Capitolo 2

Potenziale elettrostatico

2.1 Lavoro della forza elettrica

Come abbiamo visto nel capitolo 1, una carica q_0 posta in un punto A dello spazio in cui è presente un **campo elettrostatico** $\vec{E}$ sente una forza $\vec{F}$ la cui espressione è data dalla legge di Coulomb.

Se, per effetto della forza elettrica, la carica compie uno spostamento infinitesimo $d\vec{s}$, il lavoro infinitesimo **compiuto dalla forza elettrica sulla carica** sarà:

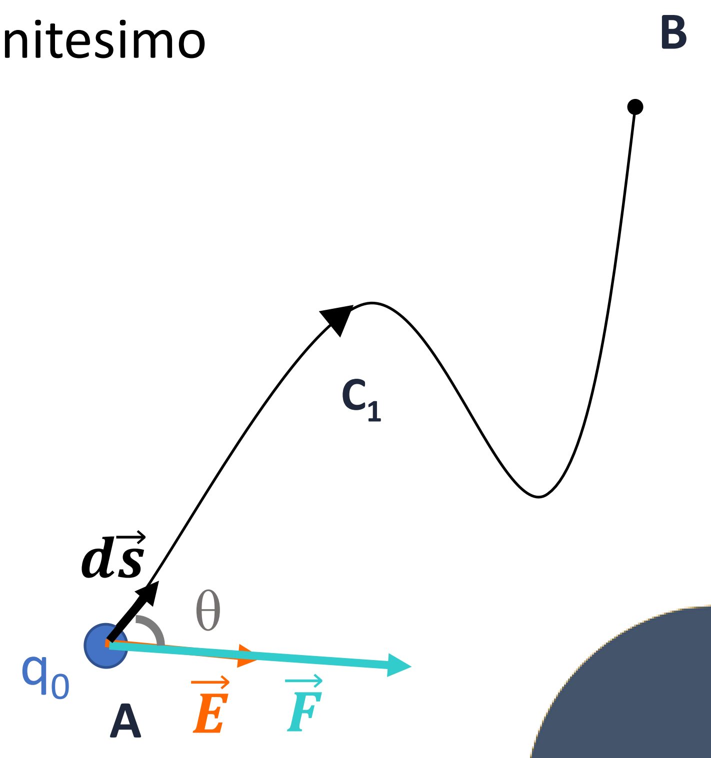
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 E ds \cos\theta$$

con θ l'angolo tra $\vec{E}$ e $d\vec{s}$.

Per uno **spostamento finito** tra i punti **A** e **B** lungo un cammino curvo **C_1**, si procede dividendo il cammino in tanti tratti infinitesimi e sommando i contributi del lavoro. Questo significa in altri termini calcolare l'integrale:

$$W_1 = \int_{C_1} dW_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

In questo caso il vettore $d\vec{s}$ è tangente alla curva **C_1** in ogni punto e l'**integrale** viene detto **curvilineo**.

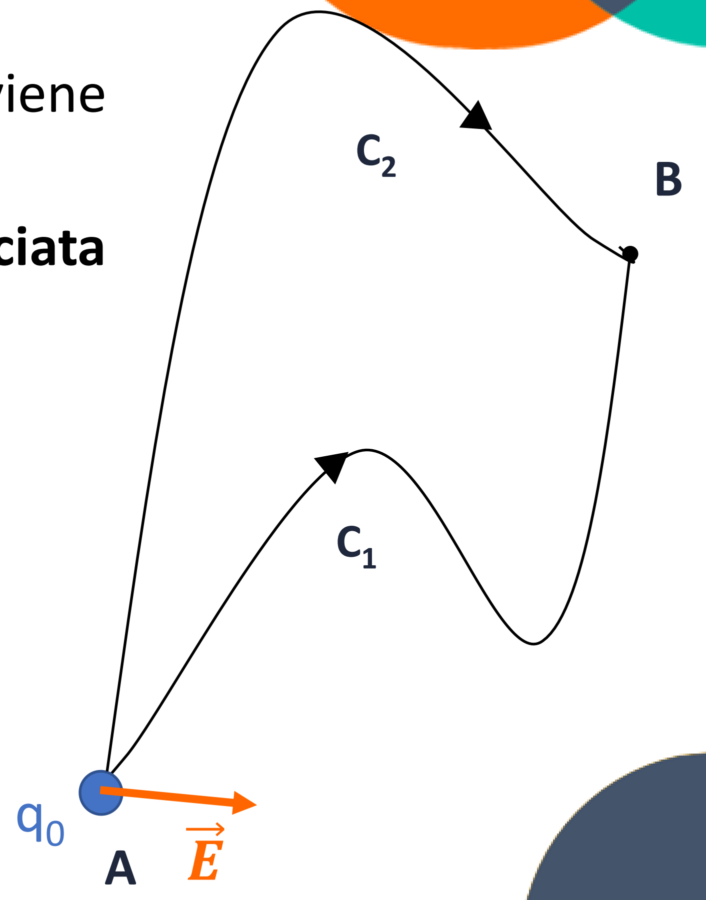


Supponiamo, adesso, che la carica si sposti dal punto A al punto B lungo un cammino $\mathbf{C_2}$ diverso da $\mathbf{C_1}$.

Come sarà il lavoro $\mathbf{W_2}$ rispetto a $\mathbf{W_1}$?

In generale, un **integrale curvilineo dipende dal cammino** lungo il quale viene calcolato.

Tuttavia, si dimostra che **il lavoro compiuto dalla forza di Coulomb, associata ad un campo elettrostatico, non dipende dal percorso**, ovvero $\mathbf{W_1 = W_2}$.



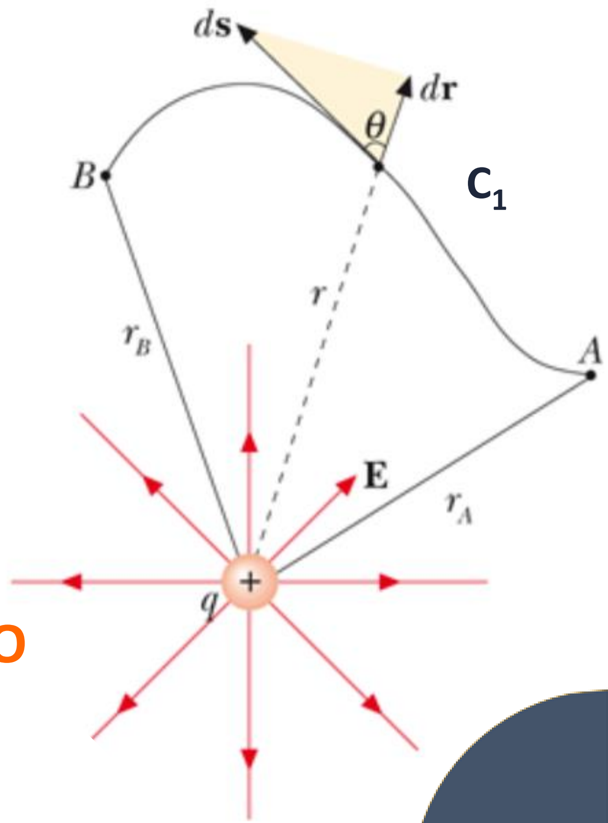
Supponiamo, adesso, che la carica si sposti dal punto A al punto B lungo un cammino $\mathbf{C_2}$ diverso da $\mathbf{C_1}$.

Come sarà il lavoro $\mathbf{W_2}$ rispetto a $\mathbf{W_1}$?

In generale, un **integrale curvilineo dipende dal cammino** lungo il quale viene calcolato.

Tuttavia, si dimostra che **il lavoro compiuto dalla forza di Coulomb, associata ad un campo elettrostatico, non dipende dal percorso**, ovvero $\mathbf{W_1 = W_2}$.

Consideriamo il caso più semplice del campo elettrostatico generato da una carica positiva.



$$dW_1 = \vec{F}\cdot d\vec{s} = q_0\vec{E}\cdot d\vec{s} = q_0\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\widehat{u_r}\cdot d\vec{s}$$

$$\widehat{u_r}\cdot d\vec{s} = (1)\,ds\,cos\theta = dr \quad \Rightarrow \quad dW = q_0\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr$$

Dipende SOLO da r!

$$\Rightarrow W_1 = \int_A^B dW_1 = \int_A^B q_0\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_A^B = -\left(\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} - \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}\right)$$

Se, adesso, calcoliamo il lavoro $\mathbf{W_2}$, compiuto per spostare la carica dal punto A al punto B lungo il cammino $\mathbf{C_2}$, otterremo

$$\boldsymbol{W_2 = \int_A^B dW_2 = \int_A^B q_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_A^B = -\left(\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} - \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}\right) = W_1}$$

Quindi, per il **campo elettrostatico**, il **lavoro** compiuto dalle forze elettriche per spostare una carica da un punto dello spazio ad un altro **dipende esclusivamente dalle posizioni iniziale e finale** della carica e non dal particolare percorso seguito, ovvero **sarà uguale per tutti** gli infiniti **possibili percorsi**. Questo dimostra che le forze in gioco sono **forze conservative**.

Si definisce **circuitazione** di un campo l'**integrale di linea del campo lungo un percorso chiuso**. Indichiamo con $\mathcal{E}$ la **circuitazione del campo elettrico**, che prende il nome di forza elettromotrice e di cui parleremo nei prossimi capitoli.

$$\mathcal{E} = \oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{d\vec{s}}$$

È intuitivo dimostrare che il lavoro compiuto dalle forze di un campo elettrostatico per spostare una carica lungo un percorso chiuso è nullo. Ne consegue che la **circuitazione del campo elettrostatico è nulla**.

2.2 Potenziale elettrostatico ed energia potenziale elettrostatica

Riprendiamo l'espressione del lavoro compiuto dalla forza elettrica per spostare una carica da un punto A ad un punto B.

$$\boldsymbol{W = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Poiché abbiamo dimostrato che tale integrale non dipende dal percorso, possiamo introdurre una funzione di stato (ovvero **una grandezza fisica la cui variazione dipende solo dalle condizioni del sistema nello stato iniziale e finale**) la cui variazione tra la condizione iniziale del sistema (carica q_0 che si trova nel punto A) e quella finale (carica q_0 che si trova nel punto B) sia uguale a quell'integrale.

Tale funzione si chiama **potenziale elettrostatico V**. Chiamiamo **differenza di potenziale elettrostatico** (**d.d.p**) tra punto finale B ed iniziale A la quantità

$$\boldsymbol{V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

L'espressione della differenza di potenziale ci dice che il potenziale elettrostatico è sempre definito **a meno di una costante**.

Potenziale elettrostatico

Il potenziale elettrostatico V_B di una carica q_0 posta in un punto B dello spazio in cui è presente un campo elettrostatico $\vec{E}$ è uguale all'opposto del lavoro compiuto dalle forze elettriche per portate la carica da un punto iniziale A a B, diviso il valore della carica q_0, sommato al valore del potenziale che la carica possedeva nel punto iniziale A.

$$V_B = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} + V_A = -\frac{W}{q_0} + V_A$$

Volt

Il potenziale elettrostatico si misura in Volt:

$$1\,V = \frac{1\,J}{1\,C}$$

Invertendo l'equazione, possiamo anche dire che il lavoro compiuto dalle forze elettriche per spostare una carica q_0 da un punto A ad un punto B è uguale al prodotto della carica per l'opposto della differenza di potenziale tra i due punti:

$$W_{AB} = -q_0(V_B - V_A) = -q_0 \Delta V$$

Essendo le forze elettrostatiche conservative, possiamo introdurre l'**energia potenziale elettrica U_e**, anch'essa funzione di stato, la cui variazione è pari all'opposto del lavoro della forza elettrostatica:

$$W_{AB} = -\Delta U_e$$

Energia potenziale elettrostatica

L'energia potenziale elettrostatica U_B che una carica q_0 immersa in campo elettrico possiede, in un punto B dello spazio, è uguale all'opposto del lavoro compiuto dalle forze elettriche per portate la carica da un punto iniziale A a B, sommato al valore U_A dell'energia potenziale posseduta dalla carica in A.

$$U_B = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + U_A = -W + U_A$$

L'energia potenziale elettrostatica, come il potenziale elettrostatico, è quindi definita a meno di una costante pari al valore dell'energia (o del potenziale) nel punto inziale detto anche riferimento.

Dalle equazioni precedenti segue, ovviamente, che

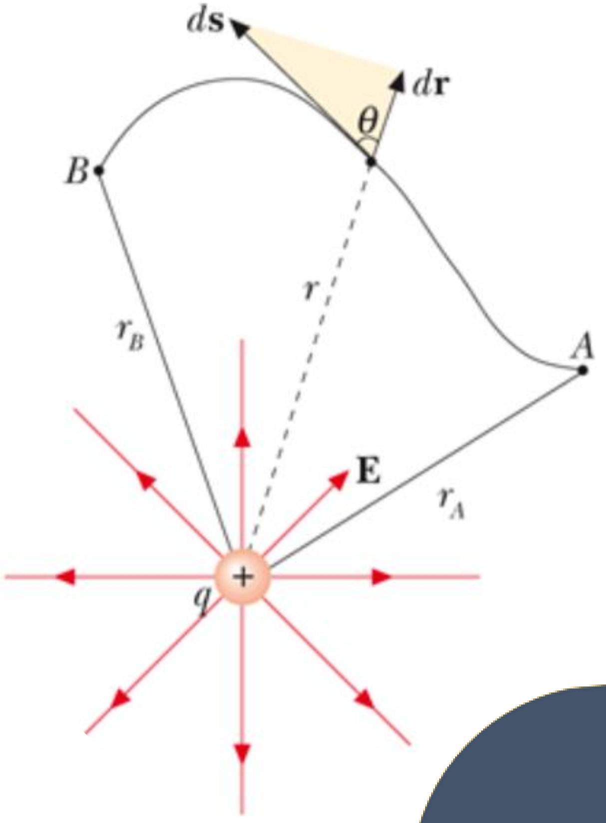
$$\Delta U_e = q_0 \Delta V$$

2.2.1 Potenziale elettrostatico generato da una carica puntiforme

Applichiamo la definizione di potenziale elettrostatico al caso di una carica q_0 che, sotto l'azione della forza elettrica associata al **campo elettrostatico generato da una carica puntiforme q**, viene spostata da un punto A ad un punto B:

$$V_B = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} + V_A = \int_B^A \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr + V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_B^A + V_A =$$

$$= \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}\right) + V_A$$



Nel caso generalizzato in cui **q_0 viene portata dall'infinito ad un punto P distante r da q**, il potenziale in P è

$$\mathbf{V(r)} = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{s} + V(\infty) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + V(\infty)$$

Se <u>imponiamo la condizione</u> che il potenziale sia nullo all'infinito ($V(\infty)$=0), otteniamo:

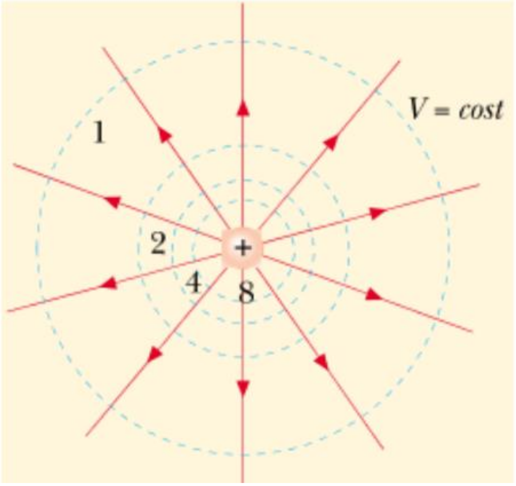
$$\mathrm{V(r)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Superficie equipotenziale

Si definisce superficie equipotenziale il luogo dei punti dello spazio in cui il potenziale assume il medesimo valore.

Tali superfici possiedono le seguenti caratteristiche:

- Per un punto dello spazio passa una ed una sola superficie potenziale.
- Una superficie equipotenziale è perpendicolare, in ogni suo punto, al campo elettrostatico e, quindi, alle linee di forza del campo.

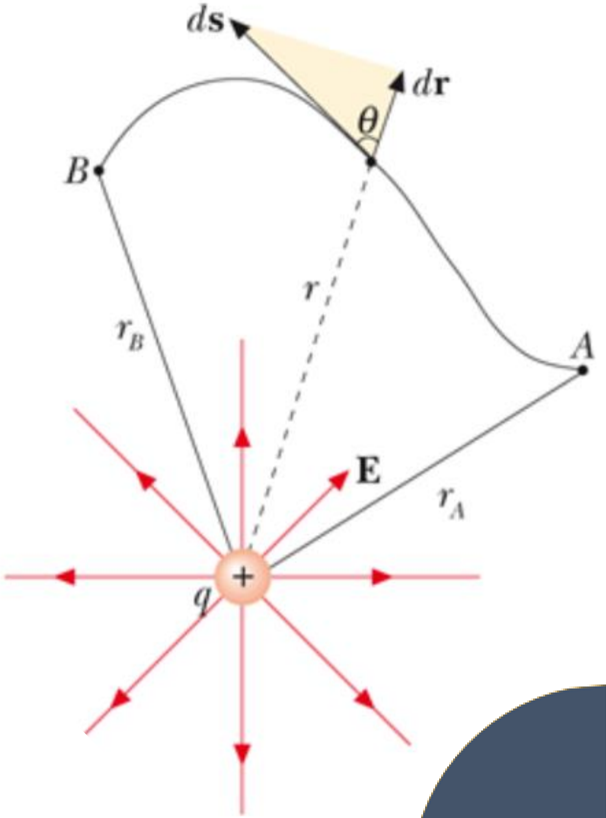


Consideriamo l’espressione del potenziale ricavata nel caso di un campo elettrostatico generato da una carica puntiforme.

Osserviamo che, fissata una distanza r, V(r) avrà lo stesso valore in tutti i punti distanti r dalla carica sorgente. Concludiamo, quindi, che, **nel caso di un campo elettrostatico generato da una carica puntiforme, le superfici equipotenziali sono delle superfici sferiche**.

Inoltre, è facile verificare che tali superfici possiedono le due proprietà delle superfici equipotenziali sopra elencate.

Analogamente ai calcoli fatti per il potenziale elettrostatico, ricaviamo adesso l'espressione dell'energia potenziale elettrostatica posseduta da una carica q_0 immersa nel campo elettrostatico generato da una carica puntiforme q.



Nel caso generalizzato in cui **q_0 viene portata dall'infinito ad un punto P distante r da q**, l'energia potenziale in P è

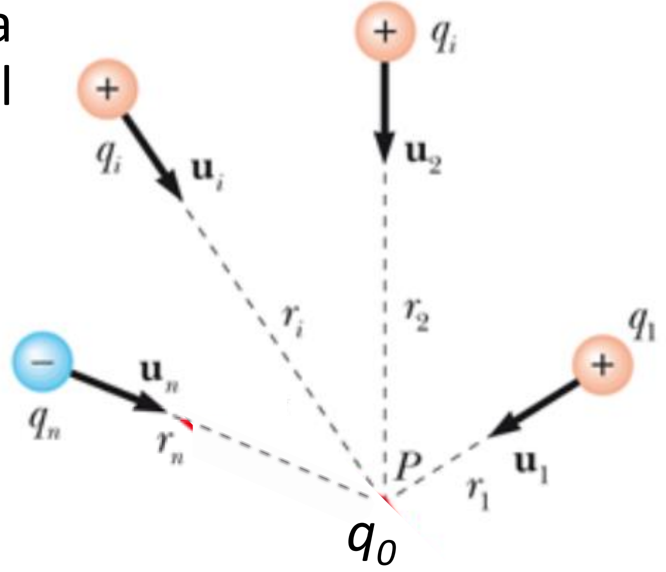
$$U_e(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{s} + U_e(\infty) = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + U_e(\infty)$$

Se imponiamo la condizione che l'energia potenziale sia nulla all'infinito (U(∞)=0), otteniamo:

$$U_e(r) = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

2.2.2 Potenziale elettrostatico generato da un sistema discreto di cariche puntiformi

I risultati trovati per il caso del campo generato da una singola carica possono essere estesi al caso di un campo elettrostatico generato da una distribuzione discreta di **n** cariche ($q_1, \dots q_i \dots q_n$) puntiformi, ricorrendo al **principio di sovrapposizione**.



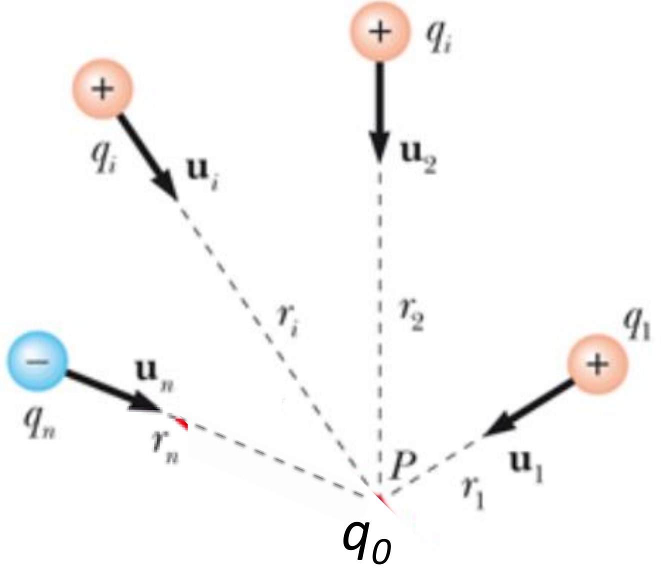
$$\vec{E} = \sum_i \vec{E_i} \qquad \vec{F} = \sum_i \vec{F_i}$$

$$V_B = -\int_A^B \left(\sum_i \vec{E_i}\right) \cdot d\vec{s} + V_A = \sum_i \int_B^A \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} dr_i + V_A = \left(\sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{iB}} - \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{iA}}\right) + V_A$$

$$U_B = -\int_A^B \left(\sum_i \vec{F_i}\right) \cdot d\vec{s} + U_A = \left(\sum_i \frac{q_i q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_{iB}} - \sum_i \frac{q_i q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_{iA}}\right) + U_A$$

Se scegliamo come riferimento il punto all'infinito e imponiamo la condizione che sia l'energia potenziale che il potenziale elettrostatico siano nulli all'infinito (V(∞)=0 e U(∞)=0), otteniamo, per un generico punto P(x, y, z):

$$\boldsymbol{V(P) = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}}$$



$$\boldsymbol{U_e(P) = -\int_{\infty}^{P} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \sum_i \frac{q_i q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_i} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}}$$

Possiamo quindi concludere che **il potenziale elettrostatico prodotto da un sistema discreto di cariche è pari alla somma dei potenziali prodotti da ciascuna carica del sistema**. Conclusione analoga si può trarre per l'energia potenziale elettrostatica.

2.2.3 Potenziale elettrostatico generato da una distribuzione continua di cariche

Risulta immediato estendere i risultati trovati, anche al caso di un campo generato da una distribuzione continua di cariche.

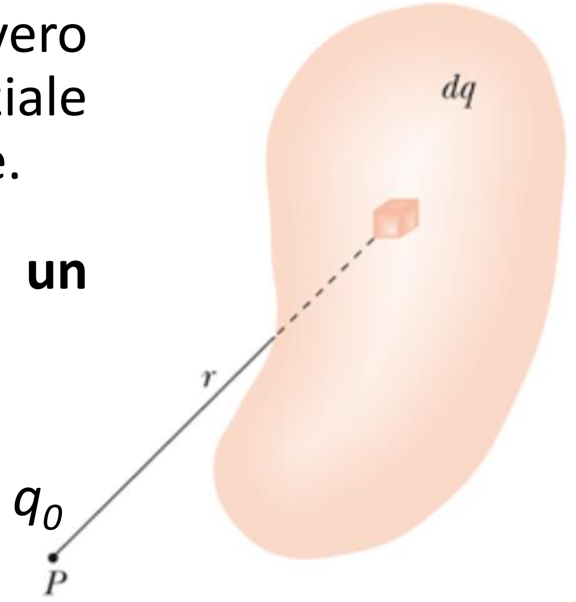
Le considerazioni fatte nei casi precedenti vanno ripetute «sommando» (ovvero **integrando**) il contributo al potenziale elettrostatico o all'energia potenziale elettrostatica dato da ciascun **elemento infinitesimo** di carica della distribuzione.

Ricorrendo alle consuete condizioni (V(∞)=0 e U(∞)=0), otteniamo, per un generico punto P(x, y, z):

$$V(P) = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

$$U_e(P) = -\int_{\infty}^{P} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

A seconda che la distribuzione sia lineare, superficiale o volumica,
$dq = \lambda\, dL$, $dq = \sigma\, dS$ o
$dq = \rho\, dV$
e l'integrale è, rispettivamente, un integrale di linea, di superficie o di volume!



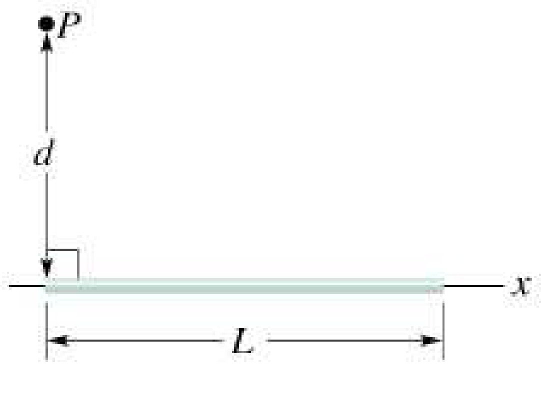
Esercizio 2.1

Calcolare il potenziale nel punto al centro di un quadrato di lato **d** =1.3 m e supponendo che le cariche sono $\mathbf{q_1}$ = +12 nC (in alto a sinistra), $\mathbf{q_2}$ = −24 nC (in alto a destra), $\mathbf{q_3}$ = +31 nC (in basso a sinistra) e $\mathbf{q_4}$ = +17 nC (in basso a destra)

Esercizio 2.2

Una bacchetta isolante di lunghezza **L** possiede una carica uniformemente distribuita sulla sua lunghezza. Determinare l'espressione del potenziale su un punto **P** posto sullo stesso asse della bacchetta e a distanza **a** da uno degli estremi

Esercizio 2.3



2.2 Consideriamo una bacchetta finita di lunghezza **L** e con carica distribuita uniformemente. Determinare l'espressione del potenziale nel punto **P** distante **a** dall'estremità della bacchetta, come mostrato in figura.

2.3 Energia elettrostatica complessiva di un sistema di cariche

Possiamo calcolare qual è **l'energia potenziale elettrostatica complessiva di un sistema di cariche**, a partire dai conti fatti in precedenza per trovare **l'energia potenziale elettrostatica posseduta da una carica puntiforme** nel campo elettrostatico generato da un'altra carica puntiforme.

Dalla definizione sappiamo che l'energia potenziale elettrostatica posseduta da una carica puntiforme è pari all'opposto del lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche nello spostamento di tale carica dall'infinito al punto in cui si trova.

Consideriamo un sistema costituito da due cariche q_1 e q_2 poste in due punti dello spazio aventi distanza finita r_{12}. Possiamo «costruire» tale sistema portando le cariche, una per volta, dall'infinito alla posizione finale occupata.

Quando spostiamo q_1 non verrà compiuto alcun lavoro elettrico, poiché essa si muove in assenza di campi elettrici.

Quando invece spostiamo q_2, il lavoro elettrostatico ci permette di calcolare l'energia potenziale elettrostatica del sistema $\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$.

Facciamo alcune osservazioni.

Nel caso in cui le due **cariche** abbiano lo **stesso segno**, la forza elettrostatica sarà di tipo repulsivo. Quando portiamo q_2 dall'infinito al punto distante r_{12} da q_1, il **lavoro della forza elettrostatica** sarà **negativo** e l'**energia potenziale elettrostatica** sarà **positiva**.
Le due cariche tendono naturalmente ad allontanarsi, perciò è necessario compiere un **lavoro esterno positivo**, che si opponga a quello delle forze elettrostatiche, per «costruire» il sistema. **Il lavoro esterno speso per costruire il sistema viene immagazzinato dallo stesso sotto forma di energia potenziale elettrostatica, che aumenta man mano che le due cariche si avvicinano**.

Se, invece, le **cariche** sono di **segno opposto**, la forza elettrostatica, attrattiva, sarà concorde con il vettore spostamento dall'infinito al punto P. **L'energia potenziale elettrostatica sarà**, allora, **negativa ed il lavoro fornito dall'esterno fa diminuire l'energia potenziale al diminuire della distanza tra le cariche**.

Possiamo, allora, concludere che l'**energia potenziale elettrostatica di un sistema di due cariche rappresenta il lavoro compiuto da una forza esterna per portare le due cariche dall'infinito alla distanza finita** r_{12} **; tale lavoro è positivo nel caso di cariche concordi, negativo per cariche di segno opposto.**

Se adesso consideriamo un sistema costituito da **n** cariche ($q_1, \ldots q_i \ldots q_j \ldots q_n$), potremmo ancora pensare di costruire tale sistema spostando ciascuna carica puntiforme dall'infinito alla sua posizione finale e calcolare il contributo all'energia potenziale dato da ciascuna coppia di cariche del sistema.

L'energia potenziale elettrostatica totale del sistema sarà, quindi, data dalla somma di tutti questi contributi:

$$U_e(sistema) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

Evita che i contributi di ciascuna combinazione vengano contati due volte!

Concludiamo osservando che, considerato un sistema costituito da **n** cariche ($q_1, \ldots q_i \ldots q_n$) che generi un campo elettrostatico all'interno del quale è posta una carica di prova q_0, l'energia elettrostatica complessiva sarà:

$$U_e = U_e(sistema) + U_e(q_0) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} + \sum_i \frac{q_i q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

Esercizio 2.4

Tre cariche sono disposte ai vertici di un triangolo equilatero di lato **l** = 12 cm. Se le cariche sono $\mathbf{q_1}$, $\mathbf{q_2}$ e $\mathbf{q_3}$ qual è l'energia potenziale elettrostatica di questo sistema? Qual è il lavoro necessario a mettere una carica $\mathbf{q_0}$ al centro del triangolo?

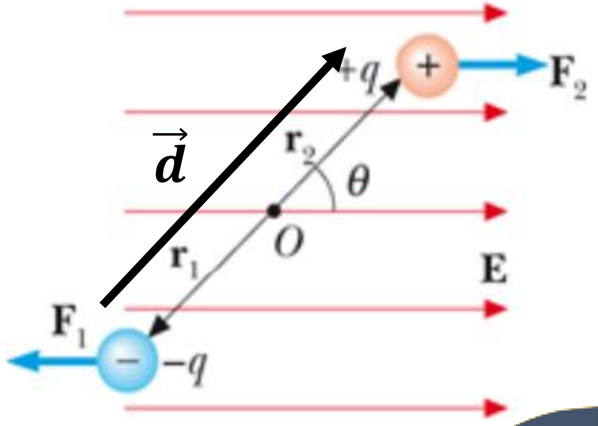
2.4 Moto di una carica in un campo elettrostatico

1) Supponiamo di porre in un campo elettrostatico $\vec{E}$ **una particella** avente carica $\mathbf{q_0}$ e massa **m**.

Essa subirà un'accelerazione $\vec{a}$ data dalla relazione $\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$ ⇒ $\vec{a} = \frac{q_0}{m}\vec{E}$

La particella subisce, quindi, un'accelerazione concorde o discorde al campo elettrostatico a seconda che abbia carica positiva o negativa.

2) Consideriamo ora **un dipolo immerso in un campo elettrostatico uniforme**, come mostrato in figura.



Su ciascuna carica agirà una forza elettrostatica. Tali forze saranno uguali in modulo, parallele ma discordi, poiché avranno verso concorde (+q) o discorde (-q) con il campo. Sul dipolo agisce, dunque, una coppia di forze uguali e opposte che produce un momento torcente $\vec{\tau}$

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2 = \vec{d} \times q\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

dove abbiamo introdotto il **momento di dipolo** $\vec{p} = q\vec{d}$ (dalla carica negativa alla positiva).

Per effetto del campo elettrico, il **dipolo ruota sino ad allinearsi con il campo elettrico**.

1bis) Torniamo ora a considerare il caso di una singola carica. Se, sotto l'azione del campo elettrostatico, la particella si sposta dal punto A al punto B, possiamo calcolare la sua variazione di energia cinetica utilizzando il **teorema dell'energia cinetica**:

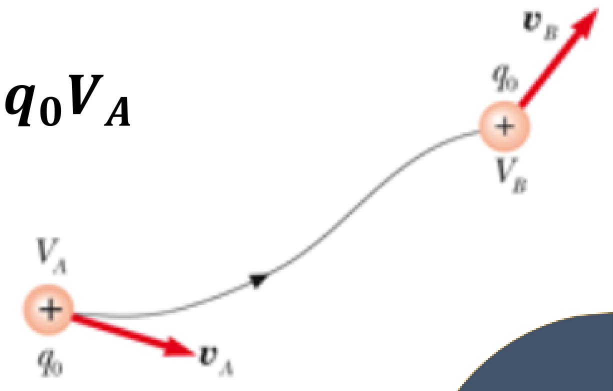
$$\Delta E_K = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W$$

D'altra parte, il lavoro è pari all'opposto della variazione di energia potenziale:

$$W = -\Delta U_e = -q_0 \Delta V = -q_0 V_B + q_0 V_A$$

Eguagliando i termini si ottiene:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = q_0 V_A - q_0 V_B \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_B^2 + q_0 V_B = \frac{1}{2}mv_A^2 + q_0 V_A$$



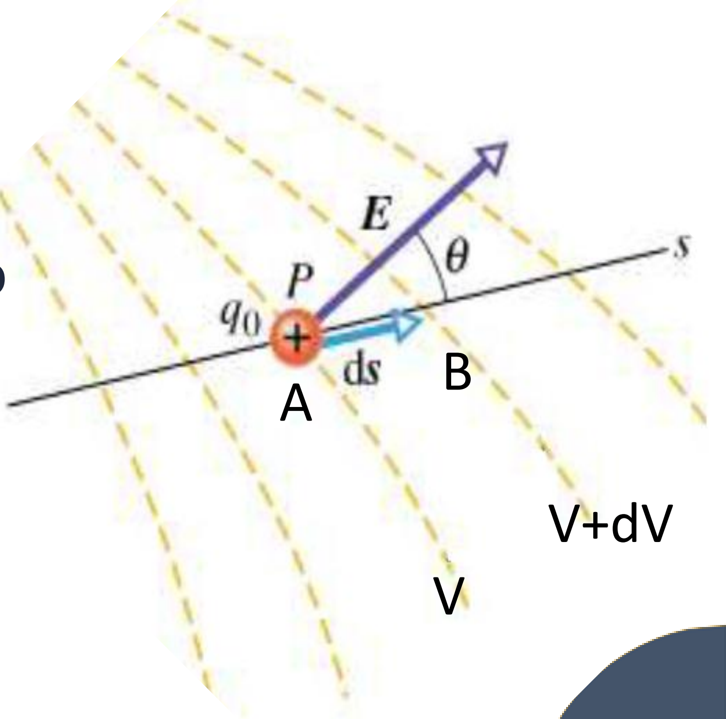
Questa uguaglianza esprime la conservazione dell'energia, ovvero, il principio secondo il quale, in un sistema isolato in cui agiscano esclusivamente **forze conservative**, **l'energia totale del sistema, data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, si conserva**.

$$\frac{1}{2}mv^2 + q_0 V = cost$$

2.5 Campo come gradiente del potenziale

Abbiamo visto che, noto il campo elettrico nei punti di una curva che unisce due punti A e B, è possibile ricavare la differenza di potenziale V(B)-V(A). Vediamo, adesso, com'è possibile ricavare il valore del campo elettrostatico a partire dal potenziale.

Siano V e V+dV i potenziali delle superfici equipotenziali su cui giacciono rispettivamente i punti A e B.



Supponiamo di muovere la carica di prova q_0 lungo uno spostamento infinitesimo $\overrightarrow{ds}$ che intercetta le due superfici equipotenziali.

$$\overrightarrow{ds} = dx\widehat{u_x} + dy\widehat{u_y} + dz\widehat{u_z}$$

Per definizione di lavoro e di potenziale elettrostatico, abbiamo:

$$dW = \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \left(q_0\vec{E}\right) \cdot \overrightarrow{ds} \quad \text{e} \quad dW = -q_0 dV$$

Da cui ricaviamo

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = -dV$$

Riscriviamo il prodotto scalare in termini di componenti:

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

D'altra parte, per il teorema del differenziale totale

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Quindi otteniamo:

$$E_x dx + E_y dy + E_z dz = -\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dz \Rightarrow \begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

Componenti del «vettore» (operatore) gradiente!

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \widehat{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} \widehat{u_y} + \frac{\partial}{\partial z} \widehat{u_z}$$

Abbiamo ottenuto che il **campo elettrico in un punto è uguale all'opposto del gradiente del potenziale elettrostatico in quel punto**:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V \quad \text{oppure} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Esercizio 2.5

Si consideri un anello carico di raggio **R**, avente una carica **q** uniformemente distribuita. Calcolare il potenziale lungo l'asse dell'anello e derivare l'espressione del campo elettrico lungo il medesimo asse.

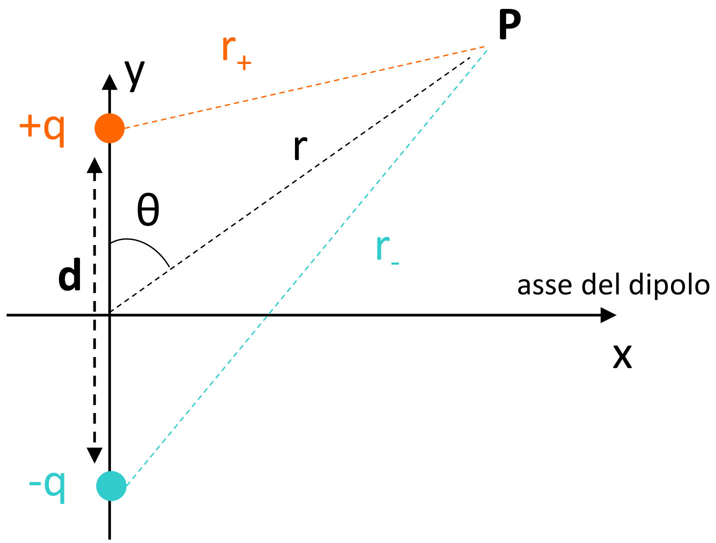
Esercizio 2.6

Si consideri un disco carico di raggio **R**, avente una carica **q** uniformemente distribuita. Calcolare il potenziale e derivare il campo elettrico lungo l'asse del disco.

2.6 Potenziale elettrostatico di un dipolo elettrico

Ricorriamo alla relazione tra potenziale e campo elettrostatico per derivare l'espressione del campo elettrico generato da un dipolo elettrico in un qualunque punto dello spazio.

Il potenziale nel punto P sarà



$$V = V_+ + V_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} + \frac{-q}{r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_- - r_+}{r_- r_+}\right)$$

Se supponiamo **r >> d**, possiamo effettuare le seguenti approssimazioni

$$r_- - r_+ \approx d\cos\theta$$

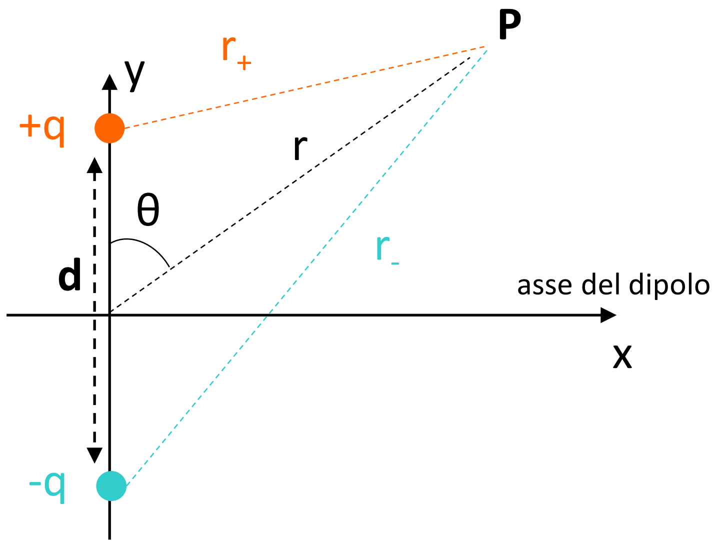
$$r_- r_+ \approx r^2$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

L'espressione appena ricavata del potenziale elettrostatico può anche essere riscritta come

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \widehat{u_r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Adesso possiamo ricavare il campo elettrico in un qualunque punto P(r , θ) in termini di componenti polari



$$\vec{\nabla} f = (r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial r}\widehat{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\widehat{u_\theta}$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p\,sen\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E} = E_r\widehat{u_r} + E_\theta\widehat{u_\theta} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\widehat{u_r} + \frac{p\,sen\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\widehat{u_\theta} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\widehat{u_r} + sen\theta\,\widehat{u_\theta}\right)$$