Capitolo 4

Conduttori ed Isolanti

4.1 Conduttori solidi in equilibrio

Nel capitolo 1 abbiamo definito conduttori i materiali in cui è possibile il moto delle cariche al loro interno. L'esempio più tipico di conduttori solidi sono i **metalli**, i cui atomi possiedono uno o più elettroni liberi di muoversi all'interno del materiale.

La condizione di **equilibrio elettrostatico** è verificata se le **cariche all'interno del metallo sono ferme**. Tale condizione è possibile, quindi, se il **campo elettrostatico (medio) all'interno del metallo** è **nullo**: $\vec{E}=0$

La condizione di equilibrio ha le seguenti conseguenze:

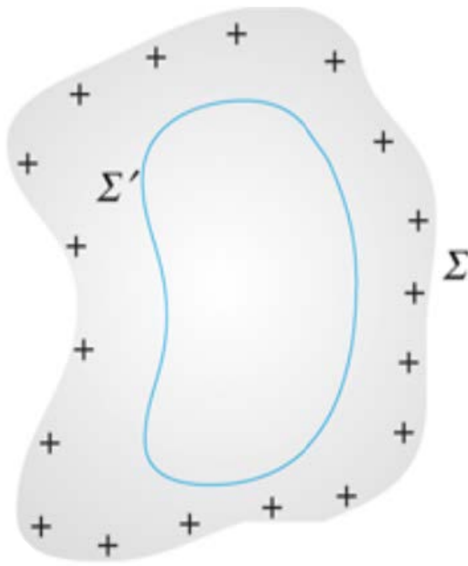
Proprietà dei conduttori in equilibrio

1. L'eventuale **eccesso di carica** in un conduttore può distribuirsi solo sulla **superficie esterna del conduttore**;
2. Il **potenziale elettrostatico** è **costante** su tutto il conduttore;
3. Il **campo elettrostatico sulla superficie** del conduttore è **perpendicolare** alla superficie e ha intensità $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

1. Eccesso di carica sulla superficie esterna

Questa proprietà si dimostra a partire dal teorema di Gauss.

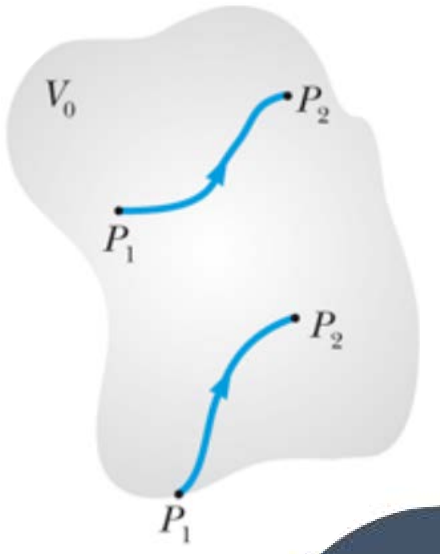
La condizione $\vec{E}$=**0** suggerisce che, comunque scegliamo una superficie chiusa all'interno del conduttore, il flusso del campo elettrostatico attraverso tale superficie è nullo, essendo nullo il campo. Per il teorema di Gauss, allora, la carica racchiusa nel volume delimitato dalla superficie chiusa è nulla. Poiché questa superficie può essere scelta «a piacere» all'interno del conduttore, deduciamo che non vi è carica all'interno del conduttore e che, quindi, essa si distribuisce sulla superficie esterna. La densità di carica non è costante sulla superficie, ma dipende dal suo raggio di curvatura: **maggiore è il raggio di curvatura, minore è la densità di carica**. Da ciò segue l'effetto delle punte, per cui si hanno effluvi di cariche da punte aguzze.



1. Eccesso di carica sulla superficie estera

Questa proprietà si dimostra a partire dal teorema di Gauss.

La condizione $\vec{E}$=**0** suggerisce che, comunque scegliamo una superficie chiusa all'interno del conduttore, il flusso del campo elettrostatico attraverso tale superficie è nullo, essendo nullo il campo. Per il teorema di Gauss, allora, la carica racchiusa nel volume delimitato dalla superficie chiusa è nulla. Poiché questa superficie può essere scelta «a piacere» all'interno del conduttore, deduciamo che non vi è carica all'interno del conduttore e che, quindi, essa si distribuisce sulla superficie esterna. La densità di carica non è costante sulla superficie, ma dipende dal suo raggio di curvatura: **maggiore è il raggio di curvatura, minore è la densità di carica**. Da ciò segue l'effetto delle punte, per cui si hanno effluvi di cariche da punte aguzze.



2. Potenziale elettrostatico sul conduttore

Questa proprietà è, invece, una diretta conseguenza della definizione di potenziale.

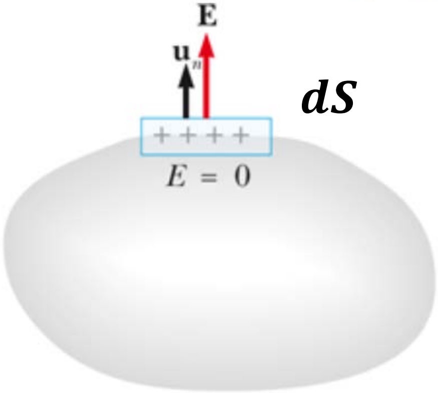
Consideriamo due punti, P_1 e P_2, all'interno o sulla superficie del conduttore. Poiché $\vec{E}$=**0**, la differenza di potenziale tra tali punti è

$$V_{P_2} - V_{P_1} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Il potenziale elettrostatico è, quindi, costante in tutto il conduttore.

3. Campo elettrostatico normale al conduttore con intensità $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

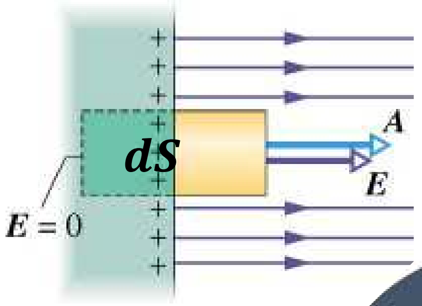
Consideriamo un punto esterno molto vicino al conduttore. Se il campo elettrostatico in quel punto formasse un angolo $\boldsymbol{\theta}$ qualsiasi rispetto alla superficie del conduttore, esso potrebbe essere scomposto in una componente normale ed una tangenziale alla superficie del conduttore. Tuttavia, $\vec{E}$**=0** sul conduttore, per cui il campo elettrostatico fuori dal conduttore non può che essere perpendicolare alla superficie dello stesso.



Questa proprietà si può anche dimostrare ricordando che $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$.

Per calcolare il modulo del campo elettrostatico generato dalla carica distribuita con densità **σ** sulla superficie del conduttore, ricorriamo al teorema di Gauss.

Consideriamo una porzione circolare infinitesima dS della superficie del conduttore. Costruiamo un cilindro avente le due basi, di area dS, parallele alla porzione infinitesima del conduttore e calcoliamo il flusso del campo elettrostatico attraverso tale superficie cilindrica.

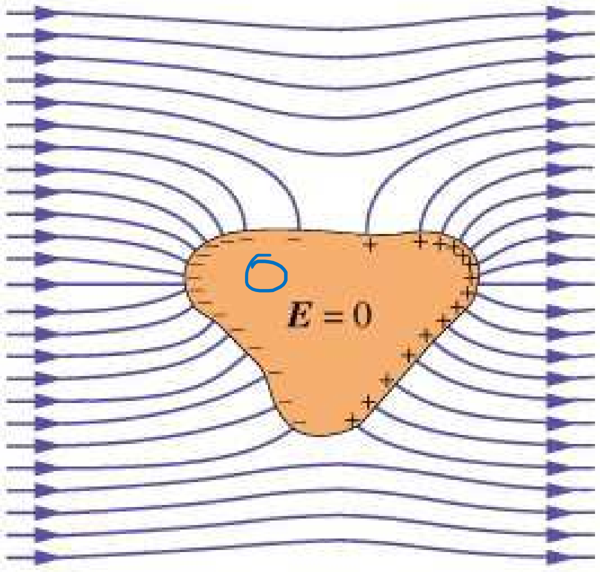


$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint \vec{E}\cdot\widehat{u_N}d\Sigma = \int_{Sup.L.}\vec{E}\cdot\widehat{u_N}d\Sigma + \int_{B.Int.}\vec{E}\cdot\widehat{u_N}d\Sigma + \int_{B.Ext.}\vec{E}\cdot\widehat{u_N}d\Sigma = 0 + 0 + E\,dS$$

Applicando il teorema di Gauss $\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}$ ricaviamo $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Osserviamo che, se immergiamo **un conduttore**, anche scarico, in un campo elettrico esterno, esso **distorce il campo esterno** in modo in modo che vengano soddisfatte le proprietà elencate, sfruttando la mobilità delle cariche.

Questo discende dal fatto che le cariche del conduttore sono mobili e si ridistribuiscono per adattarsi al campo elettrico esterno. Il fenomeno, come abbiamo visto nel primo capitolo, è detto di **induzione**: le cariche mobili del conduttore si sono portate sulla superficie, dando luogo ad una distribuzione di carica superficiale. Tuttavia, la carica complessiva del conduttore rimane uguale a quella iniziale, posseduta prima di essere immerso nel campo esterno. Le cariche «ridistribuite» che si accumulano in superficie sono dette cariche indotte.

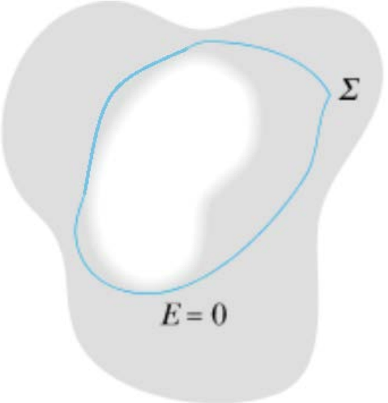


Un’ultima osservazione da fare è quella per cui, **quando più conduttori vengono collegati tra loro**, le cariche si ridistribuiscono in modo che, dopo un transiente, i conduttori **si portano tutti allo stesso potenziale**.

4.2 Conduttore cavo e schermo elettrostatico

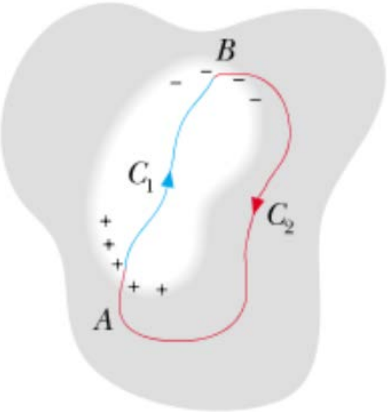
Consideriamo un **conduttore cavo isolato carico**. Il campo elettrostatico all'interno del conduttore è nullo e, usando il teorema di Gauss è immediato verificare che **sulla parete interna della cavità non ci possono essere cariche**.

Consideriamo il flusso del campo elettrostatico attraverso una superficie chiusa che racchiuda la cavità, contenuta nel conduttore.



$$\left.\begin{array}{l}\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint \vec{E}\cdot\widehat{u_N}\,d\Sigma = 0 \\ \Phi_\Sigma(\vec{E}) = \dfrac{q_{int}}{\varepsilon_0}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$$

Supponiamo ora di considerare due cammini, uno interno e l'altro esterno alla cavità e immaginiamo esista una separazione di carica +q, -q, affacciate alla superficie interna della parte cava: giungeremmo all'assurdo

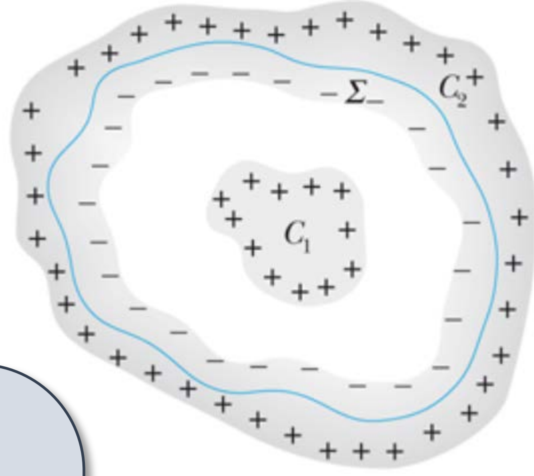


$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{C1}\vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_{C2}\vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{C1}\vec{E}\cdot d\vec{s} \neq 0$$

Quindi, anche nel caso di un conduttore cavo, **l'eccesso di carica è distribuito esclusivamente sulla superficie esterna, il campo elettrostatico è nullo all'interno del conduttore ed il potenziale è costante in ogni suo punto**.

Consideriamo il caso in cui nella cavità del **conduttore, inizialmente neutro**, venga inserita una carica puntiforme +q (o un conduttore C_1 di carica +q).

Per induzione, sulla superficie interna della cavità si affaccia una carica uguale ed opposta a q, ovvero -q (**induzione completa**). Per la conservazione della carica, sulla sua superficie esterna del conduttore cavo si distribuirà una carica +q.



Osserviamo che il campo elettrostatico all'interno della cavità dipende dal valore di q, dalla posizione della carica puntiforme (o del conduttore C_1) e dalla forma delle due superfici affacciate. Il campo elettrostatico all'esterno del conduttore cavo, invece, dipende da q e dalla forma della superficie esterna del conduttore.

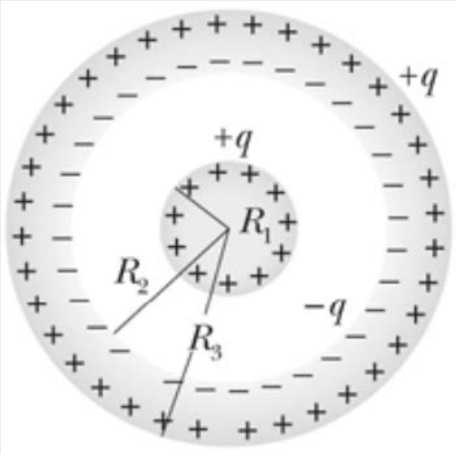
Schermo elettrostatico

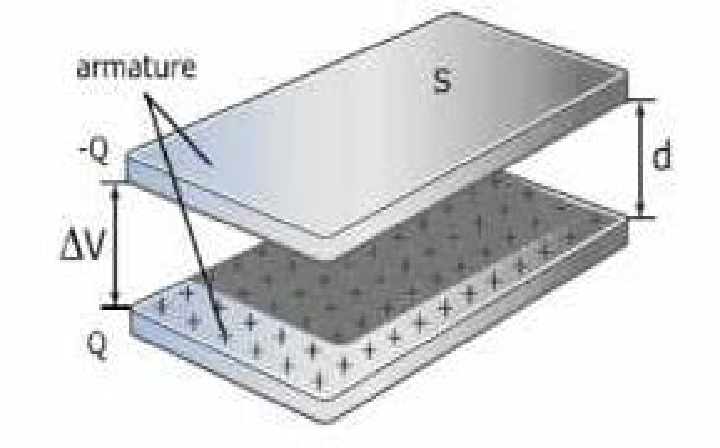
Possiamo concludere che il conduttore cavo costituisce uno schermo elettrostatico tra la cavità e la zona all'esterno. Queste due aree sono separate da una zona in cui, all'equilibrio, non può esistere un campo elettrostatico non nullo. Inoltre, se spostiamo la carica (o C_1), cambierà il campo all'interno della cavità, ma non quello esterno. Viceversa, se si verificano condizioni per cui cambia il campo esterno, esse non avranno effetto sul campo interno.

4.3 Condensatori e capacità

Condensatore

Si chiama condensatore un **sistema costituito da due** conduttori, chiamati **armature**, tra i quali c'è **induzione completa**:





Farad

La capacità di un condensatore si misura in Farad:

$$1\ F = \frac{1\ C}{1\ V}$$

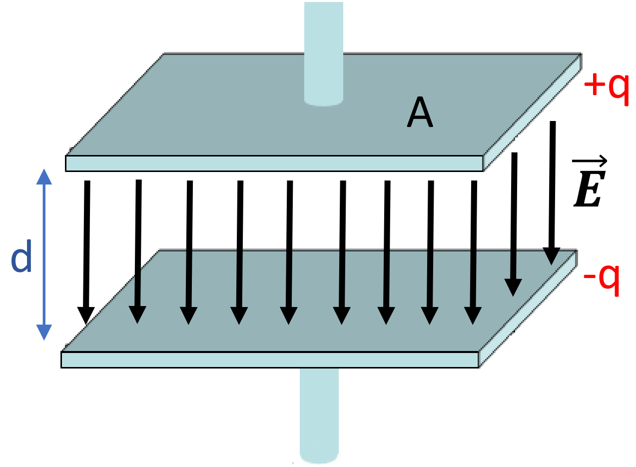
Il **rapporto tra la carica e la differenza di potenziale tra le armature** di un condensatore dipende solo dalla geometria del sistema e dal mezzo che riempie l'intercapedine tra le armature e prende il nome di **capacità del condensatore C**.

$$C = \frac{q}{\Delta V}$$

4.3.1 Condensatore piano

Nel caso di un condensatore piano, le linee di campo sono tutte perpendicolari alle armature e il campo elettrostatico vale:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} = \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{\varepsilon_0 A}}$$



Per il calcolo della differenza di potenziale tra le armature usiamo la definizione:

$$\boldsymbol{V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = Ed = \frac{qd}{\varepsilon_0 A}}$$

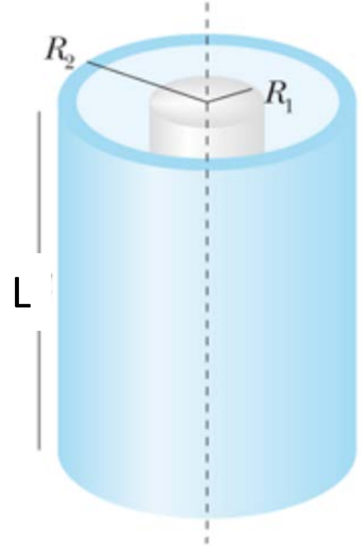
Da cui ricaviamo che la capacità di un condensatore piano è:

$$\boldsymbol{C = \frac{q}{V_+ - V_-} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$

Dipende solo dalla geometria!

4.3.2 Condensatore cilindrico

Nel caso di un condensatore cilindrico, dobbiamo in primo luogo ricorrere al teorema di Gauss per determinare il campo elettrostatico tra le armature, che ci permetterà di calcolare la differenza di potenziale tra di esse. Scegliamo una superficie gaussiana **Σ** cilindrica di raggio r ($R_1 < r < R_2$) ed altezza L.



$$\boldsymbol{\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma = E \oint_{\Sigma} d\Sigma = E(2\pi r L) = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

Ora possiamo calcolare la differenza di potenziale tra le armature:

$$\boldsymbol{V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L r} dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Da cui ricaviamo che la capacità di un condensatore cilindrico è:

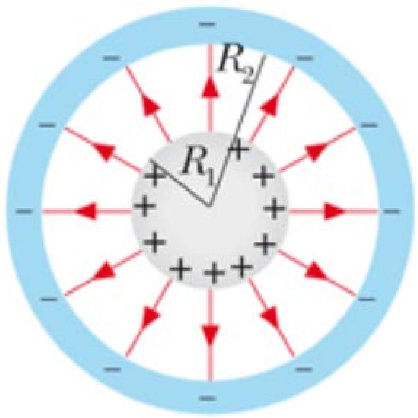
$$\boldsymbol{C = \frac{q}{V_+ - V_-} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}$$

Dipende solo dalla geometria!

4.3.3 Condensatore sferico

Come nel caso del condensatore cilindrico, calcoliamo prima il campo elettrostatico usando il teorema di Gauss. In questo caso sceglieremo una superficie sferica di raggio r ($R_1 < r < R_2$) .

$$\boldsymbol{\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint_\Sigma \vec{E} \cdot \widehat{u_N} d\Sigma = E \oint_\Sigma d\Sigma = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$



La differenza di potenziale tra le armature è:

$$\boldsymbol{V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

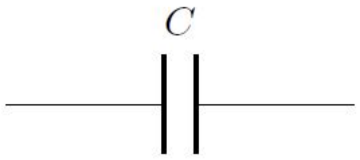
Da cui ricaviamo che la capacità di un condensatore piano è:

$$\boldsymbol{C = \frac{q}{V_+ - V_-} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

Dipende solo dalla geometria!

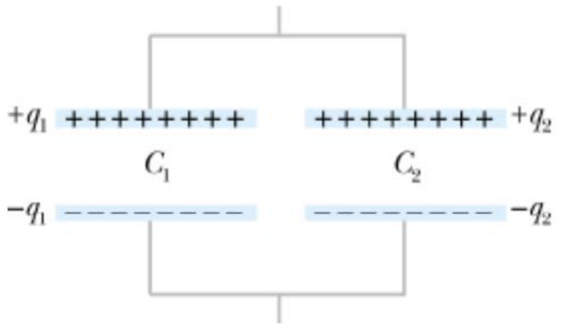
4.4 Collegamento di condensatori

Un condensatore ideale avente capacità C è rappresentato come elemento circuitale dal simbolo mostrato in figura. Due o più condensatori possono essere collegati usando fili conduttori. Un sistema di condensatori può essere sempre rappresentato come un unico condensatore avente una capacità equivalente opportuna.



4.4.1 Condensatori in parallelo

Due condensatori C1 e C2 sono collegati in **parallelo** se le loro armature sono a due a due collegate. In questo caso **la differenza di potenziale tra le armature di C1 sarà uguale alla differenza di potenziale tra le armature di C2**.



$$q_1 = C_1 V \quad ; \quad q_2 = C_2 V$$

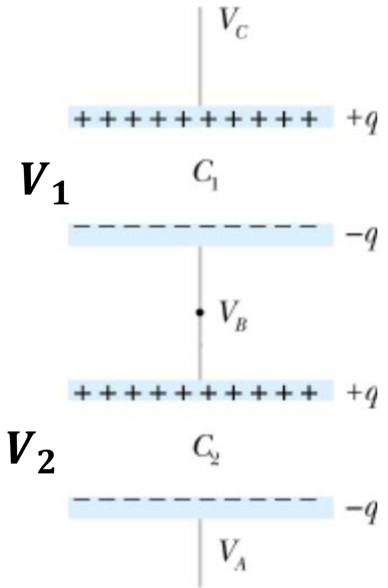
La carica totale del sistema è $Q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)V$

Da cui deduciamo che il sistema è equivalente ad un condensatore avente capacità

$$C_{||} = C_1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_{eq||} = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

4.4.2 Condensatori in serie

Due condensatori C1 e C2 sono collegati in **serie** se hanno solo una armatura collegata tra loro. In questo caso **la carica dei due condensatori è la stessa.**



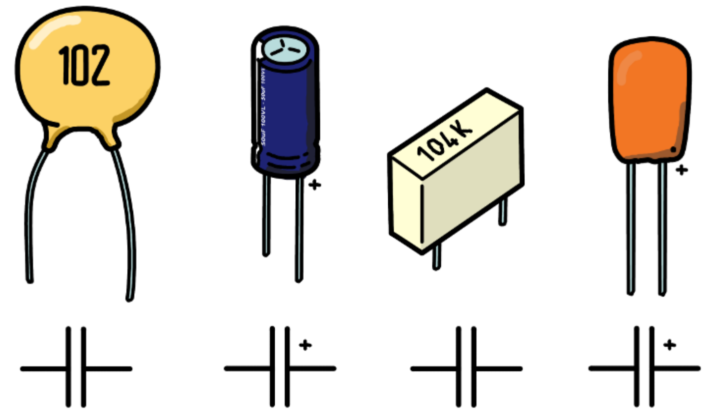
$$q = C_1 V_1 \quad ; \quad q = C_2 V_2$$

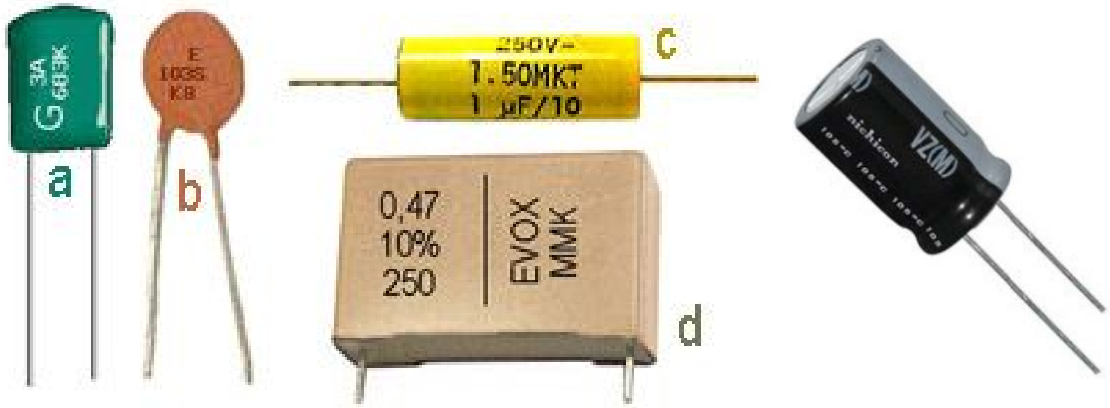
La differenza di potenziale tra i punti A e C è

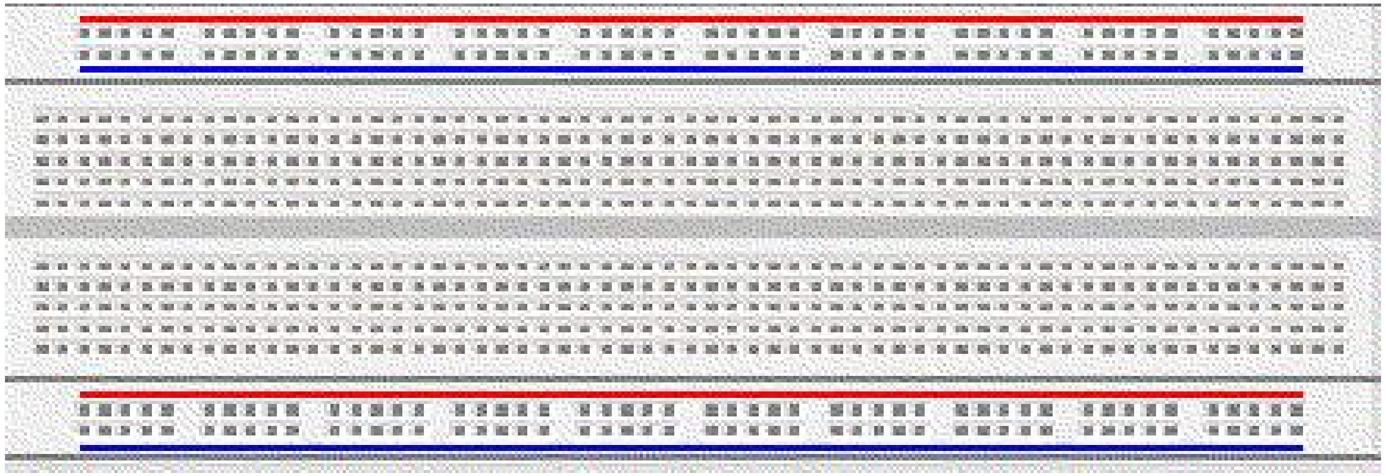
$$V = V_1 + V_2 = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

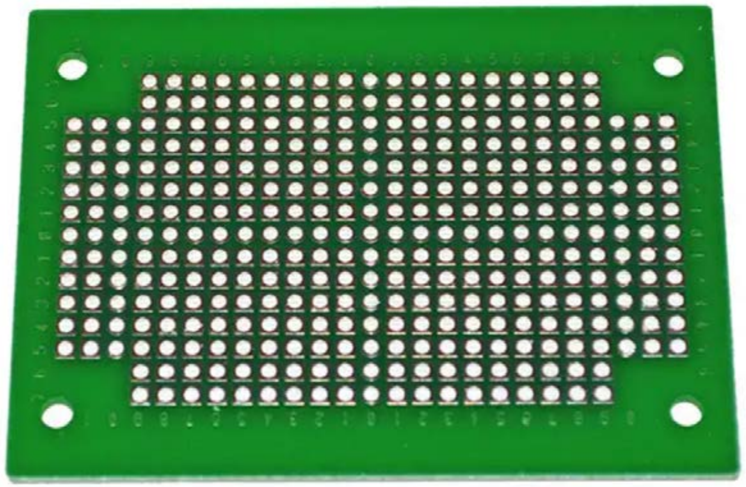
Da cui deduciamo che il sistema è equivalente ad un condensatore avente capacità

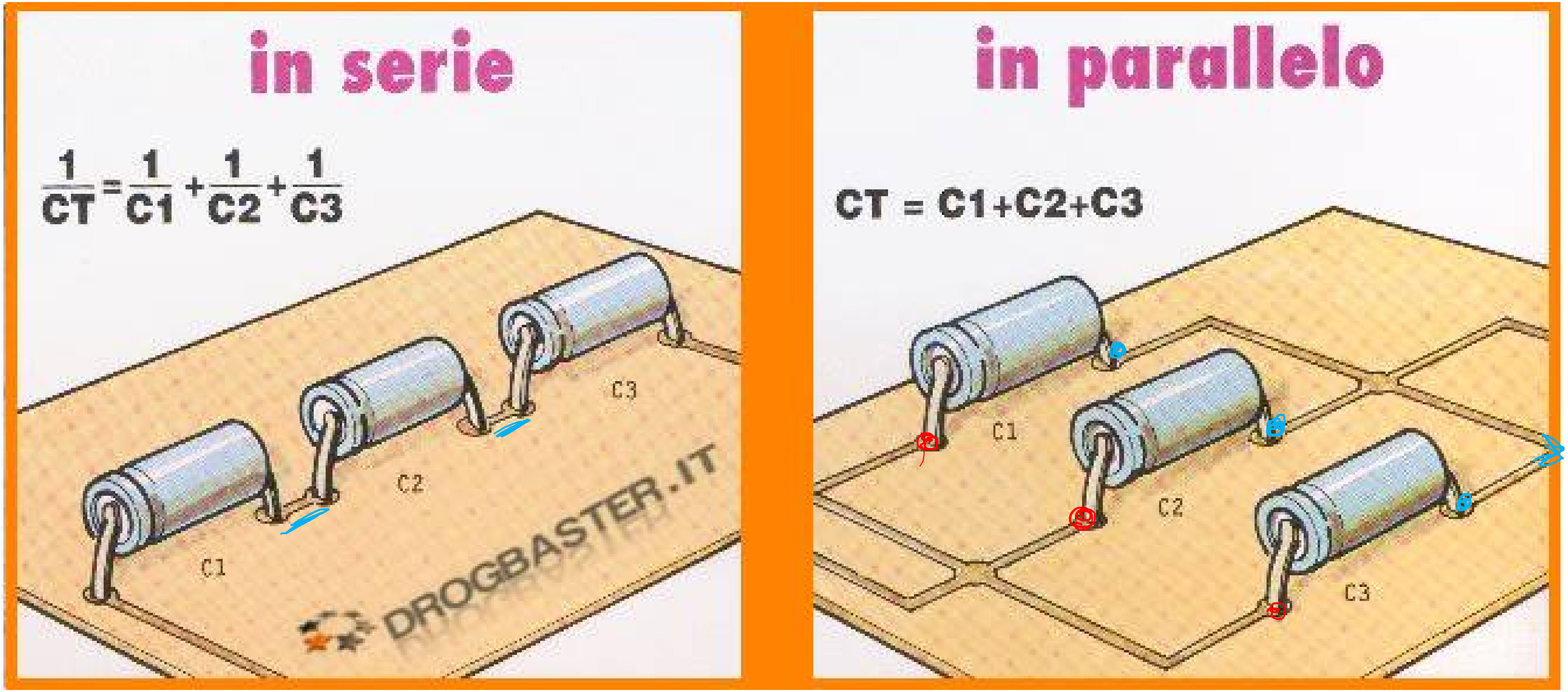
$$C_{\oplus} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} \Rightarrow C_{eq\oplus} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}\right)^{-1}$$

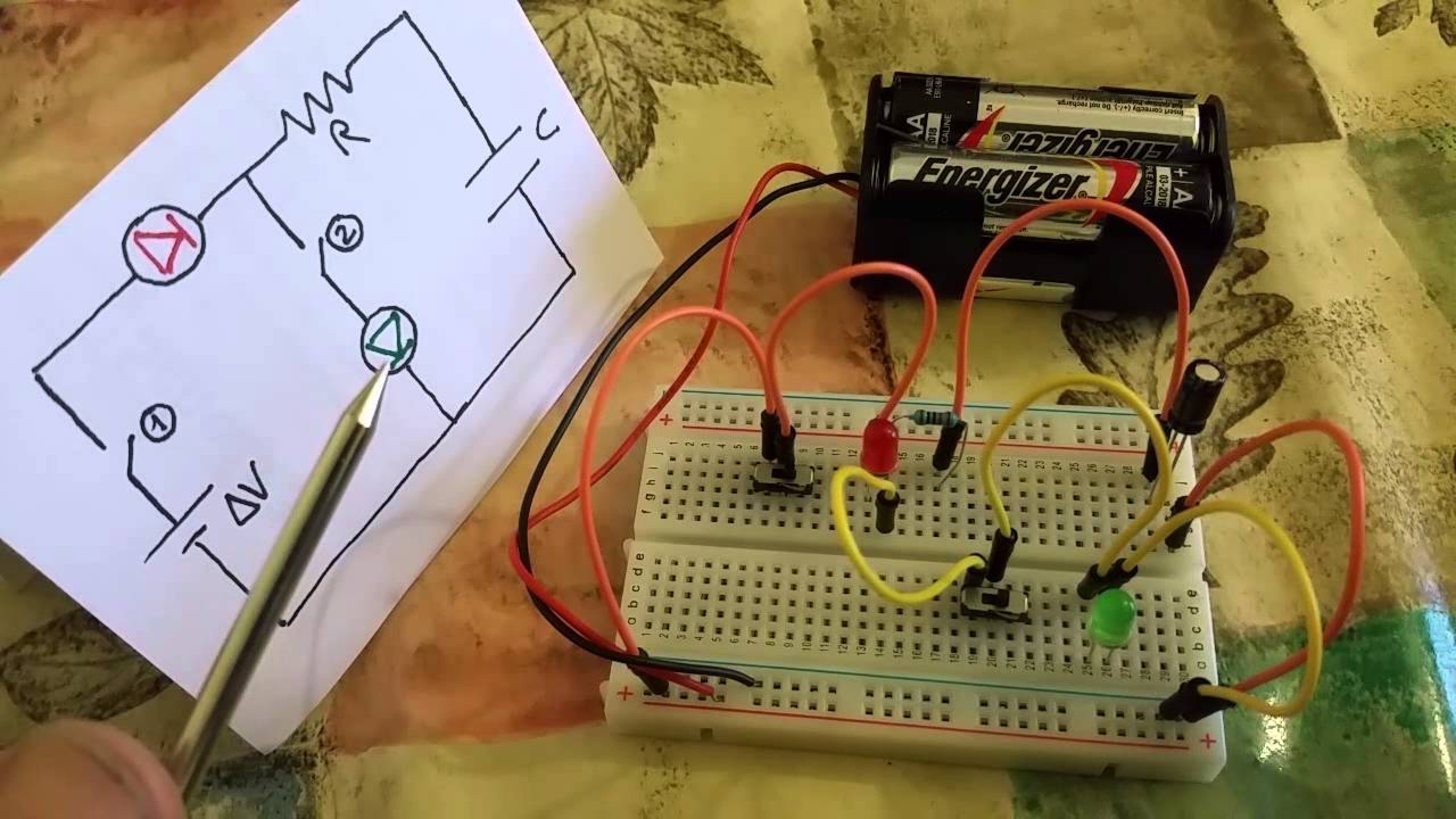

102
104K


a
b
c
d
3A 683K
250V~
1.50MKT
1 µF/10
0,47
10%
250
EVOX MMK
nichicon
VZ(M)

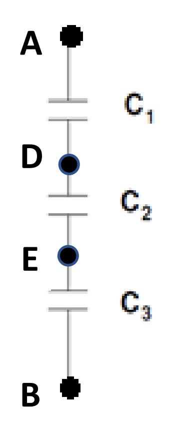





in serie
$\frac{1}{CT}=\frac{1}{C1}+\frac{1}{C2}+\frac{1}{C3}$
C1
C2
C3
DROGBASTER.IT
in parallelo
CT = C1+C2+C3
C1
C2
C3


R
C
2
1
ΔV
Energizer

Esercizio 4.1

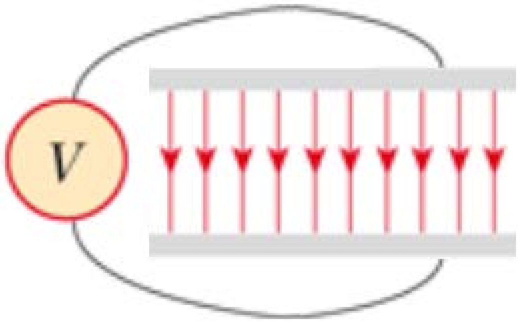


3 condensatori sono collegati in serie con una d.d.p. complessiva ai capi della serie pari a $\mathbf{V_B - V_A}$ = 100 V ed una capacità equivalente della serie pari a 100 pF. Calcolare i 3 valori $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{C_3}$ affinché tra **A** e **D** vi siano 50 V e tra **A** ed **E** vi siano 70 V.

4.5 Energia immagazzinata in un condensatore

Un condensatore inizialmente scarico può essere «caricato» usando una batteria che applichi una differenza di potenziale tra le sue armature. Occorre dunque un agente esterno che compia lavoro per trasferire cariche (da 0 alla carica Q finale) sulle armature del condensatore.

Consideriamo una fase intermedia del processo di carica e supponiamo che su un'armatura del condensatore sia stata portata una carica q' (che induce una carica -q' sull'altra armatura). Se vogliamo portare su quell'armatura un'ulteriore carica dq' dobbiamo compiere un lavoro contro le forze repulsive generate da q' sull'armatura:



$$dW = dq'V' = \frac{q'dq'}{C}$$

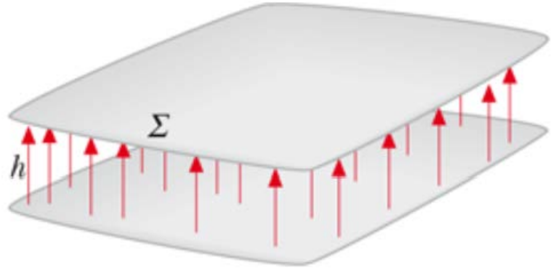
Pertanto il lavoro complessivo per caricare il condensatore è: $W = \int dW = \int_0^Q \frac{q'dq'}{C} = \frac{Q^2}{2C}$

Per la conservazione dell'energia, **questo lavoro è immagazzinato nel condensatore sotto forma di energia potenziale**

$$U_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$$

È possibile trovare un'espressione alternativa dell'energia, legata al campo elettrostatico prodotto dalle cariche sulle armature.

Consideriamo per semplicità un condensatore piano, in cui il campo elettrostatico è uniforme tra le armature e nullo al di fuori. Ricordando che $\boldsymbol{V = Eh}$



$$\boldsymbol{U_e = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h}\right)(Eh)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \Sigma\, h\, E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \Omega\, E^2}$$

Dove abbiamo indicato con $\boldsymbol{\Omega}$ il volume dello spazio compreso tra le due armature del condensatore.

$$\boldsymbol{u_e = \frac{U_e}{\Omega} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\, E^2}$$

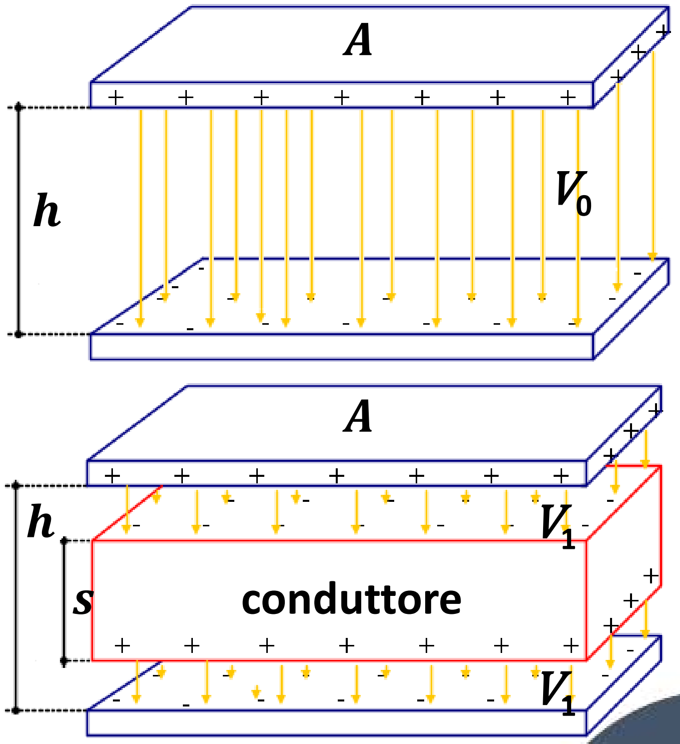
Ovvero esiste un rapporto di proporzionalità diretta tra la densità volumica di energia elettrostatica immagazzinata da un condensatore ed il quadrato del campo elettrostatico.

Questi risultati possono essere generalizzati ad una qualsiasi situazione in cui sia presente un campo elettrostatico in un determinato volume $\boldsymbol{\Omega}$. L'**energia elettrostatica totale del campo** sarà

$$\boldsymbol{U_e = \int_\Omega dU_e = \int_\Omega \frac{1}{2}\varepsilon_0\, E^2 d\Omega}$$

4.6 Condensatori con dielettrici

Sino ad ora abbiamo considerato situazioni in cui lo spazio tra le armature dei condensatori era «vuoto». Vediamo cosa accade se riempiamo tale spazio parzialmente o completamente con un materiale isolante.



Cominciamo dal caso semplice di un condensatore piano di capacità $\mathbf{C_0}$, con d.d.p. $\mathbf{V_0}$ e carico con densità di carica $\boldsymbol{\sigma_0}$. Tra le armature vi è un campo elettrostatico $E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ e se la distanza tra le armature è **h** si avrà

$$V_0 = \frac{q_0}{C_0} = E_0 h$$

Se adesso <u>introduciamo parallelamente alle armature, equidistante da esse e senza toccarle, una **lastra conduttrice** </u>spessa s, otteniamo un sistema di due condensatori in serie. La differenza di potenziale tra le armature di ciascun condensatore sarà

$$V_1 = E_0 \frac{(h - s)}{2}$$

E la differenza di potenziale tra le armature del condensatore iniziale sarà

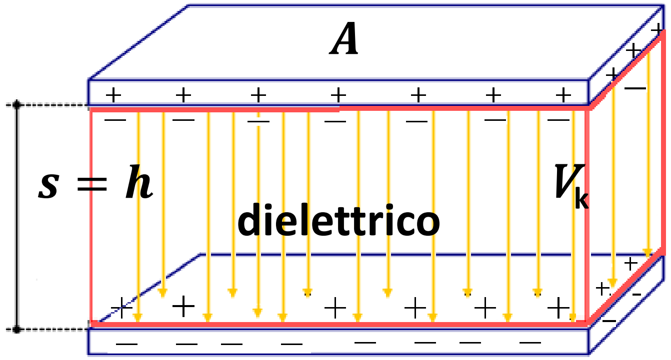
$$V' = V_1 + V_1 = E_0\,(h - s)$$

Consideriamo ora il caso in cui introduciamo tra le armature del condensatore una lastra di **dielettrico**, quindi di **materiale isolante**.

Supponiamo che il dielettrico riempia tutto lo spazio tra le armature ($h = s$).

Sperimentalmente si trova che la differenza di potenziale tra le armature del condensatore V_k è minore di V_0. Il rapporto adimensionale tra i due valori è detto **costante dielettrica relativa**

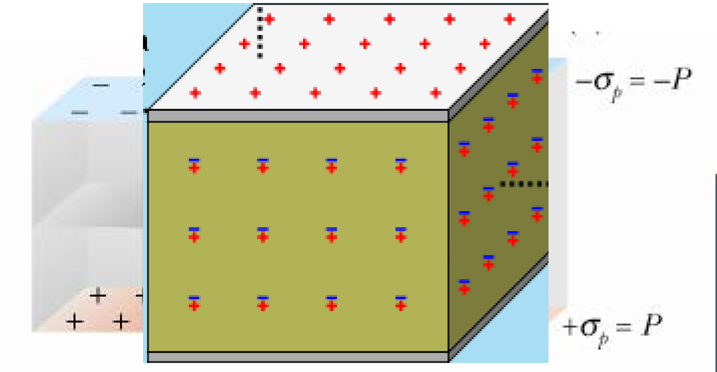
$$k = \frac{V_0}{V_k} > 1$$



Il campo elettrostatico all'interno del dielettrico (assumendo che resti uniforme) è

$$E_k = \frac{V_k}{h} = \frac{V_0}{kh} = \frac{E_0}{k} = \frac{\sigma_0}{k\varepsilon_0}$$

La variazione del campo elettrostatico dovuta alla presenza del dielettrico è



$$E_0 - E_k = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_0}{k\varepsilon_0} = \frac{k-1}{k}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

Riscriviamo il campo elettrostatico nel dielettrico

$$E_k = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{k-1}{k}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0}$$

Densità di carica di polarizzazione!

Quindi **il campo elettrostatico all'interno del dielettrico è dato dalla sovrapposizione del campo generato dalle cariche libere sulle armature del condensatore e del campo generato dalle cariche di polarizzazione nel dielettrico**.

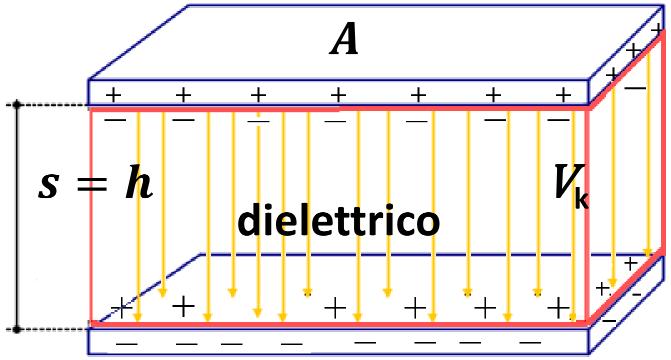
La capacità del condensatore riempito di dielettrico risulta essere

$$C_k = \frac{q_0}{V_k} = k\frac{q_0}{V_0} = kC_0 = \frac{k\varepsilon_0 A}{h}$$

La grandezza

$$\varepsilon = k\varepsilon_0$$

è detta **costante dielettrica assoluta del mezzo**.

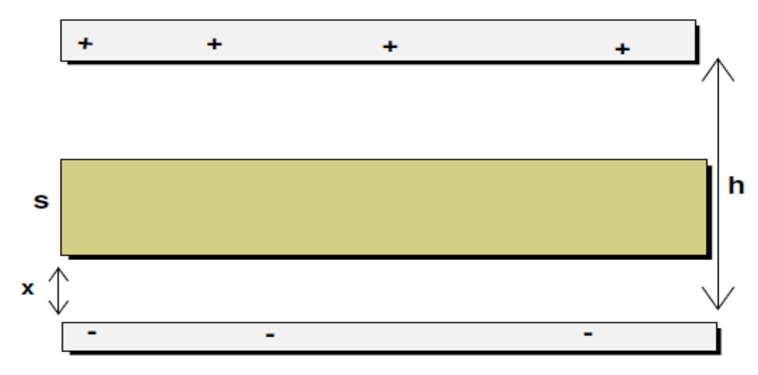


Ripetendo i passaggi fatti in precedenza per determinare l'energia elettrostatica, si trova che la densità di energia elettrostatica è

$$u_e = \frac{U_e}{Ah} = \frac{1}{2}k\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

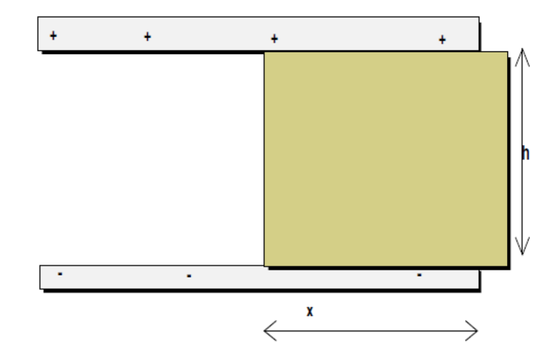
In definitiva, **tutti i risultati** trovati per i condensatori nel vuoto **continuano a valere anche in presenza di dielettrico, purché nelle espressioni si utilizzi la costante dielettrica assoluta del mezzo**.

Esercizio 4.2



All’interno di un condensatore le cui armature distano **h** e hanno area **A**, viene inserita una lastra dielettrica (costante dielettrica relativa **k**) di spessore **s < h**, avente la stessa area delle armature del condensatore. Calcolare la capacità del condensatore.

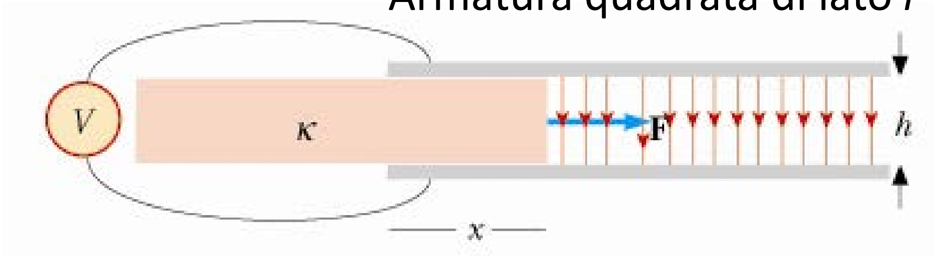
Esercizio 4.3



Supponiamo di cominciare ad inserire una lastra dielettrica che riempie tutto lo spessore **h** del condensatore piano (armature quadrate di lato **l**), ma questa volta abbiamo iniziato ad inserire il dielettrico solo di un tratto **x**. Calcolare la forza **F** con cui la lastra è risucchiata tra le armature quando il condensatore è mantenuto collegato ad un generatore di d.d.p. costante **V** tra le armature.

Supponiamo di cominciare ad inserire una lastra dielettrica che riempie tutto lo spessore **h** del condensatore piano (armature quadrate di lato **l**), ma questa volta abbiamo iniziato ad inserire il dielettrico solo di un tratto **x**. Calcolare la forza **F** con cui la lastra è risucchiata tra le armature quando il condensatore è mantenuto **collegato ad un generatore di d.d.p. costante V tra le armature.**

Armatura quadrata di lato *l*



$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 \kappa}{h} lx + \frac{\varepsilon_0 l(l-x)}{h} \qquad dC(x) = \frac{\varepsilon_0 l(\kappa - 1)}{h} dx$$

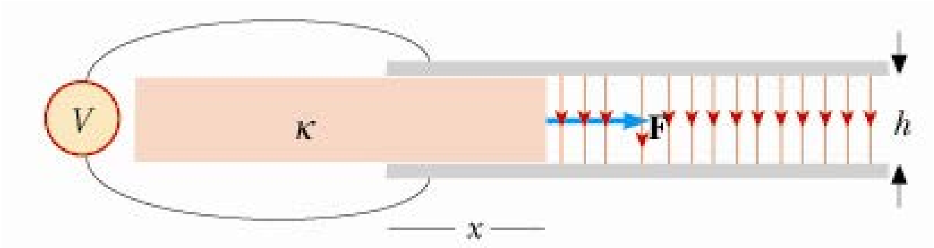
$$U_C(x) = \frac{1}{2} V^2 C(x) \qquad dU_C(x) = \frac{1}{2} V^2 dC$$ quindi se $$dC(x) > 0 \Rightarrow dU_C > 0$$

Il generatore deve spostare sulle armature la carica $dq = VdC$ compiendo quindi il lavoro

$$dW_{Gen} = Vdq = V^2 dC$$

Ed il resto dell'energia??

$$dW_{Gen} = dW_{lastra} + dU_C$$



$$dW_{Gen} = dW_{lastra} + dU_C$$

quindi

$$dW_{lastra} = Fdx = dW_{Gen} - dU_C$$

$$Fdx = \frac{1}{2}V^2 dC$$

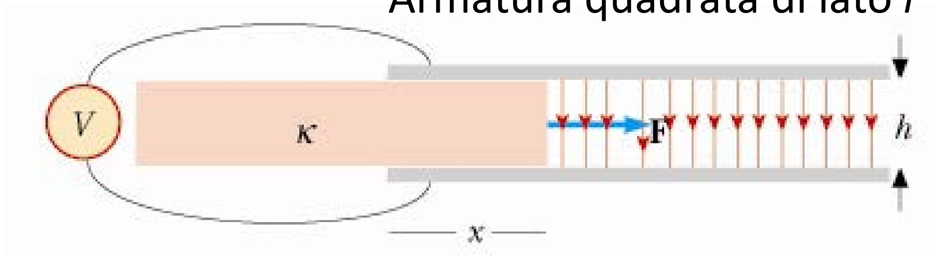
$$dC(x) = \frac{\varepsilon_0 l(\kappa - 1)}{h}dx$$ quindi ottengo $$F = \frac{\varepsilon_0 l(\kappa - 1)V^2}{2h}$$

In maniera alternativa: $F = -\dfrac{dU_{Tot}}{dx}$ ove $dU_{Tot} = dU_{Gen} + dU_C = -V^2 dC + \dfrac{1}{2}V^2 dC$

quindi ottengo $F = -\dfrac{dU_{Tot}}{dx} = -\dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{1}{2}V^2 dC\right) = \dfrac{1}{2}V^2\dfrac{dC}{dx}$ $\quad F(x) > 0$

Supponiamo ora di cominciare ad inserire la stessa lastra dielettrica ma questa volta **scollegando il condensatore dal generatore,** dando vita ad un processo a **carica costante**

Armatura quadrata di lato *l*



$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 \kappa}{h} lx + \frac{\varepsilon_0 l(l-x)}{h} \qquad dC(x) = \frac{\varepsilon_0 l(\kappa - 1)}{h} dx$$

$$U_C(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(x)} \qquad dU_C(x) = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2(x)} dC$$

quindi se $dC(x) > 0 \Rightarrow dU_C(x) < 0$

$$dW = Fdx = -dU_C$$

quindi

$$F(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2(x)} dC/dx$$

e $F(x) > 0$

Esercizio 4.4

Tra le lamine di area **$S = 115\ cm^2$** di un condensatore piano, distanti **$d = 1.24\ cm$**, viene inserito un dielettrico di spessore **$b = 0.78\ cm$** e costante dielettrica relativa **$\varepsilon_r = 2.61$**. Prima dell'inserimento il condensatore è stato caricato a **$V = 85.5\ V$** e tenuto isolato. Qual è la d.d.p. dopo l'inserimento del dielettrico?

Esercizio 4.5

Due conduttori sferici **C_1** e **C_2**, cavi e molto sottili, concentrici e di raggi **$R_1 = 10\ cm$** e **$R_2 = 20\ cm$** sono sostenuti da un supporto isolante. La carica **$q_1 = -20\ nC$** viene trasferita su **C_1** e la carica **$q_2 = +50\ nC$** su **C_2**. Calcolare la **ΔV** tra **C_1** e **C_2**. Successivamente un conduttore sferico **C_3** di raggio **$R_3 = 5\ cm$**, anch'esso sospeso ad un supporto isolante, ma molto lontano dai primi due, viene collegato con un conduttore a **C_2**. Calcolare il potenziale **V** rispetto a ∞ di **C_2** e **C_3**.