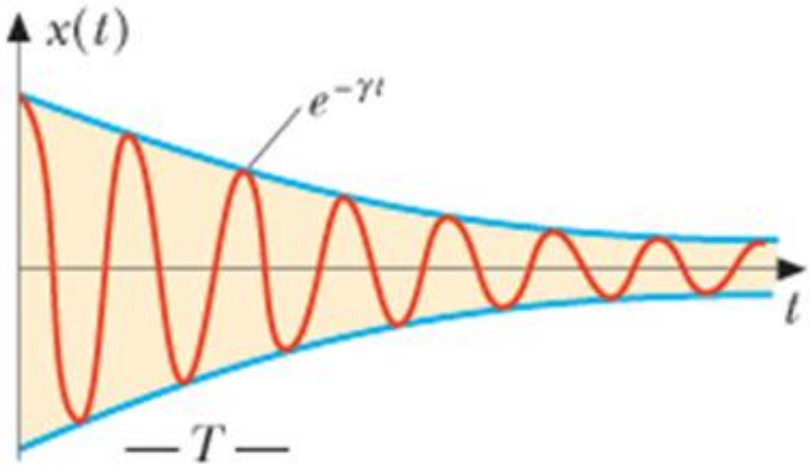
Parametro relativo alla forza elastica

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\boxed{x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)} \qquad \omega < \omega_0$$

La soluzione è quindi una sinusoide la cui ampiezza diminuisce nel tempo poiché è modulata da un esponenziale decrescente :





$$\boxed{x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)}$$

- Smorzamento critico

Parametro relativo alla forza di attrito

$$\boxed{\omega_0^2 = \gamma^2} \Rightarrow \boxed{k = \frac{\lambda^2}{4m}}$$

Parametro relativo alla forza elastica

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad \text{nullo}$$

$$\boxed{x(t) = e^{-\gamma t}(At + B)}$$

- Smorzamento forte

Parametro relativo alla forza di attrito

$$\boxed{\omega_0^2 < \gamma^2} \Rightarrow \boxed{k < \frac{\lambda^2}{4m}}$$

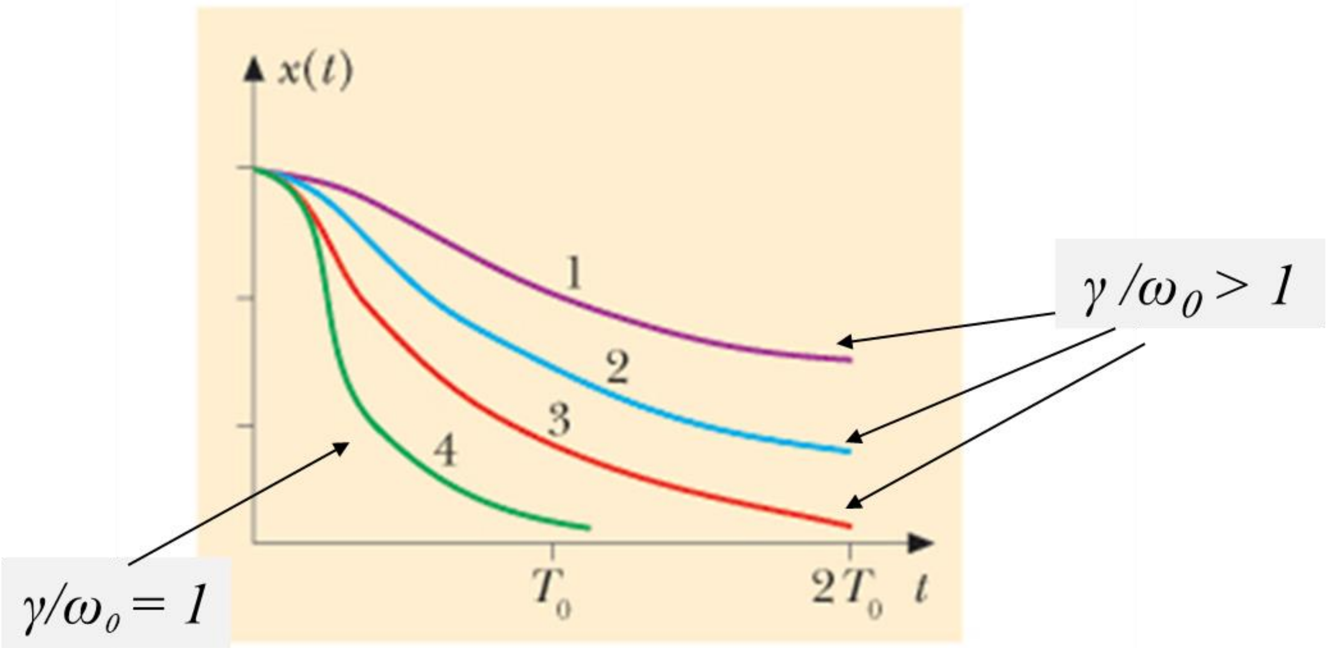
Parametro relativo alla forza elastica

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$ immaginario

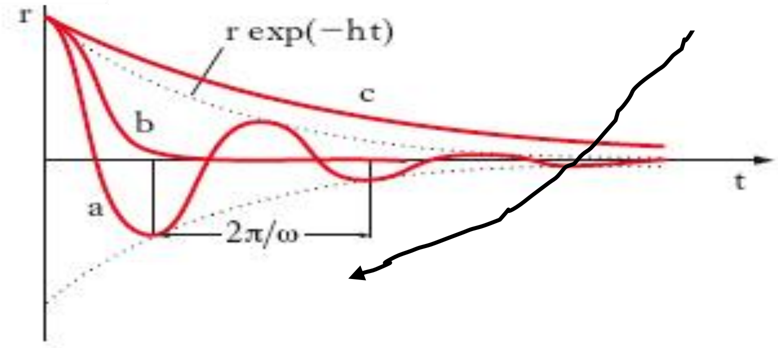
La soluzione globale è del tipo:

$$\boxed{x(t) = e^{-\gamma t}\left(Ae^{t\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}} + Be^{-t\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\right)}$$

Nelle condizioni di smorzamento forte o critico non c'è mai oscillazione:

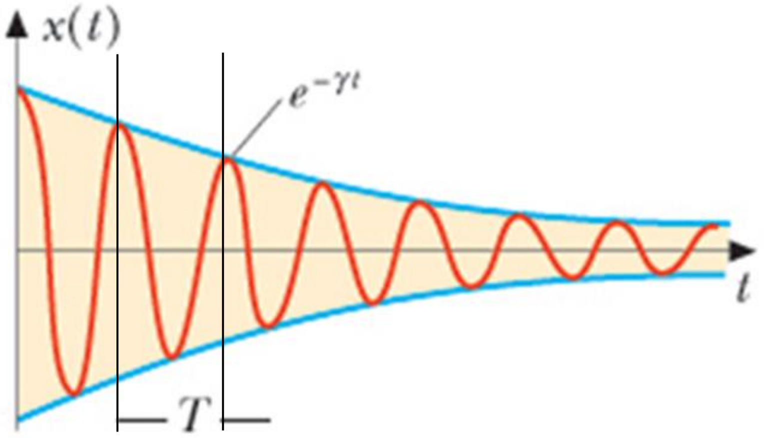


Al diminuire dello smorzamento



a) Oscillazioni smorzate
b) Smorzamento critico
c) Smorzamento forte

Nel caso di piccoli smorzamenti (γ piccolo) possiamo calcolare l'energia media sul primo periodo $T_0=2\pi/\omega_0$ supponendo l'ampiezza costante



$$< E > \cong < \frac{1}{2} k A^2 >$$

Per il primo periodo

$$< E_0 > \cong < \frac{1}{2} k A_0^{\,2} > = E_0$$

Per i periodi successivi

$$< E(t) > \cong E_0 e^{-2\gamma t}$$

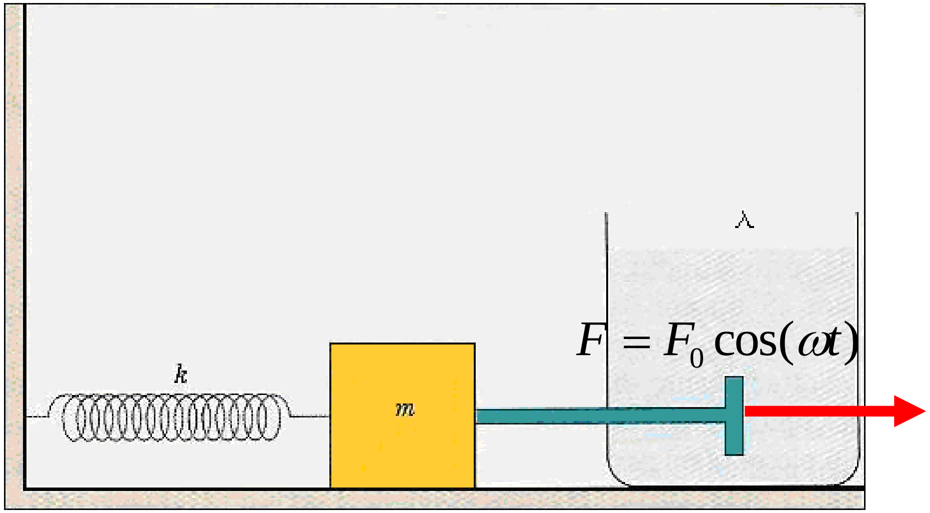
Per poter valutare di quanto varia l'energia media nel tempo si deve calcolare la derivata del valore medio dell'energia normalizzata:

$$\boxed{-\frac{\dfrac{d\langle E\rangle}{dt}}{\langle E\rangle}=\frac{2\gamma E_0 e^{-2\gamma t}}{E_0 e^{-2\gamma t}}=2\gamma}$$

Il parametro $\boxed{\tau_{Amp}=\dfrac{1}{\gamma}}$ rappresenta il tempo di decadimento per l'ampiezza

L'energia decade più rapidamente con un tempo $\boxed{\tau_{En}=\dfrac{1}{2\gamma}}$

Consideriamo ora un oscillatore armonico forzato:



applichiamo cioè all' oscillatore una forza esterna ad esempio sinusoidale

$$\boxed{F = F_0 \cos(\omega t)}$$

in cui ω rappresenta la pulsazione della forza esterna

Applicando la seconda legge di Netwon $F = ma$:

$$\boxed{-kx - \lambda v + F_0 \cos \omega t = ma} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t}$$

La legge matematica che regola il moto di questo sistema risulta essere:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t}$$

Definendo, il *coefficiente di smorzamento* e la *pulsazione propria* rispettivamente :

$$\boxed{\gamma = \frac{\lambda}{2m}} \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \neq \quad \omega$$

l' *equazione differenziale dell'oscillatore armonico forzato* diventa:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t}$$

Supponendo la condizione di smorzamento debole $\omega_0^2 > \gamma^2$

la soluzione generale di questo sistema è

$$\boxed{x(t) = A_0' e^{-\gamma t}\cos\left(\omega^* t + \phi^*\right) + A_0\cos\left(\omega t + \phi\right)}$$

Soluzione della omogenea associata

Soluzione particolare

Dopo un tempo abbastanza grande, il primo temine tende a zero:

$$\boxed{A_0' e^{-\gamma t}\cos\left(\omega^* t + \phi^*\right) \Rightarrow 0}$$

E la soluzione a regime è:

$$\boxed{x(t)_{regime} = A_0\cos\left(\omega t + \phi\right)}$$

$$\boxed{x(t)_{regime} = A_0 \cos(\omega t + \phi)}$$

dove:

$$\boxed{A_0 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}}$$

$$\boxed{tg\phi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

Lo spostamento sarà caratterizzato a regime dalla stessa pulsazione della forza esterna, anche se sfasato rispetto ad essa :

$$\boxed{x(t)_{regime} = A_0 \cos(\omega t + \phi)}$$

$$\boxed{F = F_0 \cos(\omega t)}$$

$$\boxed{\phi = arctg\left[-\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right]}$$

$$\boxed{x(t)_{regime} = A_0 \cos(\omega t + \phi)}$$

$$\boxed{A_0 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}}$$

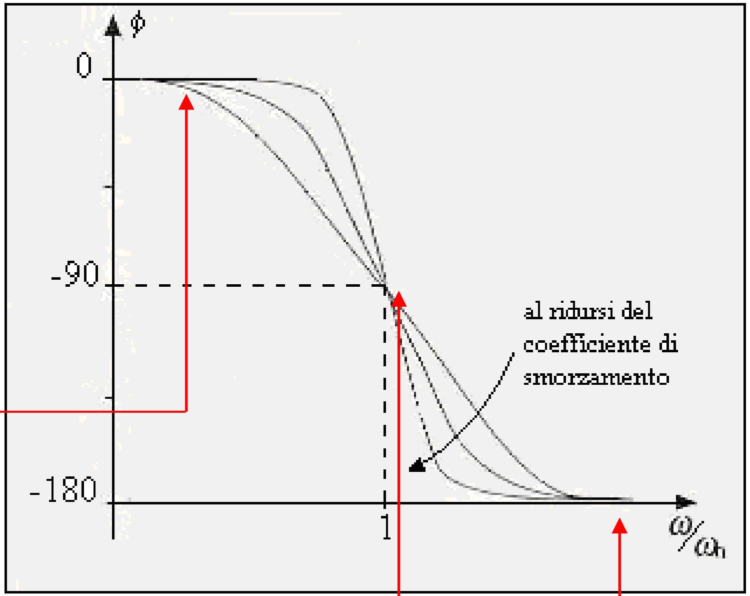
$$\boxed{tg\phi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

Lo spostamento sarà caratterizzato a regime dalla stessa pulsazione della forza esterna, anche se sfasato rispetto ad essa

A_0 e ϕ non dipendono dalle condizioni iniziali

In modo equivalente grafichiamo la fase ϕ in funzione di $\dfrac{\omega}{\omega_0}$:

$$\boxed{\phi = arctg\left[-\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right]}$$



Questo grafico riassume i tre casi possibili :

$\boxed{\omega \ll \omega_0} \rightarrow \boxed{\phi = 0}$

$\boxed{\omega = \omega_0} \rightarrow \boxed{\phi = -\dfrac{\pi}{2}}$

$\boxed{\omega \gg \omega_0} \rightarrow \boxed{\phi = -\pi}$

Analizziamo lo studio della risposta in funzione di ω e in particolare in relazione alla ω_0 del sistema:

$$\omega << \omega_0$$

$$A_0 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$tg\phi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$A_0 = \frac{F_0}{k}$$

$$\phi = 0$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\cos\omega t$$

- Spostamento in fase con la forza esterna
- Parametro dominante " k " costante elastica

$$\omega >> \omega_0$$

$$A_0 = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$A_0 = \frac{F_0}{m\omega^2}$$

$$tg\phi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\phi = -\pi$$

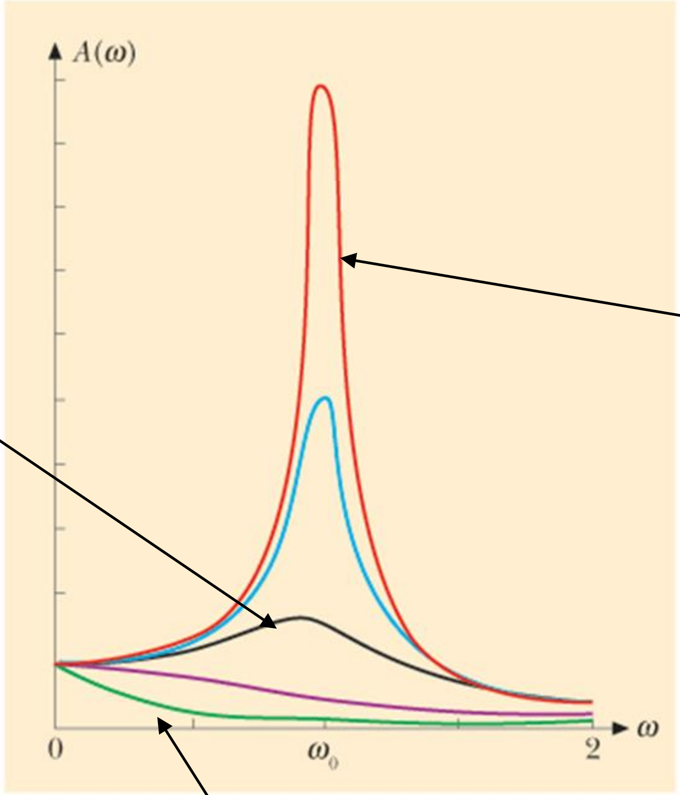
$$x(t) = -\frac{F_0}{m\omega^2}\cos\omega t$$

- Spostamento in opposizione di fase con la forza esterna
- Parametro dominante " m " massa

$$\omega = \omega_0$$

Grafichiamo A_0 in funzione di ω

Se lo *smorzamento aumenta* il massimo si sposta verso la parte sinistra del grafico e si riduce in ampiezza.



Con *smorzamento molto piccolo* la funzione assume un massimo (risonanaza in ampiezza) per :

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

Risonanza

Nel caso in cui *lo smorzamento è grande*, l'andamento è monotono decrescente.

$$\omega = \omega_0 \qquad x(t)_{regime} = A_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$A_0 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \qquad tg\phi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

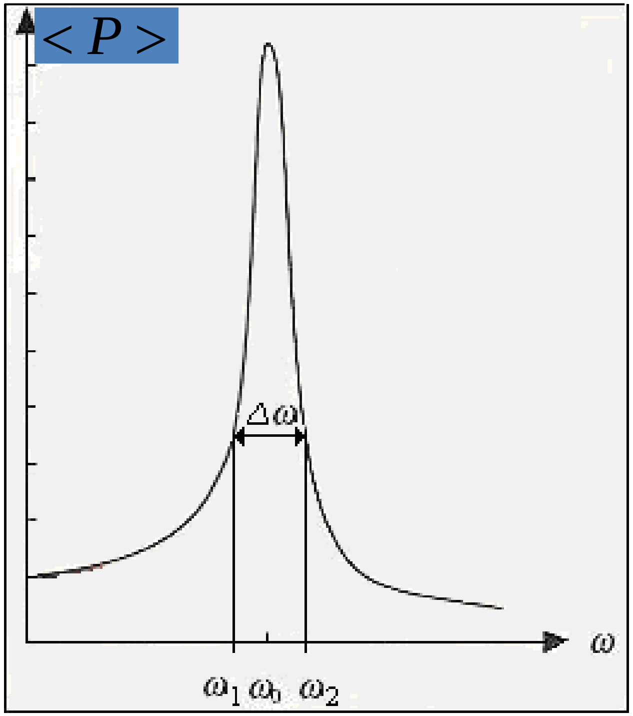
$$A_0 = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0} \qquad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0} sen\omega t$$

- Spostamento in quadratura di fase con la forza esterna
- Parametro dominante "γ" coefficiente di smorzamento

Effetti risonanza

Si definisce larghezza della risonanza l'intervallo $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$ tale che la potenza trasferita in questi due punti è la metà di quella trasferita ad ω_0.



Si trova

$$\omega_2 - \omega_1 = 2\gamma$$

Si definisce :

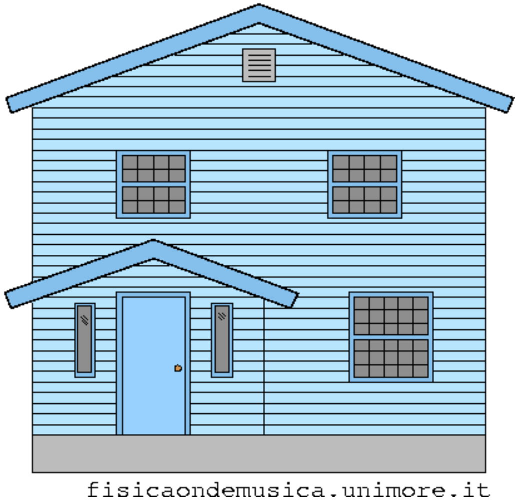
$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\sqrt{mk}}{\lambda}}$$

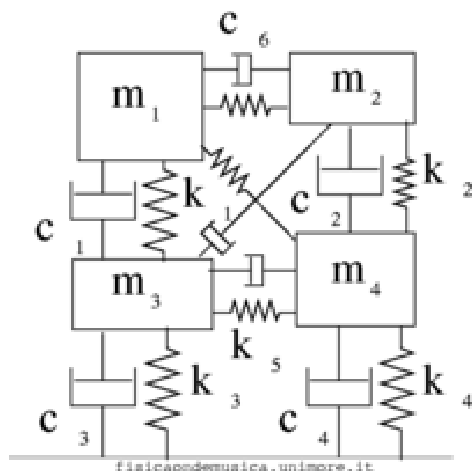
fattore di merito della risonanza.

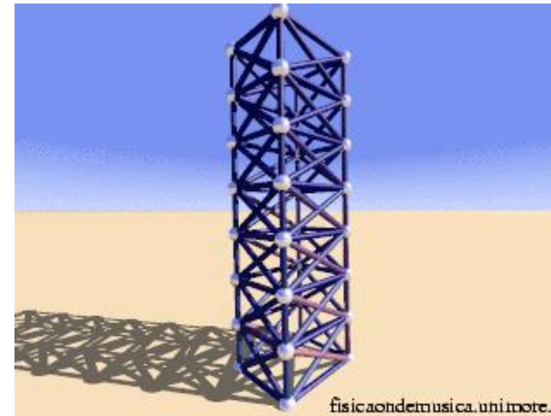
Esso è tanto maggiore quanto più stretta è la risonanza.

Effetti risonanza

Edifici antisismici





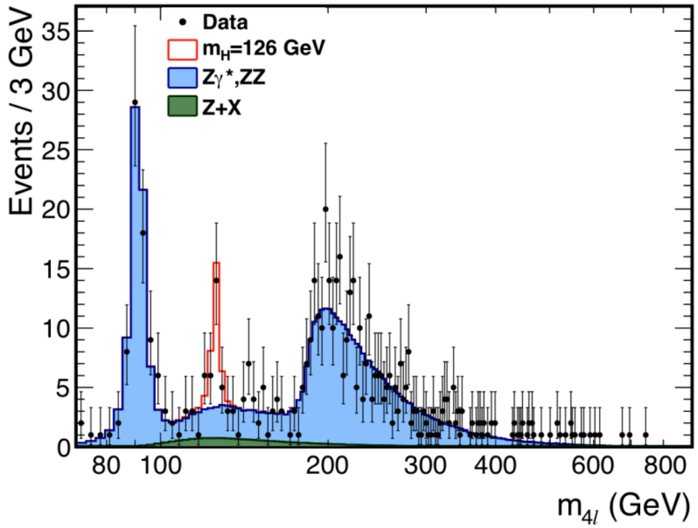


Rottura bicchieri

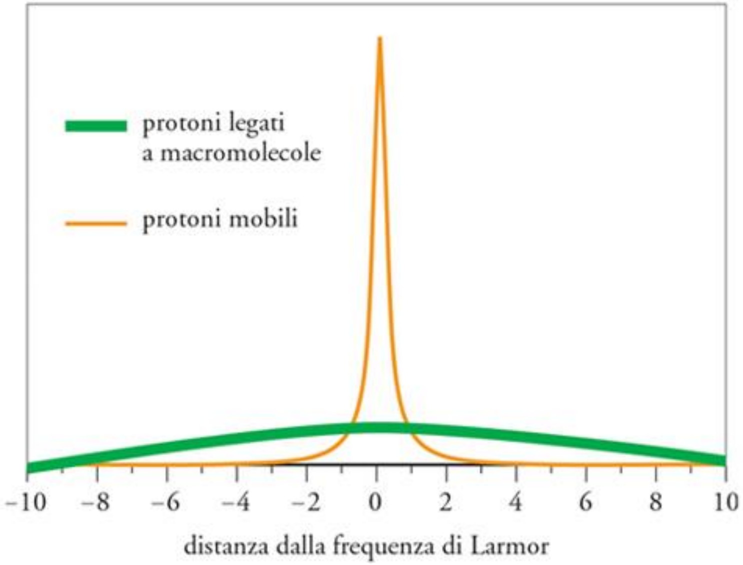
Crollo ponti

Effetti risonanza

Bosone di Higgs



Risonanza nucleare



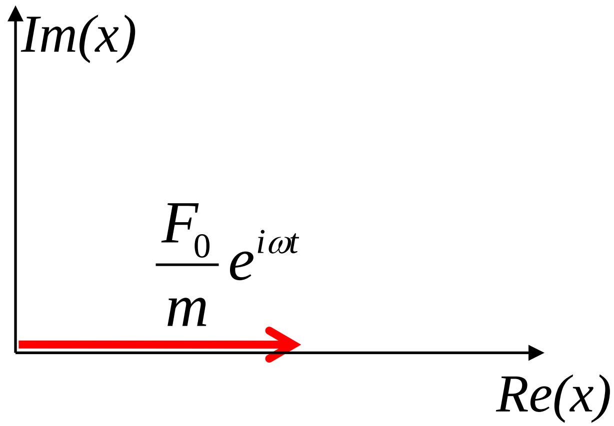
Risonanza acustica

Ricevitori di onde EM

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

Si considera la forza come un fasore nel piano complesso

$$F = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \quad \rightarrow \quad \overline{F} = \frac{F_0}{m}(\cos\omega t + i\,\mathrm{sen}\,\omega t) = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$



Si risolve

$$\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\overline{x}}{dt} + \omega_0^2 \overline{x} = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}+2\gamma\frac{d\bar{x}}{dt}+\omega_0^2 x=\frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$

Si cercano soluzioni $\bar{x}=A_0 e^{i(\omega t+\phi)}=A_0 e^{i\phi}e^{i\omega t}=\bar{A}e^{i\omega t}$

Per sostituzione si trova che la quantità complessa $\bar{A}$ vale:

$$\bar{A}=\frac{F_0}{m}\frac{1}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+2\gamma i\omega}$$

$$\bar{A}=A_0 e^{i\phi}$$

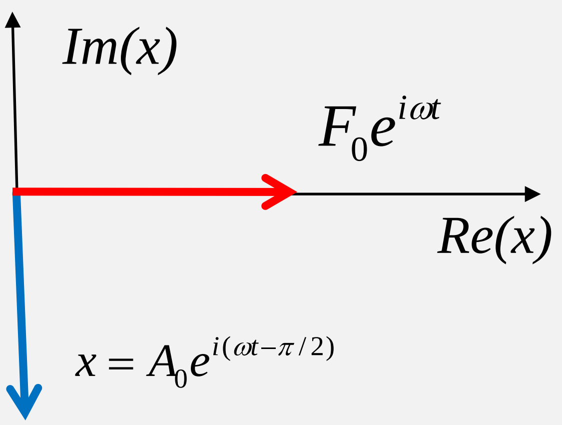
$$A_0=\left|A\right|=\frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

$$tg\phi=-\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$$\bar{x} = \bar{A}e^{i\omega t} = A_0 e^{i\phi} e^{i\omega t} \rightarrow \mathrm{Re}(x) = A_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Condizione di risonanza

$$\bar{x} = A_0 e^{-i\pi/2} e^{i\omega t} = A_0 e^{i(\omega t - \pi/2)} \rightarrow \mathrm{Re}(x) = A_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$



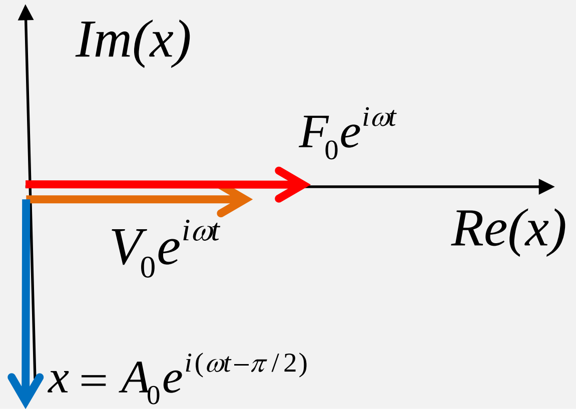
$$\omega = \omega_0$$

$$A_0 = \frac{F_0}{2m\gamma\omega}$$

$$\phi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\bar{x} = A_0 e^{i(\omega t - \pi/2)} \rightarrow \qquad \bar{v} = i\omega A_0 e^{i(\omega t - \pi/2)}$$

$$\bar{v} = \omega A_0 \,(i) e^{i(\omega t - \pi/2)} = \omega A_0 \, e^{i(\pi/2)} e^{i(\omega t - \pi/2)} = V_0 e^{i\omega t}$$



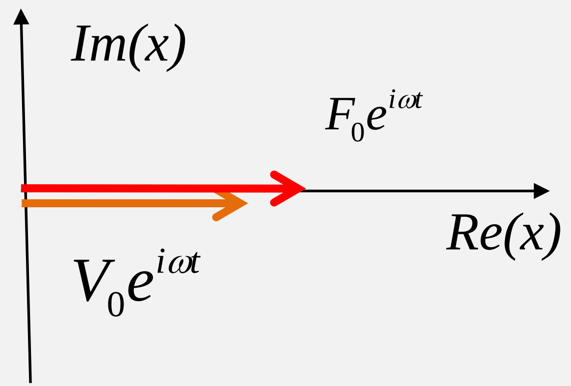
Condizione di risonanza

$$V_0 = \frac{F_0}{2m\gamma}$$

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t) \qquad\qquad F = F_0 \cos(\omega t)$$

La velocità è sempre in fase con la forza

La potenza $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ trasferita dalla forza alla massa è sempre positiva e c'è il massimo trasferimento di energia



Condizione di risonanza

$$V_0 = \frac{F_0}{2m\gamma}$$

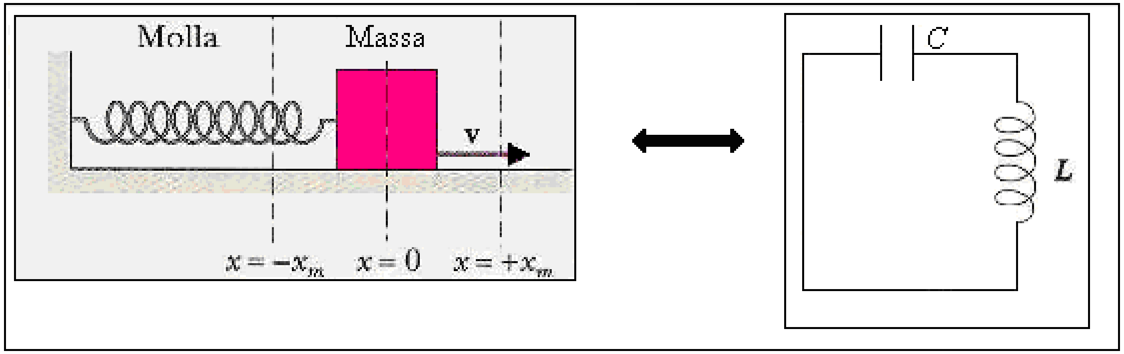
Nella condizione di risonanza la parte reale della velocità è massima.
Quindi sarà anche massima la potenza trasferita al sistema

$$P = (F_0 \cos\omega t)\left(\frac{F_0}{2m\gamma}\cos\omega t\right)$$

$$\langle P \rangle = \frac{F_0^2}{2m\gamma} \langle \cos^2 \omega t \rangle$$

$$\langle P \rangle = \frac{F_0^2}{4m\gamma}$$

L'equivalente elettrico del sistema meccanico massa – molla è il circuito LC :



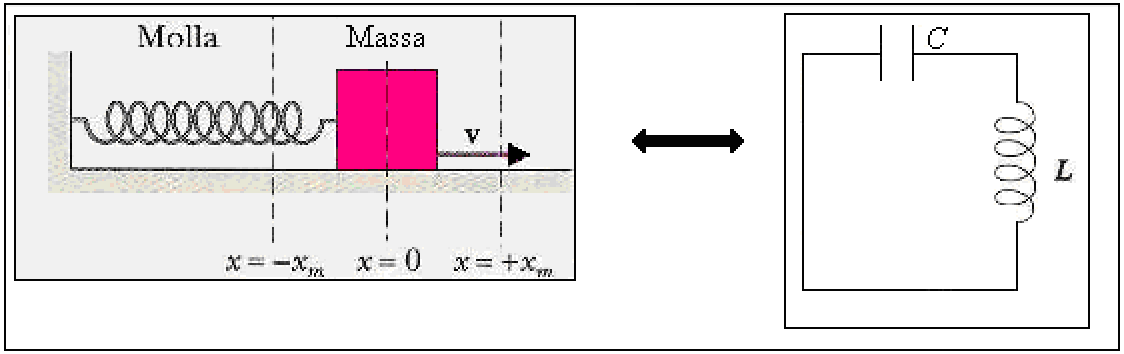
Scrivendo l'equazione di equilibrio delle tensioni alla maglia, si ha:

$$\boxed{\frac{q}{C} = L\frac{dI}{dt}} \quad \text{con} \quad \boxed{I = -\frac{dq}{dt}}$$

quindi

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0} \longrightarrow \boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0} \quad \text{in cui} \quad \boxed{\omega^2 = \frac{1}{LC}}$$

È evidente quindi l'analogia tra i due sistemi:



$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

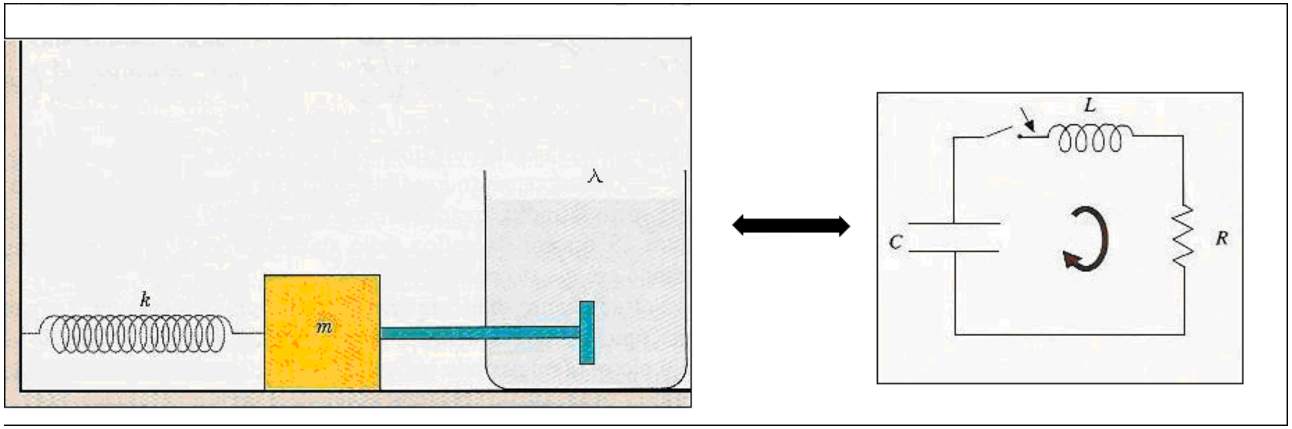
$$x(t) \longleftrightarrow q(t)$$

$$v(t) \longleftrightarrow I(t)$$

$$m \longleftrightarrow L$$

$$\frac{1}{k} \longleftrightarrow C$$

L'equivalente elettrico dell'oscillatore armonico smorzato è il circuito RLC :



Scrivendo l'equazione di equilibrio delle tensioni alla maglia, si ha:

$$\boxed{-L\frac{dI}{dt} = \frac{q}{C} + RI} \quad \text{con} \quad \boxed{I = \frac{dq}{dt}}$$

quindi

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0}$$

La legge matematica che regola questo sistema risulta essere quindi:

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0}$$

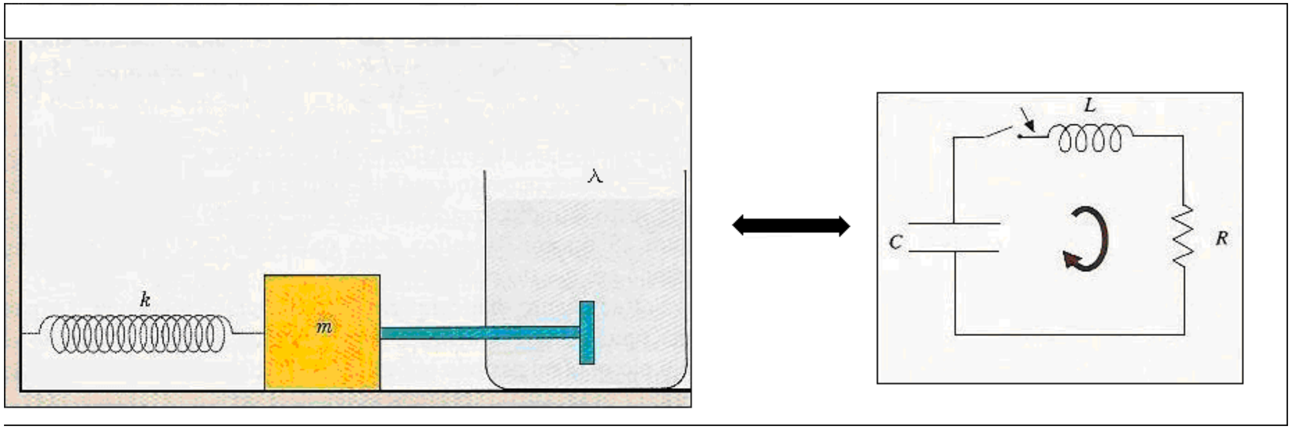
Definendo, il *coefficiente di smorzamento* e la *pulsazione propria* rispettivamente :

$$\boxed{\gamma = \frac{R}{2L}} \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$$

l' *equazione differenziale del circuito RLC* diventa:

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 2\gamma\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0}$$

È evidente quindi l'analogia tra i due sistemi:



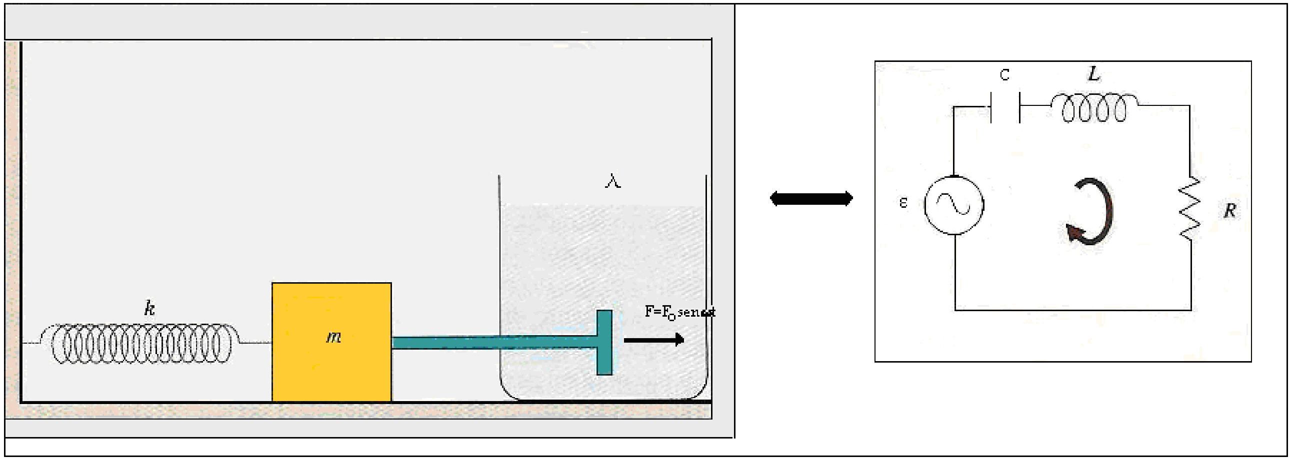
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$$

$$\frac{\lambda}{m} \longleftrightarrow \frac{R}{L}$$

$$\frac{k}{m} \longleftrightarrow \frac{1}{LC}$$

L'equivalente elettrico dell' oscillatore armonico forzato è il circuito RLC con generatore di f.e.m.:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$$



Scrivendo l' equazione di equilibrio delle tensioni alla maglia, si ha:

$$\boxed{\varepsilon_0 \cos \omega t - \frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} = RI}$$

Ricordando che $I = dq/dt$

Si ottiene $$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{\varepsilon_0}{L}\cos\omega t$$

Definendo, il *coefficiente di smorzamento* e la *pulsazione propria* rispettivamente :

$$\gamma = \frac{R}{2L} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

l' *equazione differenziale del circuito RLC con f.e.m.* diventa:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\gamma\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_0}{L}\cos\omega t$$

Ed in forma complessa

$$\boxed{\frac{d^2\overline{q}}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\overline{q}}{dt} + \omega_0^2\overline{q} = \frac{\varepsilon_0}{L}e^{i\omega t}}$$

Poiche' a noi interessa soprattutto la corrente, cerchiamo un'equazione in cui compaia la corrente

$$\varepsilon_0 \cos \omega t - \frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} = RI \qquad I = dq/dt$$

Derivando

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = -\frac{\varepsilon_0}{L} sen\omega t$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Ed in forma complessa

$$\frac{d^2 \bar{I}}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\bar{I}}{dt} + \omega_0^2 \bar{I} = \frac{\varepsilon_0}{L} e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} = i\frac{\varepsilon_0}{L} e^{i\omega t}$$

$$\frac{d^2\bar{I}}{dt^2}+2\gamma\frac{d\bar{I}}{dt}+\omega_0^2\bar{I}=i\frac{\varepsilon_0}{L}e^{i\omega t}$$

Cerchiamo soluzioni $I_0e^{i(\omega t+\phi)}=I_0e^{i\phi}e^{i\omega t}$

$$\bar{I}=\frac{\varepsilon_0}{L}\frac{\left[-2\gamma\omega+i(\omega_0^2-\omega^2)\right]}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]}$$

$$I_0=\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]}}$$

$$tg\phi=-\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2\gamma\omega}$$

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right]}} \qquad tg\phi = -\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}$$

Ricordando

$$\gamma = \frac{R}{2L} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

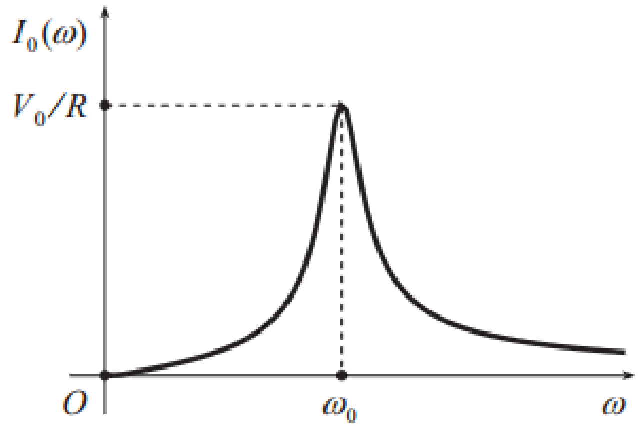
$$\boxed{I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \qquad tg\phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}$$

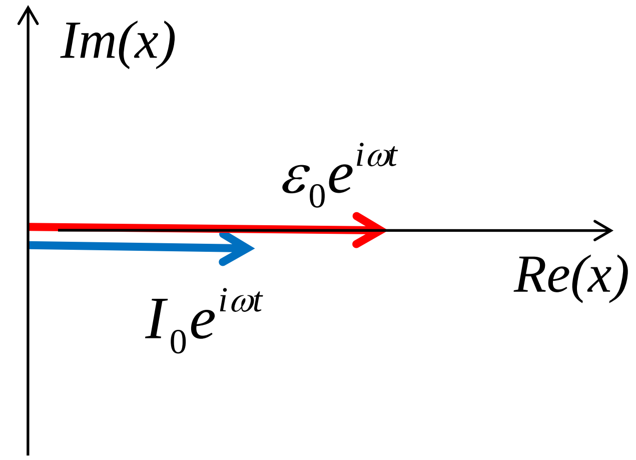
$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

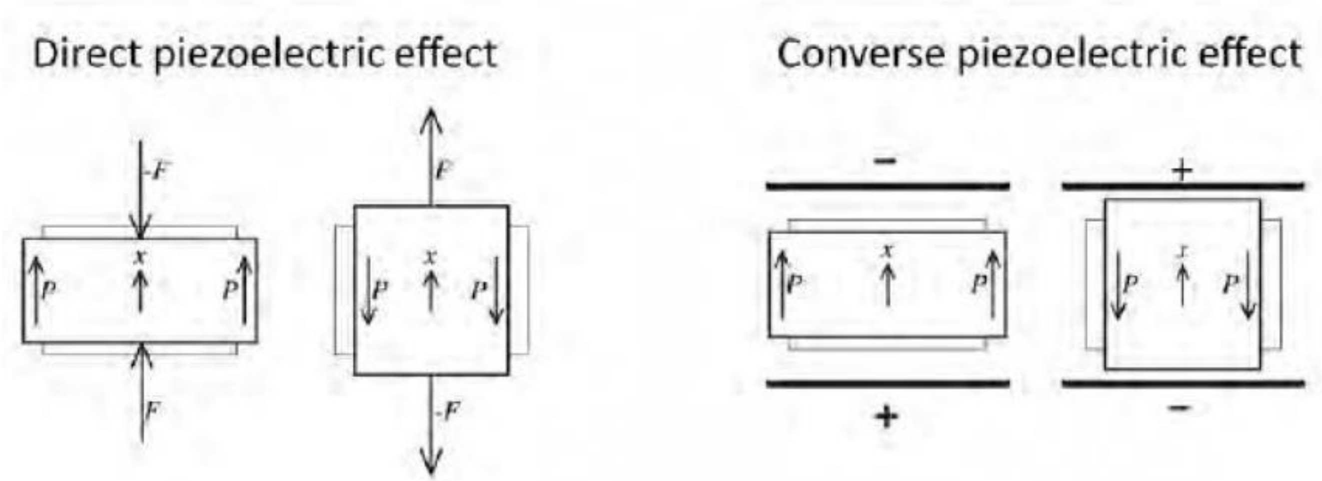
$$tg\phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

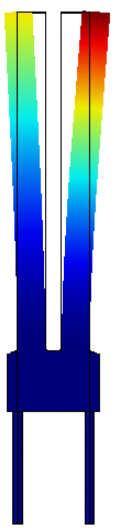
$$Se \;\; \omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

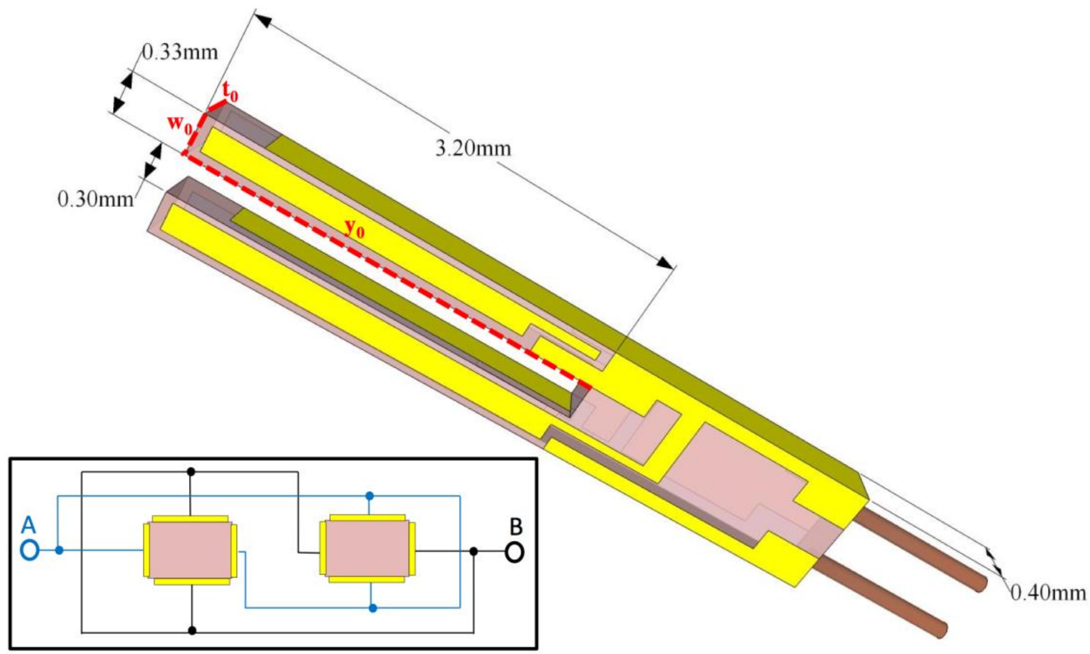
$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R} \qquad tg\phi = 0$$

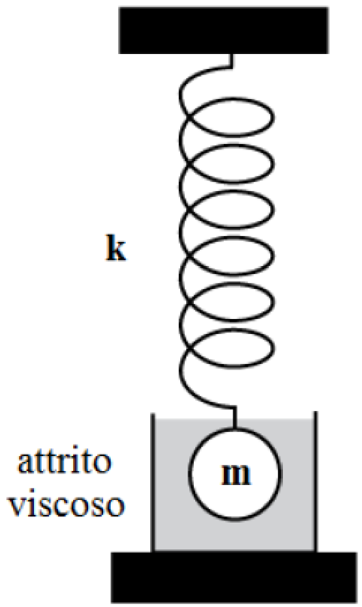


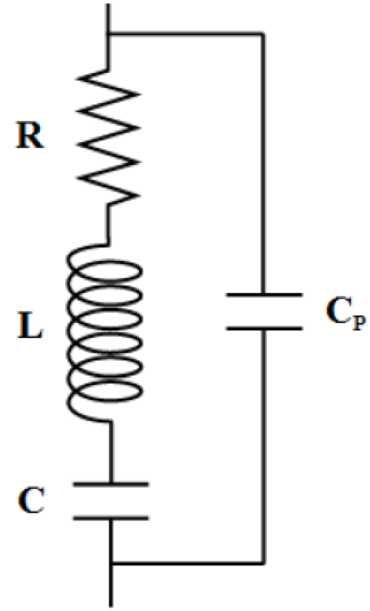



Direct piezoelectric effect
Converse piezoelectric effect
-F
F
x
P
+
−




0.33mm
3.20mm
0.30mm
0.40mm
t_0
w_0
y_0
A
B





C: Capacità vibrazionale ⟷ Elasticità meccanica

L: Induttanza vibrazionale ⟷ Inerzia meccanica

R: Resistenza vibrazionale ⟷ Perdite di energia meccanica

C_p: Capacità parassita ⟷ Cattiva adesione elettrodi, contatti

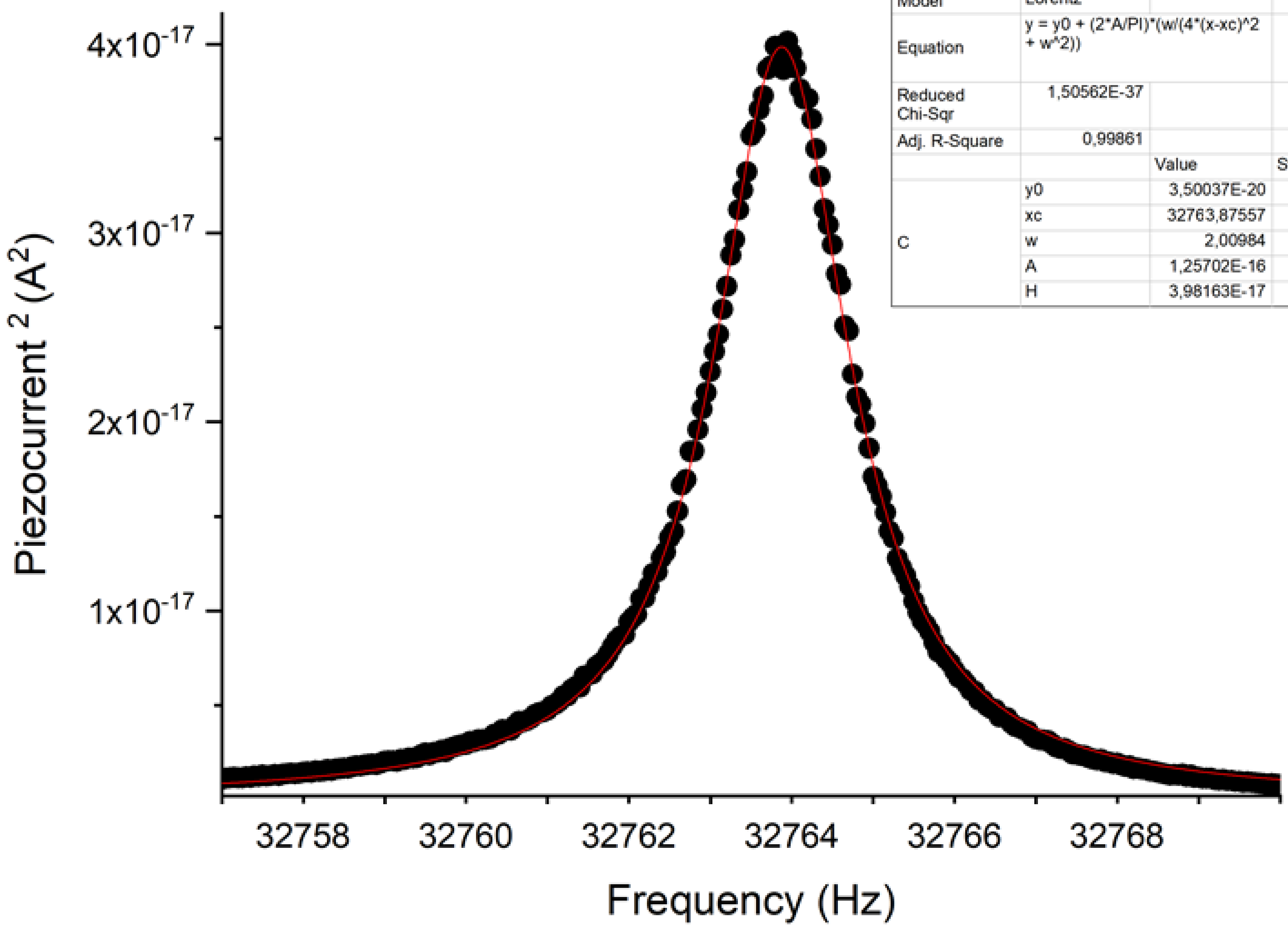
$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx$$

$$V = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q$$

$$f_0 = \frac{\pi K}{8L^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$



Model	Lorentz		
Equation	y = y0 + (2*A/PI)*(w/(4*(x-xc)^2 + w^2))		
Reduced Chi-Sqr	1,50562E-37		
Adj. R-Square	0,99861		
		Value	Standard Error
C	y0	3,50037E-20	3,49399E-20
	xc	32763,87557	0,00247
	w	2,00984	0,00881
	A	1,25702E-16	4,82163E-19
	H	3,98163E-17	

Frequenza = 32763.87 Hz FWHM = 2 Hz $Q = f/\Delta f = 16382$