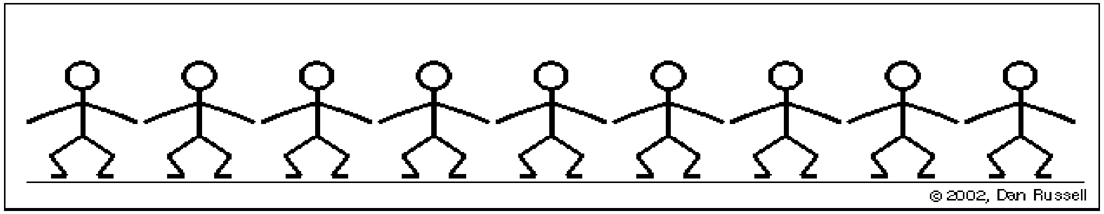
CAPITOLO 3

Fenomeni ondulatori

I fenomeni ondulatori sono perturbazioni prodotte da una sorgente e caratterizzate da propagazione nel mezzo di energia meccanica e quantità di moto senza un reale trasferimento di materia.



Esempi di onde sono: il suono, la luce, le onde radio, ecc. Una prima classificazione prevede la distinzione in:

- ***Fenomeni ondulatori***
(di natura meccanica, si propagano solo in un mezzo materiale)

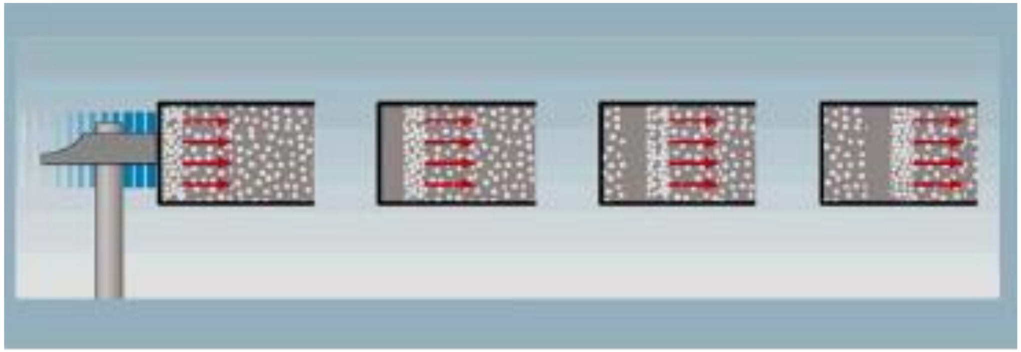
- ***onde elettromagnetiche***
(di natura elettromagnetica, possono propagarsi anche nel vuoto)

Le onde si distinguono anche in:

• ***onde longitudinali***: moto oscillatorio delle particelle concorde alla direzione di propagazione dell'onda.

vibrazione

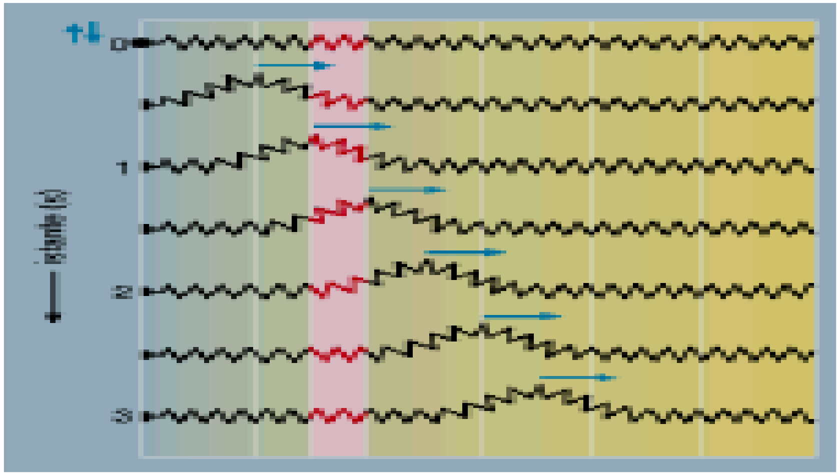
propagazione



• ***onde trasversali***: moto oscillatorio delle particelle normale alla direzione di propagazione dell'onda.

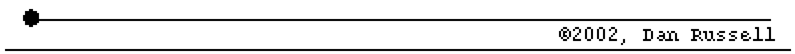
vibrazione

propagazione

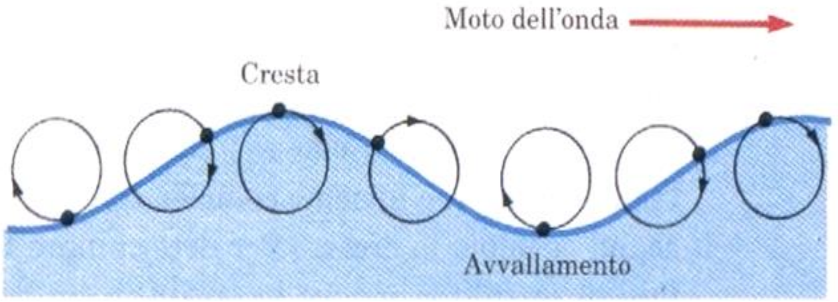


A seconda del sistema di riferimento del moto, le onde si classificano in:

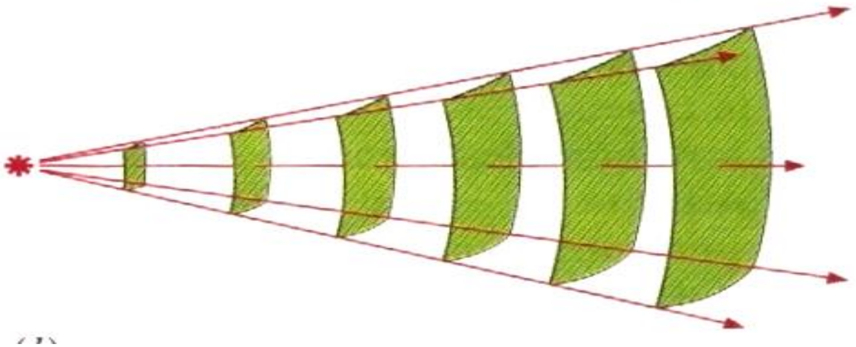
• ***onde unidimensionali***: la propagazione avviene in un'unica direzione spaziale (ad esempio onde che si propagano lungo una corda);



• ***onde bidimensionali***: la propagazione avviene in due direzioni spaziali (come le onde di superficie);



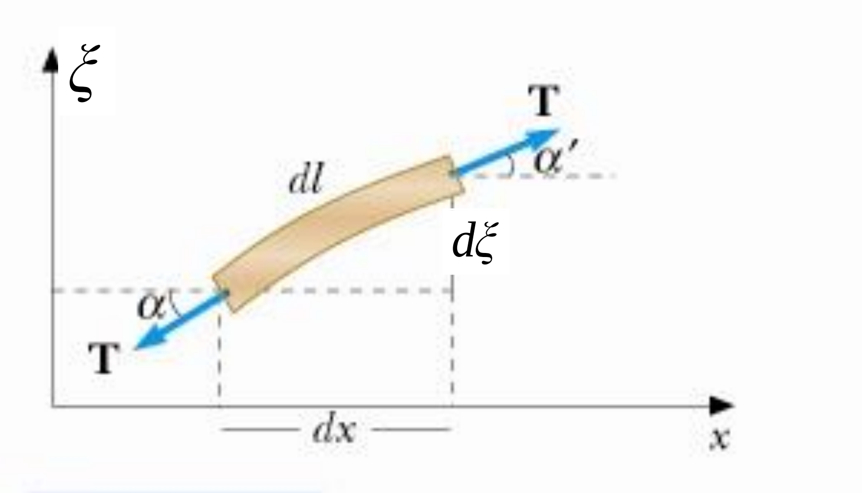
• ***onde tridimensionali (onde sferiche e cilindriche)***: la propagazione avviene in tre direzioni spaziali (come le Fenomeni ondulatori e luminose).



Se un'onda si propaga lungo una corda, l'oscillazione che ne deriva è dovuta ad una variazione delle forze di tensione. L'equazione relativa si ricava applicando le leggi della dinamica ad un elementino di corda.

$$\sum F_x = T(\cos\alpha' - \cos\alpha)$$

$$\sum F_\xi = T\sin\alpha' - T\sin\alpha = T(\sin\alpha' - \sin\alpha)$$

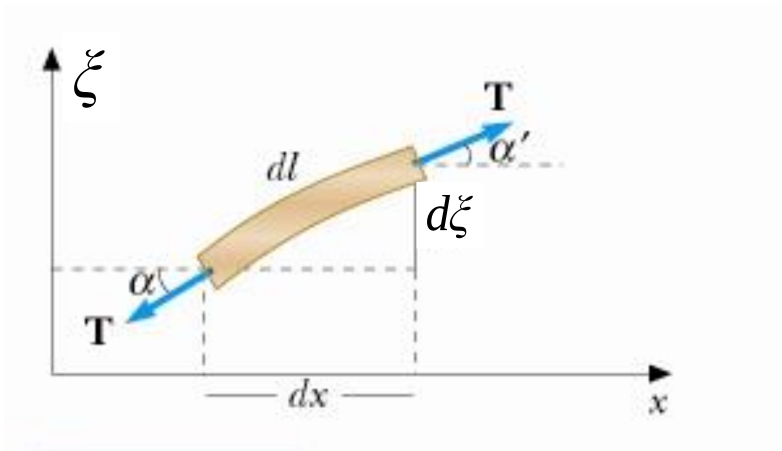


Considerando un piccolo spostamento dell'elementino, si ha:

$$\sin\alpha \cong \tan\alpha \cong \alpha$$

$$\sin\alpha' \cong \tan\alpha' \cong \alpha'$$

$$\cos\alpha \cong \cos\alpha' \cong 1$$



di conseguenza:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_\xi = T(\tan\alpha' - \tan\alpha)$$

Poiché $\tan\alpha = d\xi / dx$ si avrà:

$$\sum F_\xi = T\left(\frac{\partial(\tan\alpha)}{\partial x}\right)dx = T\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)dx$$

Essendo $dm = r_l dx$ la massa dell'elemento, dove ρ_l è la densità lineare della corda, avremo:

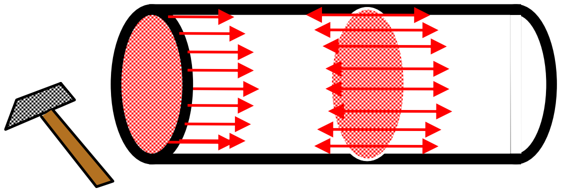
$$\sum F_\xi = dm\cdot a \Rightarrow T\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)dx = \rho_l dx\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

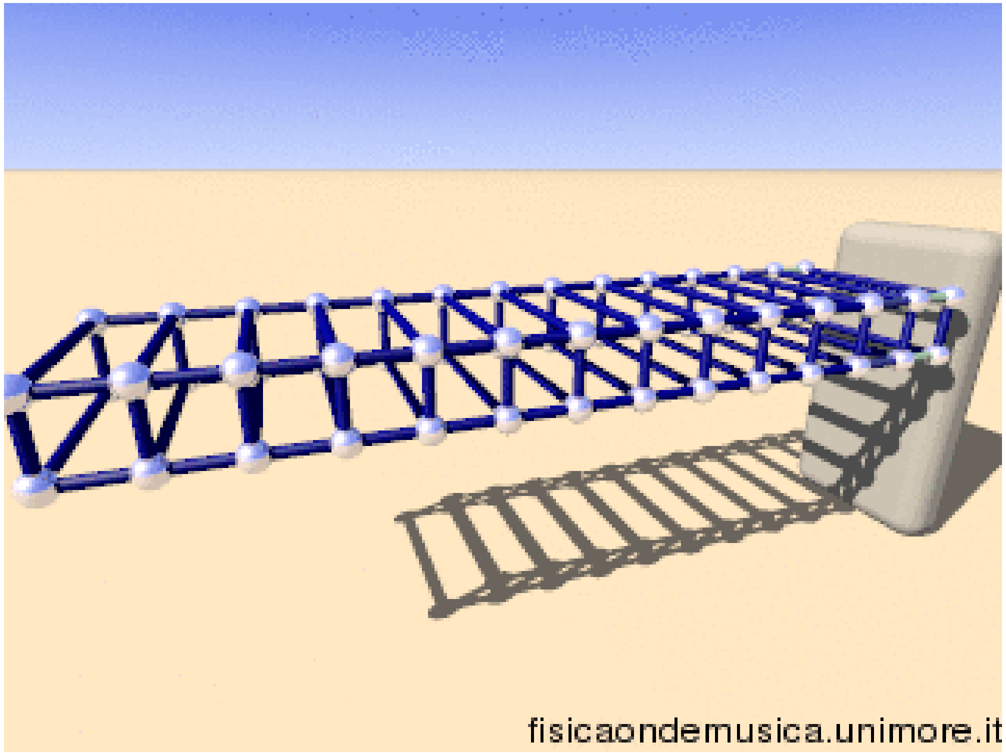
da cui: $$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho_l}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$ *(Equazione di D'Alambert per la corda)*

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \qquad v = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$$

Onde su una sbarra

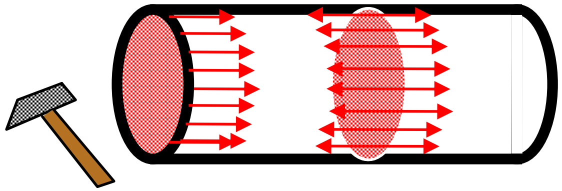
Applicando una forza *F* diretta parallelamente all'asse di una sbarra cilindrica, si generano nel materiale onde di compressione.

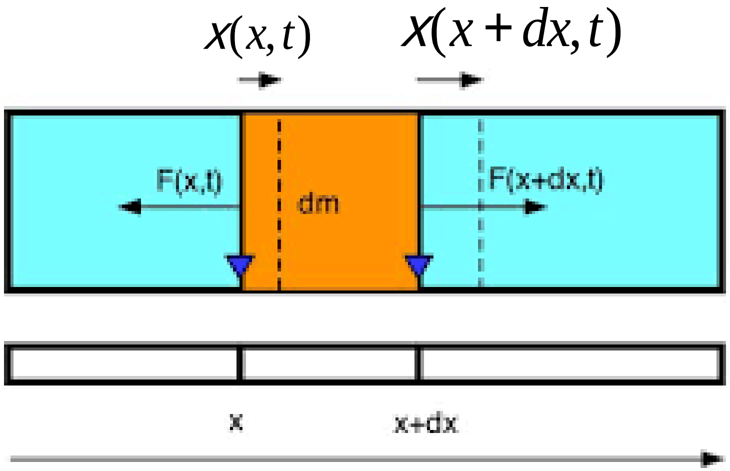




Onde su una sbarra

Applicando una forza F diretta parallelamente all'asse di una sbarra cilindrica, si generano nel materiale onde di compressione.





La deformazione $d\xi$ varia lungo la sbarra come $\partial\xi/\partial x$

Legge di Young $$F_x = \Sigma E \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

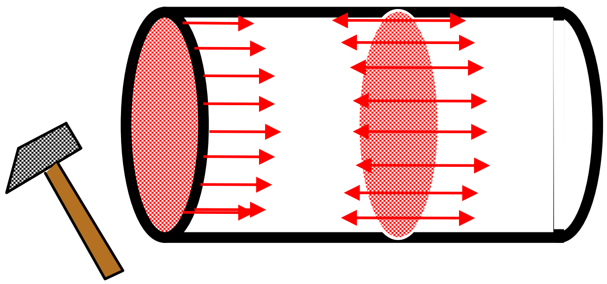
"E" modulo di Young

$$dF_x = F(x+dx) - F(x) = \frac{\partial F}{\partial x} dx$$

$$dF_x = \frac{\partial F}{\partial x} dx = \Sigma E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

$$dF_x = \Sigma E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

Onde su una sbarra



$$dF_x = dm \cdot a$$

$$dF_x = \rho \Sigma dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

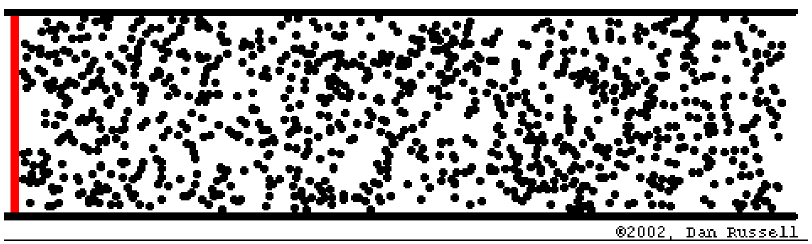
Ma $$dF_x = \Sigma E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

$$\rho \Sigma dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \Sigma E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

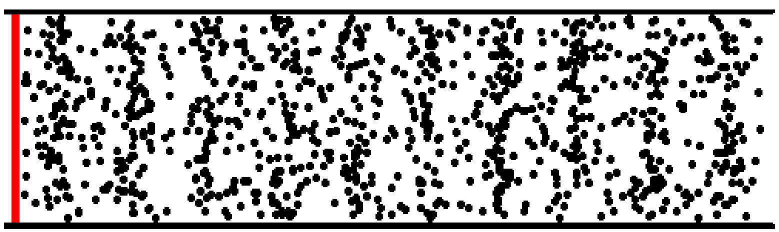
(Equazione di D'Alambert per la sbarra)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \qquad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Consideriamo un tubo contenente gas ed un pistone che si muove al suo interno. Tale movimento genera all’interno del fluido dei moti di compressione ed espansione del fluido stesso, che si propagano lungo il tubo. Si genera, cioè, un’onda longitudinale di equazione:



$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\beta}dp \quad \Rightarrow \quad \beta = -V\frac{dp}{dV}$$



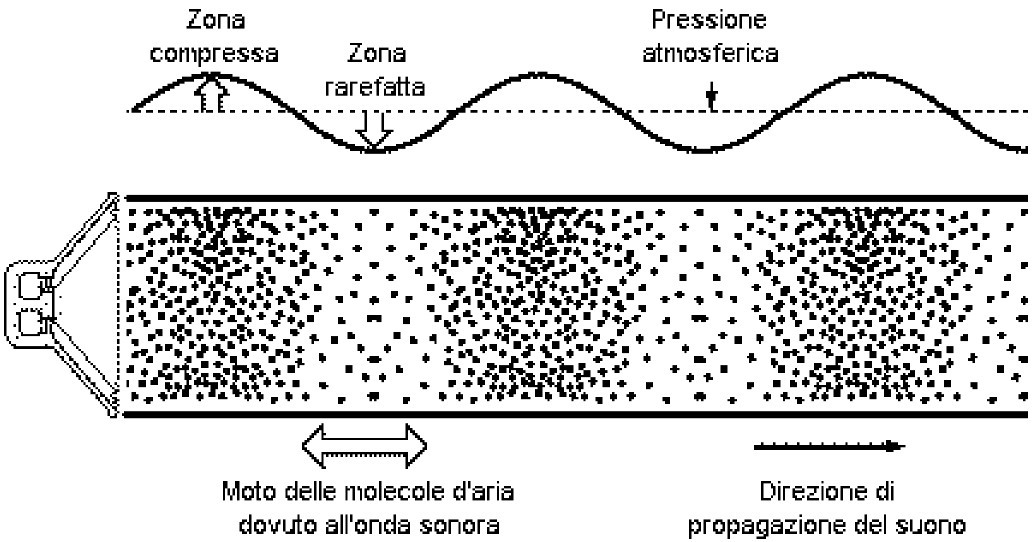
$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\beta}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \qquad v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

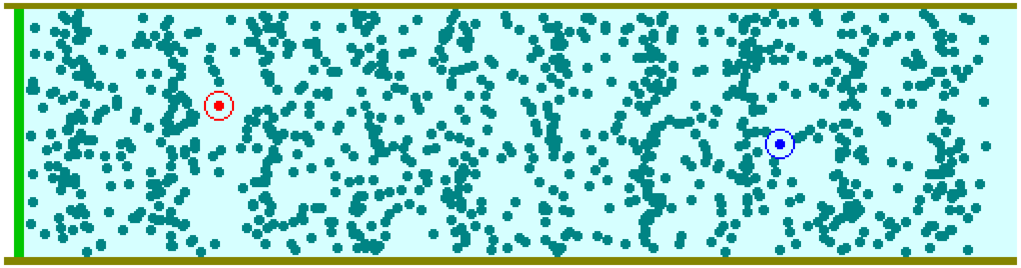
β = modulo di compressibilità del gas

ρ_0 = densità iniziale del gas

Onde nel gas



$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\beta}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$



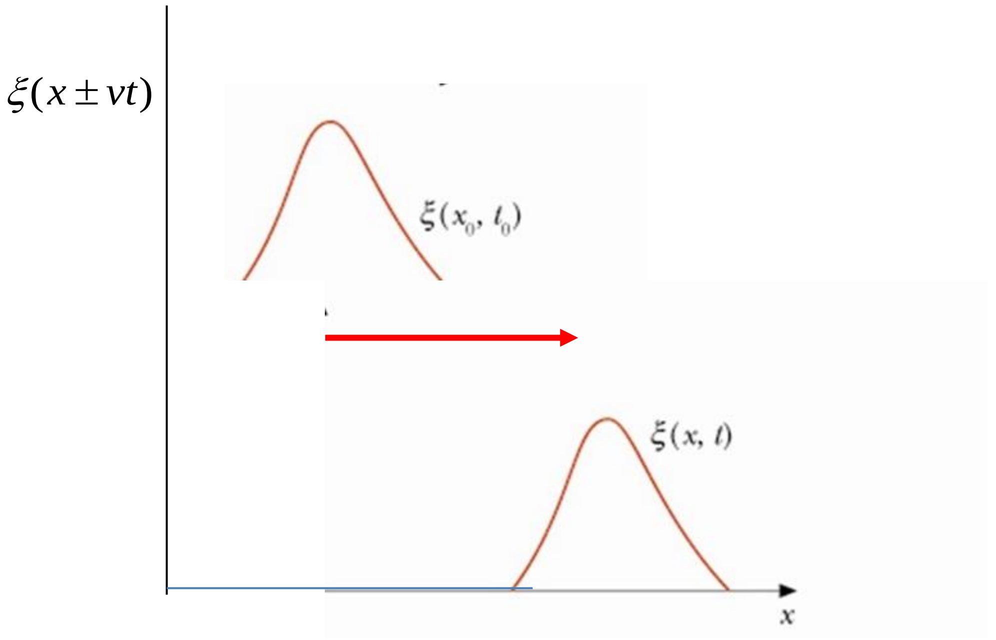
Tutti i fenomeni ondulatori obbediscono alla stessa equazione differenziale, l'equazione di D'Alambert. Nel caso unidimensionale questa equazione è:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

ove ξ è la perturbazione del punto materiale dalla posizione di equilibrio e v è la velocità di propagazione dell'onda nel mezzo.

Si dimostra che è unica soluzione dell'equazione di D'Alambert la ***funzione d'onda***

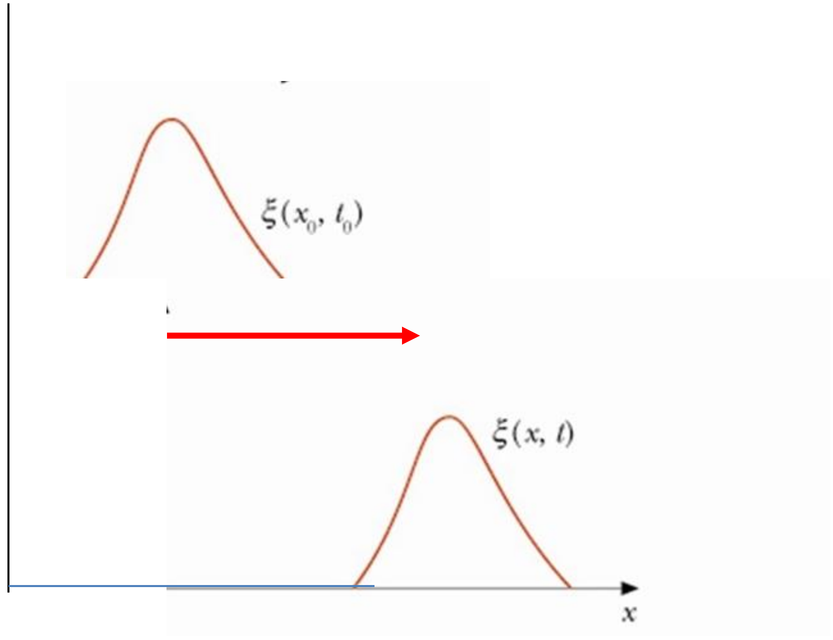
$$\xi(x \pm vt)$$



Onda progressiva.

$$\xi(x - vt)$$

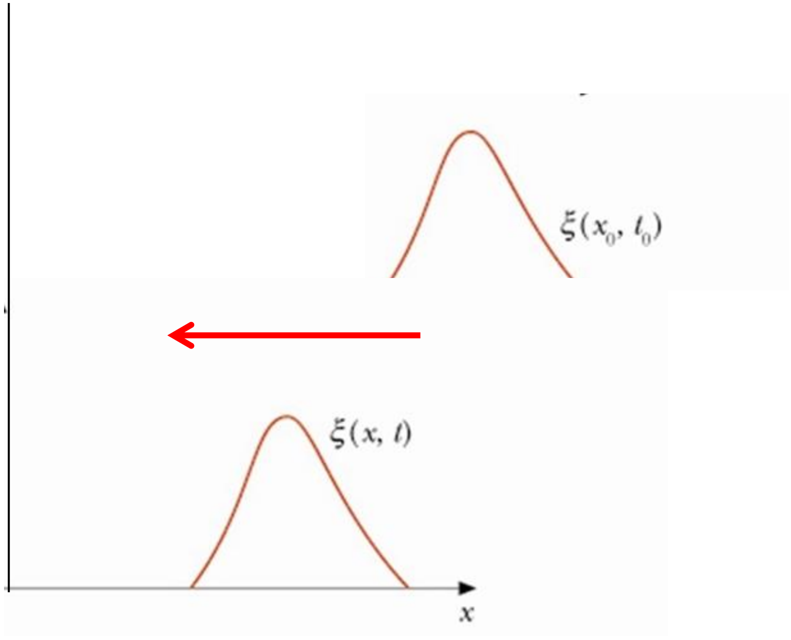
$$x = x_0 + v(t - t_0)$$



Onda regressiva

$$\xi(x + vt)$$

$$x = x_0 - v(t - t_0)$$



Dimostrazione: poniamo $u = x - vt$

$$\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial \xi(x-vt)}{\partial x} = \frac{\partial \xi(u)}{\partial x} = \frac{\partial \xi(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi(u)}{\partial u} = \xi^{'}(u)$$

$$\frac{\partial^2 \xi u)}{\partial x^2} = \frac{\partial \xi^{'}(u)}{\partial x} = \frac{\partial \xi^{'}(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \xi^{''}(u)$$

$$\frac{\partial \xi(u)}{\partial t} = \frac{\partial \xi(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \xi^{'}(u)(-v)$$

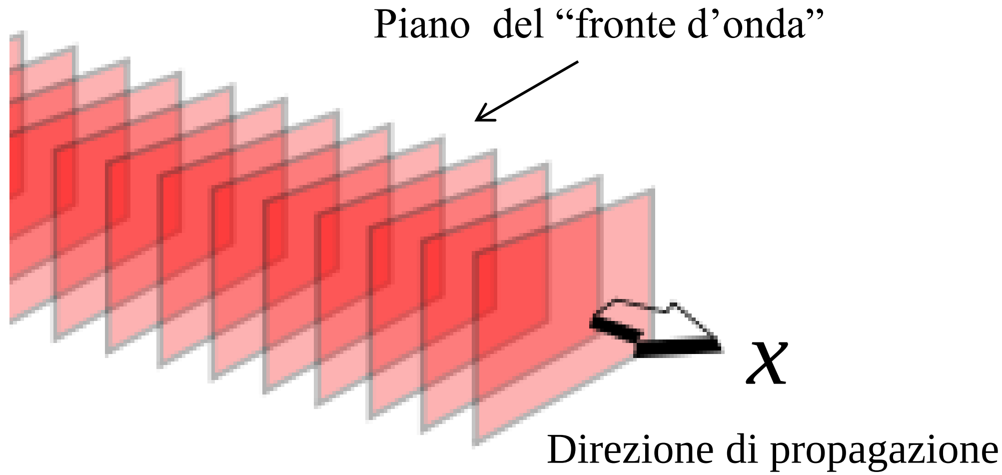
$$\frac{\partial \xi^{'}(u)}{\partial t}(-v) = \xi'' v^2$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Longrightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Le **onde piane** sono caratterizzate dal fatto che ad un dato istante, l'argomento della funzione d'onda $(x \pm vt)$ è costante su tutto il piano perpendicolare alla direzione di propagazione

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

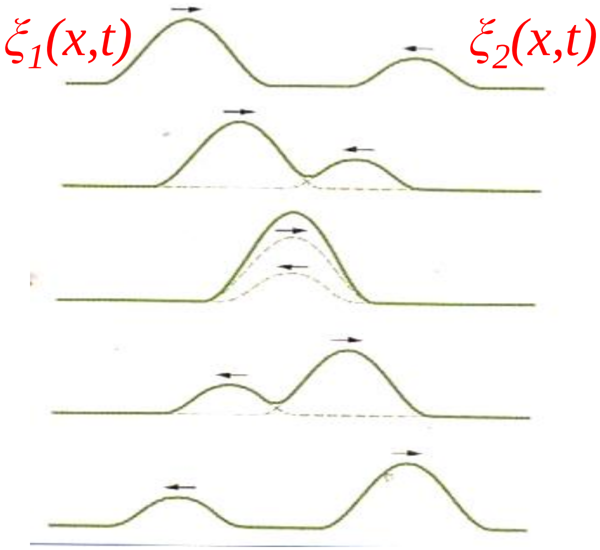
$$\xi(x - vt)$$



velocità di fase dell'onda $\longrightarrow v_x = \dfrac{dx}{dt} \longrightarrow$ velocità di propagazione dell'onda.

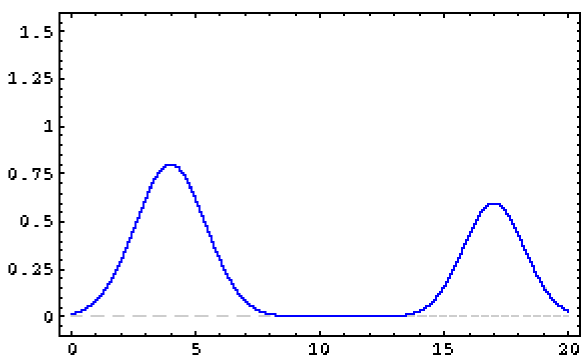
velocità di oscillazione $\longrightarrow v_\xi = \dfrac{\partial \xi}{\partial t} \longrightarrow$ velocità di oscillazione delle particelle del mezzo.

Principio di sovrapposizione



Ogni fenomeno ondulatorio può essere visto come una sovrapposizione di un'onda progressiva ed una regressiva.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$



Per la linearità del sistema anche una loro combinazione lineare (con *a* e *b* costanti) è soluzione :

$$\xi(x,t) = a\xi_1(x,t) + b\xi_2(x,t)$$

Onda piana armonica $$\xi(x,t)=\xi_0 \sin k(x \pm vt)$$

La costante k è necessaria perché l'argomento della funzione seno deve essere in radianti

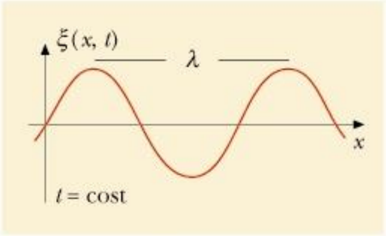
$$\xi(x,t)=\xi_0 \sin(kx \pm \omega t) \qquad v=\frac{\omega}{k} \qquad [k]=\left[\frac{rad}{m}\right]$$

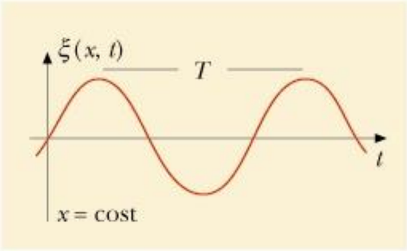
Distanza esistente tra due creste d'onda adiacenti

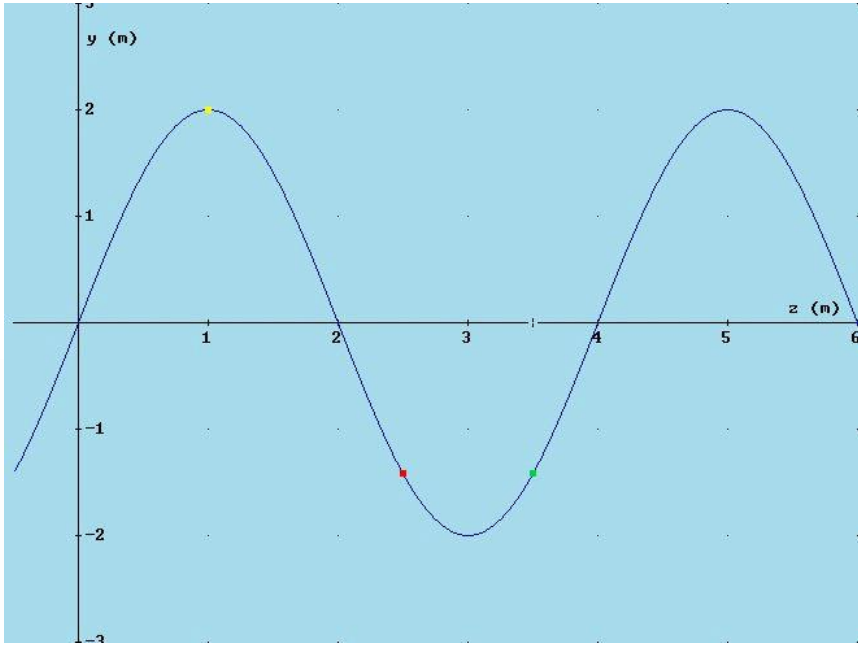
Lunghezza d'onda λ [m] $\lambda = 2\pi/k$

Tempo necessario a compiere un ciclo completo d'oscillazione.

Periodo T [s] $T = 2\pi/\omega$







Onde armoniche

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Il numero d'onda k dipende dal ***mezzo*** nel quale l'onda si propaga

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

La pulsazione ω dipende invece dalla ***sorgente*** d'onda

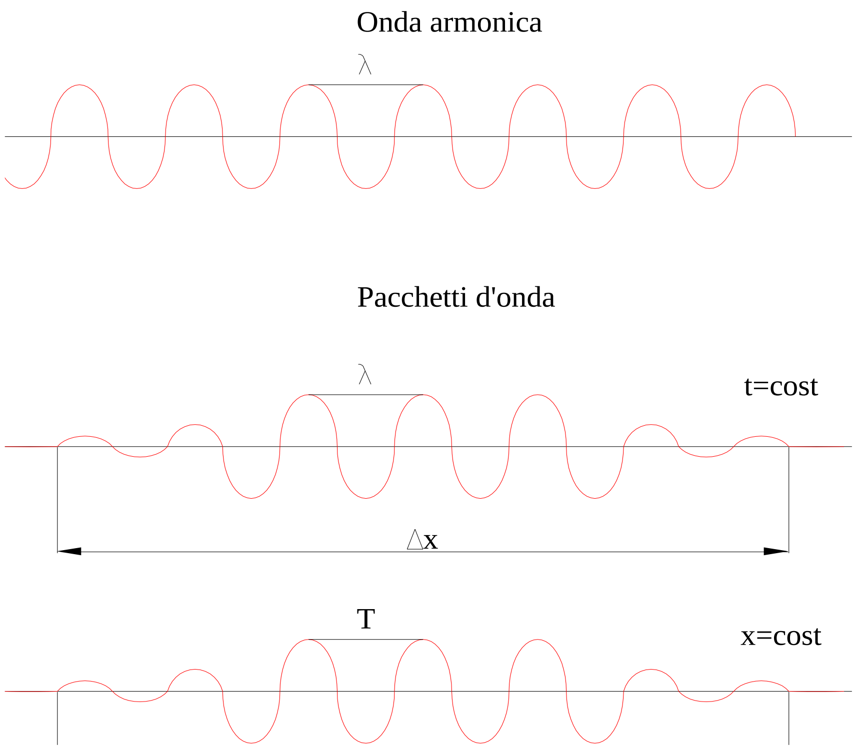
Inoltre

$$\omega = kv \qquad \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\lambda}v \qquad \lambda = vT$$

La lunghezza d'onda è quindi lo spazio percorso dalla perturbazione in un tempo pari al periodo d'oscillazione del fenomeno

$$\omega = 2\pi f \qquad v = \lambda f$$

ove con f si indica la ***frequenza d'oscillazione*** dell'onda, espressa in Hertz [Hz].



Per definizione un'onda armonica ha durata e lunghezza infinite.

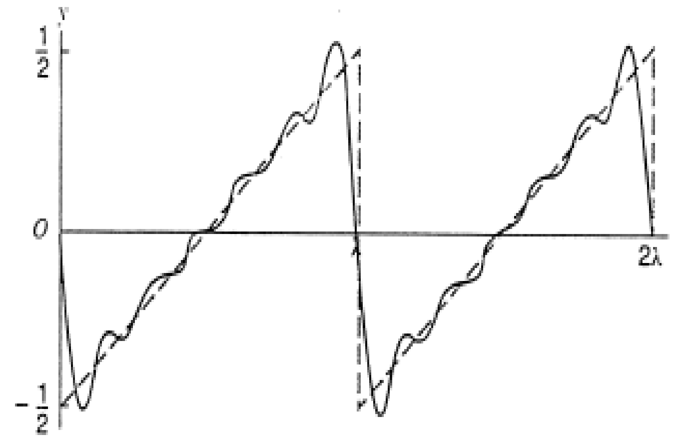
In realtà una perturbazione armonica ha lunghezza Δx e durata Δt finite.

In un pacchetto d'onda:

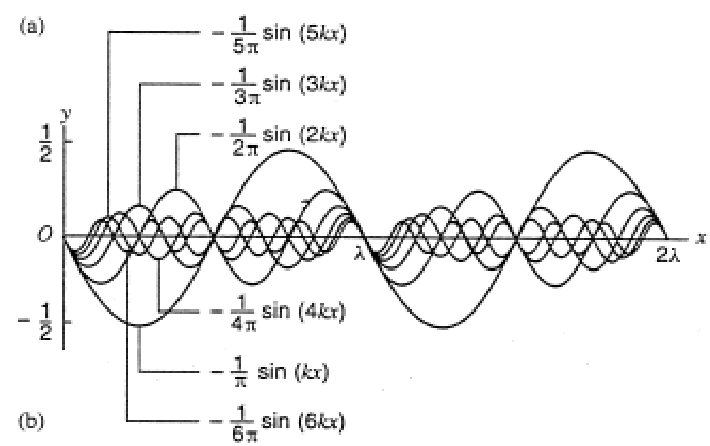
$$\Delta k \Delta x = 2\pi \qquad \Delta \omega \Delta t = 2\pi$$

Mentre un'onda armonica ha lunghezza d'onda e pulsazione ben definita e costante, un pacchetto d'onda è costituito da fenomeni ondulatori appartenenti ad una banda di frequenza Δf (centrata sulla frequenza fondamentale) e ad un intervallo di numeri d'onda Δk (nell'intorno del numero d'onda fondamentale)

Nel caso in cui il fenomeno ondulatorio sia esprimibile mediante una funzione d'onda non armonica *f(t)*, ma comunque ***periodica***, lo studio di tale perturbazione può essere ricondotto allo studio di un'onda armonica mediante il ***Teorema di Fourier***.



$$f(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \sin m\omega t + b_m \cos m\omega t)$$



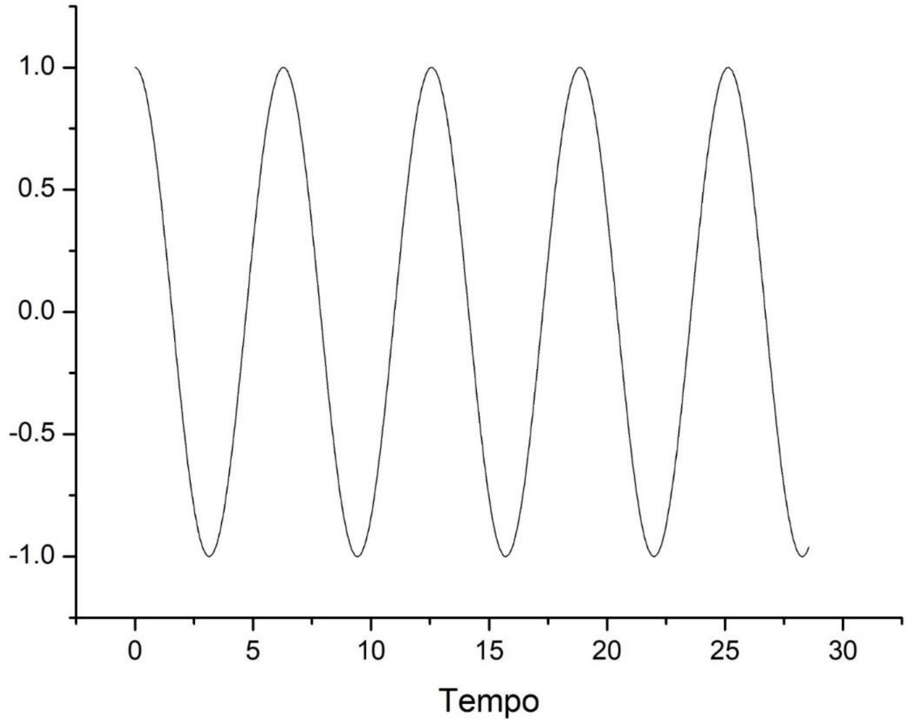
JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768-1830)

« Ogni segnale in funzione del tempo può essere rappresentato come una somma di seni aventi ampiezza e frequenza diverse »

$$Segnale = A\ sen(2\pi f_1 t) + B\ sen(2\pi f_2 t) + C\ sen(2\pi f_2 t) + ..$$

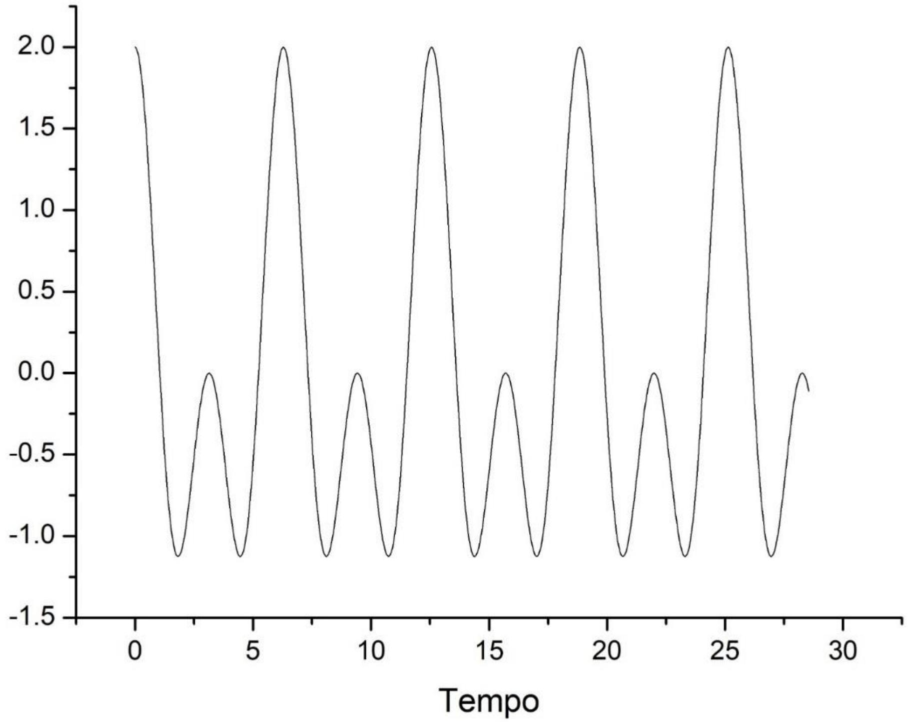
SOMMA DI ONDE A FREQUENZA DIVERSA

f



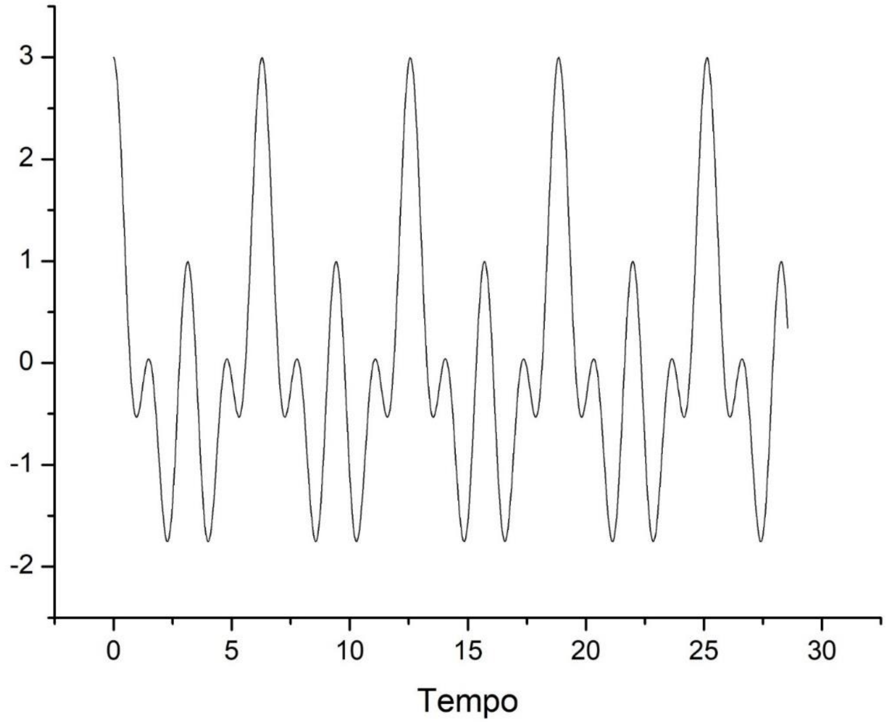
SOMMA DI ONDE A FREQUENZA DIVERSA

2f



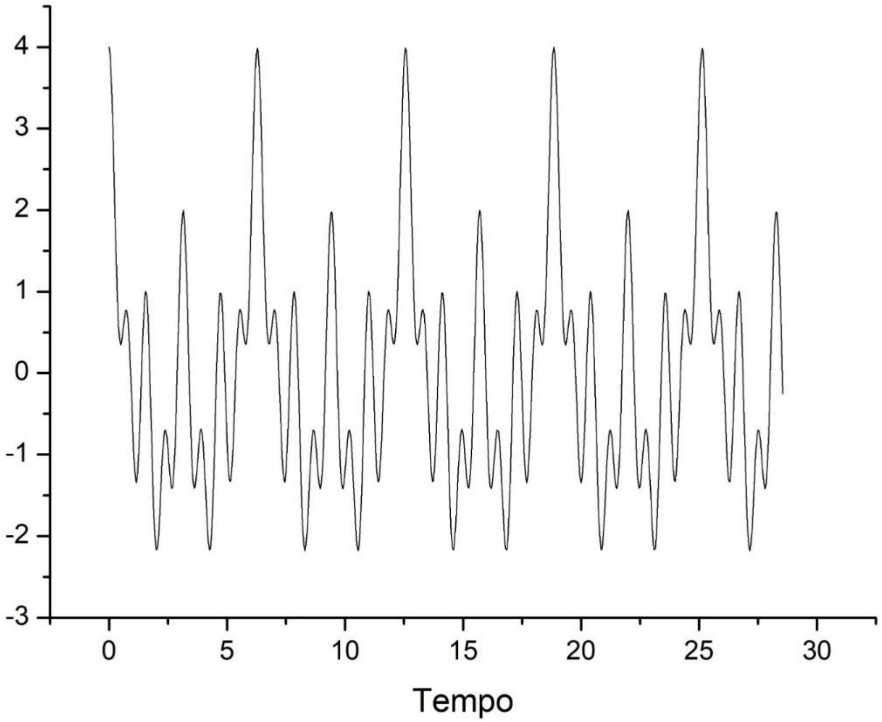
SOMMA DI ONDE A FREQUENZA DIVERSA

4f



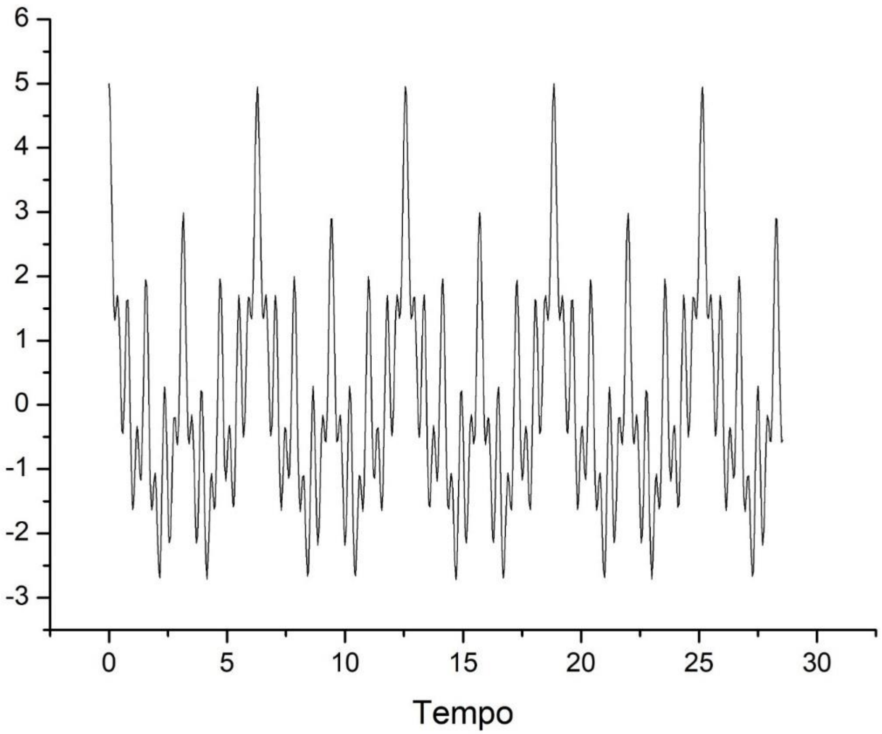
SOMMA DI ONDE A FREQUENZA DIVERSA

8f



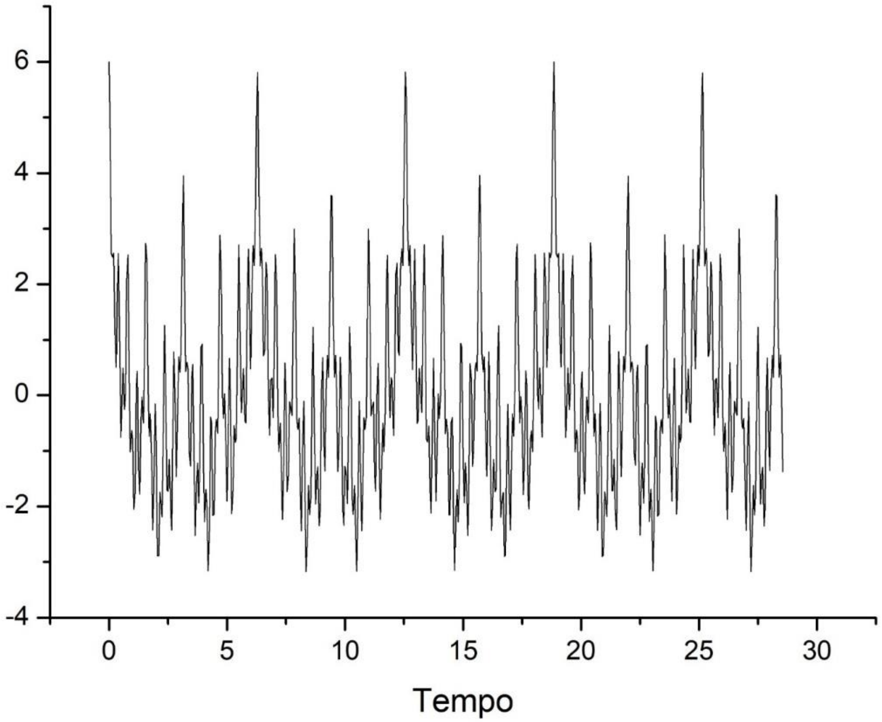
SOMMA DI ONDE A FREQUENZA DIVERSA

16f



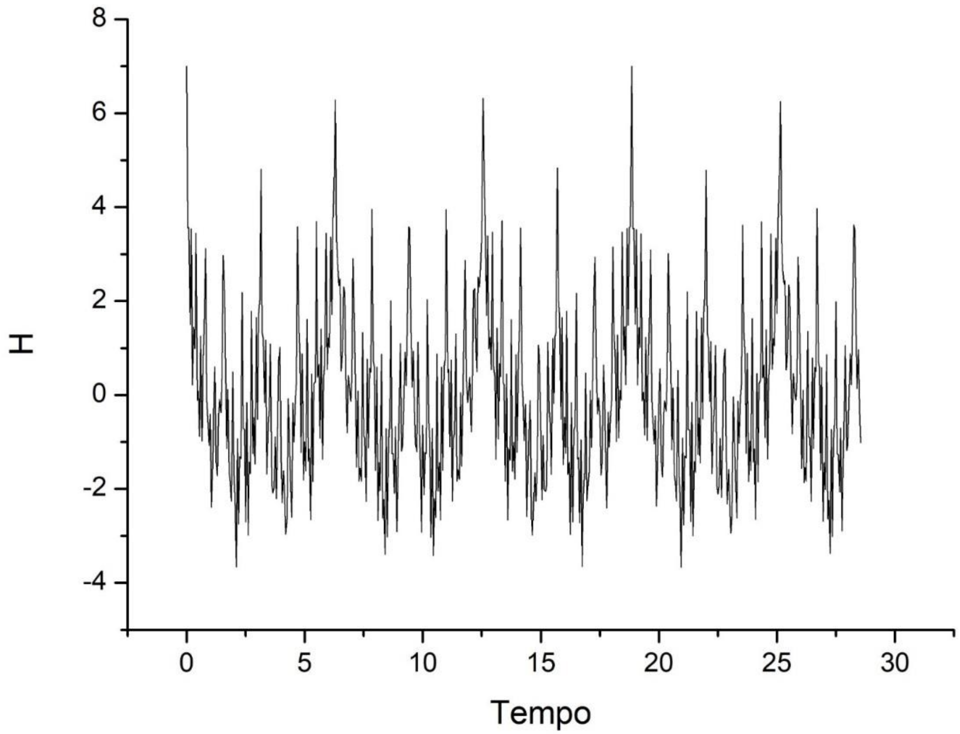
SOMMA DI ONDE A FREQUENZA DIVERSA

32f



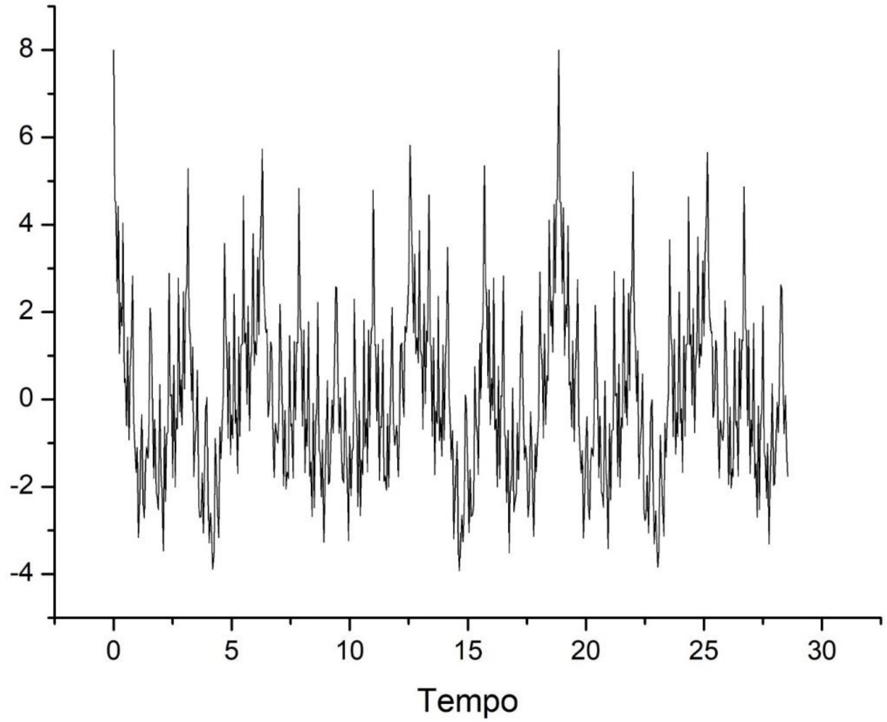
SOMMA DI ONDE A FREQUENZA DIVERSA

64f



SOMMA DI ONDE A FREQUENZA DIVERSA

128f



Analisi di Fourier

Se f(t) è una generica funzione periodica (di periodo *T*)

$$f(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \sin m\omega t + b_m \cos m\omega t)$$

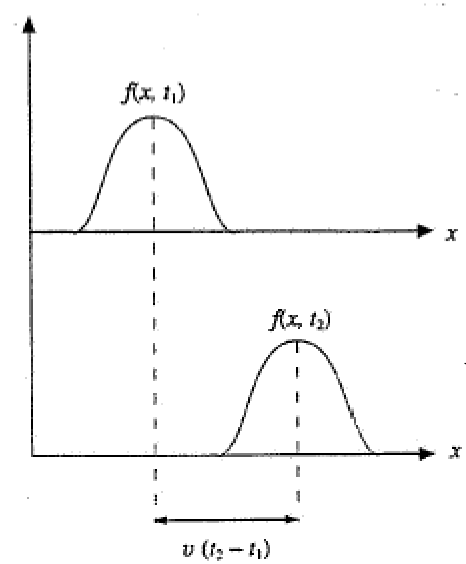
$\omega=2\pi/T$ è la pulsazione della componente fondamentale; a_0 è il valor medio della funzione nel periodo ed i parametri a_m e b_m sono calcolati in questo modo:

$$a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin m\omega t dt \qquad b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos m\omega t dt$$

Un'onda piana periodica può essere espressa come risultante di onde armoniche caratterizzate da frequenze multiple intere della fondamentale (definite frequenze armoniche).

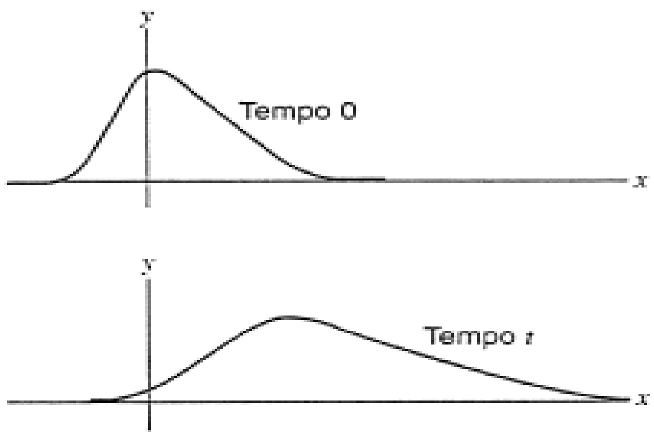
Pacchetti d’onda

Propagazione in mezzo ***non disperdente.*** In questo caso tutte le componenti del pacchetto hanno ***uguale velocità di propagazione***, pari alla velocità di fase delle singole componenti. Inoltre la forma d’onda non cambia durante la propagazione.



$$v = \frac{\omega}{k}$$

Velocità di fase



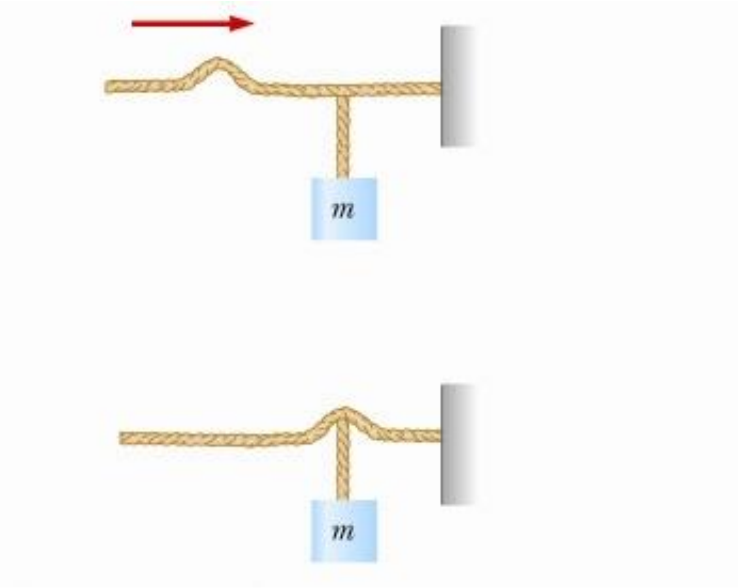
Propagazione in un mezzo ***disperdente.*** In questo caso la velocità di propagazione delle singole componenti del pacchetto è funzione della frequenza d’oscillazione; esse quindi si muovono a ***velocità differenti***. La forma d’onda, quindi, varia durante la propagazione.

La velocità dell’intero pacchetto d’onda si chiama ***velocità di gruppo***

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$$

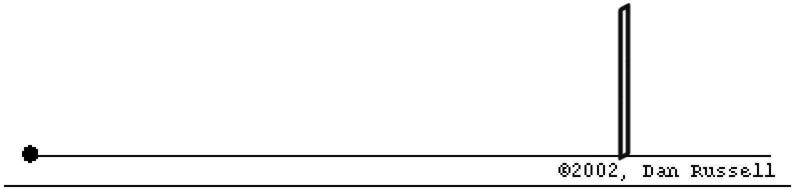
Consideriamo un'onda armonica in propagazione su corda, avente funzione d'onda:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

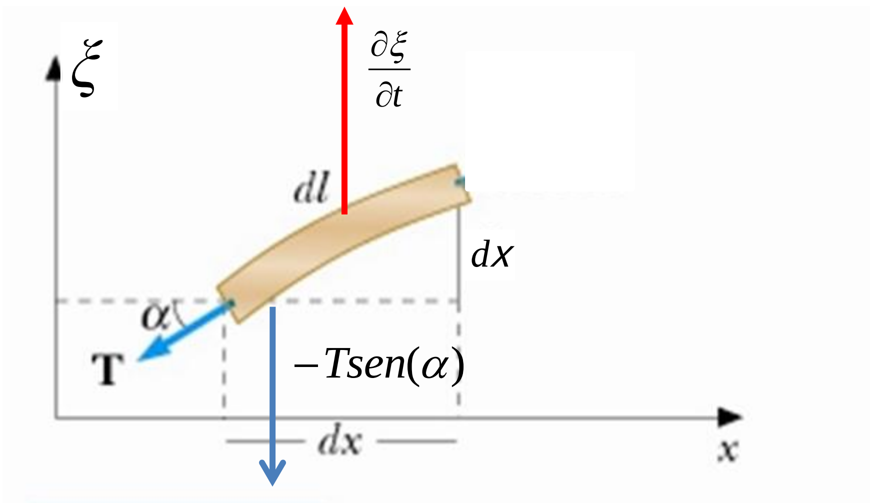


Un elemento di corda di massa *dm* oscilla attorno alla sua posizione di equilibrio ad una velocità:

$$v_\xi = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega \xi_0 \cos(kx - \omega t)$$



Trasferimento di energia e potenza



$$P = -Tsen(\alpha)\frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$sen\alpha = tg\alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$P = -T\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$P = T\xi_0^2\omega k\cos^2(kx - \omega t) \qquad v_{onda} = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$$

$$P_m = \frac{1}{2}\rho_l\xi_0^2\omega^2 v$$

La potenza media dipende dal quadrato dell'ampiezza.

Inoltre onde ad alta frequenza trasmettono un maggior quantitativo di energia.

Il lavoro esterno fornito per muovere la corda è immagazzinato sotto forma di energia cinetica e potenziale. Considerando un istante in cui tutta l'energia di *dm* sia cinetica, avremo:

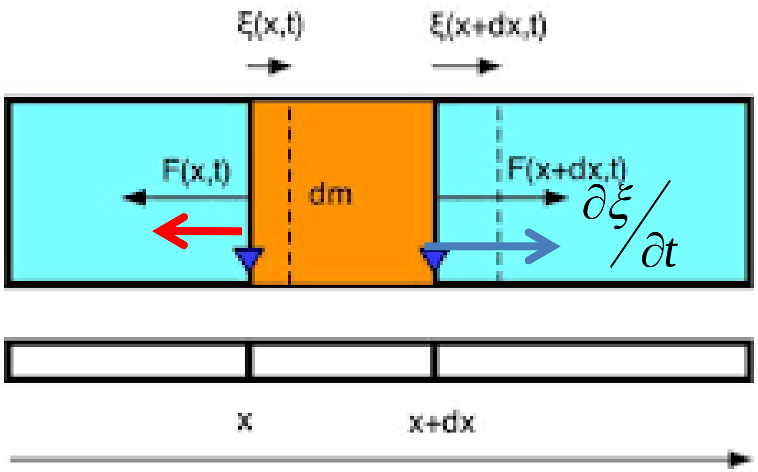
$$dE = \frac{1}{2} dm \cdot v_{\xi,\max}^2 = \frac{1}{2} (\rho_l dx) \cdot \omega^2 \xi_0^2$$

La ***densità lineare di energia*** [J/m] è definita come:

$$w_l = \frac{dE}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dm}{dx} \omega^2 {\xi_0}^2 = \boxed{\frac{1}{2} \rho_l \omega^2 \xi_0^2}$$

Possiamo anche scrivere la potenza media come

$$P_m = w_l v$$



$$P = -F\,\frac{\partial \xi}{\partial t}$$

Legge di Young $$F = \Sigma E\,\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

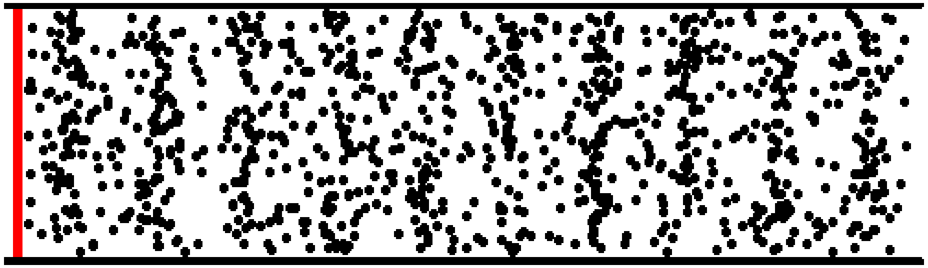
$$P = -\Sigma E\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \xi}{\partial t}$$

Si ottiene $$P_m = \frac{1}{2}\rho\xi_0^2\omega^2\, v\Sigma$$

Densità volumetrica di energia

$$P_m = w_{vol} v\Sigma$$

$$\text{Potenza} = (\text{densità energia})\cdot(\text{velocità onda})\cdot(\text{superficie})$$



Onde di pressione

$$\Delta p(x,t) = \Delta p_0 \sin(kx - \omega t)$$

Potenza media

$$P_m = \Delta p_0^2 \Sigma / 2\rho v$$

Densità volumetrica di energia

$$w_{vol} = \Delta p_0^2 / 2\rho v^2$$

Possiamo anche scrivere la potenza media come

$$\boxed{P_m = w_{vol} v \Sigma}$$

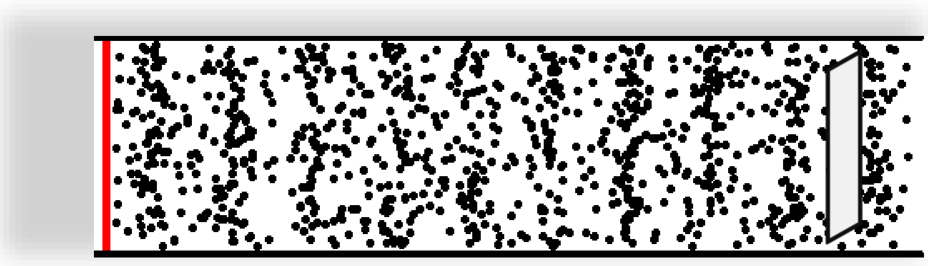
$$\text{Potenza} = (\text{densità energia}) \cdot (\text{velocità onda}) \cdot (\text{superficie})$$

Si definisce INTENSITA'

Valor medio dell'energia che passa attraverso una sezione ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda nell'unità di tempo e per unità di superficie Σ.

Intensità

$$I = \frac{1}{\Sigma}\left(\frac{< dE >}{dt}\right) \qquad I = \frac{P_m}{\Sigma} \qquad [\mathrm{W/m^2}]$$



$$I = w_{vol} v$$

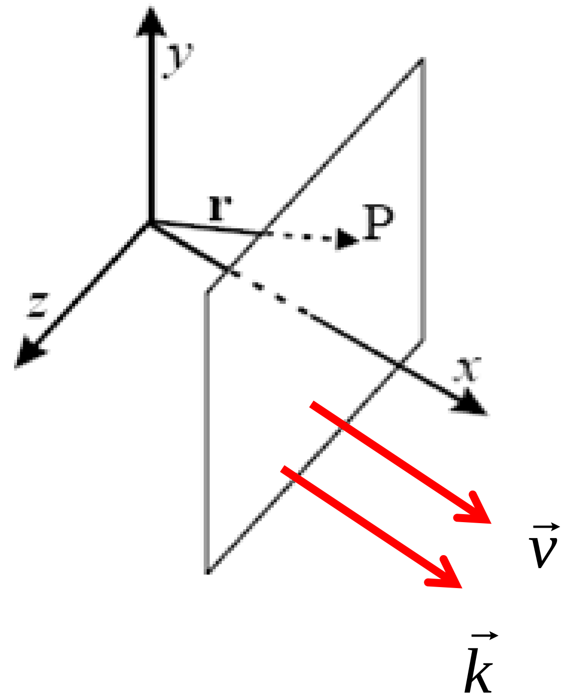
$$\text{Intensità} = (\text{densità energia}) \cdot (\text{velocità onda})$$

Generalizziamo lo studio al caso di onde che si propagano in più dimensioni spaziali.

Il ***fronte d'onda*** è il luogo dei punti del mezzo caratterizzati da medesimo stato di vibrazione (uguale fase).

k è il *vettore di propagazione sempre parallelo al vettore velocità*:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{x}$$



Per ogni punto del piano definito dal raggio vettore **r**

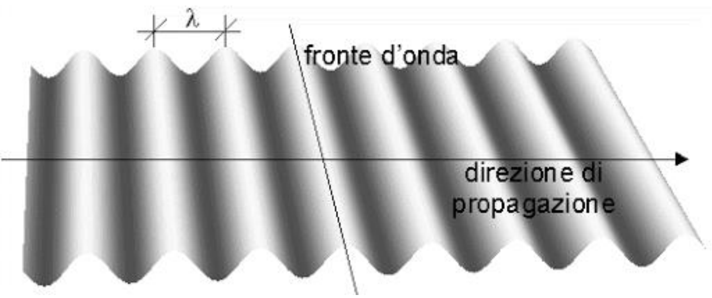
$$\vec{k}\cdot\vec{r} = kx$$

Possiamo scrivere in generale (vale per tutti i punti del piano):

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

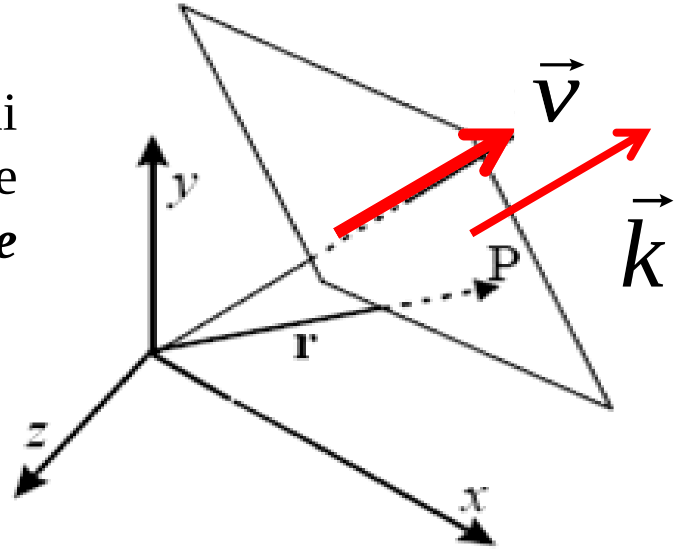
Propagazione del fronte d'onda in una direzione generica **n**

Indichiamo con $\mathbf{u}_v$ il versore direzione di propagazione, sempre perpendicolare al fronte d'onda, e con $\boldsymbol{k}$ il ***vettore di propagazione sempre parallelo al vettore velocità***:



$$\vec{k} = k_x\hat{u}_x + k_y\hat{u}_y + k_z\hat{u}_z$$

$$\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z$$



$$\xi(\vec{r},t) = \xi_0 sen(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega t)$$

sarà *indipendente* dal generico sistema di riferimento prescelto

Equazione D'Alambert in tre dimensioni

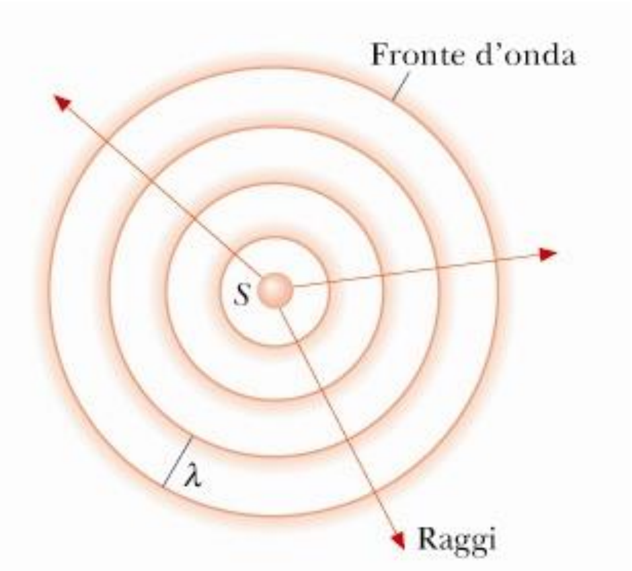
$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = v^2(\nabla^2\xi)$$

La velocità di propagazione della perturbazione è la stessa in tutte le direzioni. I fronti d'onda sono superfici sferiche. La funzione d'onda ad essa associata è:

$$\xi(r,t) = A(r)sen(kr-\omega t)$$

r è la distanza di un punto materiale dalla sorgente



(v)

La potenza irradiata attraverso una superficie sferica dipende dalla sorgente ed è la stessa a qualsiasi *r* in qualunque punto. L'intensità deve dunque variare al variare di *r.*

Ricordiamo che $$I(\mathrm{r}) = \mathrm{C}\, A(\mathrm{r})^2$$

Onde sferiche

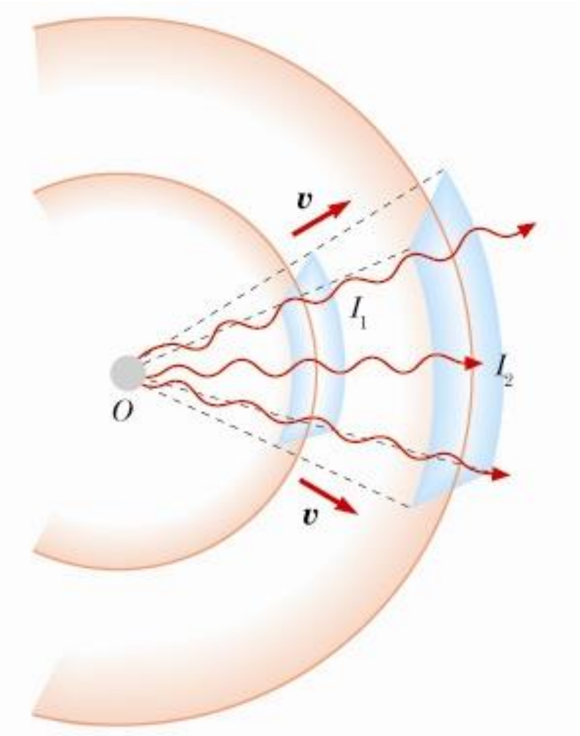
$$P_m = I\,\Sigma = C\,A(r)^2\,4\pi r^2 = cost \;\Rightarrow\; A(r) \propto \frac{1}{r}$$

$$A(r) = \frac{\xi_0}{r}$$

quindi la funzione d'onda sferica armonica diventa

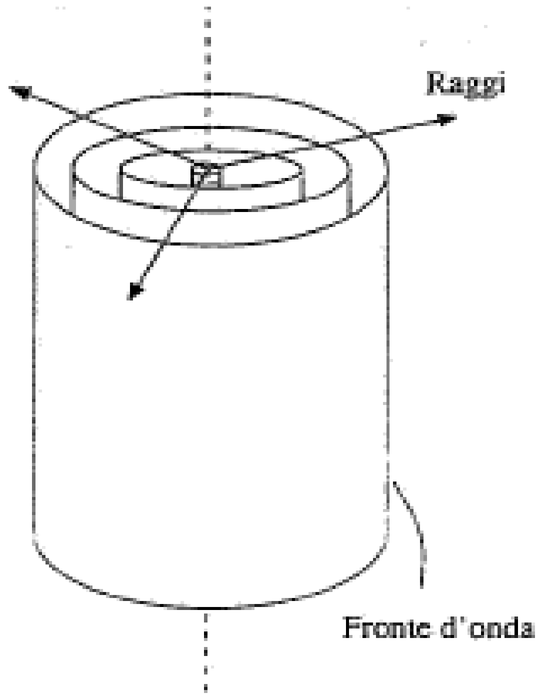
$$\xi(r,t) = \frac{\xi_0}{r}\,sen(kr-\omega t)$$

e l'intensità $I(r) = \frac{I_0}{r^2} = \frac{\xi_0^2}{r^2}$



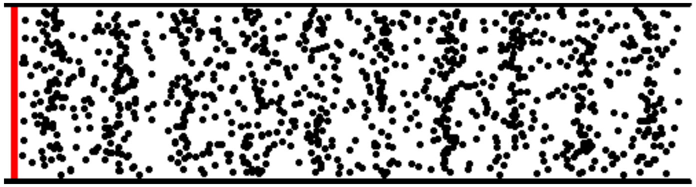
Attraverso una superficie cilindrica coassiale, di raggio r ed altezza h ($\Sigma = 2\pi rh$) la potenza media che attraversa tale superficie è:

$$P_m = I\,\Sigma = C\,A(r)^2\,2\pi rh = cost$$



Poiché la potenza trasmessa sarà invariante con la distanza dalla sorgente, la funzione d'onda di un'onda cilindrica armonica è:

$$\xi(r,t) = \frac{\xi_0}{\sqrt{r}}\sin(kr \pm \omega t) \qquad \text{e l'intensità} \qquad I(r) = \frac{I_0}{r} = \frac{\xi_0^2}{r}$$



La vibrazione si propaga perché il mezzo è interessato da compressioni/rarefazioni progressive

Infrasuoni **20Hz** ⟷ Ultrasuoni **20.000 Hz**

$$v_s = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$$

β = modulo di compressibilita' [Pa]

ρ = densità volumica [Kg/m^3]

In aria

$$v_s = 330 \div 340 \ m/s$$

La velocità dipende dal mezzo e dalla sua temperatura

Medium	***v* (m/s)**
Gases	
Hydrogen (0°C)	1 286
Helium (0°C)	972
Air (20°C)	343
Air (0°C)	331
Oxygen (0°C)	317

Solids[a]	
Pyrex glass	5 640
Iron	5 950
Aluminum	6 420
Brass	4 700
Copper	5 010
Gold	3 240
Lucite	2 680
Lead	1 960
Rubber	1 600

L'orecchio non è un recettore lineare. La sensazione sonora cresce secondo il logaritmo dell'intensità dell'onda sonora incidente (Legge di Fechner-Weber).

$$[\text{decibel}] \quad dB = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

Definiamo ***Intensità di riferimento*** I_0 la soglia di udibilità dell'orecchio umano per la frequenza di 1.000 Hz.

$$I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$$

Se $I = 10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}$

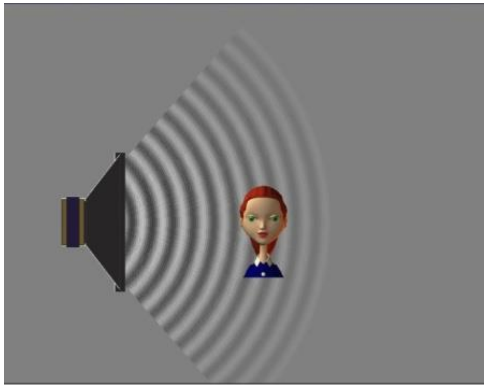
$$dB = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0} = 10 \cdot \log_{10} \frac{10^{-6}}{10^{-12}}$$

$$dB = 10 \cdot \log_{10} 10^{6} = 60$$

Il livello sonoro, essendo un rapporto di intensità, ***non dipende*** dalla frequenza

Suono	***Intensità (W/m^2)***	***Livello Sonoro (dB)***
Soglia di udibilità	**10^{-12}**	**0**
Frusciare di foglie	**10^{-11}**	**10**
Conversazione normale (a 1m.)	**10^{-6}**	**60**
Martello Pneumatico (a 1 m.)	**10^{-3}**	**90**
Concerto Rock	**10^{-1}**	**110**
Soglia del Dolore	**1**	**120**
Motore di un Jet (a 50 m.)	**10**	**130**

La frequenza determina invece se il suono è acuto o grave



$$\xi_1(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\xi_2(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \delta)$$

Due onde armoniche di uguale ampiezza ξ_0 in propagazione alla stessa velocità e stesso verso di percorrenza.

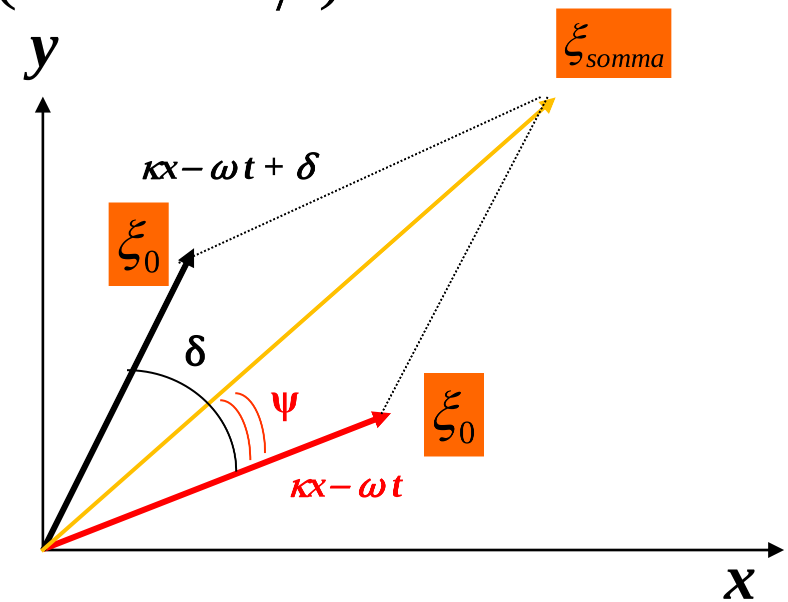
L'onda risultante in un determinato punto *P* di ascissa *x*, in accordo con il principio di sovrapposizione, sarà :

$$\xi(x,t) = \xi_{somma} \sin(kx - \omega t + \psi)$$

Essa ha la stessa frequenza e velocità di propagazione delle onde componenti

$$x_{somma} = \sqrt{x_0^2 + x_0^2 + 2x_0^2 \cos d}$$

$$tg\,\psi = \frac{\xi_0 sen\delta}{\xi_0 + \xi_0 \cos\delta}$$



Sovrapposizione di onde

$$x_{somma} = \sqrt{x_0^2 + x_0^2 + 2x_0^2 \cos d} \xrightarrow{\cos \delta/2 \ = \sqrt{(1+cos\delta)/2}} \xi_{somma} = 2\ \xi_0 cos\frac{\delta}{2}$$

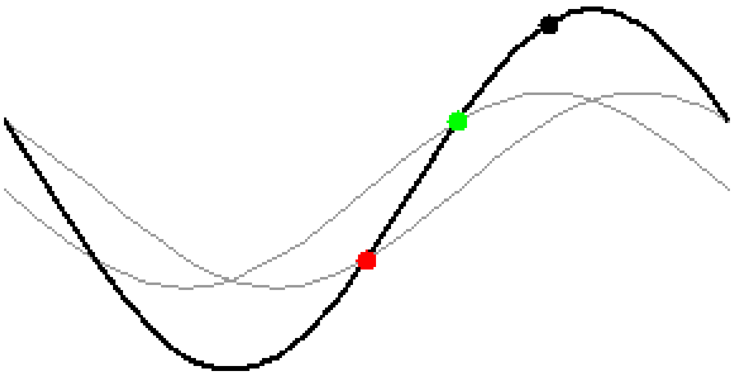
Se $\delta = 2m\pi$, $m = 0,1,2,...$ l'ampiezza dell'onda risultante è: $\xi_{somma} = 2\xi_0$

Se $\delta = (2m+1)\pi$, $m = 0,1,2,...$ l'ampiezza dell'onda risultante è: $\xi_{somma} = 0$

Poichè $\mathrm{I}_0 \propto \xi_0^2$ e $\mathrm{I} \propto \xi_{somma}^2$

Se $\delta = 2m\pi$, $m = 0,1,2,...$ $I_{somma} = 4I_0$

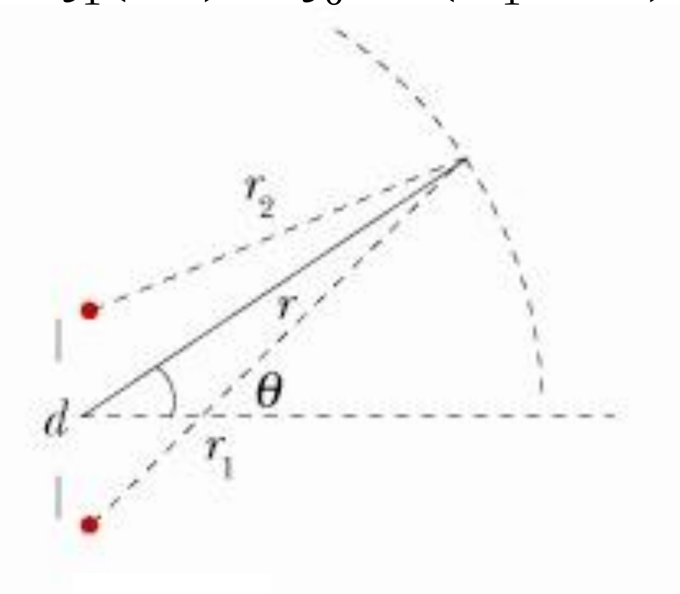
Se $\delta = (2m+1)\pi$, $m = 0,1,2,...$: $I_{somma} = 0$



fisicaondemusica.unimore.it

Sorgenti di stessa pulsazione in fase

$$\xi_1(r,t) = \xi_0 \sin(kr_1 - \omega t) \qquad \xi_2(r,t) = \xi_0 \sin(kr_2 - \omega t)$$



$$\delta = (kr_2 - \omega t - kr_1 + \omega t) = k(r_2 - r_1)$$

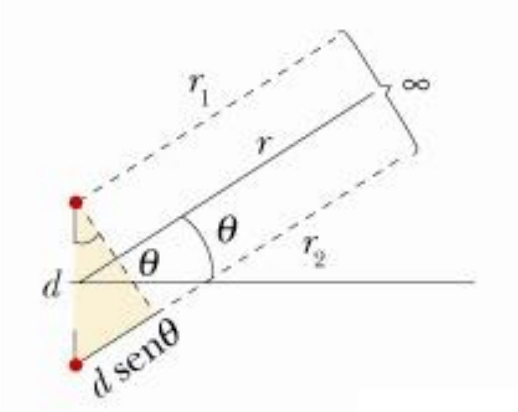
$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

$$r_1 \approx r_2$$

$$\xi(x,t) = 2\xi_0 \cos\left(\frac{k(r_1 - r_2)}{2}\right)\sin\left(\frac{k(r_1 + r_2)}{2} - \omega t\right)$$

$$\xi(x,t) = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\sin(kr - \omega t)$$

Interferenza spaziale



$$\xi(x,t) = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\sin\left(kr - \omega t\right)$$

Ampiezza massima
(interferenza costruttiva)

$$\xi(x,t) = 2\xi_0$$

$$\delta = 2m\pi$$

$$(r_1 - r_2) = m\lambda$$

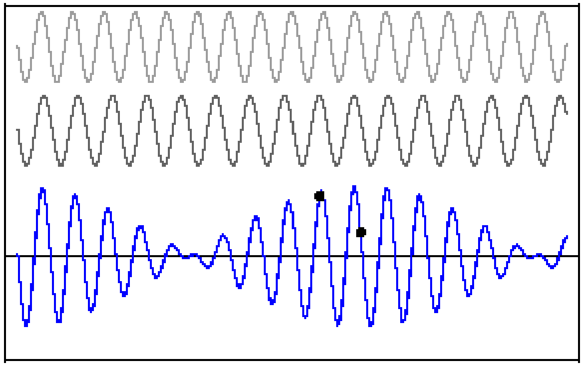
Ampiezza nulla
(interferenza distruttiva)

$$\xi(x,t) = 0$$

$$\delta = (2m+1)\pi$$

$$(r_1 - r_2) = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$$

Interferenza temporale



$$\xi_1(t) = \xi_0 \sin(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$\xi_1(t) = \xi_0 \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$x(t) = x_0 \sin(k_1 x - w_1 t) + x_0 \sin(k_2 x - w_2 t)$$

Ponendo

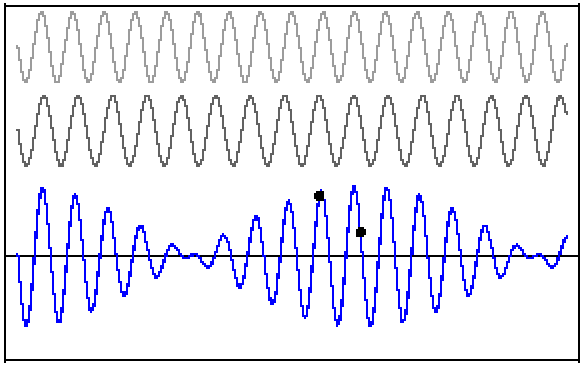
$$\Delta k = k_1 - k_2 \qquad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$

$$\mathrm{k_m} = \frac{k_1 + k_2}{2} \qquad \omega_\mathrm{m} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

Si ottiene

$$\xi(t) = 2\xi_0 \cos(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta\omega}{2} t)\sin(k_m x - \omega_m t)$$

Interferenza temporale: battimenti



$$\xi(t) = 2\xi_0 \cos(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t)\sin(k_m x - \omega_m t)$$

La variazione dell'ampiezza si propaga anch'essa come un'onda di velocità

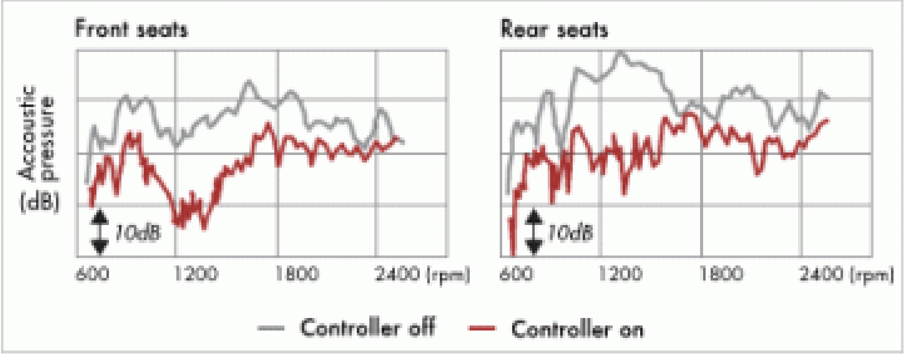
$$v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}$$

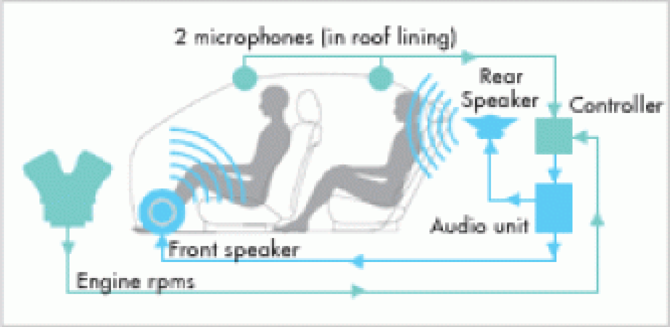
Velocità con cui si muove il pacchetto

Le cuffie con cancellazione attiva del rumore sono dotate di un microfono interno e di un processore audio che percepiscono i suoni esterni e producono a loro volta un suono opposto per cancellarli.

Figure 4

Cancellazione attiva del rumore nelle autovetture

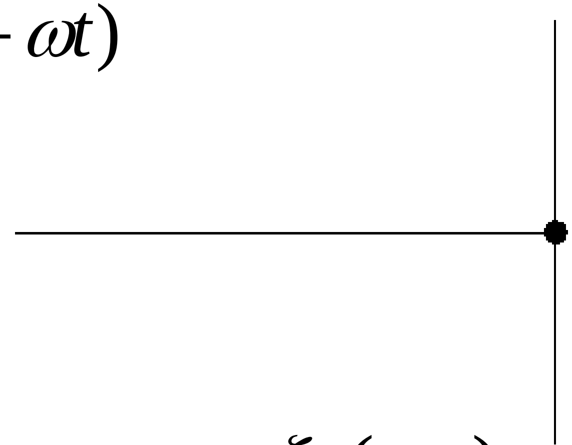




In the frequency range below 100 hertz, ANC results in an impressive 10 dB reduction in noise level.

Onde Stazionarie su corda

$$\xi_1(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

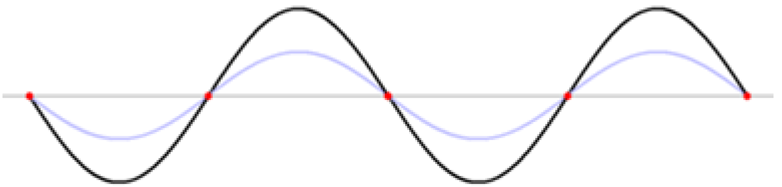


$$\xi_2(x,t) = \xi_0 \sin(kx + \omega t)$$

Applicando il principio di sovrapposizione avremo:

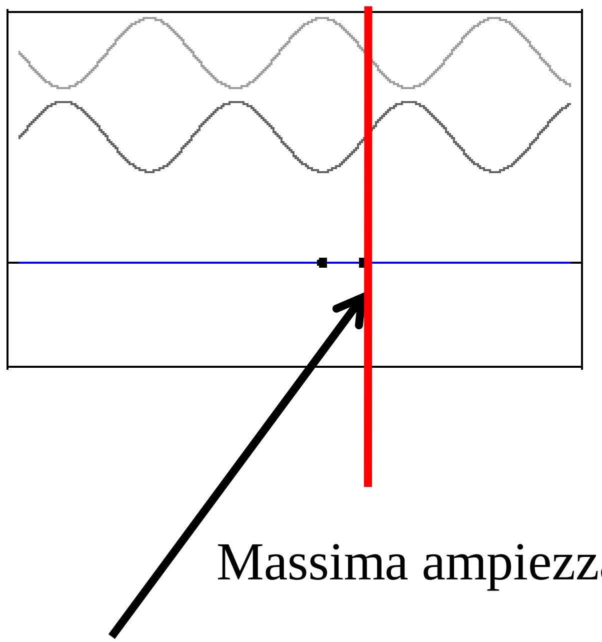
$$\xi(x,t) = [2\xi_0 \sin(kx)]\cos(\omega t)$$

Onda stazionaria



Onde Stazionarie su corda

Oscillazioni armoniche di ampiezza $2\xi_0 \sin(kx)$ $\quad 2\xi_0 \sin(\frac{2\pi}{\lambda} x)$

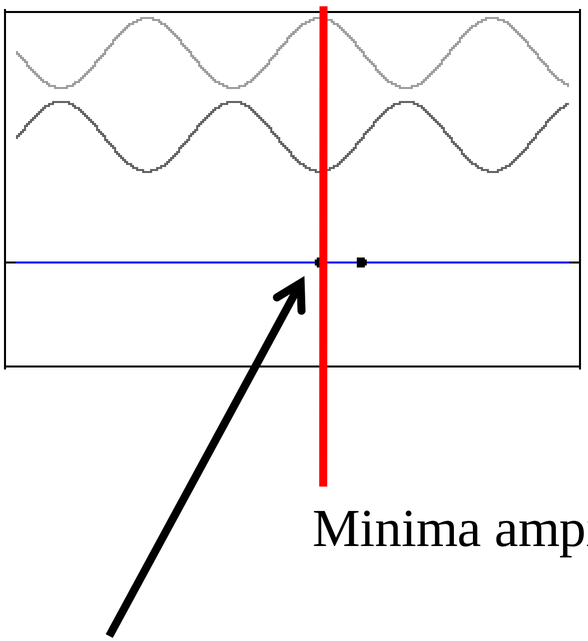


Massima ampiezza

$$\sin(\frac{2\pi}{\lambda} x) = 1, \qquad \frac{2\pi}{\lambda} x = (2m+1)\frac{\pi}{2}$$

Massima ampiezza per $\quad x = (2m+1)\frac{\lambda}{4}, \quad m = 0,1,2,\ldots$

Oscillazioni armoniche di ampiezza $2\xi_0 \sin(kx)$ $\quad 2\xi_0 \sin(\frac{2\pi}{\lambda} x)$

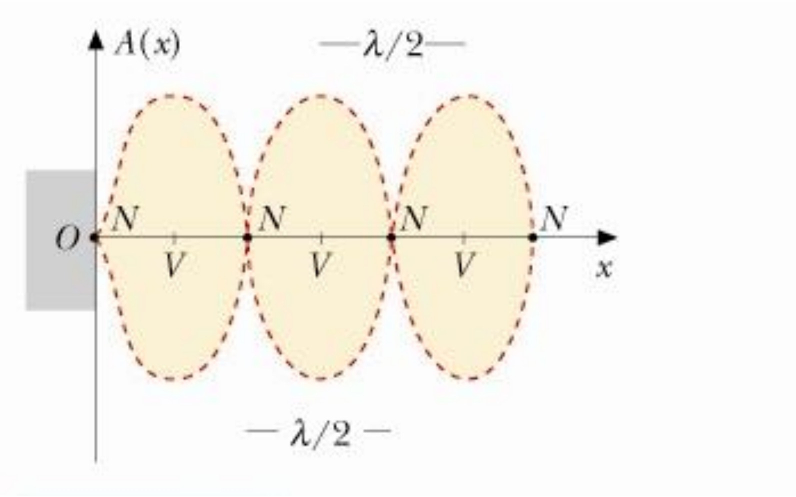


Minima ampiezza

$$\sin(\frac{2\pi}{\lambda} x) = 0, \quad \frac{2\pi}{\lambda} x = m\pi$$

Minima ampiezza per $x = m\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0,1,2,\ldots$

Onde Stazionarie su corda



Distanza fra due ventri λ/2

Distanza fra due nodi λ/2

Distanza fra un nodo e un ventre λ/4

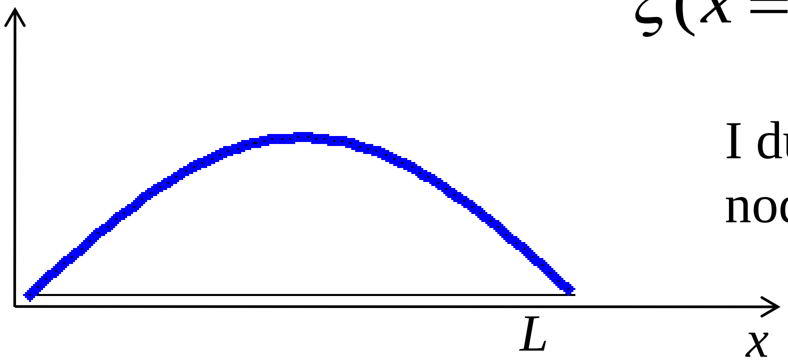
Minima ampiezza per $$x = m\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0,1,2,\ldots$$

Massima ampiezza per $$x = (2m+1)\frac{\lambda}{4}, \quad m = 0,1,2,\ldots$$

Onde Stazionarie su corda

Supponiamo che entrambi gli estremi della corda siano fissi

$$\xi(x=0)=0 \qquad \xi(x=L)=0$$



I due estremi della corda devono essere dei nodi

$$x = m\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0,1,2,\ldots$$

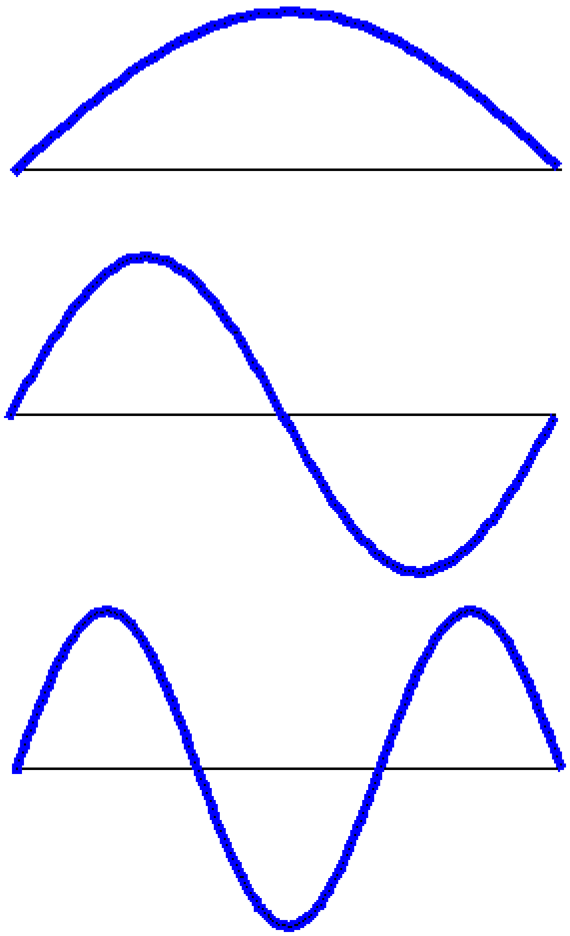
$$\text{se } m = 1, \; L = \frac{\lambda}{2}$$

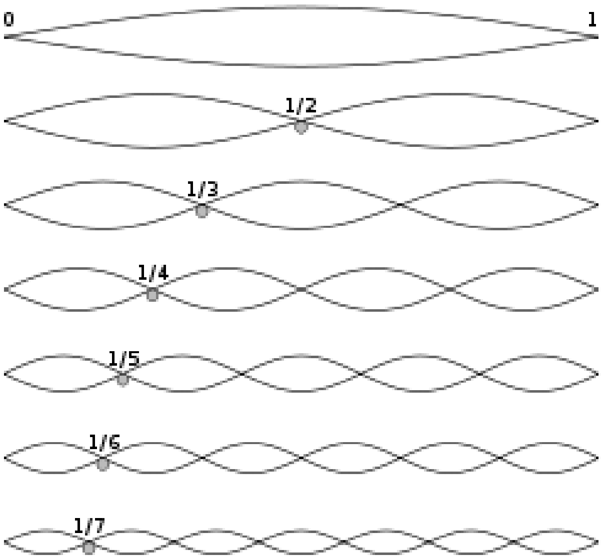
In generale

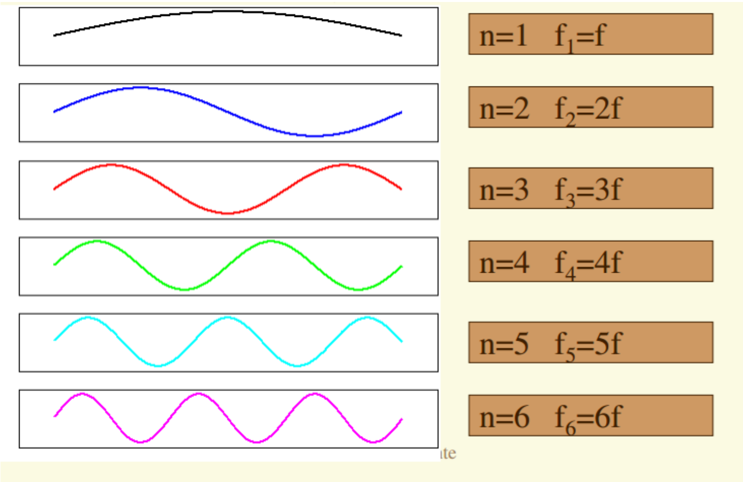
$$L = m\frac{\lambda}{2}, \quad \lambda = \frac{2L}{m}, m = 1,2,\ldots$$

Onde Stazionarie su corda

$$\lambda = \frac{2L}{m}, m = 1,2,\ldots$$





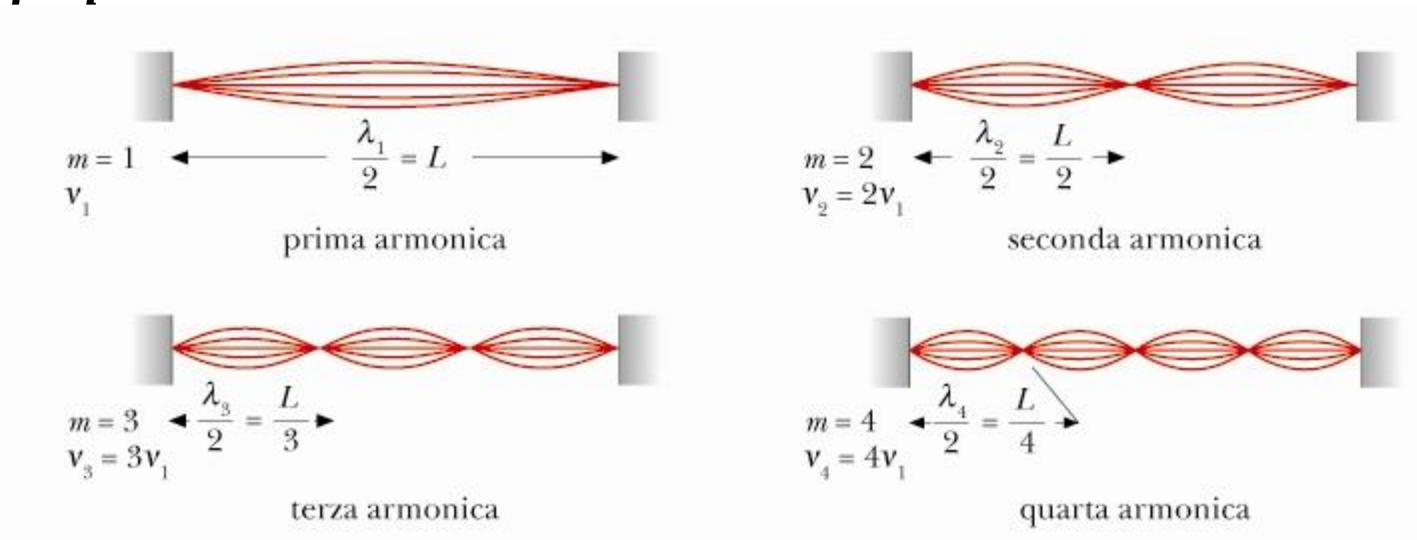


Onde Stazionarie su corda

La frequenza d'oscillazione corrispondente è chiamata ***frequenza fondamentale*** dell'onda stazionaria ed è:

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} \qquad f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$$

Le altre frequenze permesse risultano multiple della fondamentale e si chiamano ***frequenze armoniche*** del sistema oscillante.

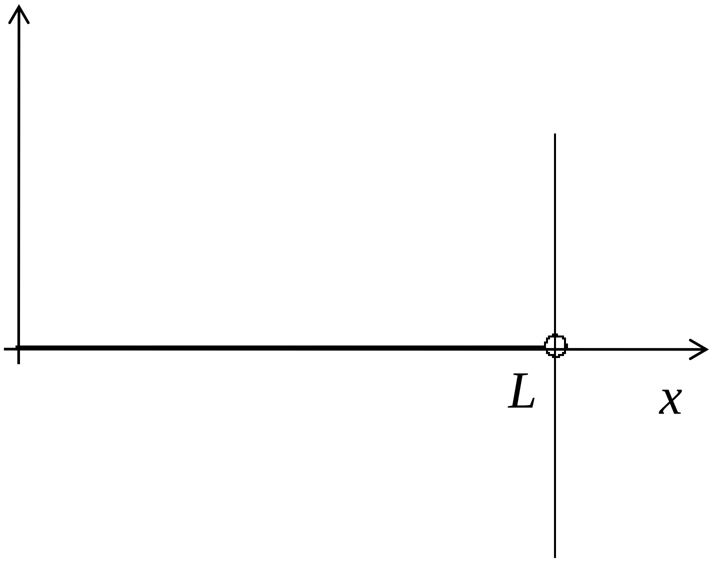


$$f_n = mf_1$$

con $m = 1,2,3,4,\ldots$

Corda con una estremità libera

Si genererà una figura d'onda stazionaria, ma l'estremità libera adesso è un ventre dell'onda stazionaria



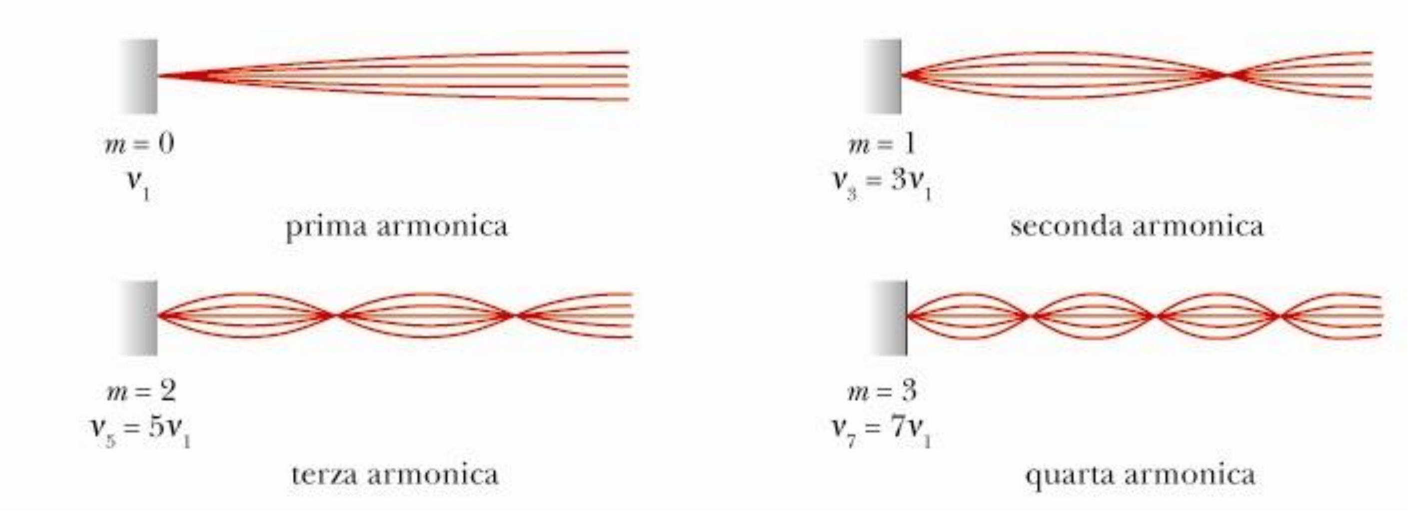
Condizione di massimo

$$x = (2m+1)\frac{\lambda}{4}, \quad m = 0,1,2,\ldots$$

$$L = (2m+1)\frac{\lambda}{4}, \quad m = 0,1,2,\ldots$$

$$\lambda = \frac{4L}{2m+1} \quad m = 0,1,2,\ldots$$

Onde Stazionarie su corda



Frequenza fondamentale dell'onda stazionaria

$$f_1 = \frac{1}{4L}\sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$$

$$f_n = m' f_1$$

con $m' = 1,3,5,\ldots$

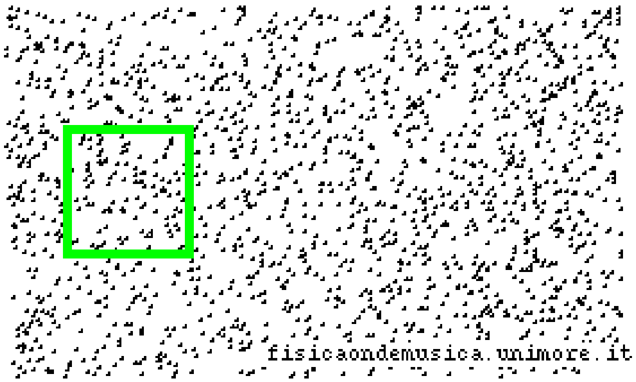
Onde Stazionarie in colonna d'aria

Onda sonora in un tubo d'aria (ad esempio una canna d'organo). Si producono onde longitudinali stazionarie di pressione che si propagano in direzioni opposte

$$p_1(x,t) = \Delta p_m (kx - \omega t) \qquad p_2(x,t) = \Delta p_m (kx + \omega t)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, l'onda risultante in un punto di osservazione *P* sarà:

$$p(x,t) = [2\Delta p_m \sin(kx)]\cos(\omega t)$$



Il volumetto d'aria interessato da un'onda sonora stazionaria oscilla avanti e indietro contraendosi ed espandendosi. L'aria si riscalda durante una condensazione (colori caldi nell'animazione) e si raffredda durante una rarefazione (colori freddi)

Tubo aperto ad ambo le estremità

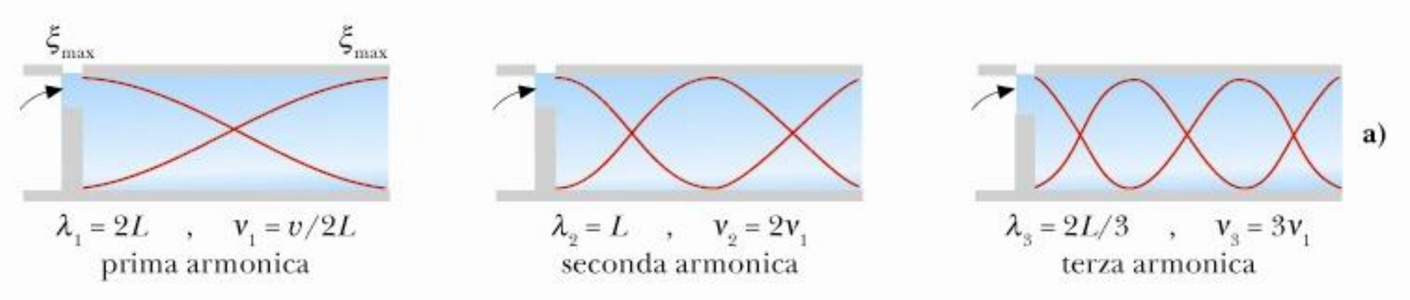
Gli estremi sono dei nodi, in quanto la pressione è fissata a quella esterna

$$p(0) = p_0 \qquad p(L) = p_0$$

Minima ampiezza per $$L = m\frac{\lambda}{2}, \quad \lambda = \frac{2L}{m}, \quad m = 1,2,...$$

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}}$$ (*Frequenza fondamentale*)

$$f_n = mf_1$$ con $m = 1,2,3,4,...$



Tubo chiuso ad una estremità

Supponiamo che l'estremità chiusa del tubo si abbia per *x=L*. Questa estremità corrisponde ad un ventre di pressione. La condizione di vincolo, quindi, sarà:

$$p(L) = \pm 2\Delta p_m$$

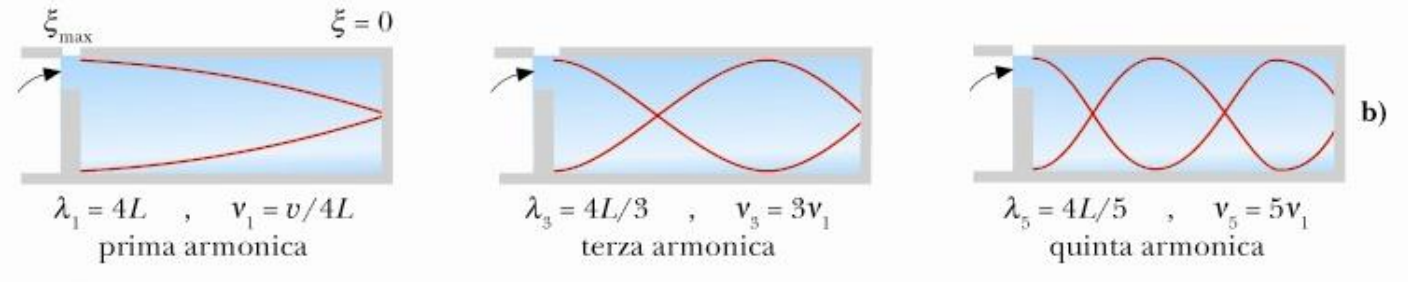
$$\lambda = \frac{4L}{2m+1} \quad m = 0,1,2,\ldots$$

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1}$$

$$f_1 = \frac{1}{4L}\sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}}$$

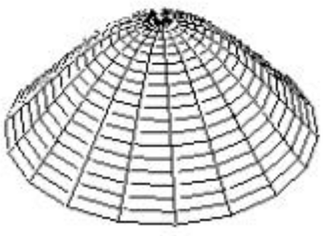
$$f_m = m' f_1$$

con *m' = 1,3,5,…*

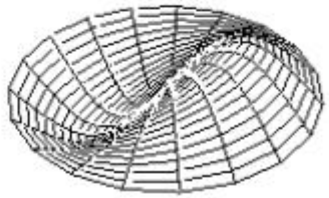


Vibrazioni di membrane

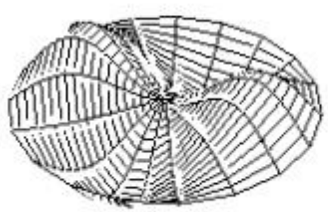
f = 1.000



f = 1.593

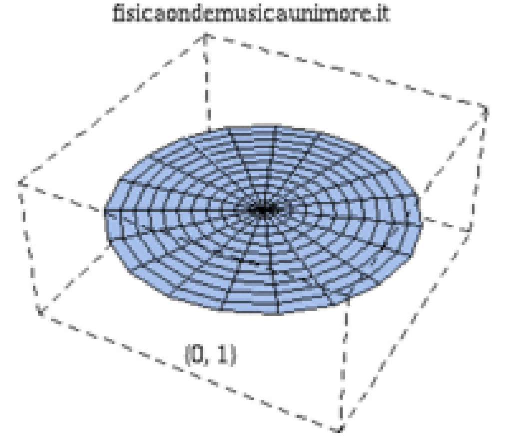


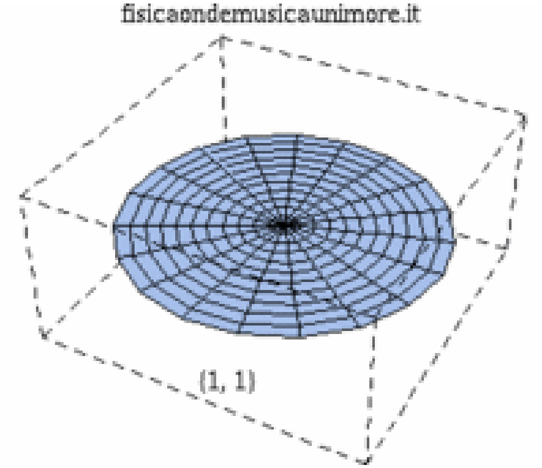
f = 2.135

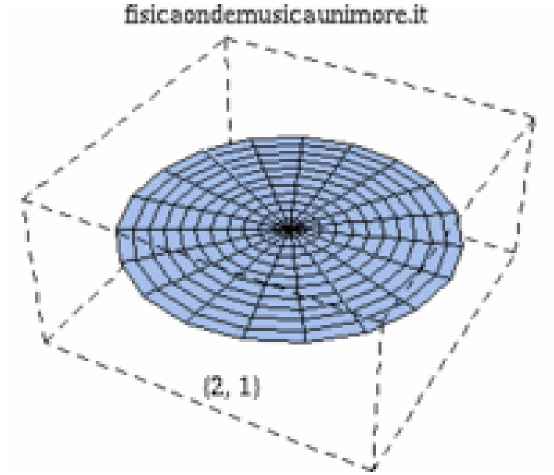


f = 2.295

Vibrazioni di membrane







Modo (0,1). Non ha diametri nodali, ed ha un solo cerchio nodale (al bordo della membrana).

Modo (1,1). Oltre al cerchio nodale al bordo, ha un diametro nodale. Il punto di impatto della mazza, ovviamente non può cadere sul diametro.

Modo (2,1). Oltre al cerchio nodale al bordo, ha due diametri nodali perpendicolari.

Onde sonore

sensibilità orecchio umano

infrasuoni ← $20\ \text{Hz} < f < 2\ 10^4\ \text{Hz}$ → **ultrasuoni**

$$17.2\ \text{m} < \lambda < 1.72\ \text{cm}$$

$$v = \lambda f$$

a T = 20 °C: v = 343 m/s

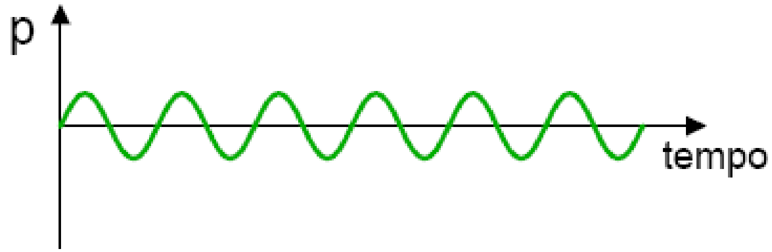
a T = 0 °C: v= 331 m/s

Velocità del suono in diversi materiali, a 20 °C e 1 atm

Materiale	Velocità (m/s)
Aria	343
Aria (0 °C)	331
Elio	1005
Idrogeno	1300
Acqua	1440
Acqua di mare	1560
Ferro e acciaio	≈ 5000
Vetro	≈ 4500
Alluminio	≈ 5100
Legno duro	≈ 4000

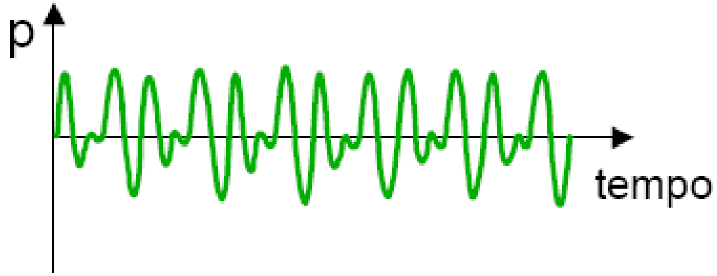
Suoni puri e complessi

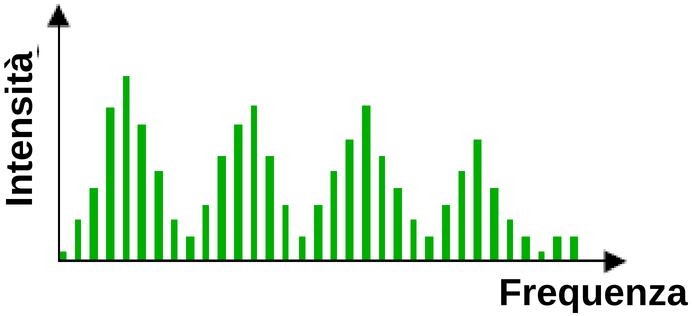
Si dicono *suoni puri* o toni puri i suoni caratterizzati da un onda di una sola frequenza.



Se si considera il loro “spettro” di intensità in funzione della frequenze si ha una sola riga in corrispondenza della frequenza del suono puro.

***Suoni complessi* sono quelli il cui spettro comprende molte componenti pure. Se le componenti sono così numerose da costituire praticamente un continuo si parla di spettro a larga banda.**





Timbro

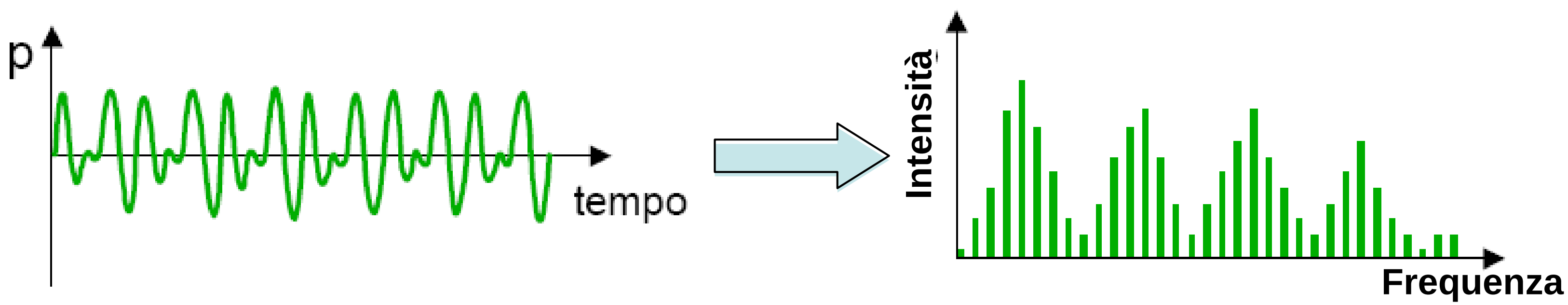
Se un oboe e un violino suonano la stessa nota udiamo suoni diversi.

La nota rappresenta la frequenza fondamentale prodotta dallo strumento.

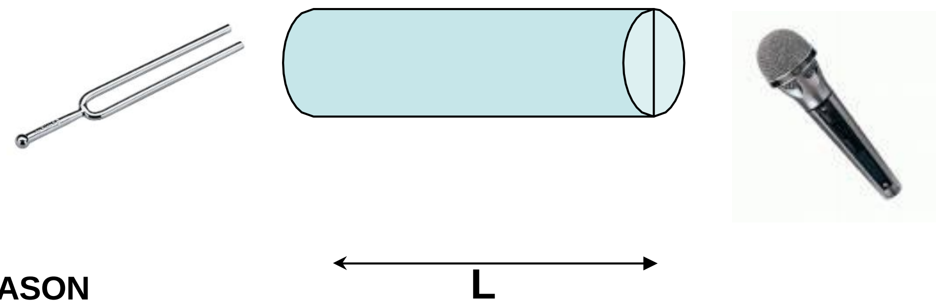
Ciascuno strumento produce anche armoniche superiori le cui intensità relative dipendono dallo strumento e da come è suonato.

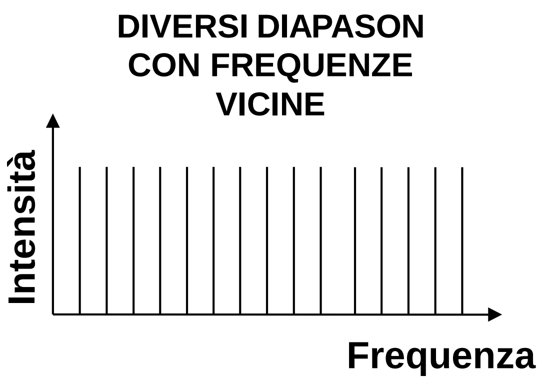
La caratteristica di un suono, che dipende dalla presenza di armoniche superiori ed in particolare dal loro numero e dalla loro ampiezza relativa si chiama TIMBRO.

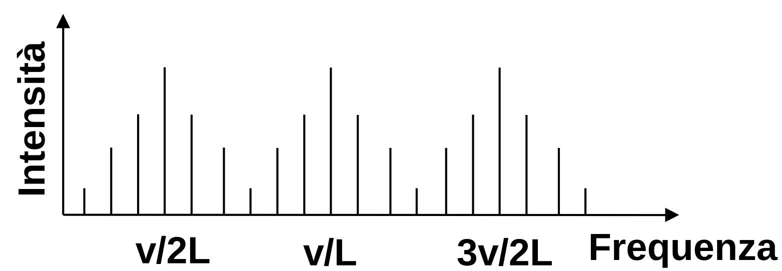
Quando si analizzano le forme d'onda relative ad un suono determinando le armoniche presenti e la loro intensità relativa si fa un'*analisi armonica* o *analisi di Fourier*



Funzione di una cassa di risonanza



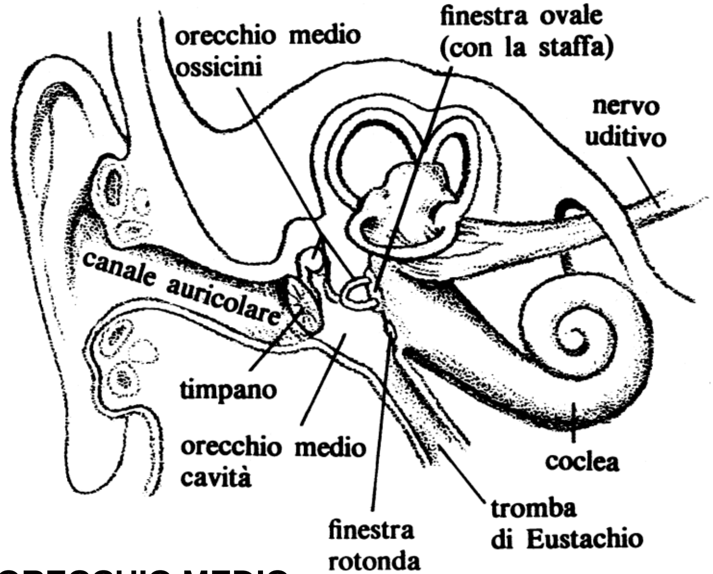


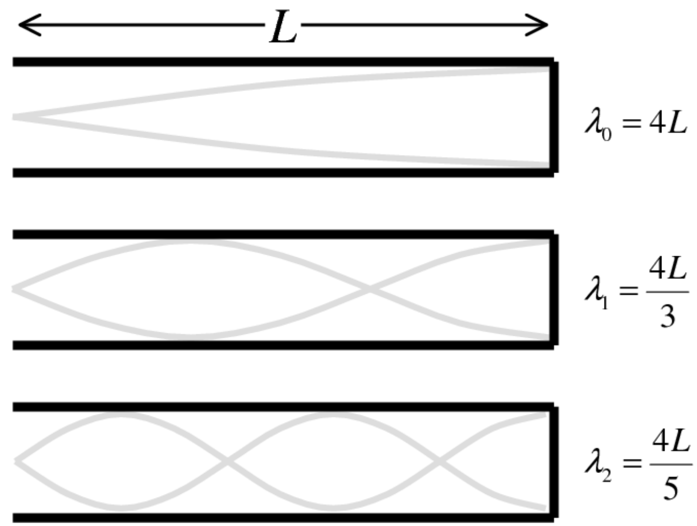


L'intensità sonora che raggiunge il microfono è più elevata in corrispondenza delle frequenze di risonanza del tubo

L'orecchio umano

**ORECCHIO ESTERNO:
RISUONATORE**





**ORECCHIO MEDIO:
AMPLIFICATORE**

**ORECCHIO INTERNO:
ANALIZZATORE DI FREQUENZE**

Nell'orecchio esterno (canale auricolare) si producono onde stazionarie con

$$\lambda_n = 4L/(2n-1)$$

Nel padiglione auricolare la pressione è quella atmosferica (nodo di onda stazionaria) Affinché il timpano vibri e si formi un'onda stazionaria, l'onda deve presentarsi con un ventre al timpano dove avviene la riflessione.

Effetto doppler

L'***effetto Doppler*** consiste in un'apparente variazione della frequenza di un'onda percepita da un osservatore che si trovi in moto relativo rispetto ad una sorgente emittente. Sia v_{onda} la velocità dell'onda:

Sorgente di frequenza f in quiete

Osservatore in quiete rivela la frequenza f

Sorgente di frequenza f in moto con velocità v_{sorg}

Osservatore in quiete rivela una frequenza $f' > f$

Sorgente di frequenza f in moto di avvicinamento all'osservatore con velocità v_{sorg}

L'osservatore percepisce la lunghezza d'onda

$$\lambda' = \lambda - v_{sorg}T = \frac{v_{onda}}{f} - \frac{v_{sorg}}{f} = \frac{(v_{onda} - v_{sorg})}{f}$$

$$f' = \frac{v_{onda}}{\lambda'}$$

E quindi

$$f' = f\left(\frac{1}{1-(v_{sorg}/v_{onda})}\right)$$

Sorgente di frequenza f in moto di allontanamento dall'osservatore con velocità v_{sorg}

Osservatore in quiete rivela una frequenza $f' < f$

$$f' = f\left(\frac{1}{1+(v_{sorg}/v_{onda})}\right)$$

L'osservatore percepisce un cambio di frequenza

$$f' = f\left(\frac{1}{1\pm(v_{sorg}/v_{onda})}\right)$$

Sorgente di frequenza f in quiete

Osservatore in moto di allontanamento con velocità v_{oss}

Velocità relativa:

$$(v_{onda} - v_{oss})$$

Numero di fronti incontrati $N = \frac{(v_{onda} - v_{oss}) \cdot \Delta t}{\lambda}$

Nuova frequenza dei fronti

$$f' = N / \Delta t = \frac{(v_{onda} - v_{oss})}{\lambda} = \frac{(v_{onda} - v_{oss})}{v_{onda} / f}$$

$$f' = f \left(1 - \frac{v_{oss}}{v_{onda}}\right)$$

Sorgente di frequenza f in quiete

Osservatore in moto di avvicinamento con velocità v_{oss}

$$f'_{sg} = f_{sg}\left(1 + \frac{v_{oss}}{v_{onda}}\right)$$

Nel caso più generale in cui si muovono sia la sorgente che l'osservatore:

$$f'_{sg} = f_{sg}\,\frac{v_{onda} \pm v_{oss}}{v_{onda} \mp v_{sg}}$$

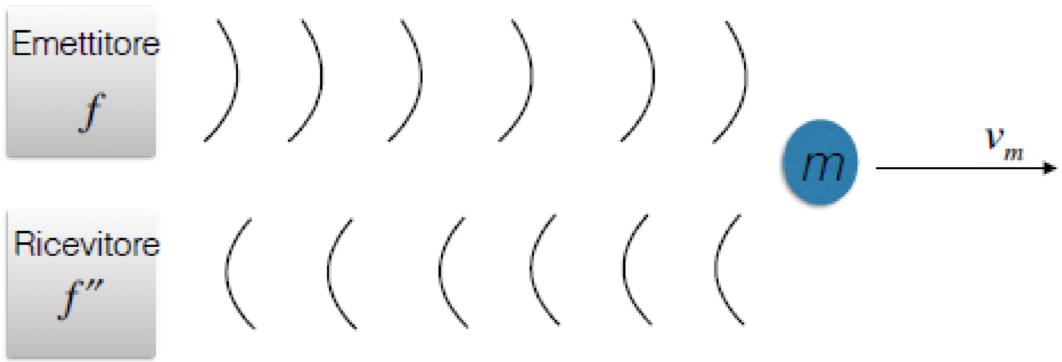
Il segno superiore nell'espressione si riferisce all'avvicinamento reciproco ed il segno inferiore all'allontanamento reciproco.

Radar Doppler

Usato in meteorologia

Utilizzato per misurare la velocità delle autovetture

Sensori anti intrusione



- Sorgente ferma ed osservatore in allontanamento
  La massa m vede la frequenza $$f' = f\left(1 - \frac{v_m}{c}\right)$$

- La massa m emette la frequenza f'

- Sorgente in allontanamento ed osservatore fermo
  Il ricevitore vede la frequenza $$f'' = f' \frac{1}{1 + \frac{v_m}{c}}$$

$$f' = f(1 - \frac{v_m}{c}) \qquad f'' = f'\frac{1}{1+\frac{v_m}{c}}$$

$$f'' = f'\frac{1}{1+\frac{v_m}{c}} = f\frac{(1-\frac{v_m}{c})}{1+\frac{v_m}{c}} = f\frac{(1-\frac{v_m}{c})^2}{1-\frac{v_m^2}{c^2}}$$

$$\frac{v_m^2}{c^2} << 1$$

$$f'' = f(1-\frac{2v_m}{c}) = f - 2(\frac{f}{c})v_m = f - 2v_m/\lambda$$

$$\Delta f = f'' - f = -2v_m/\lambda$$

$\Delta f < 0$ oggetto in allontanamento

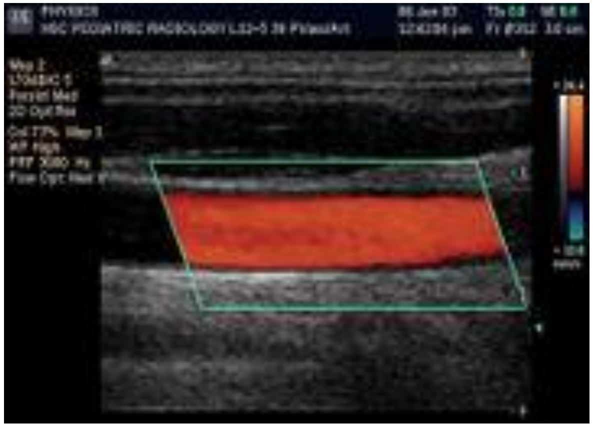
$\Delta f > 0$ oggetto in avvicinamento

$$v_m = \frac{1}{2}\lambda\Delta f$$

Eco Doppler

L'ecografia viene utilizzata assieme alla tecnica Doppler per visualizzazione le parti in movimento (in questo caso il flusso del sangue). Tale tecnica si basa sullo spostamento in frequenza fra il segnale inviato e quello ricevuto

$$\Delta f = \frac{2v_m \cos\theta}{\lambda}$$

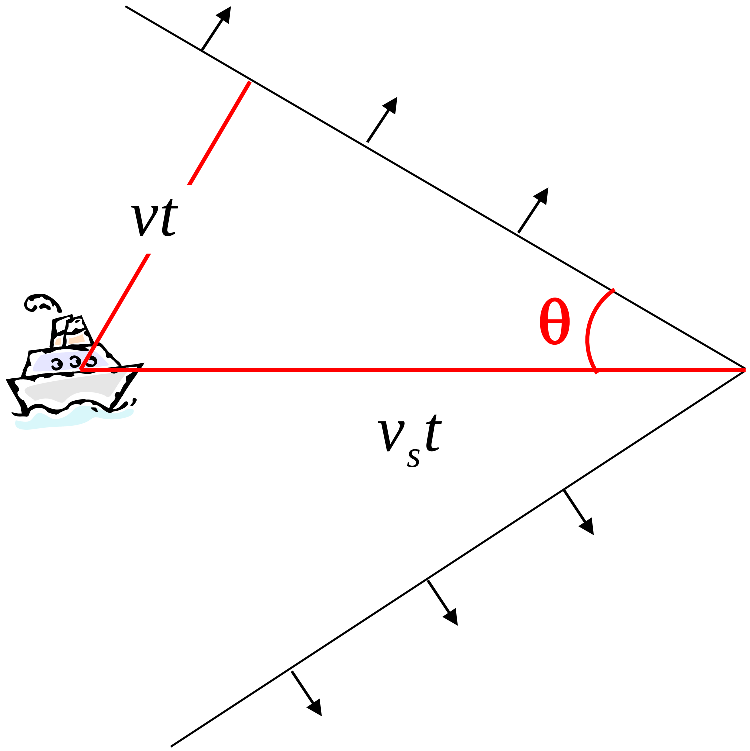


$$v_m = 0{,}015\,\text{m/s} \quad \text{velocità del fluido}$$

$$\lambda = 0{,}015\,\text{m} \quad \text{lunghezza d'onda della sorgente}$$

$$\Delta f \approx 2\,Hz$$

Se la sorgente si muove alla velocità maggiore a quella delle onde nel mezzo si crea un fronte d'onda



$$sen\theta = \frac{v}{v_s}$$

$$M = \frac{1}{sen\theta} = \frac{v_s}{v}$$