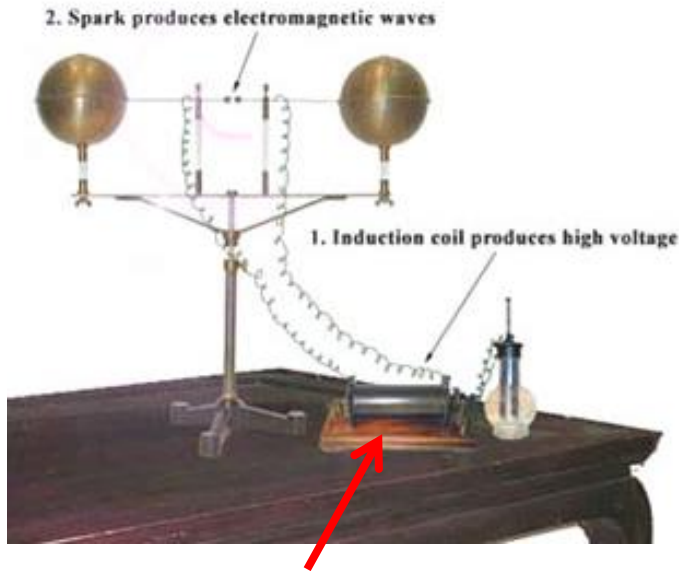


# CAPITOLO 4

## Onde Elettromagnetiche

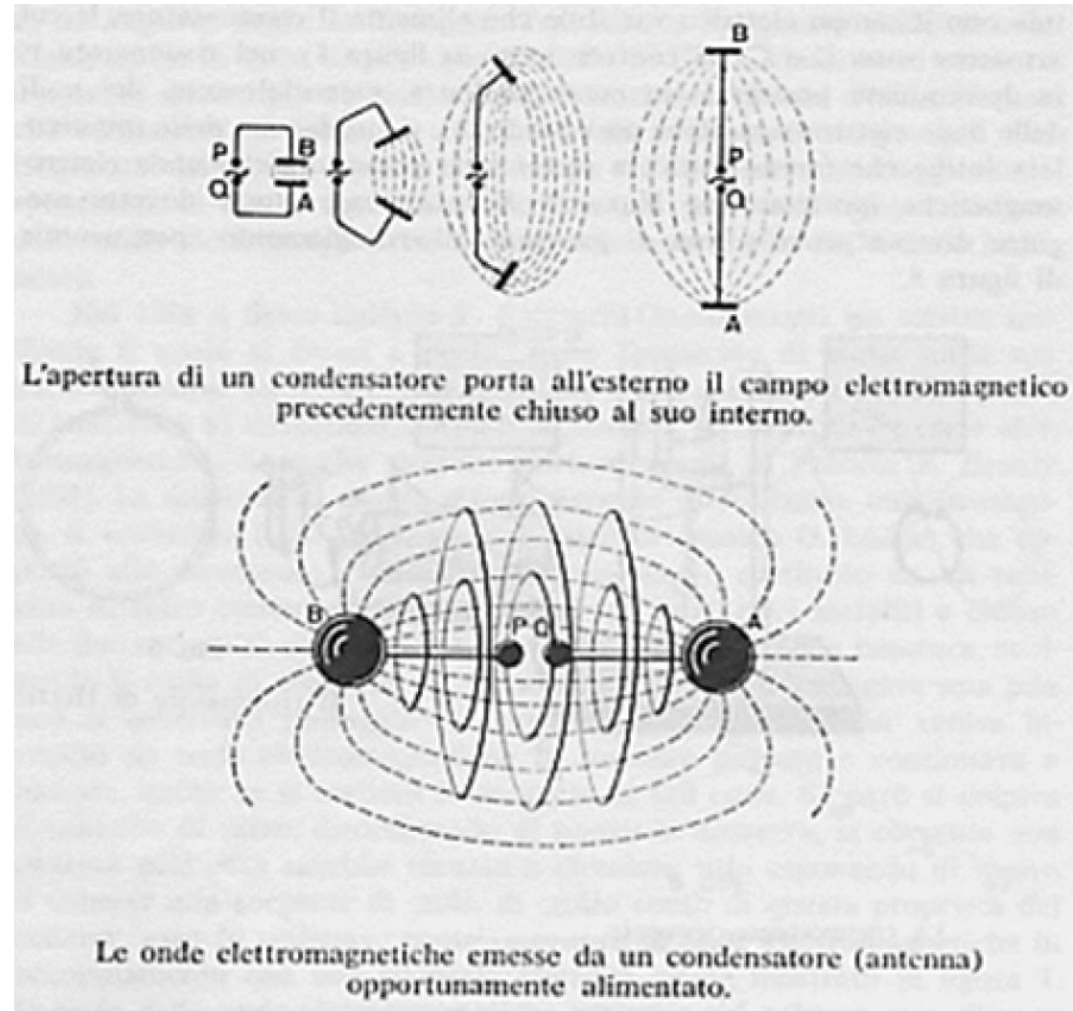


## Dispositivo di Hertz

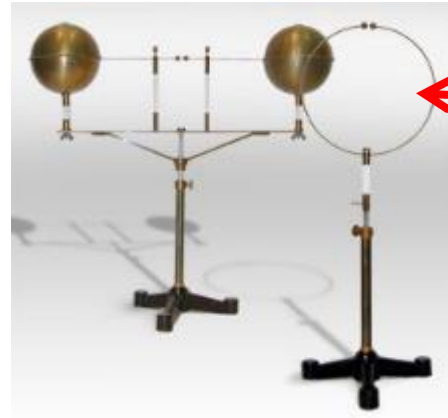


### Rocchetto di Ruhmkorff

Sorgente di alimentazione che alimenta tramite un trasformatore due sfere C1 e C2. Tali sfere vengono caricate fino al valore di innesco della scarica delle sfere più piccole. Vengono emessi un campo elettrico  $E$  e un campo magnetico  $B$  che si propagano nello spazio

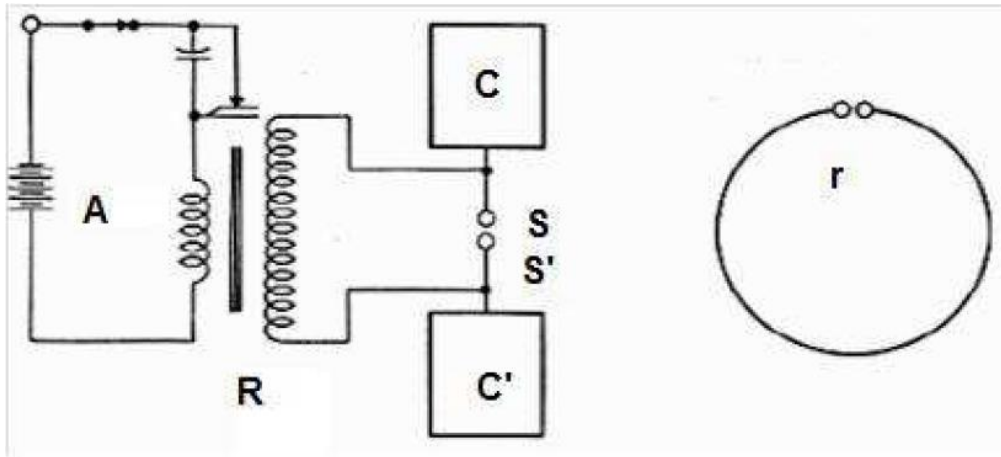


Emettitore (Spinterometro)



Ricevitore

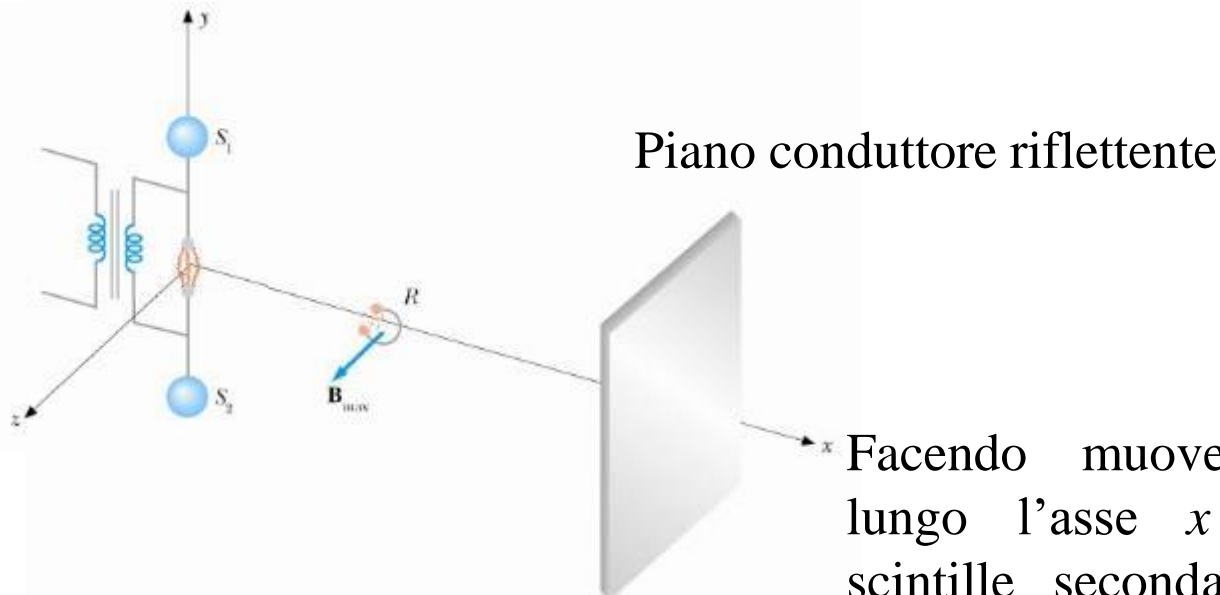
Circuito equivalente



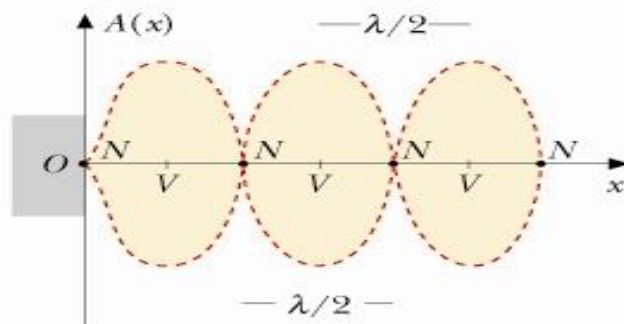
Oscillazioni di pulsazione  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  con  $L$  e  $C$  capacità ed induttanza del circuito equivalente







Facendo muovere il ricevitore lungo l'asse  $x$  si visualizzano scintille secondarie più o meno evidenti



E' come se si fosse formata una onda stazionaria di campo magnetico



## Nel vuoto

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} (\cancel{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{\nabla}^2 \vec{E}$$



$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{B} \wedge \vec{C} = \begin{pmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{pmatrix} = \hat{u}_x(B_y C_z - B_z C_y) + \hat{u}_y(B_z C_x - B_x C_z) + \hat{u}_z(B_x C_y - B_y C_x)$$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{pmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_y C_z - B_z C_y & B_z C_x - B_x C_z & B_x C_y - B_y C_x \end{pmatrix}$$

$$= \hat{u}_x [A_y(B_x C_y - B_y C_x) - A_z(B_z C_x - B_x C_z)] +$$

$$+ \hat{u}_y [A_z(B_y C_z - B_z C_y) - A_x(B_x C_y - B_y C_x)] +$$

$$+ \hat{u}_z [A_x(B_z C_x - B_x C_z) - A_y(B_y C_z - B_z C_y)]$$





$$\begin{aligned}\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) &= \hat{u}_x B_x (A_y C_y) - \hat{u}_x C_x (A_y B_y) - \hat{u}_x C_x (A_z B_z) + \hat{u}_x B_x (A_z C_z) + \\ &+ \hat{u}_y B_y (A_z C_z) - \hat{u}_y C_y (A_z B_z) - \hat{u}_y C_y (A_x B_x) + \hat{u}_y B_y (A_x C_x) + \\ &+ \hat{u}_z B_z (A_x C_x) - \hat{u}_z C_z (A_x B_x) - \hat{u}_z C_z (A_y B_y) + \hat{u}_z B_z (A_y C_y) = \\ &= \hat{u}_x B_x (A_y C_y + A_z C_z) + \hat{u}_y B_y (A_x C_x + A_z C_z) + \hat{u}_z B_z (A_x C_x + A_y C_y) - \\ &- [\hat{u}_x C_x (A_y B_y + A_z B_z) + \hat{u}_y C_y (A_z B_z + A_x B_x) + \hat{u}_z C_z (A_x B_x + A_y B_y)]\end{aligned}$$



Osservando che

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) \begin{cases} A_y C_y + A_z C_z = \vec{A} \cdot \vec{C} - A_x C_x \\ A_x C_x + A_z C_z = \vec{A} \cdot \vec{C} - A_y C_y \\ A_y C_y + A_x C_x = \vec{A} \cdot \vec{C} - A_z C_z \end{cases}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \begin{cases} A_y B_y + A_z B_z = \vec{A} \cdot \vec{B} - A_x B_x \\ A_x B_x + A_z B_z = \vec{A} \cdot \vec{B} - A_y B_y \\ A_y B_y + A_x B_x = \vec{A} \cdot \vec{B} - A_z B_z \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) &= \hat{u}_x B_x (A_y C_y + A_z C_z) + \hat{u}_y B_y (A_x C_x + A_z C_z) + \hat{u}_z B_z (A_x C_x + A_y C_y) - \\
 &\quad - [\hat{u}_x C_x (A_y B_y + A_z B_z) + \hat{u}_y C_y (A_z B_z + A_x B_x) + \hat{u}_z C_z (A_x B_x + A_y B_y)] = \\
 &= \hat{u}_x B_x (\vec{A} \cdot \vec{C} - A_x C_x) + \hat{u}_y B_y (\vec{A} \cdot \vec{C} - A_y C_y) + \hat{u}_z B_z (\vec{A} \cdot \vec{C} - A_z C_z) - \\
 &\quad - [\hat{u}_x C_x (\vec{A} \cdot \vec{B} - A_x B_x) + \hat{u}_y C_y (\vec{A} \cdot \vec{B} - A_y B_y) + \hat{u}_z C_z (\vec{A} \cdot \vec{B} - A_z B_z)] = \\
 &= (\hat{u}_x B_x + \hat{u}_y B_y + \hat{u}_z B_z) (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \hat{u}_x A_x B_x C_x - \hat{u}_y A_y B_y C_y - \hat{u}_z A_z B_z C_z \\
 &\quad - (\hat{u}_x C_x + \hat{u}_y C_y + \hat{u}_z C_z) (\vec{A} \cdot \vec{B}) + \hat{u}_x A_x B_x C_x + \hat{u}_y A_y B_y C_y + \hat{u}_z A_z B_z C_z \\
 \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) &= \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})
 \end{aligned}$$



$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \vec{\nabla}^2 \vec{E}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \vec{E} &= \left( \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \right) = \\ &= (\nabla^2 E_x, \nabla^2 E_y, \nabla^2 E_z) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 E_x$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 E_y$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 E_z$$

Ciascuna componente del campo elettrico soddisfa l'equazione D'Alambert

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$



Analogamente da  $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Si ottiene

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \vec{\nabla}^2 \vec{B}$$

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 B_x$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 B_y$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 B_z$$

Ciascuna componente del campo magnetico soddisfa l'equazione D'Alambert

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$



In generale le equazioni

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \vec{\nabla}^2 \vec{E}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = c^2 \vec{\nabla}^2 \vec{B}$$

hanno come soluzione

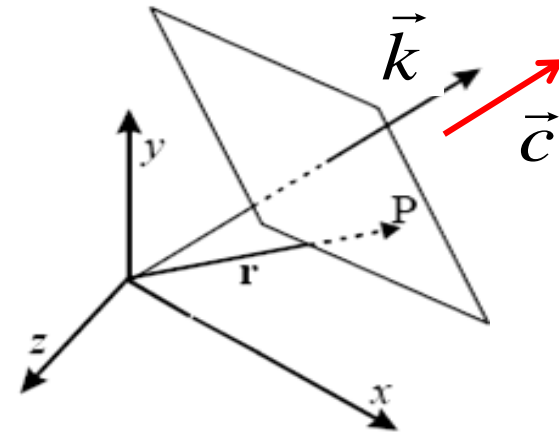
$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

dove

$$\vec{k} = k_x \hat{u}_x + k_y \hat{u}_y + k_z \hat{u}_z$$

$$c = \omega / |\vec{k}|$$



Consideriamo ad esempio l'equazione per una componente del campo elettrico

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 E_x \iff \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \left( \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right)$$

Assumiamo soluzioni del tipo

$$E_x = E_{0x} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = E_{0x} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$

con  $\omega = c |\vec{k}|$   $\vec{k} = k_x \hat{u}_x + k_y \hat{u}_y + k_z \hat{u}_z$

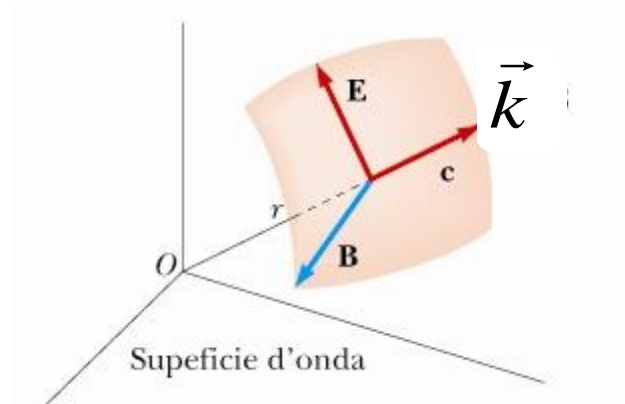


Ricordiamo che

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = ik_x E_x + ik_y E_y + ik_z E_z$$

E quindi

$$k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$



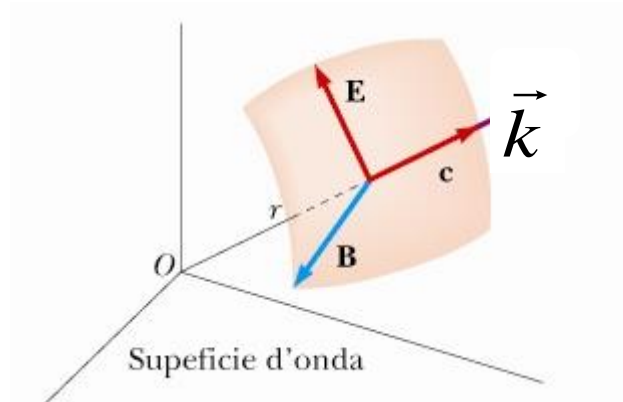


Similmente per il campo B:

$$B_x = B_{0x} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = B_{0x} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = ik_x B_x + ik_y B_y + ik_z B_z$$

$$k_x B_x + k_y B_y + k_z B_z = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$



$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right)_x = -\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_x \longrightarrow (ik_y E_z - ik_z E_y) = i\omega B_x$$

$$\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right)_y = -\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_y \longrightarrow (ik_z E_x - ik_x E_z) = i\omega B_y$$

$$\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right)_z = -\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_z \longrightarrow (ik_x E_y - ik_y E_x) = i\omega B_z$$

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$$

$$kE = \omega B$$

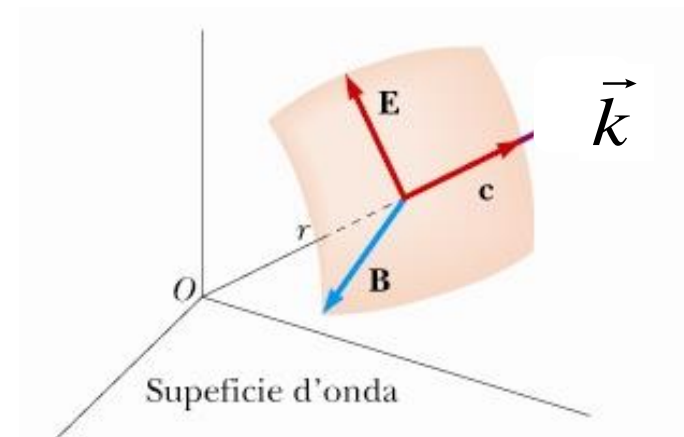


$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$$

$$kE = \omega B$$

$$E = cB$$

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$$



$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$$

$$\vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{E} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E})$$

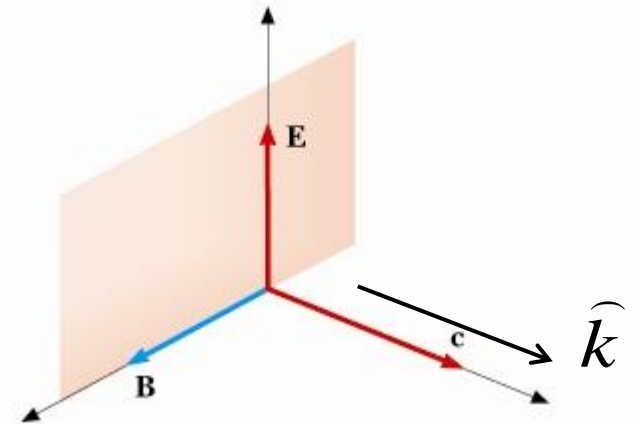
$$= \frac{1}{\omega} \vec{k} (\vec{E} \cdot \vec{E}) - \frac{1}{\omega} \vec{E} (\vec{E} \cdot \vec{k})$$

$$= \frac{1}{\omega} \vec{k} E^2 = \frac{E^2}{c} \hat{k}$$

$\vec{E} \wedge \vec{B}$  nella direzione di propagazione

Ricordiamo che

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

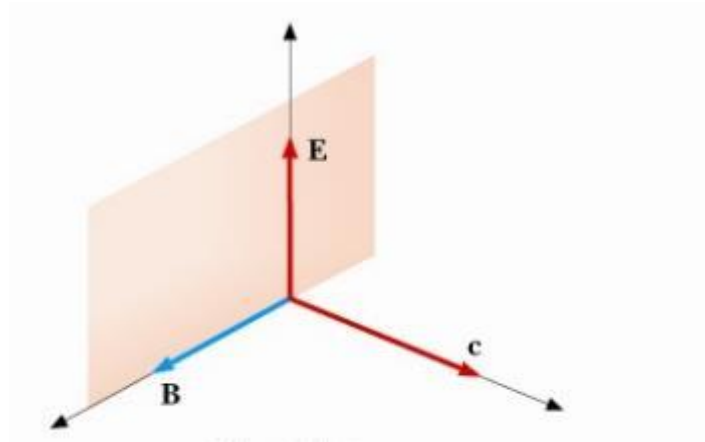


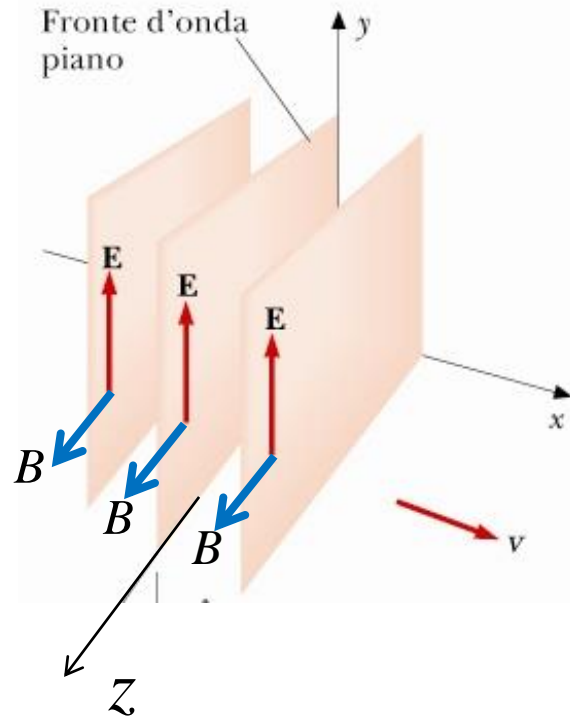
$E$  e  $B$  si propagano nel vuoto con la velocità  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 3 \cdot 10^8$  m/s

I moduli dei campi sono legati dalla relazione  $B = E/c$

$E$  e  $B$  sono ortogonali tra loro ed alla direzione di propagazione

Il prodotto vettoriale  $\vec{E} \wedge \vec{B}$  fornisce il verso di propagazione





### Caso semplificato

Propagazione lungo asse  $x$

Campo elettrico lungo asse  $y$

Campo magnetico lungo asse  $z$

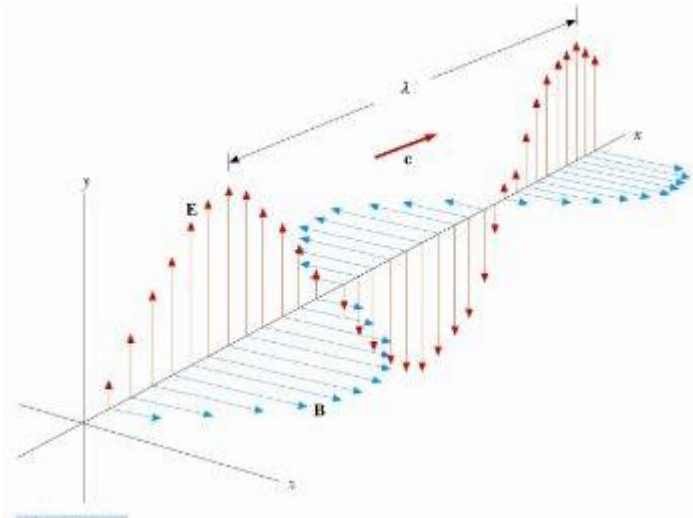
$$\vec{E} = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{u}_y \quad \vec{B} = B_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{u}_z$$

**$E$  ed  $B$  dipendono solo da  $x$**

$$E = cB$$



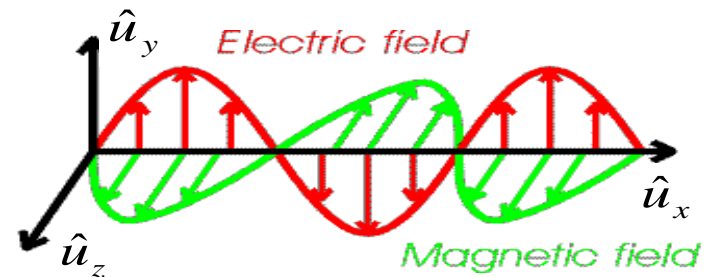
$$\vec{E} = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{u}_y \quad \vec{B} = B_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{u}_z$$

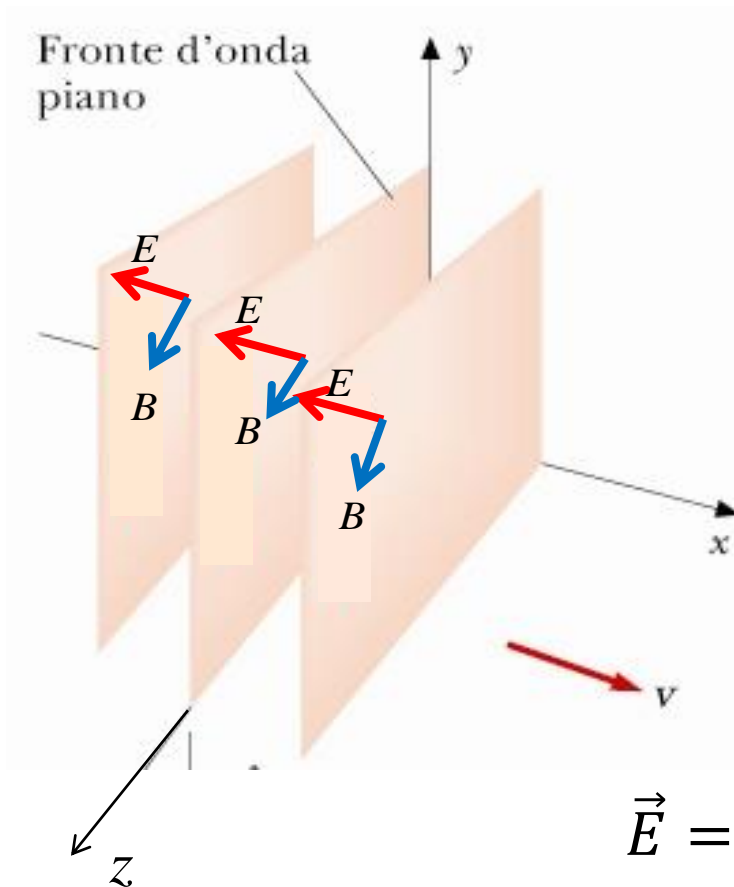


$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$$

$$E = Bc$$

$$\vec{E} \times \vec{B} = EB \hat{u}_x$$





### In generale

Propagazione lungo asse  $x$

Campo elettrico nel piano  $y-z$

Campo magnetico nel piano  $y-z$

$$\vec{E} \perp \vec{B}$$

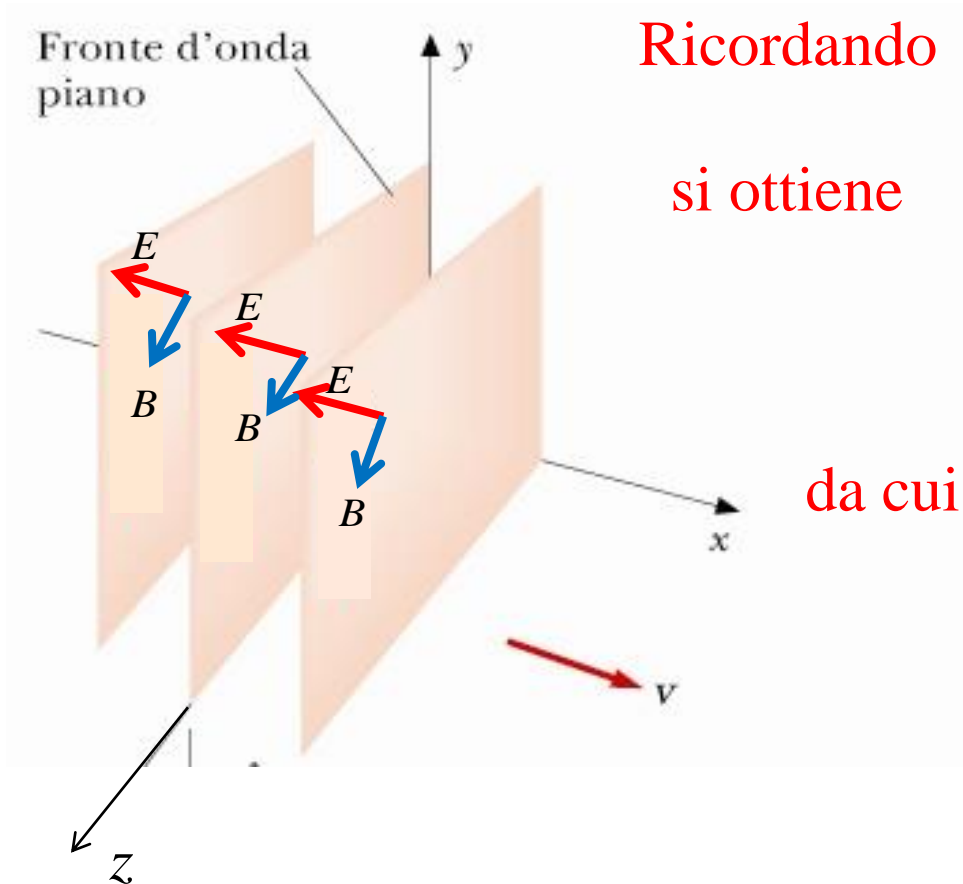
$$\vec{E} = E_{0y}e^{i(kx-\omega t)}\hat{u}_y + E_{0z}e^{i(kx-\omega t)}\hat{u}_z$$

$$\vec{B} = B_{0y}e^{i(kx-\omega t)}\hat{u}_y + B_{0z}e^{i(kx-\omega t)}\hat{u}_z$$

**$E$  ed  $B$  dipendono solo da  $x$**







$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B} \quad \vec{k} = k \hat{u}_x$$

$$-kE_z = \omega B_y$$

$$kE_y = \omega B_z$$

$$B_y = -\frac{E_z}{c} \quad B_z = \frac{E_y}{c}$$

$$\vec{B} = -\frac{E_z}{c} \hat{u}_y + \frac{E_y}{c} \hat{u}_z$$

**$E$  ed  $B$  dipendono solo da  $x$**



Se 
$$\vec{E} = E_y \hat{u}_y + E_z \hat{u}_z$$

$$\vec{B} = -\frac{E_z}{c} \hat{u}_y + \frac{E_y}{c} \hat{u}_z$$

Si verifichi che

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$$

$$E = cB$$

$\vec{E} \wedge \vec{B}$  nella direzione di propagazione



$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_x = \frac{\cancel{\partial E_z}}{\cancel{\partial y}} - \frac{\cancel{\partial E_y}}{\cancel{\partial z}} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_y = \frac{\cancel{\partial E_x}}{\cancel{\partial z}} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\cancel{\partial E_x}}{\cancel{\partial y}} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B})_x = \frac{\cancel{\partial B_z}}{\cancel{\partial y}} - \frac{\cancel{\partial B_y}}{\cancel{\partial z}} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B})_y = \frac{\cancel{\partial B_x}}{\cancel{\partial z}} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B})_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\cancel{\partial B_x}}{\cancel{\partial y}} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x}$$



$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$E_z = E_{0z} e^{i(kx - \omega t)} \hat{u}_z$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = ikE_{0z} e^{i(kx - \omega t)}$$



$$B_y = \int \frac{\partial E_z}{\partial x} dt$$

$$B_y = \int ikE_{0z} e^{i(kx - \omega t)} dt$$

$$B_y = -\frac{kE_{0z}}{\omega} \dot{\phantom{0}} e^{i(kx - \omega t)} d[i(kx - \omega t)]$$

$$B_y = -\frac{kE_{0z}}{\omega} e^{i(kx - \omega t)}$$


$$B_y = -\frac{E_{0z}}{c} e^{i(kx - \omega t)}$$



$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$E_y = E_{0y} e^{i(kx - \omega t)} \hat{u}_y$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = ikE_{0y} e^{i(kx - \omega t)}$$



$$B_z = -\int \frac{\partial E_y}{\partial x} dt$$

$$B_z = -\int ikE_{0y} e^{i(kx - \omega t)} dt$$

$$B_z = \frac{kE_{0y}}{\omega} \int e^{i(kx - \omega t)} d[i(kx - \omega t)]$$

$$B_z = \frac{kE_{0y}}{\omega} e^{i(kx - \omega t)}$$

$$B_z = \frac{E_{0y}}{c} e^{i(kx - \omega t)}$$



Assumiamo che il campo elettrico  $E$  e il campo magnetico  $B$  dipendano, in un dato sistema di riferimento cartesiano, solo dal tempo e dalla coordinata  $x$ , assumendo pertanto lo stesso valore nei punti di un piano ortogonale all'asse  $x$ .

$$E_x(x, t), \quad E_y(x, t), \quad E_z(x, t)$$

In questa ipotesi sono nulle tutte le derivate parziali rispetto a  $y$  e  $z$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}$$



Similmente

$$B_x(x, t), B_y(x, t), B_z(x, t)$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B})_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B})_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x}$$



$$\partial E_x / \partial x = 0$$

$$\partial E_x / \partial t = 0$$



La componente  $E_x(x, t)$  del campo elettrico è costante.

Un campo del genere potrebbe essere prodotto da una distribuzione di cariche stazionarie; dato però che non consideriamo l'esistenza di sorgenti di questo tipo, in quanto interessati a campi variabili nel tempo, concludiamo che:

$$E_x(x, t) = 0$$

$$\partial B_x / \partial x = 0$$

$$\partial B_x / \partial t = 0$$



Analogamente, dall'esclusione di correnti stazionarie, si conclude che:

$$B_x(x, t) = 0$$





$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

Derivando rispetto a  $x$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x}$$

Derivando rispetto a  $t$  si ha:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

Derivando rispetto a  $t$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon \mu} \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

Derivando rispetto a  $x$  si ha:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}$$



Se invertiamo l'ordine delle derivate, si ottiene

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}$$

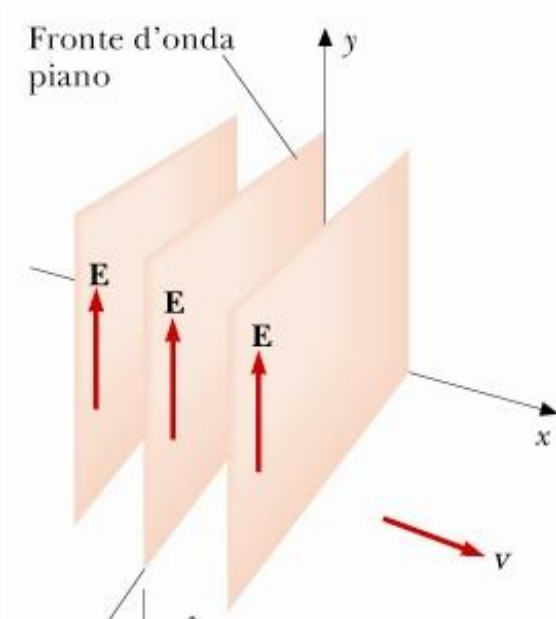
$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}$$

Ognuna delle componenti del campo elettrico  $E$  e del campo magnetico  $B$  soddisfa all'equazione differenziale delle onde piane:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (\xi = E_y, E_z, B_y, B_z)$$

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$





Supponiamo il campo elettrico solo lungo l'asse  $y$

$$\vec{E} = E_y \hat{u}_y$$

Le soluzioni dell'equazione d'Alambert devono essere del tipo:

$$\vec{E} = E_y(x - ct) \hat{u}_y$$

$$\vec{B} = B_y(x - ct) \hat{u}_y + B_z(x - ct) \hat{u}_z$$

Definito  $u = x - ct$  l'argomento delle funzioni, si ottiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -c$$

Da

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial E_y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial E_y}{\partial u}$$



$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = - \frac{\partial E_y}{\partial u}$$

Integrando

$$B_z = \int \frac{\partial B_z}{\partial t} dt = - \int \frac{\partial E_y}{\partial u} dt = \frac{1}{c} \int \frac{\partial E_y}{\partial u} du = \frac{E_y}{c} + \text{costante}$$

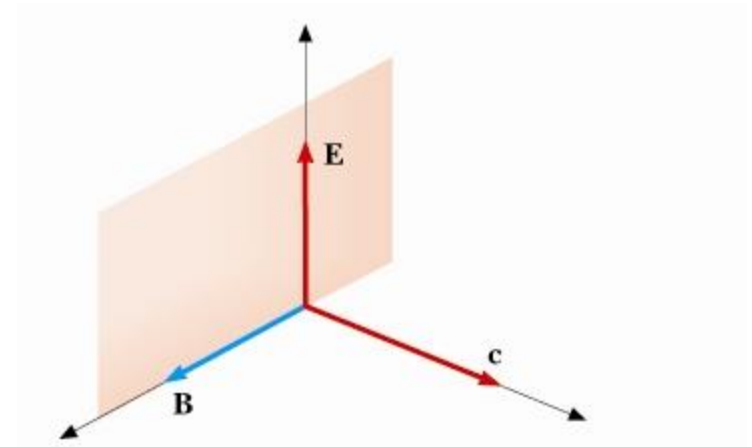
$$B_z = \frac{E_y}{c}$$

Analogamente da

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

~~$$B_y = - \frac{E_z}{c}$$~~  

$$= 0$$



Più in generale se

si trova

$$\vec{E} = E_y \hat{u}_y + E_z \hat{u}_z$$

$$\vec{B} = B_y \hat{u}_y + B_z \hat{u}_z$$



$$\vec{B} = -\frac{E_z}{c} \hat{u}_y + \frac{E_y}{c} \hat{u}_z$$

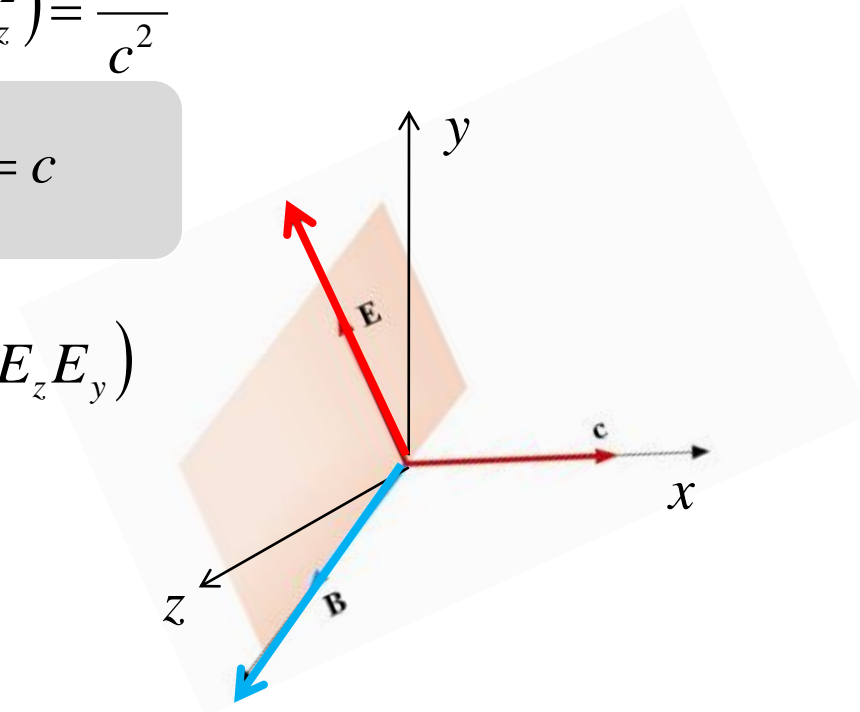
$$B^2 = B_y^2 + B_z^2 = \frac{1}{c^2} (E_y^2 + E_z^2) = \frac{E^2}{c^2}$$

$$B = \frac{E}{c}, \quad E = cB, \quad \frac{E}{B} = c$$

Inoltre  $\vec{E} \cdot \vec{B} = E_y B_y + E_z B_z = \frac{1}{c} (-E_y E_z + E_z E_y)$

⇒

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$$



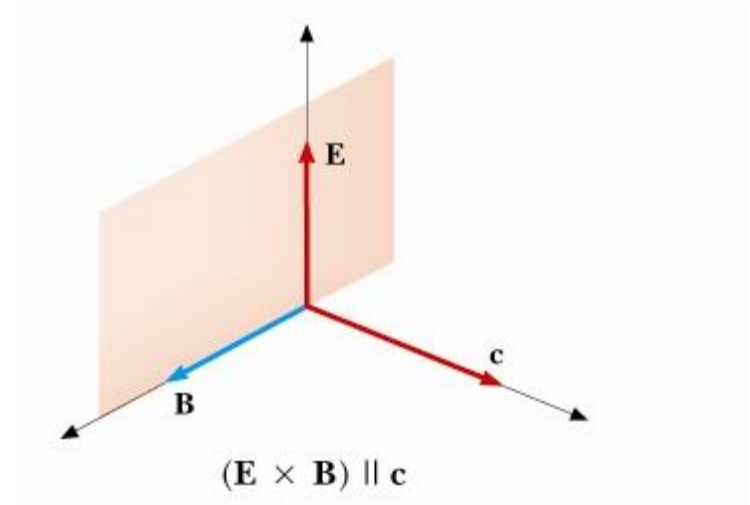
Calcoliamo il prodotto vettoriale fra  $E$  e  $B$

$$\vec{E} = E_y \hat{u}_y + E_z \hat{u}_z$$

$$\vec{B} = -\frac{E_z}{c} \hat{u}_y + \frac{E_y}{c} \hat{u}_z$$

$$\vec{E} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ 0 & E_y & E_z \\ 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{c} (E_y^2 + E_z^2) \hat{u}_x \Rightarrow$$

$$\vec{E} \times \vec{B} = \frac{E^2}{c} \hat{u}_x = cB^2 \hat{u}_x = EB \hat{u}_x$$



In un mezzo di costante dielettrica  $\epsilon$  e permeabilità magnetica  $\mu$  (ma sempre in assenza di sorgenti):

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu\epsilon} = v^2$$



$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \quad v < c$$

Nella maggioranza dei mezzi ordinari

$$\mu_r = 1 \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Definiamo

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r}$$

Indice di rifrazione del mezzo

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega$$

Impedenza del vuoto

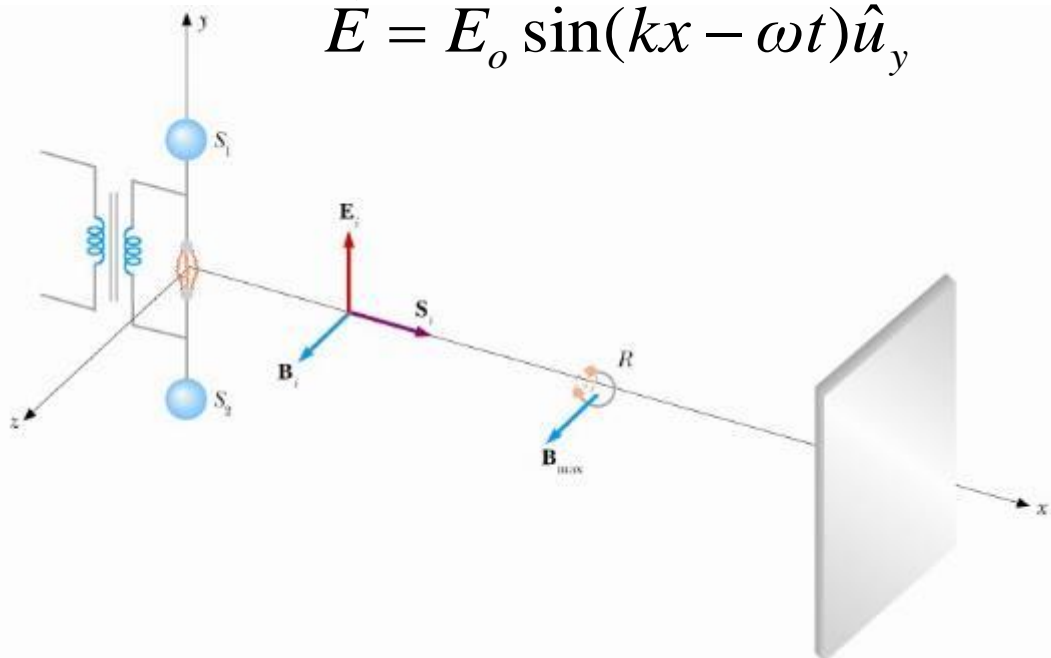
$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{Z_0}{n}$$

Impedenza del mezzo

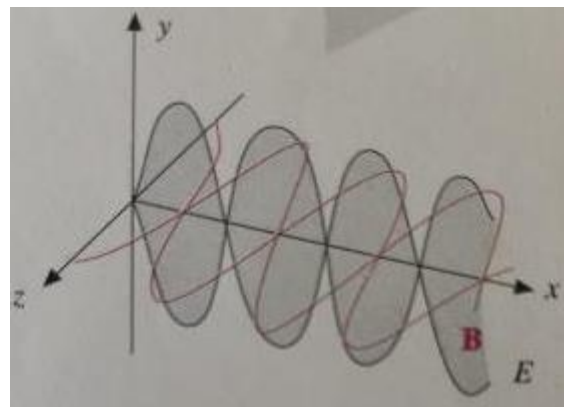
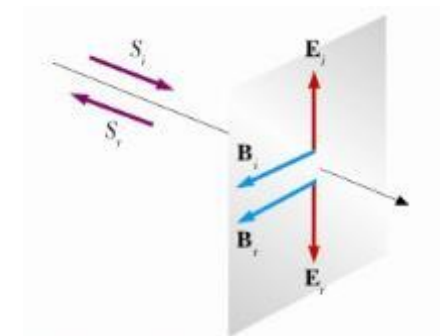




$$\vec{E} = E_o \sin(kx - \omega t) \hat{u}_y$$



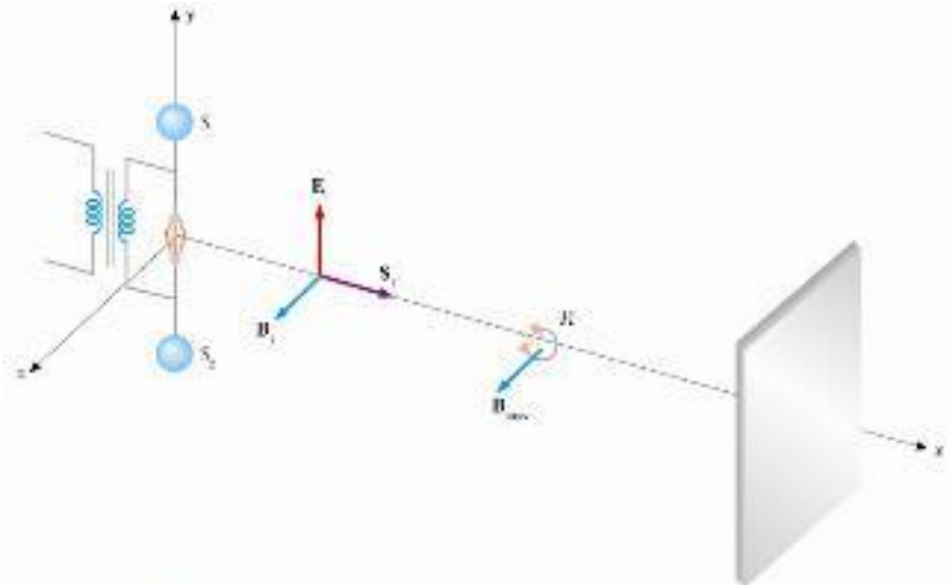
Il campo elettrico nel conduttore deve essere nullo. Il piano conduttore rappresenta un nodo dell'onda stazionaria



Si formano onde stazionarie

$$\vec{E} = 2E_o \sin(kx) \cos(\omega t) \hat{u}_y$$





$$e = \frac{dF_B}{dt} = \frac{2E_0 S W}{c} \cos(kx) \cos(\omega t)$$

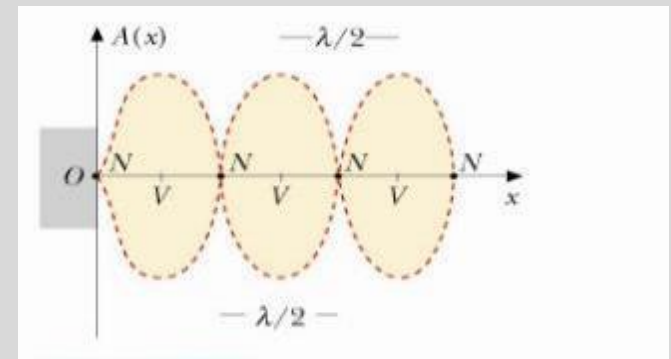
$$\vec{E} = 2E_0 \sin(kx) \cos(\omega t) \hat{u}_y$$

$$\vec{B} = 2 \frac{E_0}{c} \cos(kx) \sin(\omega t) \hat{u}_z$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c}$$

Massimo nei ventri  $\varepsilon = 2E_0 \Sigma \omega / c$

Minimo nei nodi  $\varepsilon = 0$



La presenza di un campo elettrico e di un campo magnetico nel vuoto comporta la presenza di una certa quantità di energia distribuita nello spazio, la cui densità per il campo elettrico e magnetico è data da:

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

$$c = 1 / \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

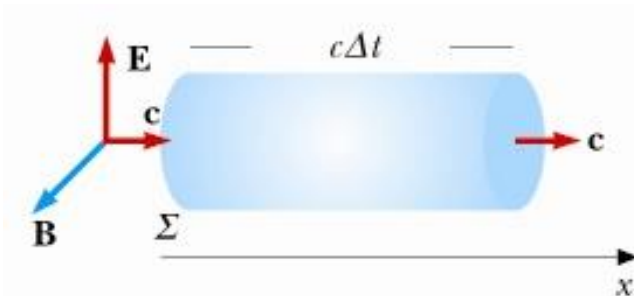
$$B = \frac{E}{c}$$



$$u = \varepsilon_0 E^2$$

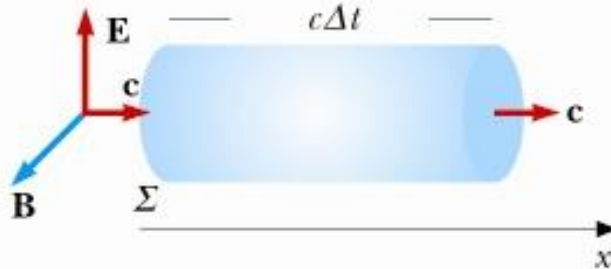
$$u = \frac{B^2}{\mu_0}$$

L'energia associata all'onda è per metà dovuta al campo di induzione magnetica e per metà dovuta al campo elettrico



$$dU = u d\tau = u \Sigma c dt = \varepsilon_0 E^2 c \Sigma dt$$





$$dU = u d\tau = u \Sigma c dt = \epsilon_0 E^2 c \Sigma dt$$

Potenza che attraversa  $\Sigma$

$$P = dU / dt = \epsilon_0 E^2 c \Sigma$$

Ricordando che  $c$  è il modulo della velocità dell'onda elettromagnetica e che la direzione di propagazione è quella dell'asse  $x$ , definiamo il vettore  $\vec{S}$ :

$$\vec{S} = \epsilon_0 E^2 \vec{c} = \epsilon_0 E^2 c \hat{u}_x = \epsilon_0 c^2 E B \hat{u}_x$$

Essendo  $\vec{E} \wedge \vec{B} = E B \hat{u}_x$



$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$$

Vettore di Poynting

La potenza è:  $P = \epsilon_0 E^2 c \Sigma = \epsilon_0 E^2 c \hat{u}_x \cdot \Sigma \hat{u}_x = \vec{S} \cdot \Sigma \hat{u}_x = \Phi(\vec{S})$

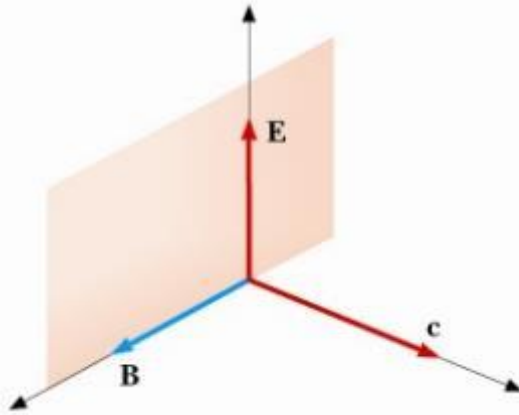
$$[S] = [\text{Watt/m}^2]$$

Il vettore  $S$  ha direzione e verso coincidenti con quelli della velocità di propagazione dell'onda e il suo modulo rappresenta l'energia elettromagnetica che per unità di tempo passa attraverso l'unità di superficie ortogonale alla direzione di propagazione. Se la superficie non è ortogonale, e in generale si ha, detto  $\mathbf{u}_n$  il versore ortogonale a  $\Sigma$ :

$$P = \Phi(\vec{S}) = \int_{\Sigma} \vec{S} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \int_{\Sigma} \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \wedge \vec{B}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma$$

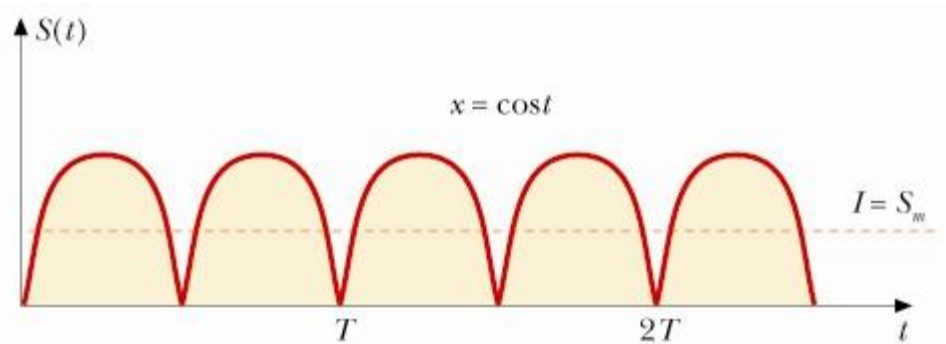
Consideriamo un'onda piana

$$\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t) \hat{\mathbf{u}}_y$$



$$S = \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$$





Calcoliamo il valore medio:  $\langle S \rangle = \epsilon_0 c \langle E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \rangle$

$$\langle S \rangle = \epsilon_0 c E_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \quad \text{Intensità}$$

$$\langle S \rangle = I = \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \right) c \quad \text{Velocità}$$

Densità media di energia

*Intensità = densità di energia \* velocità*

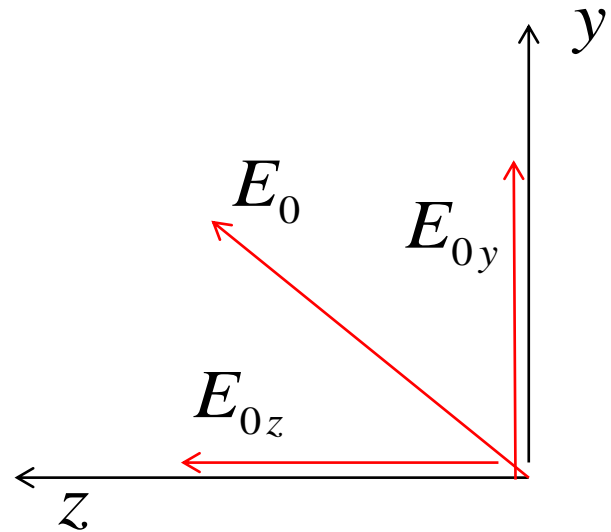


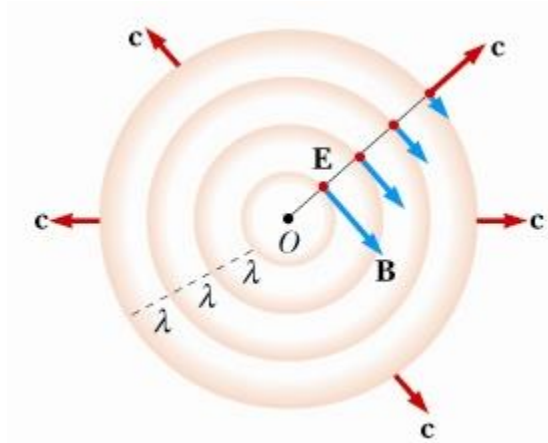
Nel caso più generale

$$\vec{E} = E_{0y} \cos(kx - \omega t) \hat{u}_y + E_{0z} \cos(kx - \omega t) \hat{u}_z$$

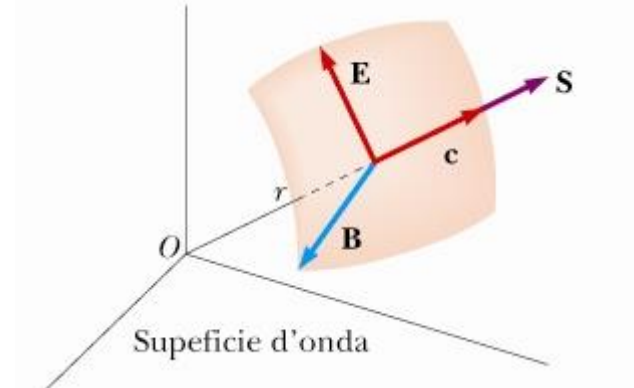
$$\langle S \rangle = I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c (E_{0y}^2 + E_{0z}^2)$$

$$I = \frac{E_{0y}^2}{2Z_0} + \frac{E_{0z}^2}{2Z_0} = \frac{E_0^2}{2Z_0}$$





( $\hat{u}_E$  indica la direzione di E)



$$\vec{E}(r, t) = A(r) \cos(kr - \omega t) \hat{u}_E$$

$$\langle P \rangle = \text{cost} \propto A(r)^2 \cdot 4\pi r^2$$



$$A(r) \propto 1/r$$



$$\vec{E}(r, t) = (E_0/r) \cos(kr - \omega t) \hat{u}_E$$

Intensità media attraverso una superficie a distanza  $r$

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \frac{E_0^2}{r^2}$$

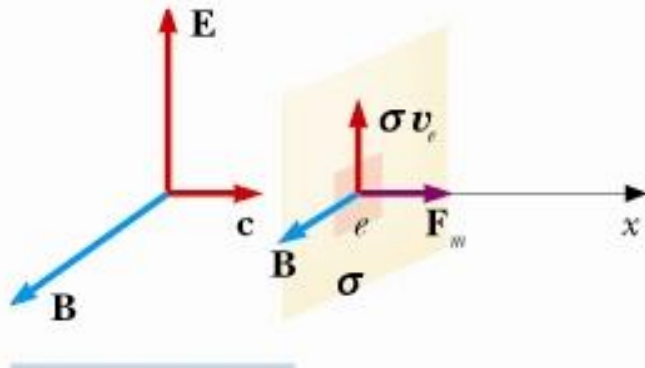
Potenza attraverso una sfera di raggio  $r$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \frac{E_0^2}{r^2} 4\pi r^2$$



Oltre a trasportare energia, le onde elettromagnetiche trasportano quantità di moto, quindi esercitano una pressione detta di “radiazione” su un oggetto illuminandolo.

Consideriamo una superficie piana  $\Sigma$  ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda (quindi parallela al campo E) su cui sia depositata con densità superficiale  $\sigma$  è distribuita sulla superficie



La forza di Lorentz, esercitata sull'elemento di superficie  $d\Sigma$  su cui è depositata la carica  $dq$ , esercitata dai campi E e B che costituiscono l'onda è:

$$\overline{d\vec{F}_q} = dq \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

$v$  è la velocità di deriva delle cariche per effetto della forza elettrica

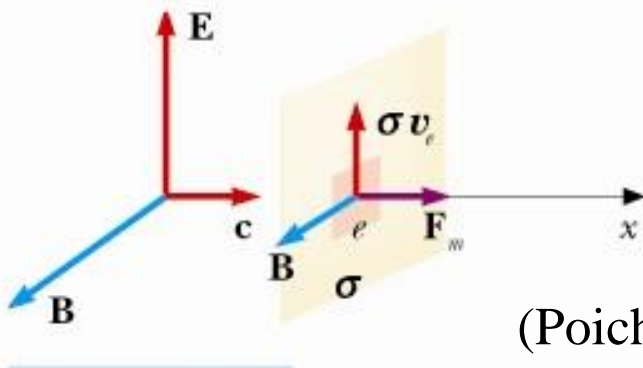
Poiché le cariche sono distribuite sulla superficie piana  $\Sigma$  con densità superficiale  $\sigma$ , possiamo calcolare la forza di Lorentz per unità di superficie:

$$\vec{F}_\sigma = \frac{d\vec{F}_q}{d\Sigma} = \frac{dq}{d\Sigma} \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) = \sigma \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

Potenza assorbita per unità di superficie:

$$\vec{F}_\sigma \cdot \vec{v} = \sigma \left( \vec{E} \cdot \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot \vec{v} \right) = \sigma E v$$

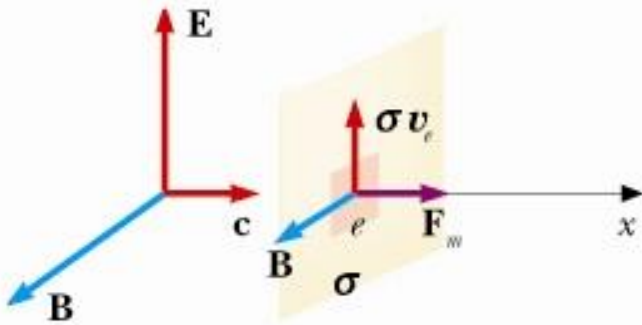
(Poiché  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{v}$  sono paralleli la potenza è sempre positiva)



In media l'energia assorbita per unità di tempo e per unità di superficie, cioè l'intensità ceduta dall'onda, vale:

$$I = \sigma v \langle E \rangle$$

n.b. A questo assorbimento non corrisponde un effetto meccanico globale sulla superficie perché il campo è parallelo alla superficie.



Invece la forza magnetica (per unità di superficie)  $F_m$  dà origine ad un effetto meccanico, nonostante  $B$  non contribuisca alla potenza assorbita

$F_m$  è normale alla superficie  $\Sigma$  ed è concorde con  $\vec{E} \times \vec{B}$  cioè con  $\hat{u}_x$  qualunque sia il segno di  $\sigma$  (se  $\sigma$  cambia segno cambia il verso di  $v$ )

$$\vec{F}_m = \sigma (\vec{v} \wedge \vec{B}) = \sigma v B \hat{u}_x$$

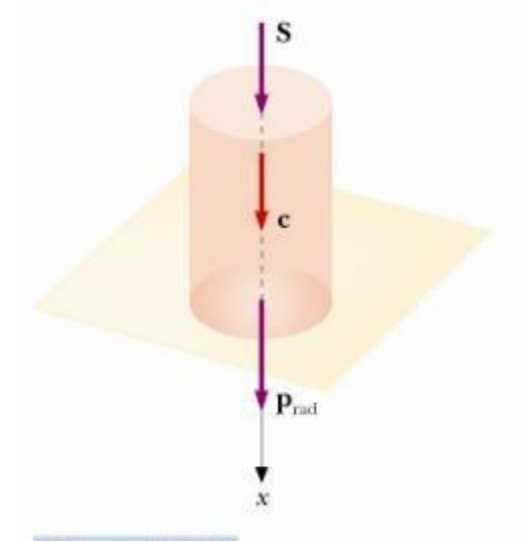
E la forza media per unità di superficie, cioè la quantità di moto per unità di tempo e superficie

$$\langle F \rangle = \sigma v \langle B \rangle = \sigma v \left\langle \frac{E}{c} \right\rangle = \frac{I}{c}$$

Questa forza media per unità di superficie corrisponde ad una pressione media, detta **pressione di radiazione**, che viene esercitata dall'onda sulla superficie  $\Sigma$

$$P_{rad} = \frac{I}{c}$$

In conclusione, se l'onda cede alla superficie  $\Sigma$  l'intensità  $I$ , essa cede anche la quantità di moto  $I/c$



Se l'onda viene completamente riflessa la quantità di moto trasferita sarà doppia rispetto al caso precedente, ovvero:

$$P_{rad} = \frac{2I}{c}$$

Se l'onda viene parzialmente riflessa e parzialmente assorbita, la quantità di moto trasferita è compresa tra  $I/c$  e  $2I/c$

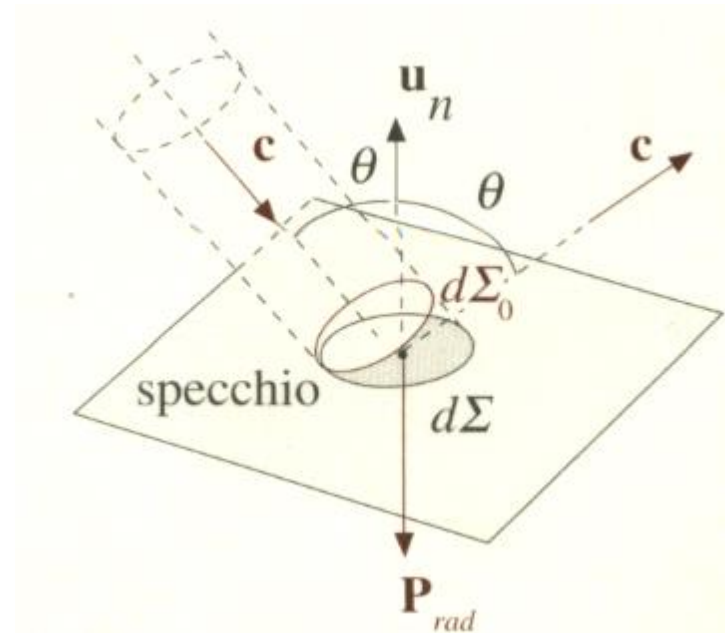
Nel caso in cui l'onda piana incidente formi un angolo  $\theta$  con la normale alla superficie  $\Sigma$ , si ha una riduzione della pressione di radiazione. A parità della sezione dell'onda incidente l'area colpita è maggiore e quindi la pressione diminuisce di un fattore  $\cos\theta$ . Inoltre va considerata solo la componente  $\cos\theta$  della radiazione.

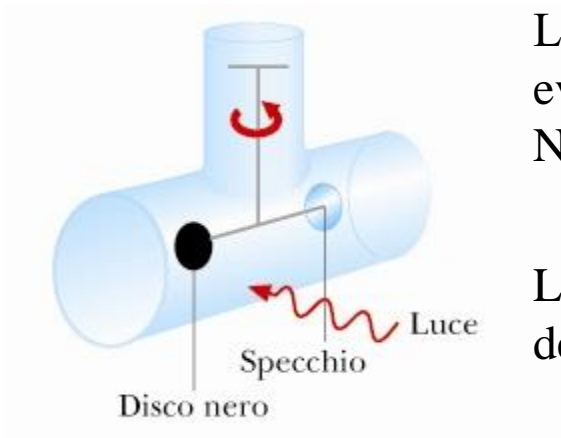
Completo assorbimento:

$$P_{rad} = \frac{I}{c} \cos^2 \theta$$

Completa riflessione:

$$P_{rad} = \frac{2I}{c} \cos^2 \theta$$





L'azione della pressione di radiazione è stata messa in evidenza con la bilancia di torsione (esperimento di Nichols e Hull -1903)

La pressione di radiazione provoca una rotazione dei bracci della bilancia di un angolo  $\theta$

*Nota:* nel contenitore che contiene lo strumento è praticato un vuoto spinto, in quanto se ci fosse aria o un altro gas si osserverebbe una rotazione in senso contrario.

↓ Perché?

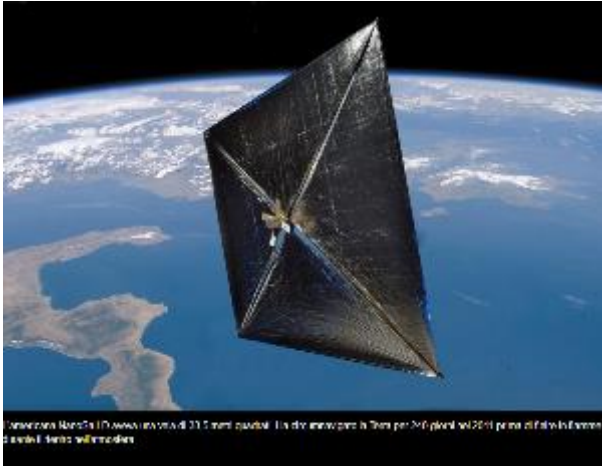
Il disco nero assorbendo energia, cede calore al gas che lo circonda facendo aumentare la velocità quadratica media delle molecole, che tramite urti esercitano una pressione maggiore che sul disco speculare.



### Radiometro di Crookes

Il radiometro è costituito da un bulbo di vetro da cui l'aria è stata in gran parte rimossa, per formare un vuoto parziale. All'interno del bulbo, su una sede a basso attrito, c'è un rotore con diverse (di solito quattro) piastrine di metallo leggero poste in verticale. Le piastrine sono lucidate a specchio o dipinte di bianco su un lato, e nere sull'altro. Se esposto alla luce del sole, luce artificiale o radiazioni infrarosse (anche il calore di una mano posta vicino può essere sufficiente), le piastrine cominciano a ruotare senza nessun apparente motore che le spinga, nel senso di avanzamento del lato bianco.

## Veleggiare con le vele solari



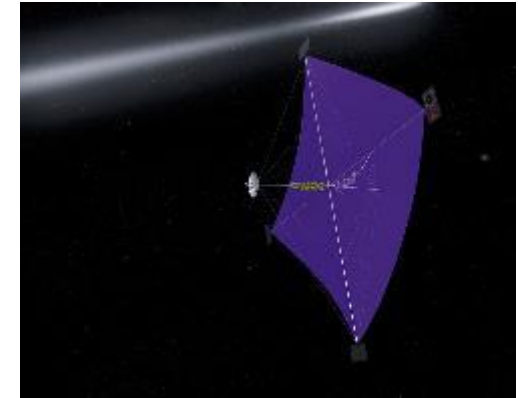
Alla distanza della Terra dal Sole la pressione di radiazione è pari a  $10^{-5}$  Pa e decresce con il quadrato della distanza dalla sorgente di luce. Anche se la spinta è piccola, essa continuerà finché la sorgente luminosa splende e la vela è dispiegata.

Il meccanismo della vela solare viene utilizzato occasionalmente in combinazione con i sistemi di propulsione ordinari per le sonde e i satelliti. Ciò consente di risparmiare del carburante che altrimenti sarebbe destinato per le correzioni dell'assetto e le modificazioni dell'orbita. Per esempio il satellite geostazionario per le telecomunicazioni Eurostar E3000 della EAD Astrium usa dei pannelli di vele solari attaccati alle celle fotovoltaiche per scaricare il momento angolare trasversale, risparmiando così carburante. Alcune missioni senza equipaggio (come la Mariner 10) hanno sostanzialmente esteso la loro durata grazie a queste pratiche.



Navicella di massa  $m$ , superficie della vela  $\Sigma$ ,  
vela perfettamente riflettente

Calcolare  $m/\Sigma$  per cui la forza di attrazione del  
sole uguaglia la forza della pressione di  
radiazione



$$P_{Sole} = 3.8 \cdot 10^{26} \text{ W} \quad M_{Sole} = 1.98 \cdot 10^{30} \text{ Kg}$$

$$P_{rad} = \frac{2I}{c} \quad F_{rad} = \frac{2I}{c} \Sigma = \frac{2P_{Sole}}{4\pi r^2 c} \Sigma \quad F_{Grav} = G \frac{mM_{Sole}}{r^2}$$

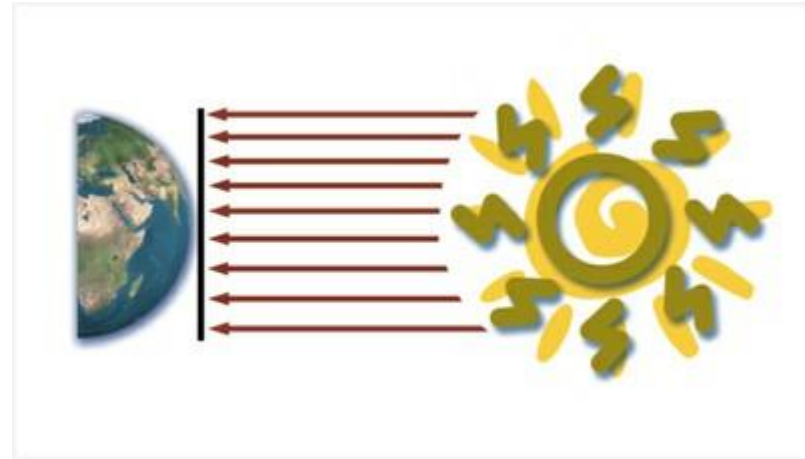
$$F_{Grav} = F_{rad} \Rightarrow \frac{m}{\Sigma} = \frac{P_{Sole}}{2\pi c G M_{Sole}} = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^2$$

$$m = 1000 \text{ kg} \Rightarrow \Sigma \approx 10^6 \text{ m}^2$$



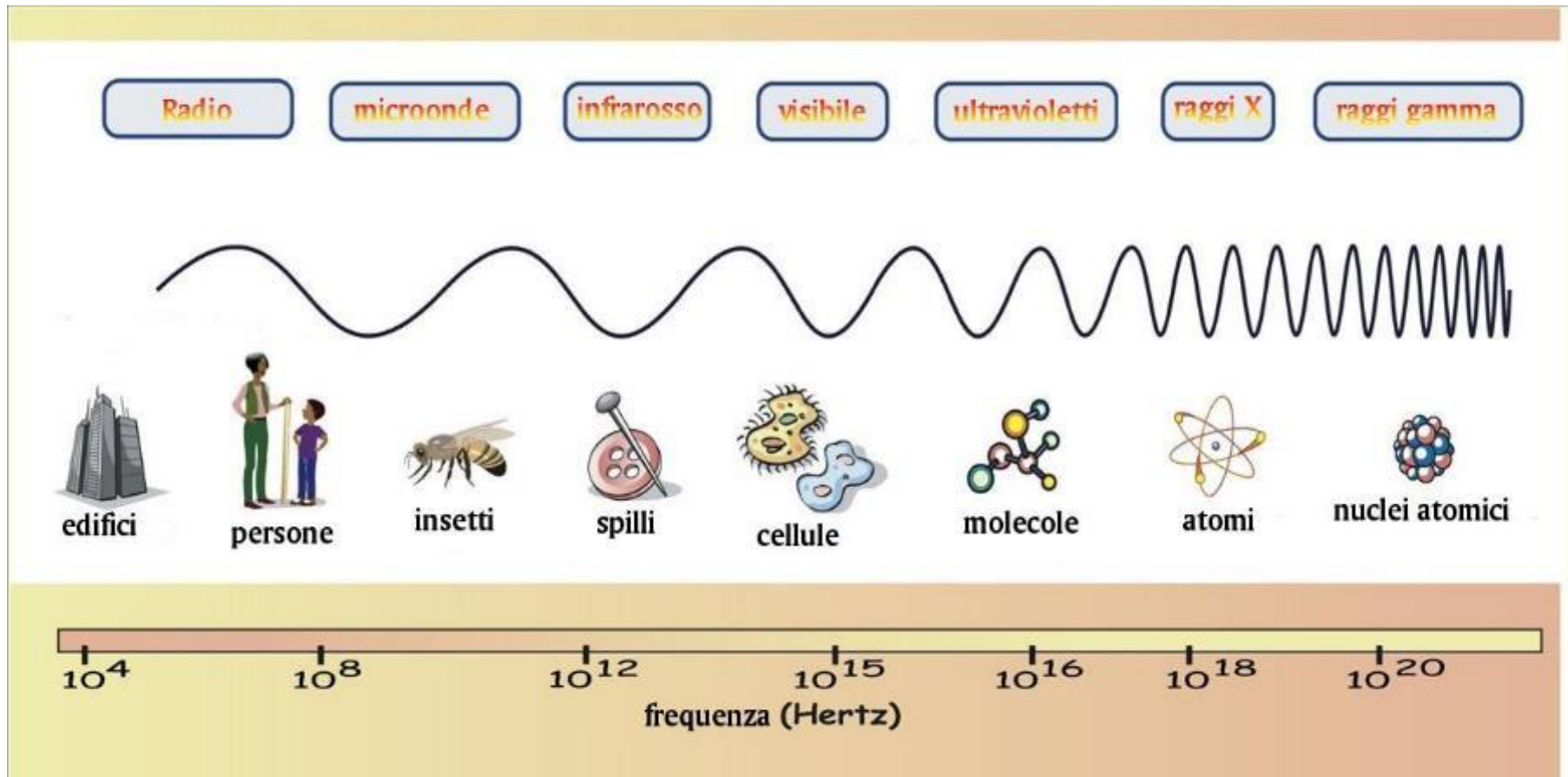
## Intensità sulla superficie della terra

$$I = \frac{P_{Sole}}{4\pi R_{TS}^2} = 1370 \text{ W/m}^2$$



Nel caso della Terra la ‘sezione’ utile ai fini dell’intercettazione della radiazione solare corrisponde approssimativamente a un cerchio di raggio medio pari a 6367 km. Questo cerchio, considerata la distanza media della Terra dal Sole, se fosse disposto perpendicolarmente alla direzione di provenienza dai raggi solari e in assenza di atmosfera, riceverebbe una *potenza radiante* pari a 174 milioni di GW .

Per avere una idea dell’ordine di grandezza si pensi che in Italia l’intera potenza elettrica installata ammontava nel 2011 a “solo” 110 GW circa.

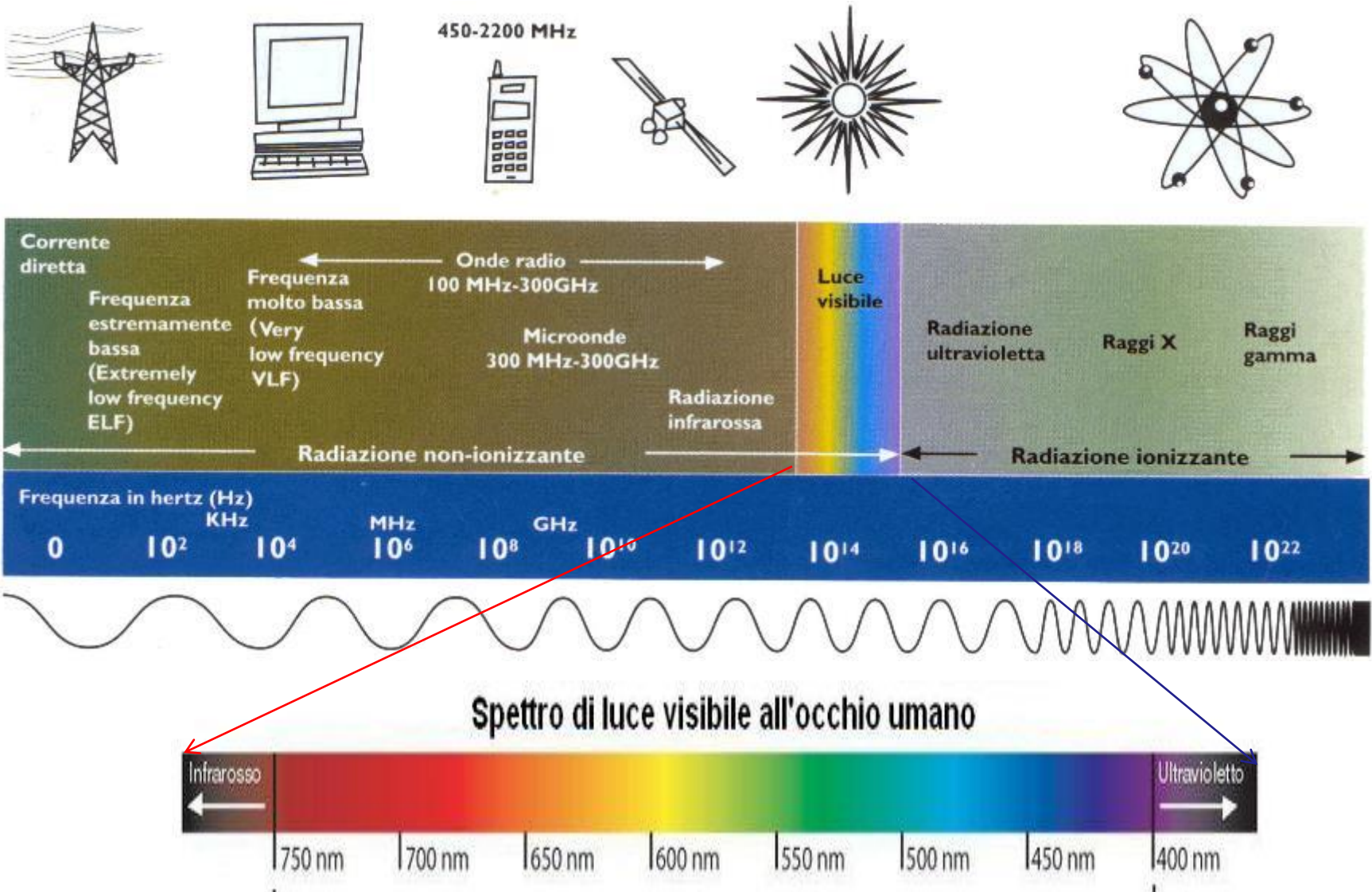


Khz (Chilohertz) =  $10^3$  Hertz

Mhz (Megahertz) =  $10^6$  Hertz

Ghz (Gigahertz) =  $10^9$  Hertz





## Spettro visibile

Colore	$\lambda$ ( $10^{-6}m$ )	$f$ ( $10^{14}Hz$ )
Rosso	0.780-0.622	3.85-4.82
Arancione	0.622-0.597	4.82-5.03
Giallo	0.597-0.577	5.03-5.20
Verde	0.577-0.492	5.20-6.10
Azzurro	0.492-0.455	6.10-6.59
Violetto	0.455-0.380	6.59-7.89



**Onde Herziane** Sono prodotte con dispositivi elettronici, principalmente circuiti oscillanti e sono utilizzate nelle trasmissioni radiofoniche e televisive (onde radio, radiofrequenze)

$$3 \cdot 10^6 \geq \lambda \geq 0.3 \text{ m} \qquad 10^2 \leq f \leq 10^9 \text{ Hz}$$

## Microonde

Vengono prodotte con dispositivi elettronici o da fenomeni atomici (*maser*): sono utilizzate principalmente per comunicazioni e sistemi radar

$$0.3 \geq \lambda \geq 10^{-3} \text{ m} \qquad 10^9 \leq f \leq 3 \cdot 10^{11} \text{ Hz}$$

## Infrarosso

Questa regione viene suddivisa a sua volta in tre parti: l'*estremo infrarosso* da  $10^{-3}$  a  $3 \cdot 10^{-5}$  m, il *medio infrarosso* da  $3 \cdot 10^{-5}$  a  $3 \cdot 10^{-6}$  m e, il *vicino infrarosso* da  $3 \cdot 10^{-6}$  a  $0.78 \cdot 10^{-6}$  m, soglia del visibile.

$$10^{-3} \geq \lambda \geq 0.78 \text{ m} \qquad 3 \cdot 10^{11} \leq f \leq 3.8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

## Luce visibile

La luce visibile è prodotta nei moti di agitazione termica ad alta temperatura, da scariche in un gas o da processi in cui vengono eccitati gli elettroni più esterni degli atomi

$$0.78 \cdot 10^{-6} \geq \lambda \geq 0.38 \cdot 10^{-6} \text{ m} \qquad 3.8 \cdot 10^{14} \leq f \leq 7.9 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$



## Ultravioletto

La radiazione ultravioletta è emessa da atomi eccitati, in particolare anche con il meccanismo del laser e da particelle cariche accelerate (*radiazione di sincrotrone*).

$$0.38 \cdot 10^{-6} \geq \lambda \geq 6 \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad 7.9 \cdot 10^{14} \leq f \leq 5 \cdot 10^{17} \text{ Hz}$$

## Raggi X

Le onde elettromagnetiche denominate raggi X vengono prodotte con due meccanismi differenti, il più importante consiste nel frenamento di elettroni accelerati da d.d.p. al massimo dell'ordine di 100kV.

$$6 \cdot 10^{-10} \geq \lambda \geq 6 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad 5 \cdot 10^{17} \leq f \leq 5 \cdot 10^{19} \text{ Hz}$$

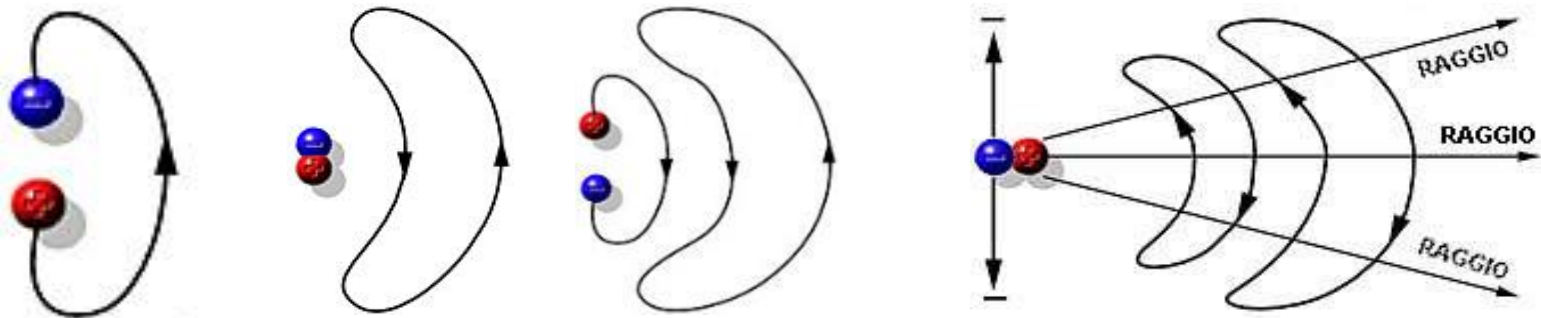
## Raggi $\gamma$

I raggi  $\gamma$  sono prodotti in processi nucleari, quali decadimenti radioattivi e reazioni tra nuclei, nelle reazioni e nei decadimenti di particelle subnucleari.

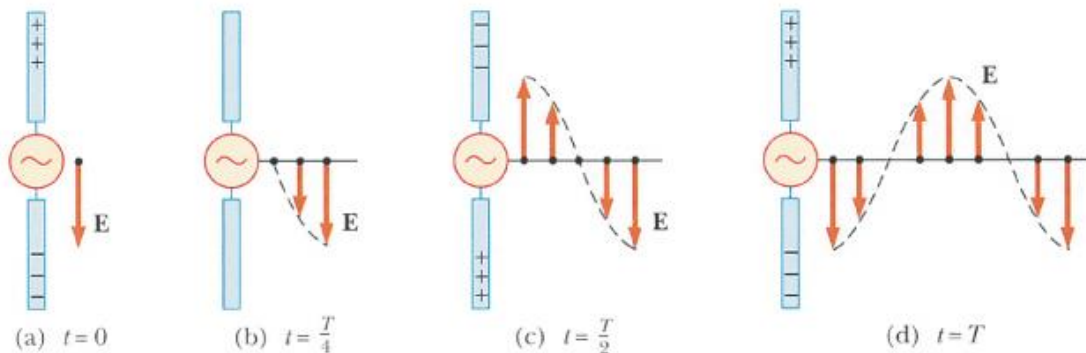
$$\lambda \leq 10^{-10} \text{ m} \quad f \geq 3 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$$



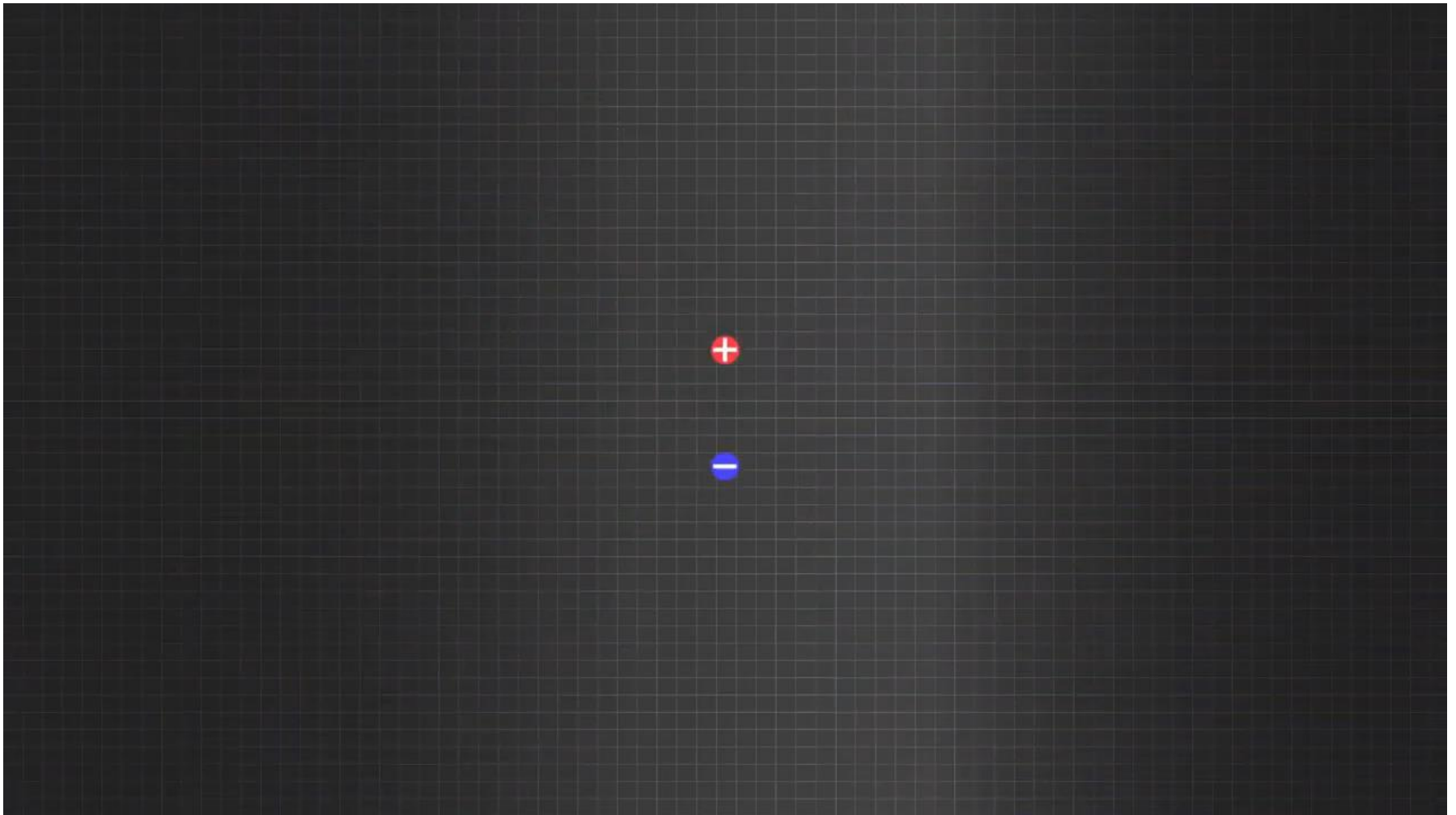
Se si fa oscillare una carica negativa vicino ad una carica positiva si produce una perturbazione delle linee di campo che si propaga nello spazio



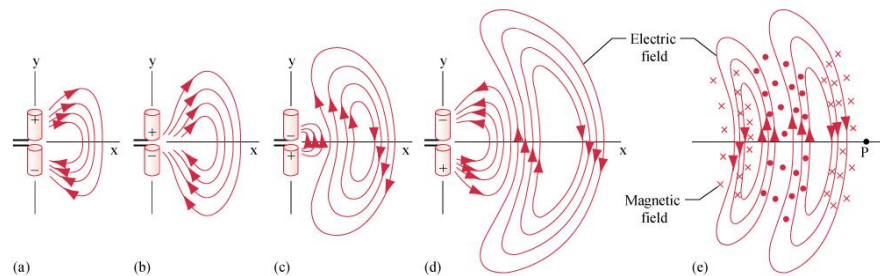
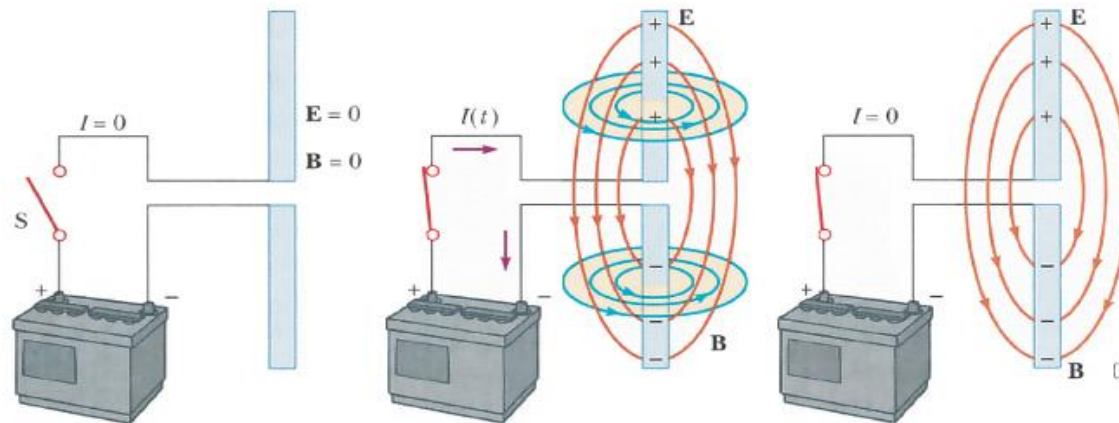
Per produrre un campo elettrico oscillante si usa un dipolo oscillante, cioè una “antenna”



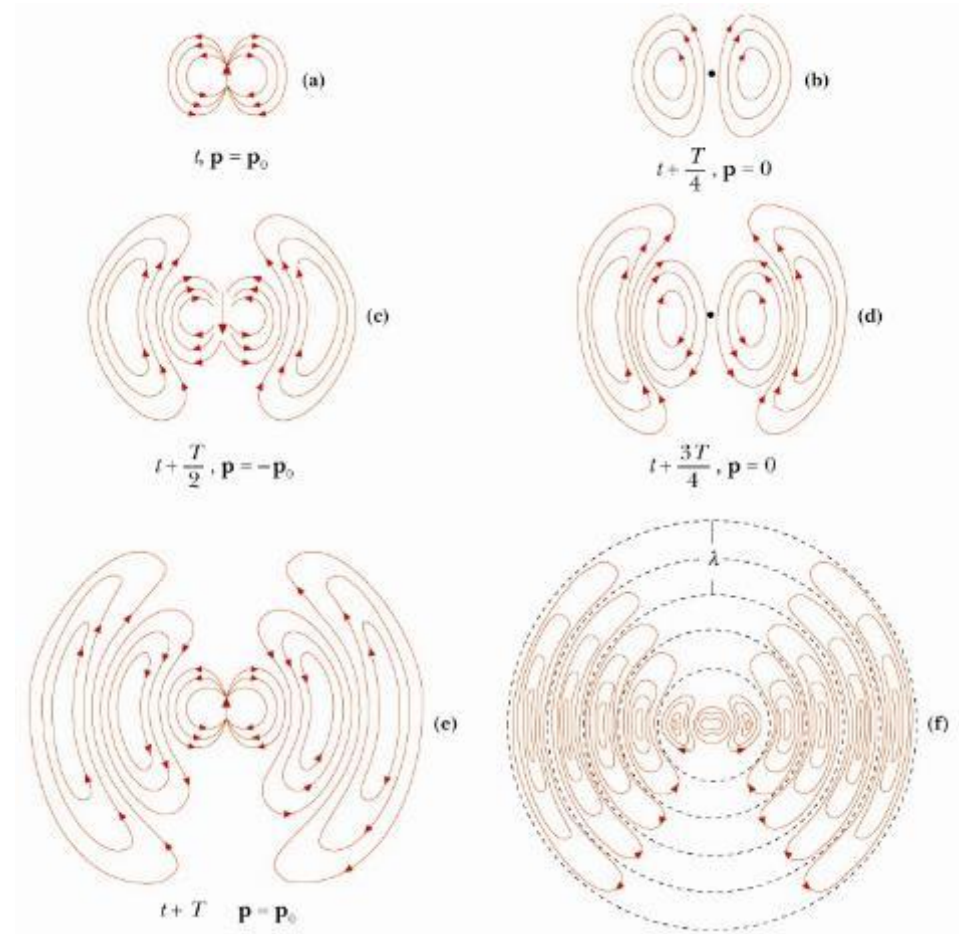
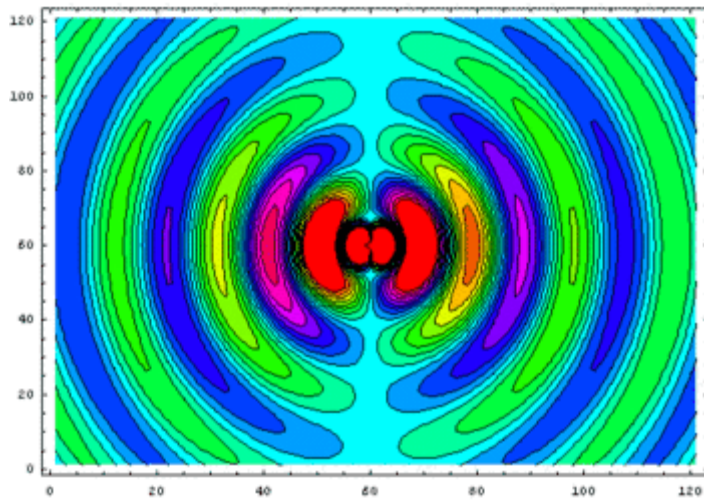




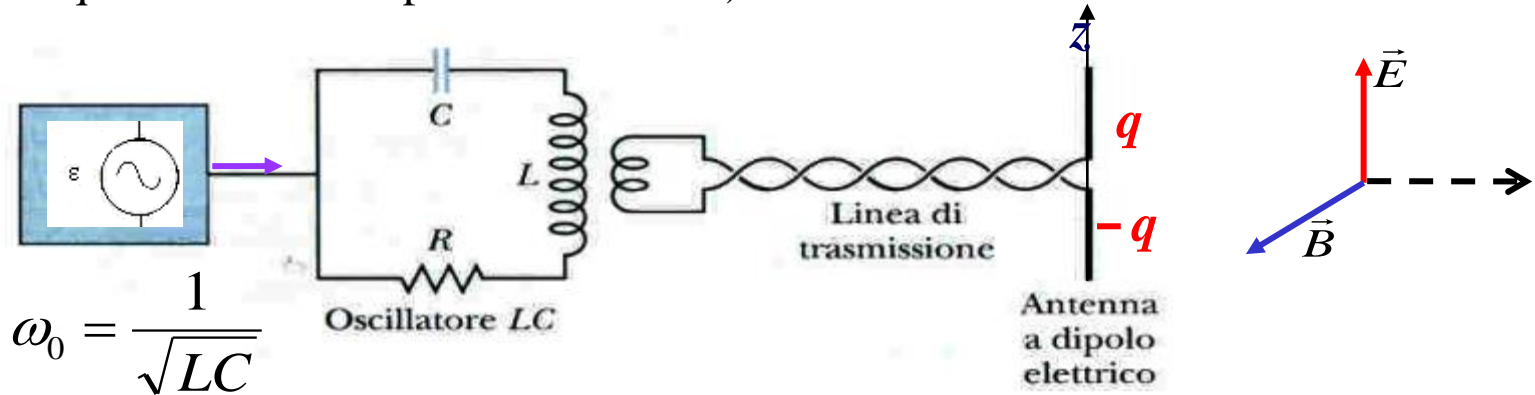
E' presente anche il campo magnetico (legge di Ampere-Maxwell). Il campo magnetico si genera perché un dipolo elettrico oscillante è equivalente ad una corrente lineare oscillante, ed una corrente elettrica produce sempre un campo magnetico.



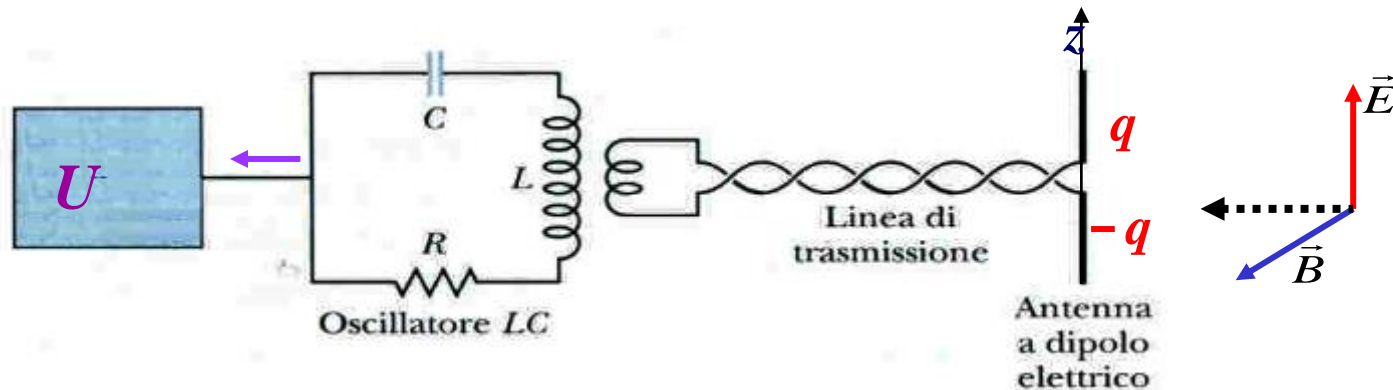
Andamenti delle linee di campo elettrico generate dal dipolo elettrico oscillante

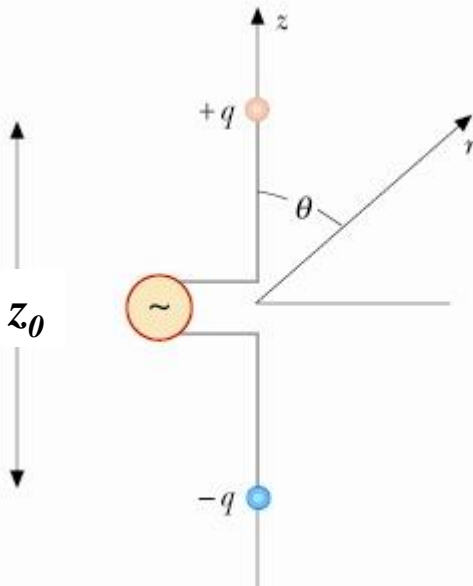


Per generare un'onda e.m. si fa oscillare la carica in un dipolo utilizzando un circuito RLC (schema equivalente del dispositivo di Hertz)



Per ricevere un'onda e.m. si fa il procedimento inverso





Schematizziamo il dipolo elettrico oscillante come un segmento di lunghezza  $z_0$ , posto parallelo all'asse di riferimento  $z$ . La carica è concentrata agli estremi del segmento ( $+q$  e  $-q$ ) e con un opportuno generatore di corrente alternata si fa variare la carica sinusoidalmente

$$q = q_0 \sin \omega t \quad i = \frac{dq}{dt} = \omega q_0 \cos \omega t = i_0 \cos \omega t$$

Il momento di dipolo è

$$\vec{p} = q\vec{z}_0 = qz_0\hat{u}_z = q_0z_0 \sin \omega t\hat{u}_z = p_0 \sin \omega t\hat{u}_z$$

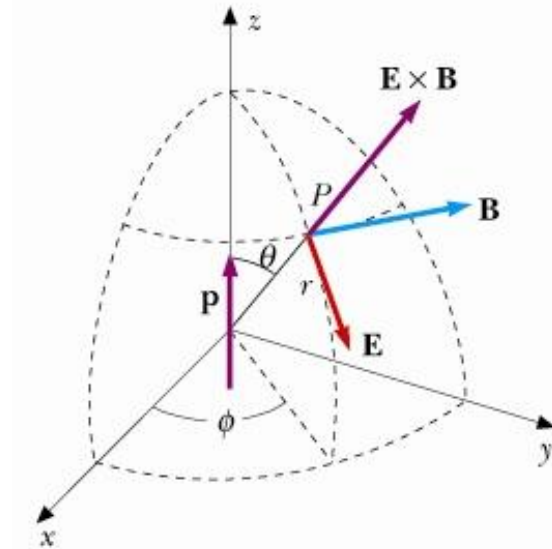
$$p_0 = q_0z_0 = \frac{i_0z_0}{\omega}$$



Si dimostra che a grandi distanze dal dipolo  $r \gg \lambda \gg z_0$  i moduli dei campi elettrico e magnetico risulteranno

$$E = E_\theta = \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2}{r} \sin(kr - \omega t)$$

$$B = B_\phi = E/c$$



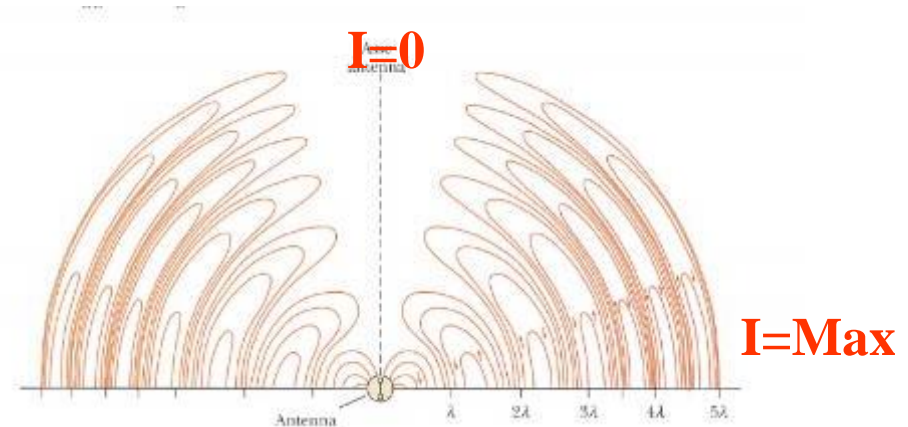
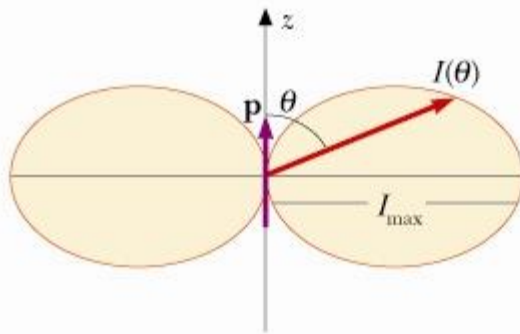
- Classica dipendenza  $1/r$ , tipica dell'onda sferica
- Componente radiale del campo  $E_r$  è nulla
- I campi dipendono anche dall'angolo  $\theta$  e in particolare sono nulli per  $\theta=0$  e  $\theta=\pi$ , cioè lungo l'asse del dipolo.

## Intensità

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2$$

$$I = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} = \frac{I_0}{r^2} \sin^2 \theta$$

Dipende da  $1/r^2$  e da  $\sin^2 \theta$ . Quindi l'intensità massima sarà per  $\theta = \pi/2$  ovvero si avrà lungo il piano equatoriale, dove vale:



$$P = \int I(r, \theta) d\Sigma$$

$$P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \varepsilon_0 c^3}$$



## Potenza

La *potenza* complessiva emessa dal dipolo:

$$P = \int I(r, \theta) d\Sigma$$

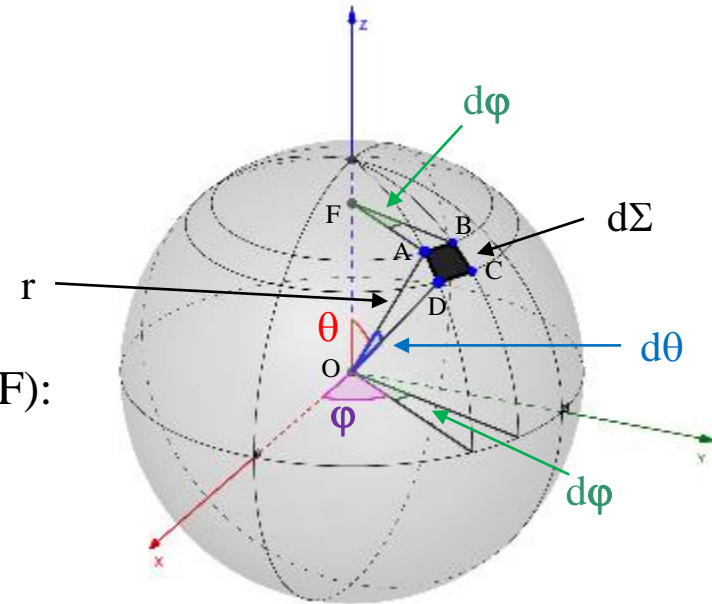
Il triangolo OFA è rettangolo (angolo retto in F):

$$AF = r \sin \theta \rightarrow AB = r \sin \theta \cdot d\varphi$$

$$AD = r \cdot d\theta$$

L'elemento di superficie infinitesima:

$$d\Sigma = AB \cdot AD = (r \sin \theta d\varphi)(rd\theta) = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$





## Potenza

$$P = I_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta$$

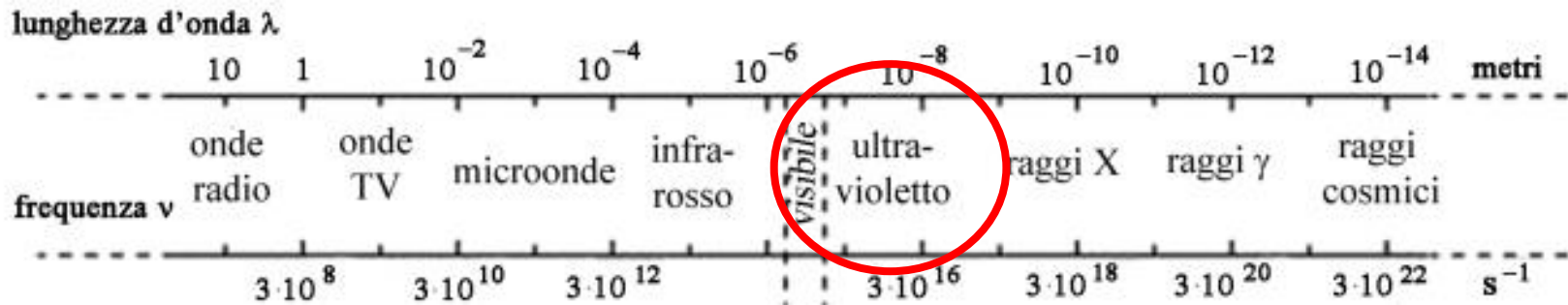
$$P = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = - \int_1^{-1} (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = \frac{4}{3}$$

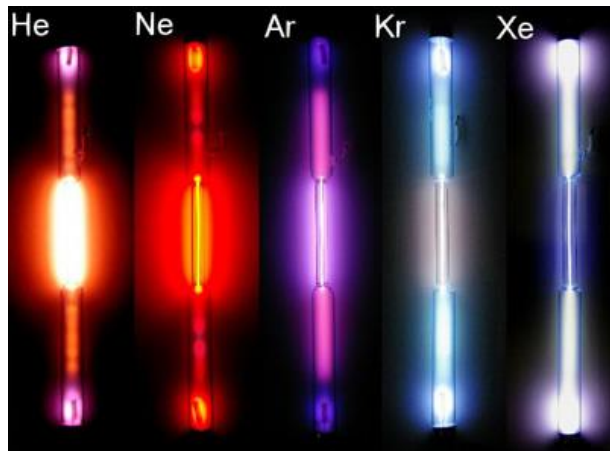
$$P = \frac{8\pi}{3} I_0 \qquad P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$$

Quindi fissato il momento di dipolo  $p_0$ , la potenza irradiata dipende dalla quarta potenza della pulsazione, ovvero della frequenza



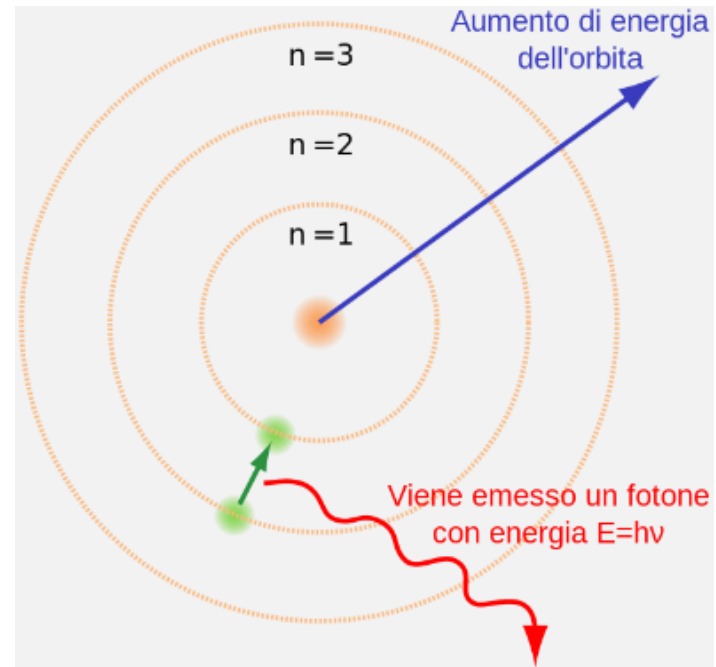


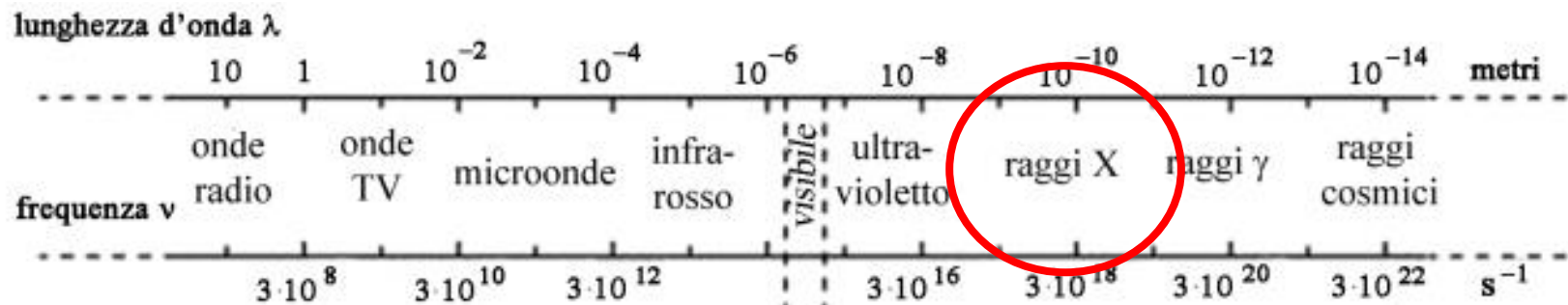
Gas eccitati con alta tensione emettono radiazione luminosa



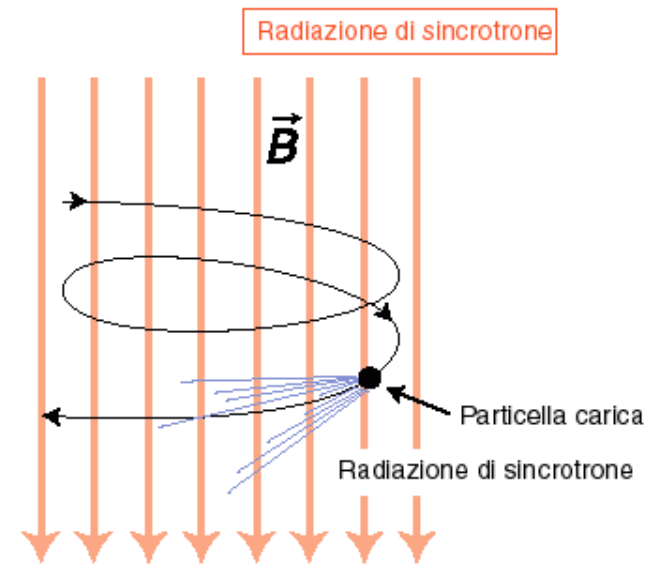
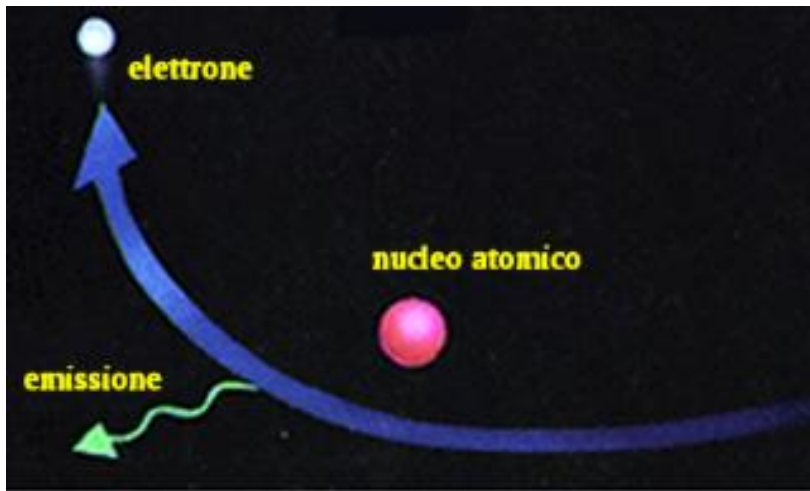
## Onde luminose

## Processi di modifica dell'atomo





## Onde EM da cariche accelerate



Radiazione emessa da carica accelerata:

$$z(t) = z_0 \sin(\omega t) \longrightarrow p(t) = qz_0 \sin(\omega t) = p_0 \sin(\omega t)$$

$$a = \frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z_0 \sin \omega t \quad \langle a^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \omega^4 z_0^2 \sin^2 \omega t = \frac{\omega^4 z_0^2}{2}$$

Massimo valore è:  $p_0 = qz_0 \longrightarrow p_0^2 \omega^4 = q^2 z_0^2 \omega^4 = 2q^2 a^2$

$$P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \quad \langle a^2 \rangle = \frac{\omega^4 z_0^2}{2}$$

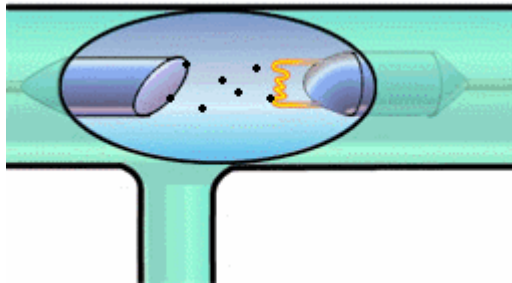
$$P_{Larmor} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

**Formula di Larmor**



## Raggi X

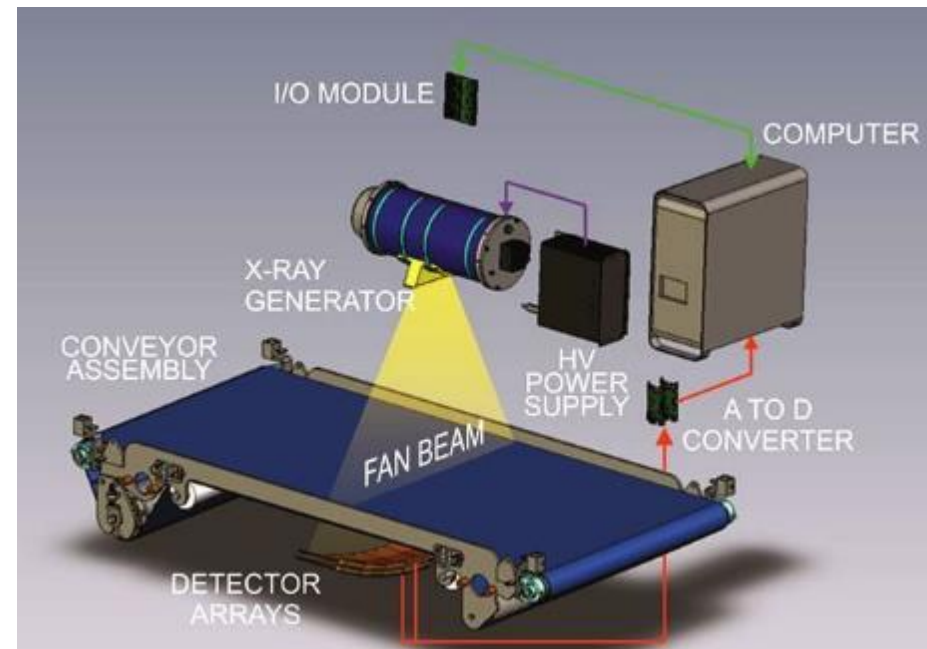
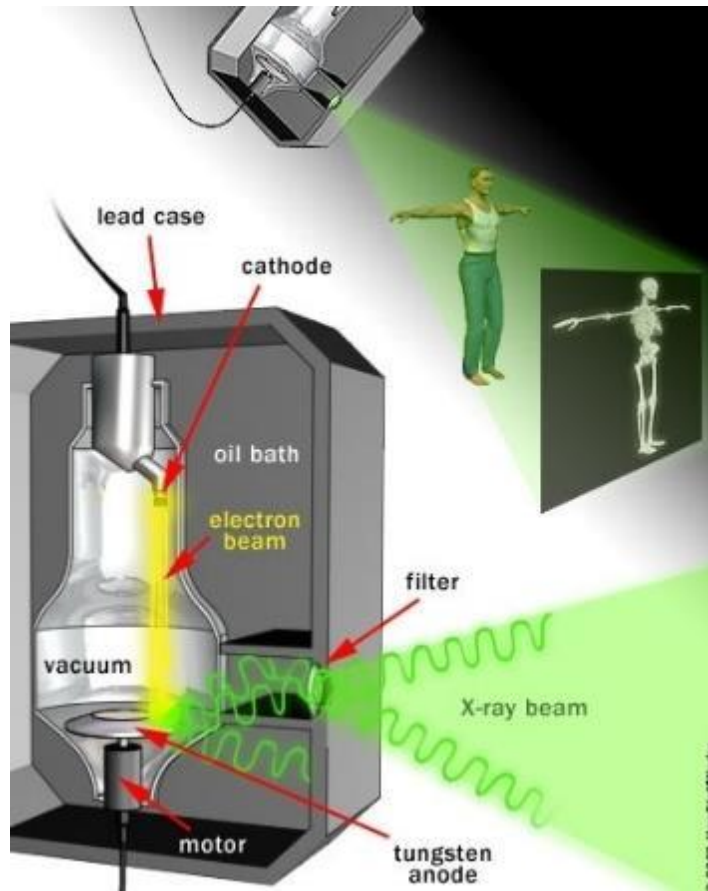
### Tube di Coolidge

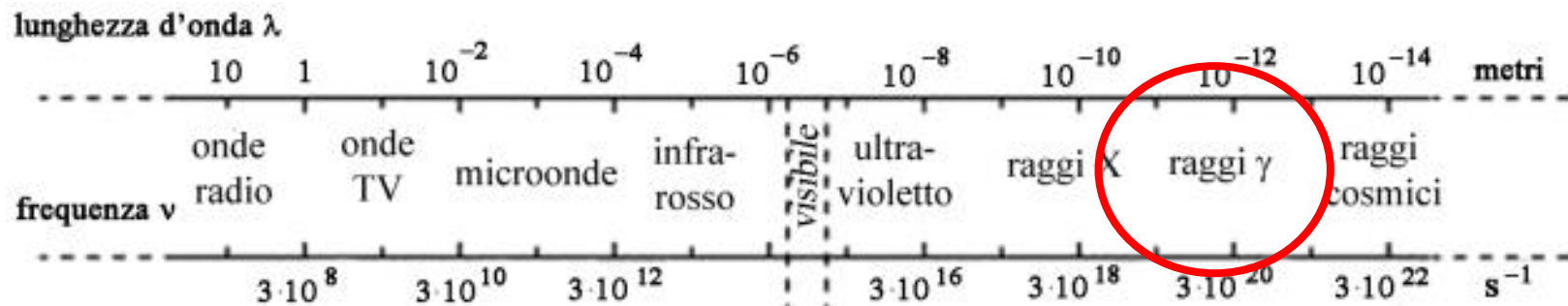


In un tubo in cui è fatto il vuoto e in cui sono posti due elettrodi alimentati da una d.d.p. Un elettrodo è portato ad alta temperatura ed emette elettroni. L'altro elettrodo (il catodo, quello a potenziale positivo) si occupa di catturare tali elettroni.

Gli elettroni catturati dall'elettrodo vengono bruscamente decelerati e quindi si ha la produzione di un'onda e.m. secondo la formula di Larmor. Durante la decelerazione si produce la *radiazione di frenamento* o più comunemente chiamata *bremsstrahlung*

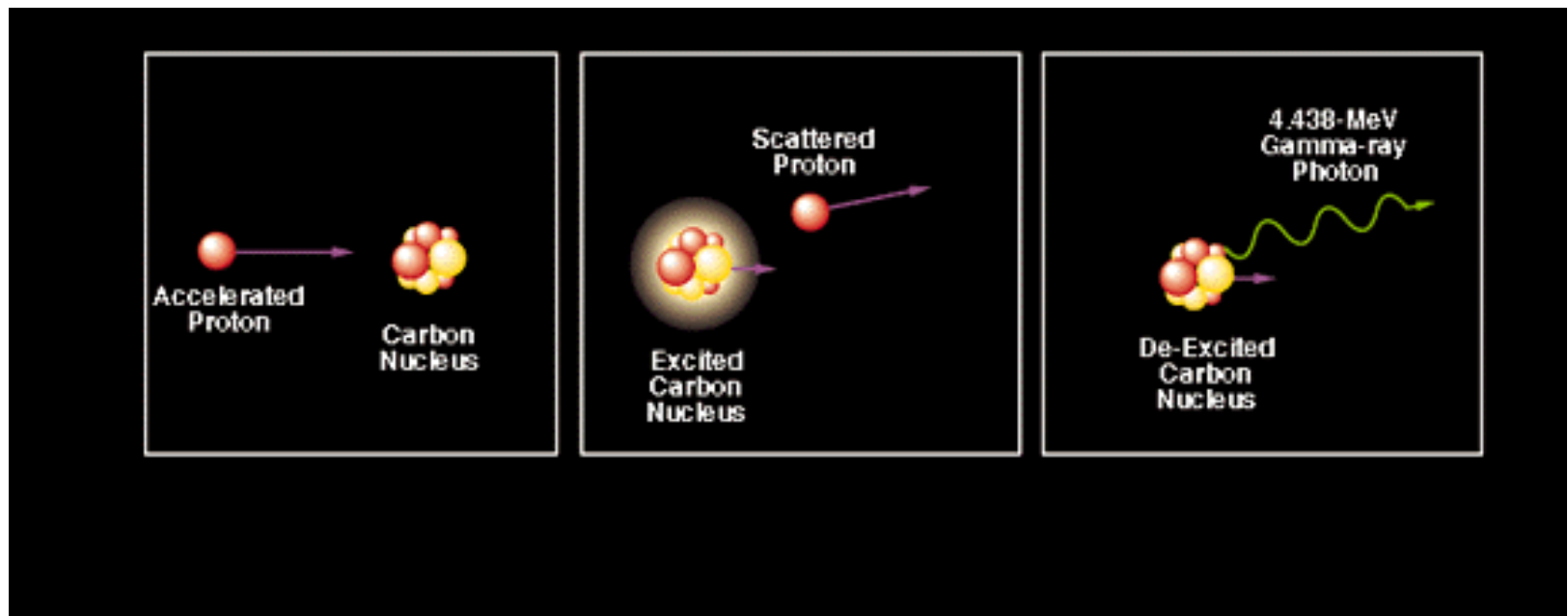
## Raggi X



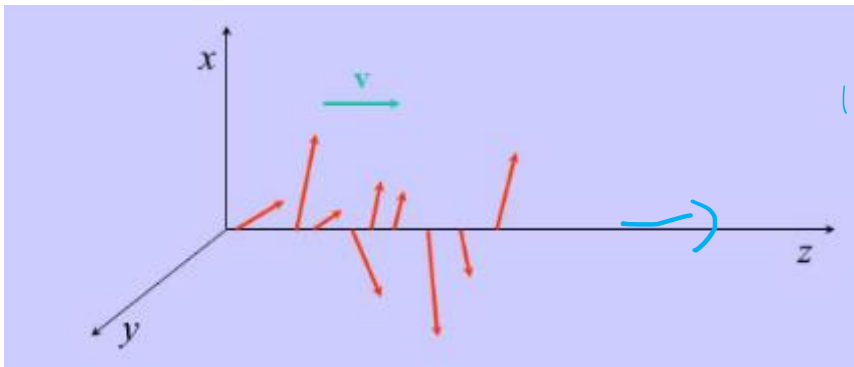


## Raggi gamma

### Processi di modifica del nucleo atomico

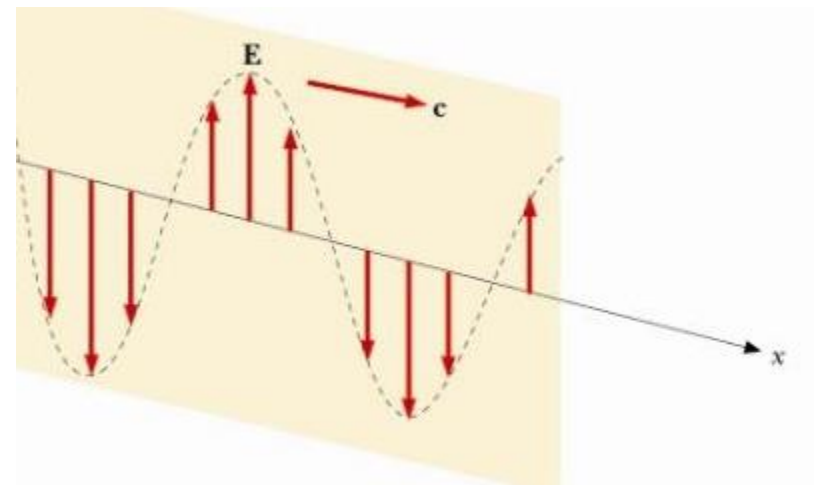


Il campo elettrico oscilla in piani differenti



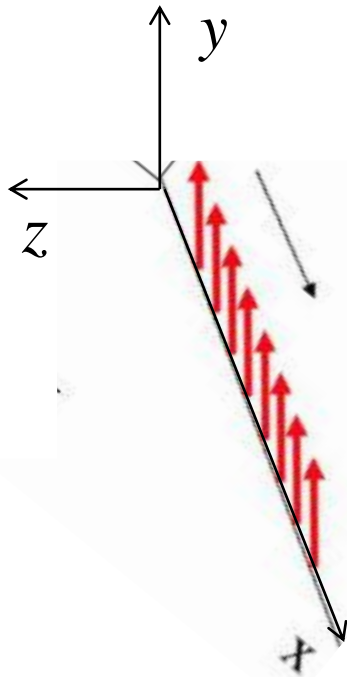
Onda piana non polarizzate

Il campo elettrico oscilla sempre sullo stesso piano



Onda piana polarizzate rettilineamente





## Polarizzazione rettilinea

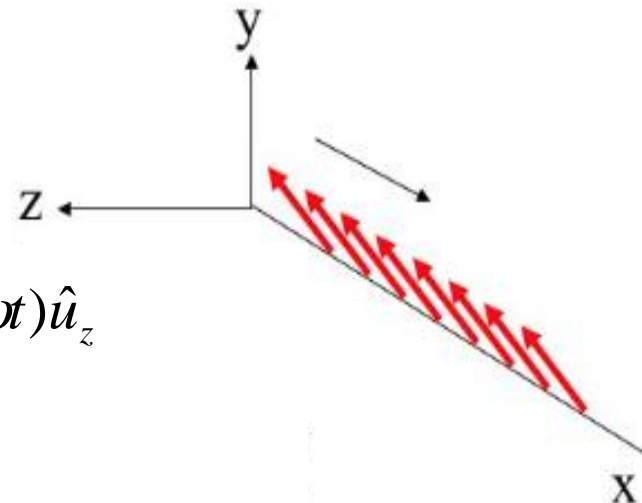
$$E_y(x, t) = E_{0y} \cos(kx - \omega t)$$

### Direzione di polarizzazione

Coincide con la direzione del campo  $E$

### Piano di polarizzazione

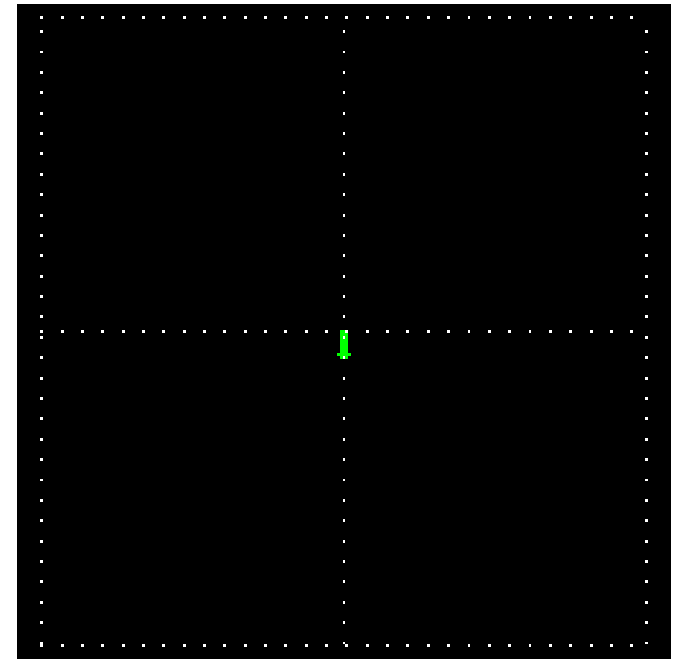
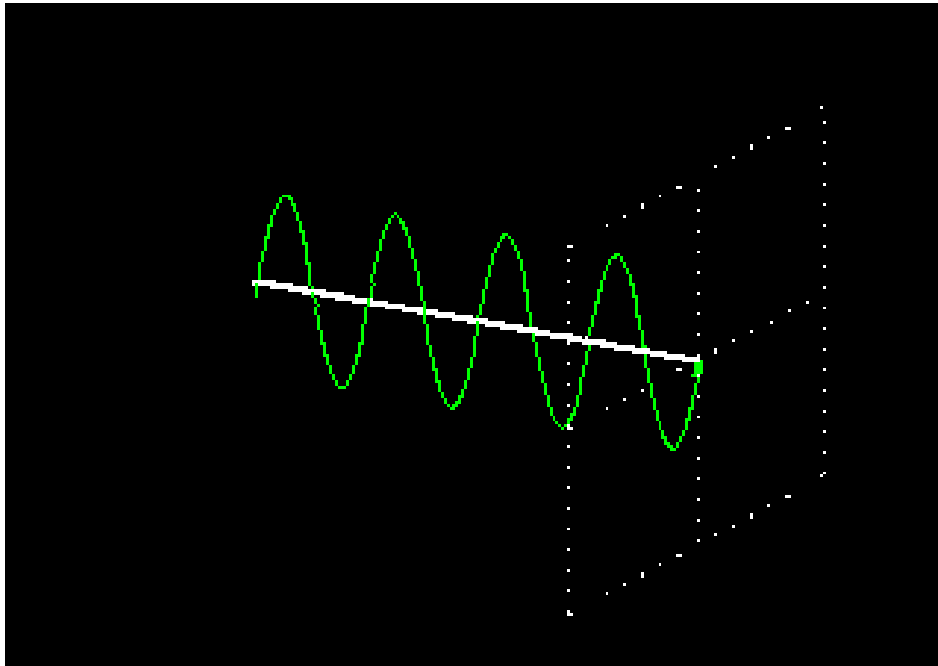
Piano formato dal vettore  $E$  con la direzione di propagazione



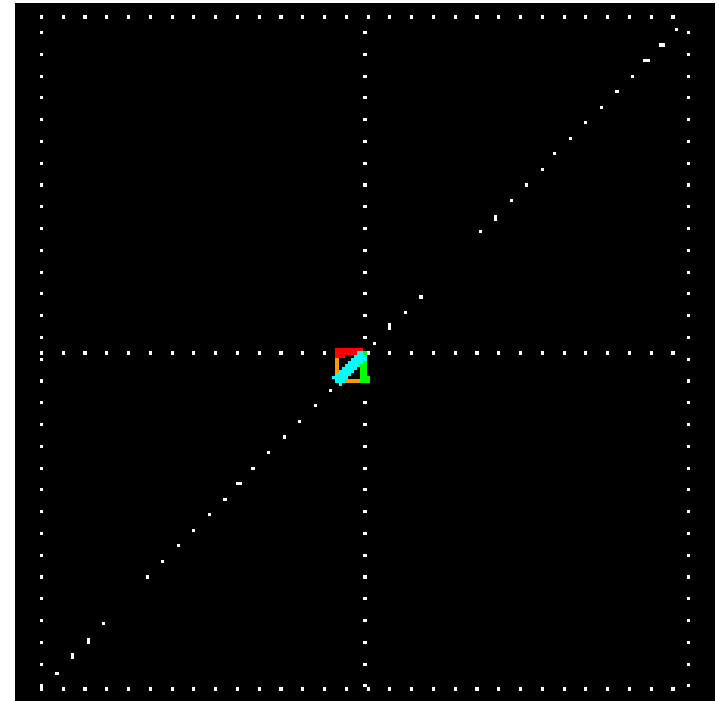
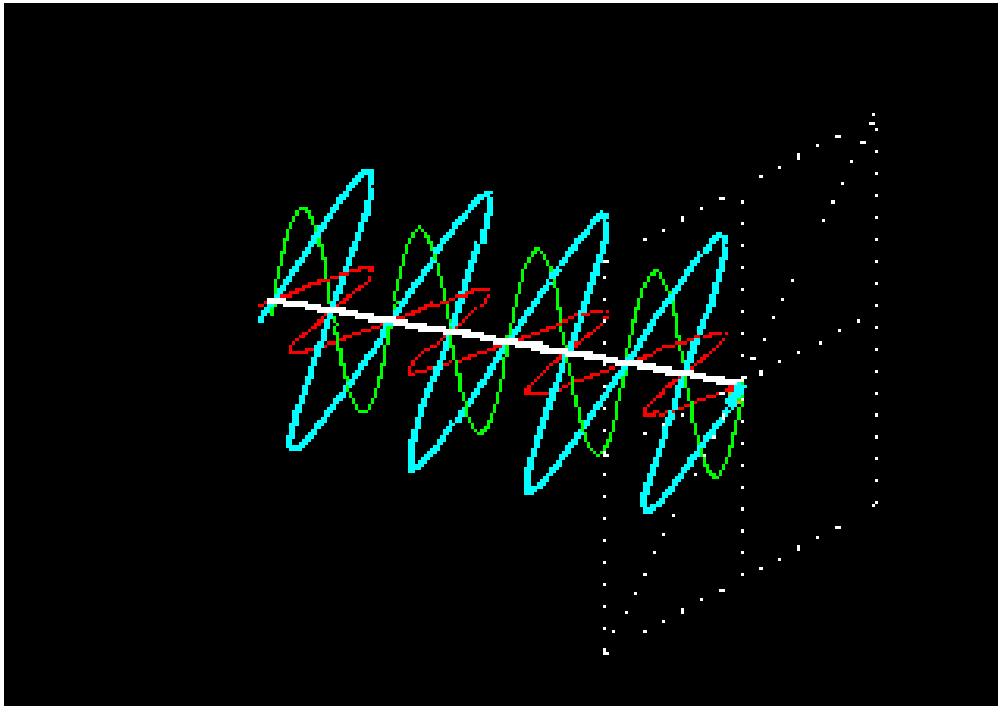
$$\vec{E} = E_{0y} \cos(kx - \omega t) \hat{u}_y + E_{0z} \cos(kx - \omega t) \hat{u}_z$$



Polarizzazione rettilinea



Polarizzazione rettilinea con due componenti



In generale

$$E_y(x, t) = E_{0y} \cos(kx - \omega t)$$

$$E_z(x, t) = E_{0z} \cos(kx - \omega t + \delta)$$

**Polarizzazione rettilinea**

$$\delta = 0$$

$$\delta = \pi$$

$$E_y(x, t) = E_{0y} \cos(kx - \omega t)$$

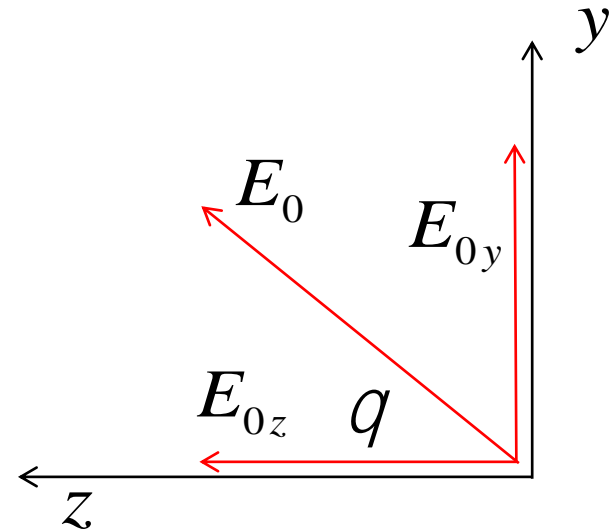
$$E_z(x, t) = \pm E_{0z} \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{E_z}{E_y} = \pm \frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \pm \operatorname{tg} \theta$$



$$E_0 = \sqrt{E_{0y}^2 + E_{0z}^2}$$

$$E_{0y} = E_0 \cos q \quad E_{0z} = E_0 \sin q$$



$$\langle S \rangle = I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c (E_{0y}^2 + E_{0z}^2)$$

$$I = \frac{E_{0y}^2}{2Z_0} + \frac{E_{0z}^2}{2Z_0} = \frac{E_0^2}{2Z_0}$$



$$E_y(x, t) = E_{0y} \cos(kx - \omega t)$$

$$E_z(x, t) = E_{0z} \cos(kx - \omega t + \delta)$$

## Polarizzazione circolare

$$\delta = \frac{\pi}{2}$$

$$\delta = \frac{3}{2}\pi$$

$$E_y = E_{0y} \cos(kx - \omega t)$$

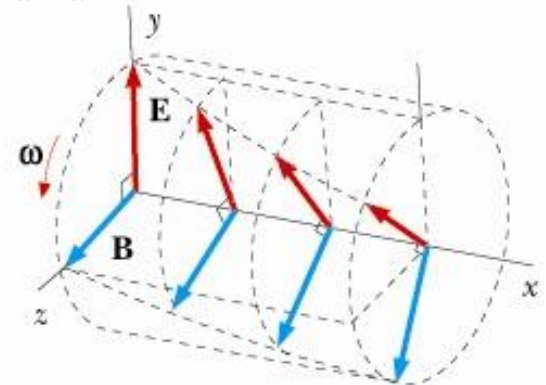
$$E_y^2 = E_{0y}^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

$$E_z = \pm E_{0z} \sin(kx - \omega t)$$

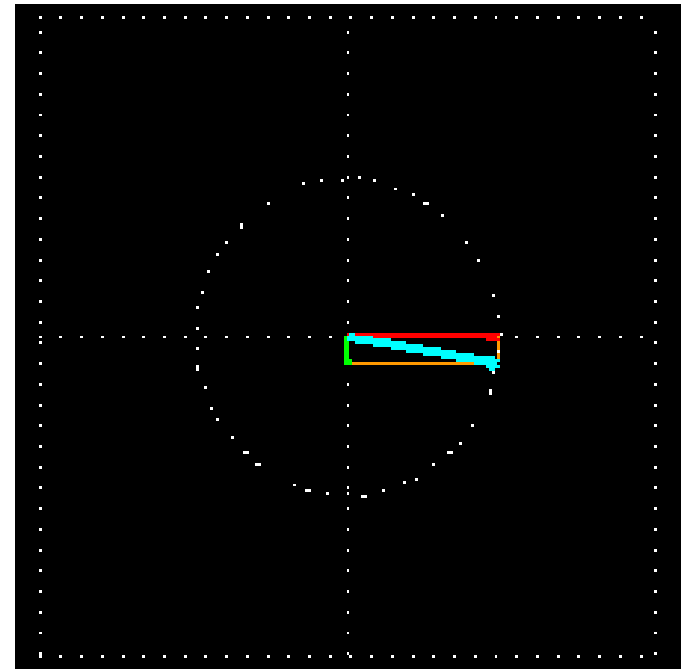
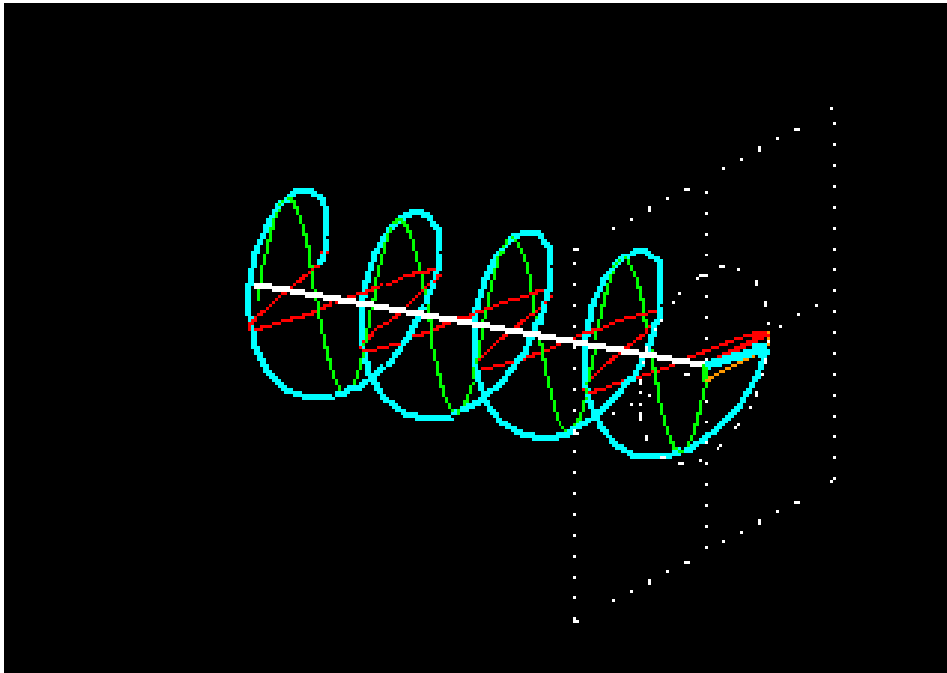
$$E_z^2 = E_{0z}^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

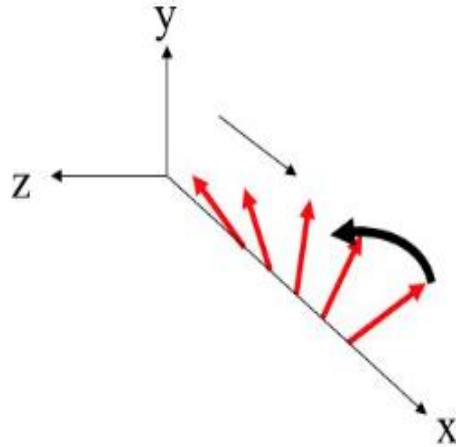
Nell'ipotesi  $E_{0y} = E_{0z} = E_0$  si ottiene l'equazione di una circonferenza di raggio  $E_0$

$$\frac{E_y^2}{E_0^2} + \frac{E_z^2}{E_0^2} = 1$$



Polarizzazione circolare

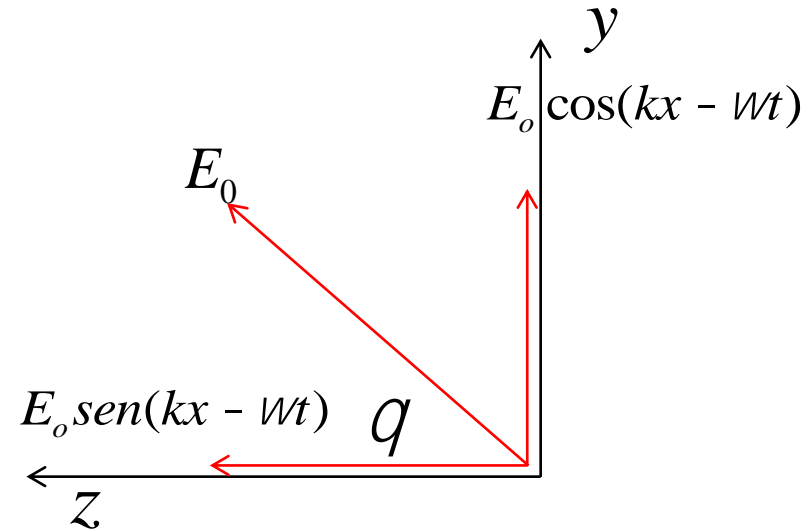




$$E_0 = \sqrt{E_y^2 + E_z^2}$$

$$E_{0y} = E_0$$

$$E_{0z} = E_0$$



$$\langle S \rangle = I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c (E_0^2 + E_0^2)$$

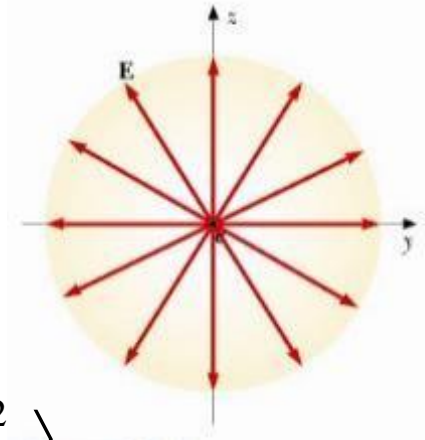
$$I = \frac{E_0^2}{2Z_0} + \frac{E_0^2}{2Z_0} = \frac{E_0^2}{Z_0}$$





$$E_y(x, t) = E_{0y} \cos(kx - \omega t)$$

$$E_z(x, t) = E_{0z} \cos(kx - \omega t + \delta)$$



Onde non polarizzate  $d'$  variabile

$$\langle E_{0y}^2 \rangle = \langle E_{0z}^2 \rangle$$

$$I = \frac{\langle E_{0y}^2 \rangle}{2Z_0} + \frac{\langle E_{0z}^2 \rangle}{2Z_0}$$

$$I = I_y + I_z$$

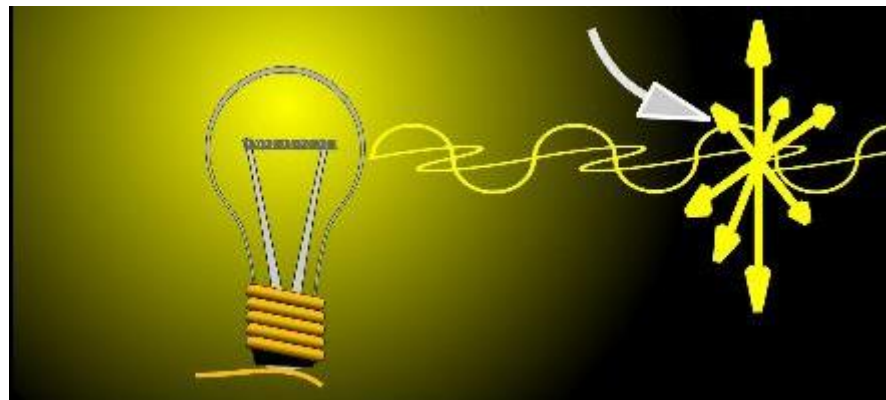
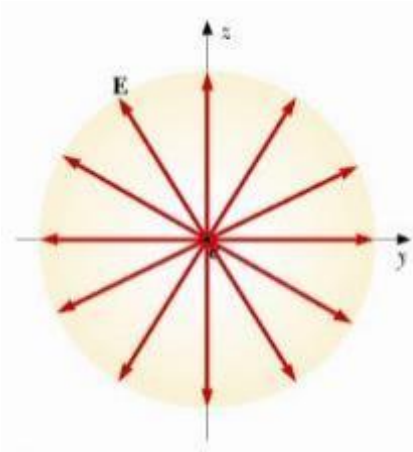
$$I = \frac{I}{2} + \frac{I}{2}$$

The diagram shows the equation  $I = \frac{I}{2} + \frac{I}{2}$ . The first  $\frac{I}{2}$  is enclosed in a grey oval with an arrow pointing to the y-axis. The second  $\frac{I}{2}$  is enclosed in a grey oval with an arrow pointing to the z-axis.

**Energia metà su asse y e metà su asse z, indipendentemente dalla scelta degli assi**

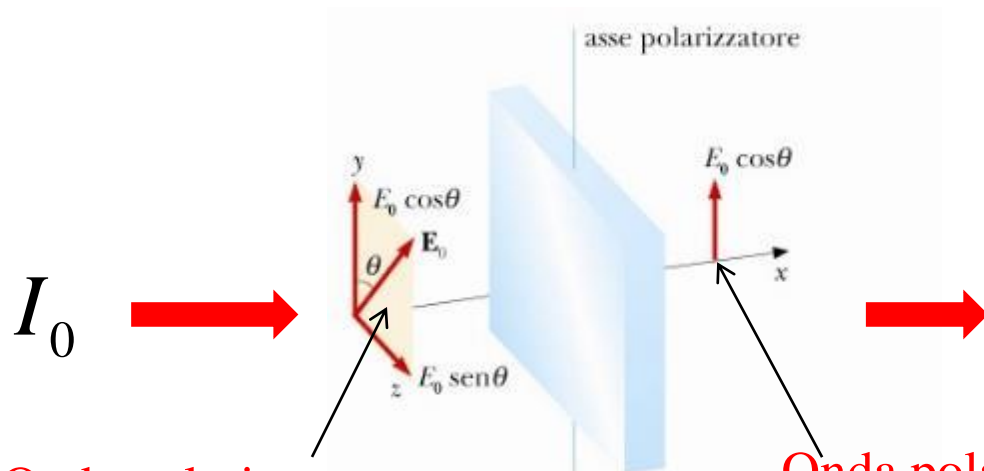
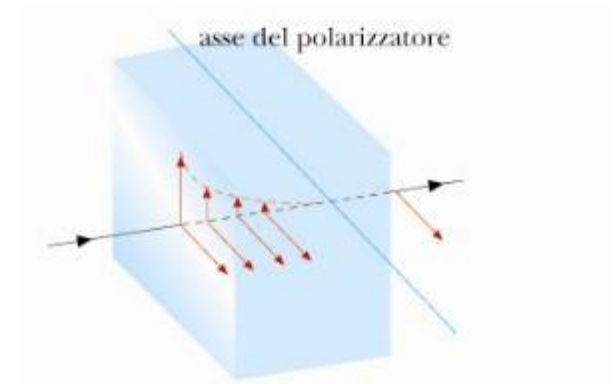
Tutte le polarizzazioni viste valgono quando le componenti  $y$  e  $z$  del campo hanno una legge di variazione determinata rispetto alla direzione di propagazione  $x$  e al tempo  $t$ . Se la differenza di fase  $\delta$  delle componenti varia nel tempo in modo casuale non si può stabilire una legge di variazione per la direzione del campo

Questo vuol dire che lo stato di polarizzazione, pur essendo definito in ogni istante e posizione, non lo è più in media nel tempo. In tal caso si dice che l'onda non è polarizzata



## Lamine polarizzatrici

Trasmettono solo la componente lungo la direzione *dell'asse ottico*. La radiazione che emerge è polarizzata rettilineamente lungo la direzione dell'*asse ottico*.



Onda polarizzata  
incidente

Onda polarizzata  
trasmessa

**Legge di Malus**

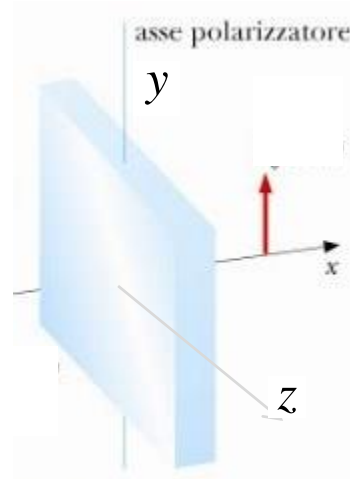
$$I_1 = I_0 \cos^2 \theta$$



Nel caso di radiazione non polarizzata

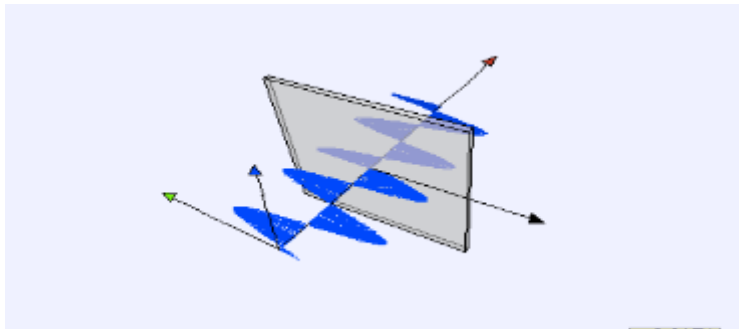
$$I_0 = I_y + I_z$$

luce non polarizzata

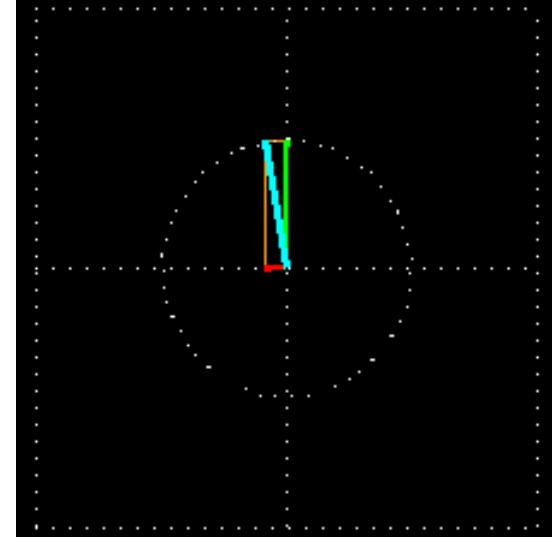
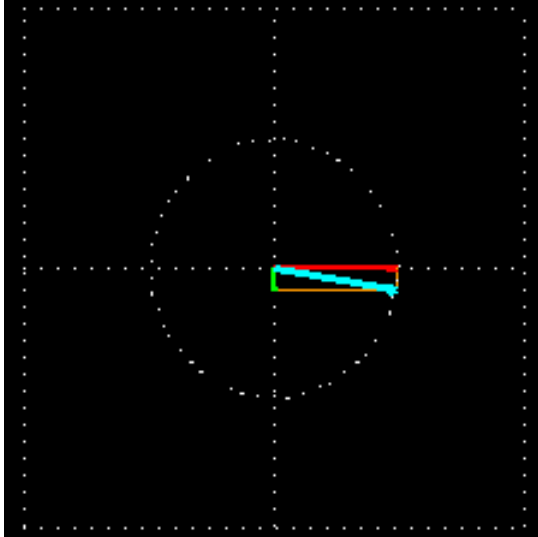
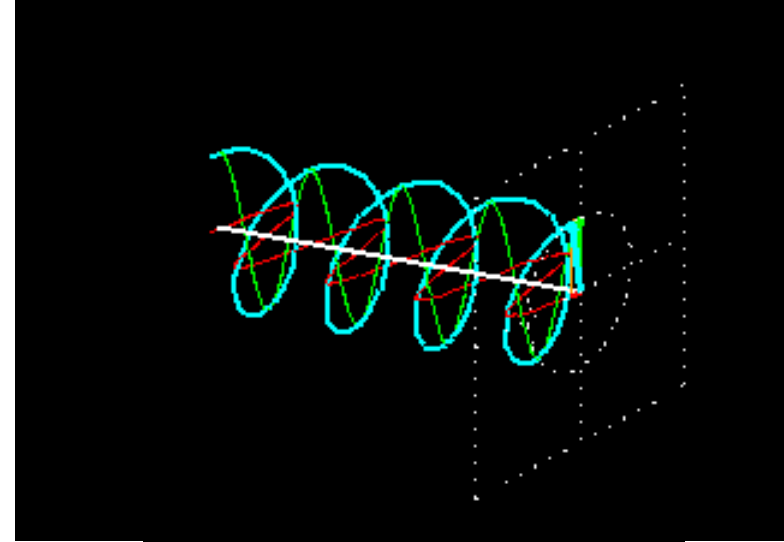
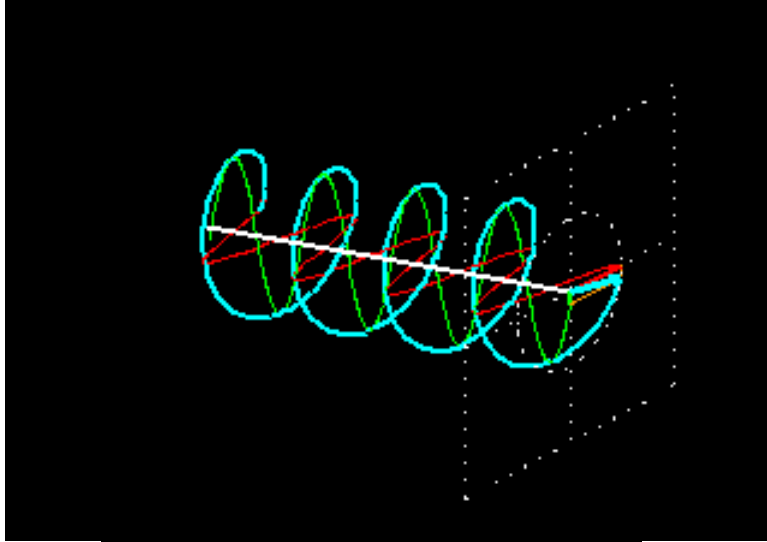


$$I_1 = I_0 / 2$$

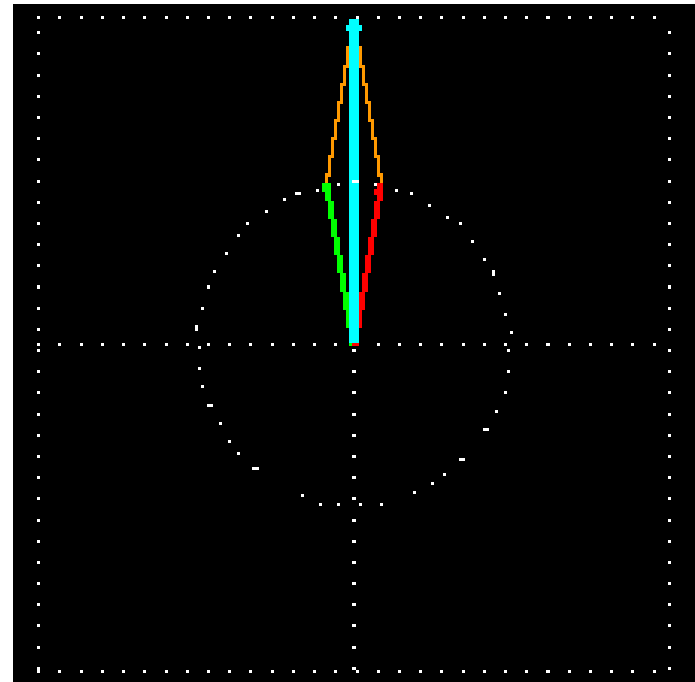
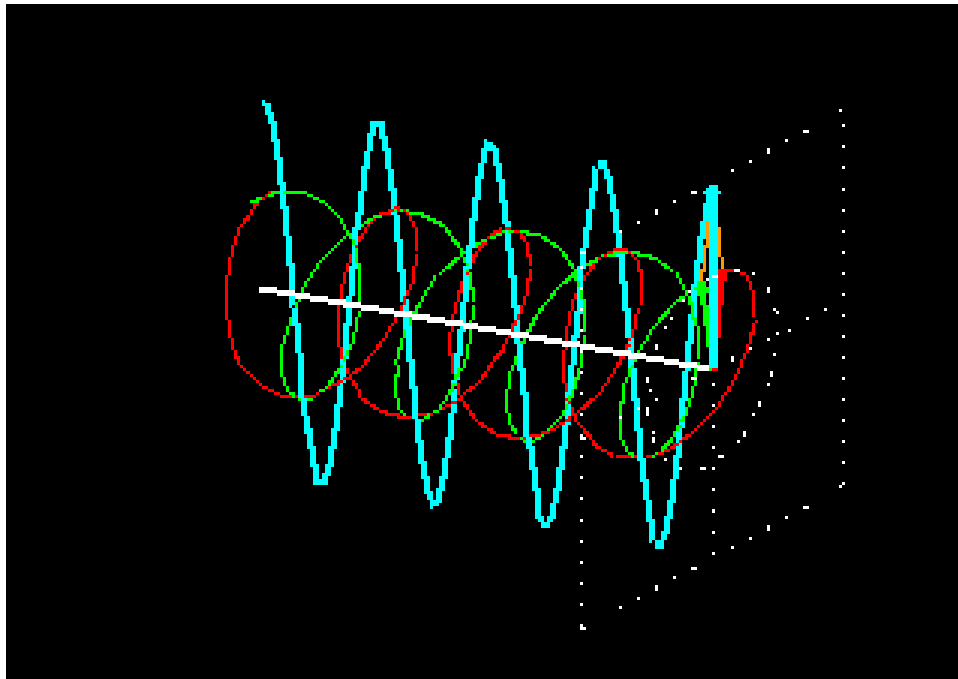
In questo caso l'intensità trasmessa non dipende dall'angolo dell'asse ottico

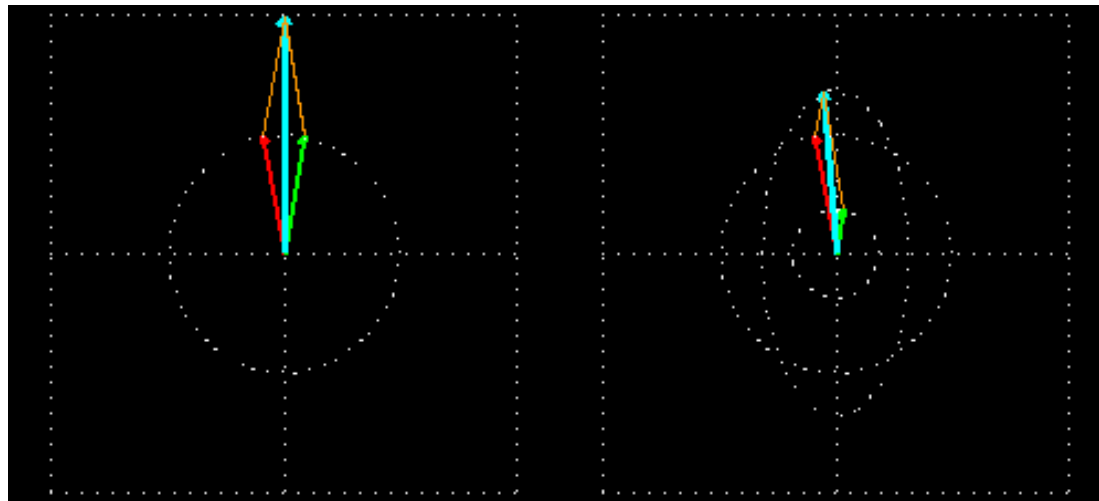
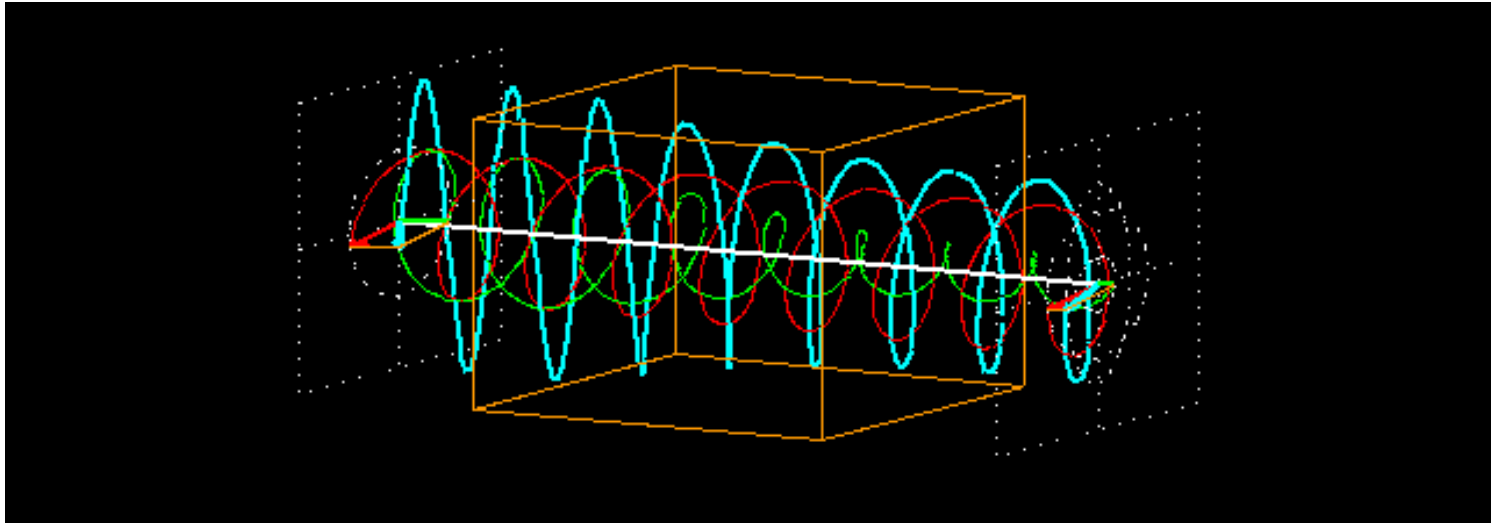


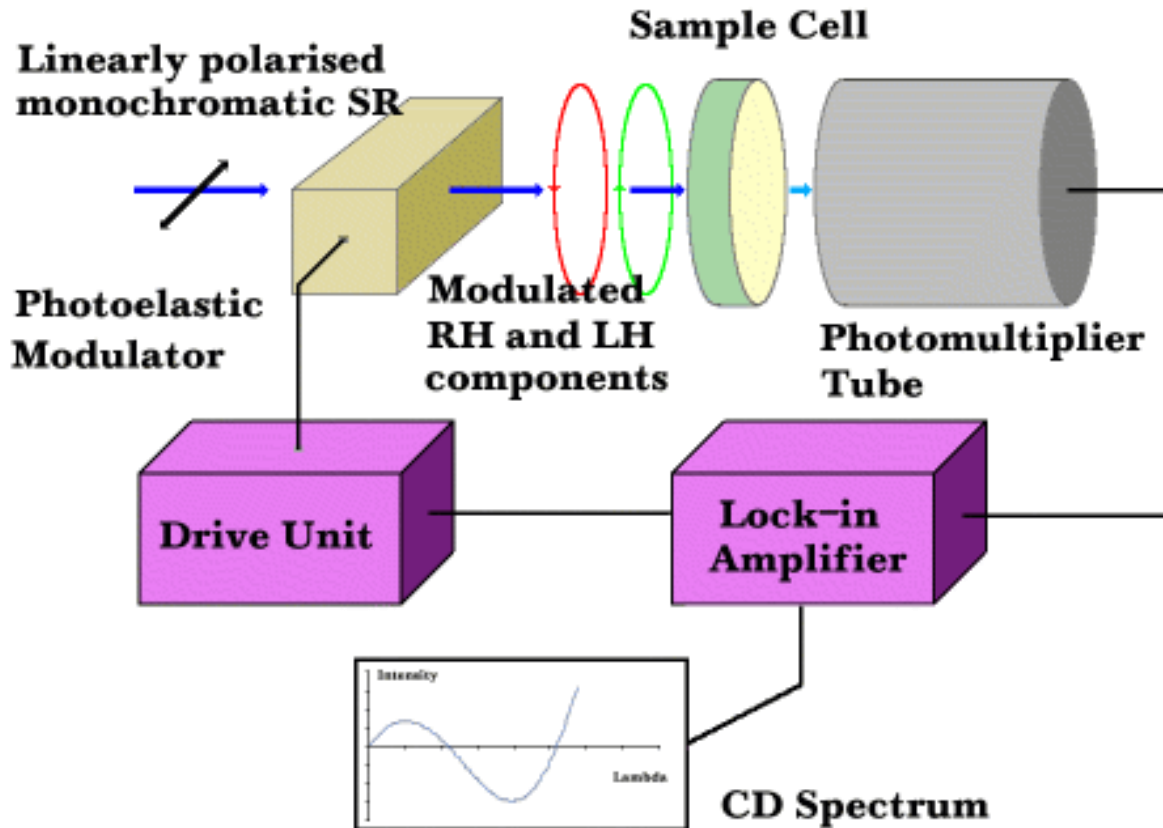
Luce polarizzata circolarmente destra e sinistra



## Somma di polarizzazioni circolari destra e sinistra





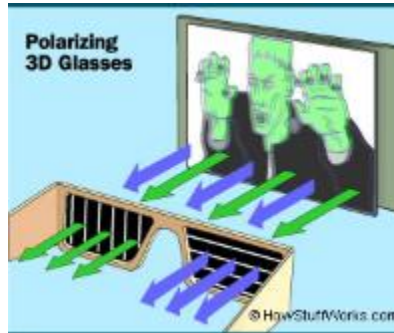


Si usa una radiazione polarizzata prodotta da una lampada a Xenon molto potente (150-450 W). La radiazione passa poi attraverso il monocromatore che seleziona la lunghezza d'onda desiderata, e attraverso il filtro polarizzatore, che la polarizza linearmente. Il cuore dello spettropolarimetro CD è il cosiddetto modulatore foto-elastico, costituito da un cristallo capace di far passare alternativamente la componente destra o sinistra della luce polarizzata linearmente a seconda del campo elettrico a cui è sottoposto.

Il modulatore foto-elastico è sottoposto ad un campo elettrico alternato, per cui il campione è attraversato alternativamente dalle componenti destra e sinistra. Se le due componenti sono assorbite in maniera diversa, il rivelatore origina un segnale di intensità oscillante. L'ampiezza di questa oscillazione permette di misurare il dicroismo circolare.







## Visione 3D



Per proiettare un film 3-D con la polarizzazione lineare, immagini parallele vengono proiettate attraverso filtri polarizzatori ortogonali (a  $90^\circ$  l'uno rispetto all'altro) sovrapposte su di uno speciale schermo.

In questo caso i proiettori possono ricevere il filmato da un computer dotato di due schede grafiche. Gli spettatori devono indossare degli occhiali economici che montano un paio di filtri polarizzatori ortogonali, così ciascun filtro lascia passare la luce con una polarizzazione simile e blocca la luce polarizzata ortogonalmente rispetto al filtro, cosicché ogni occhio possa vedere una delle due immagini, in tal modo viene raggiunto l'effetto 3-D