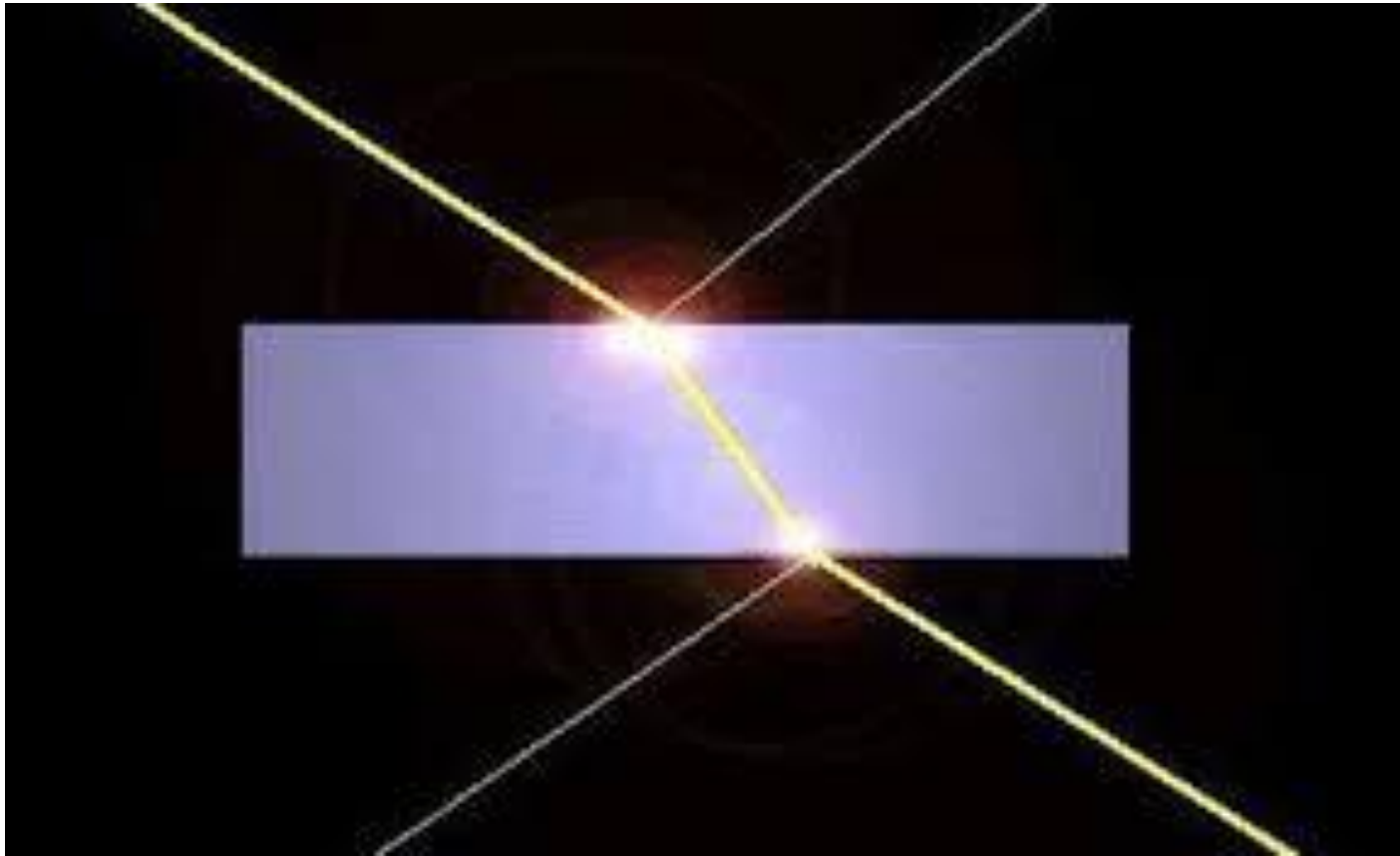
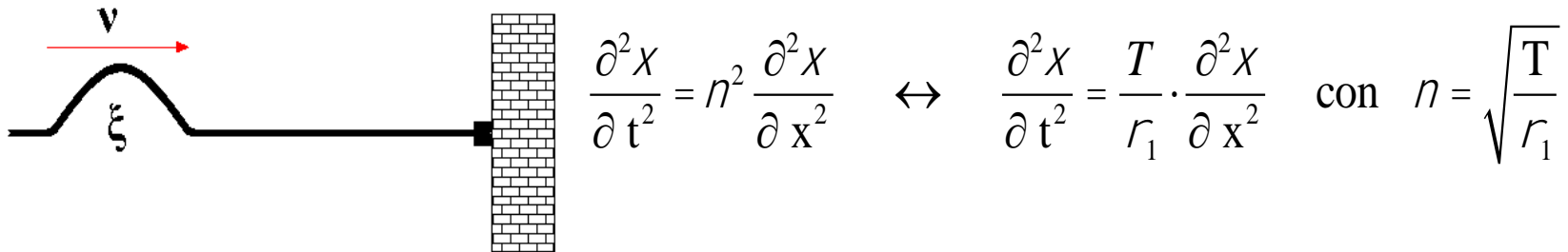


# CAPITOLO 5

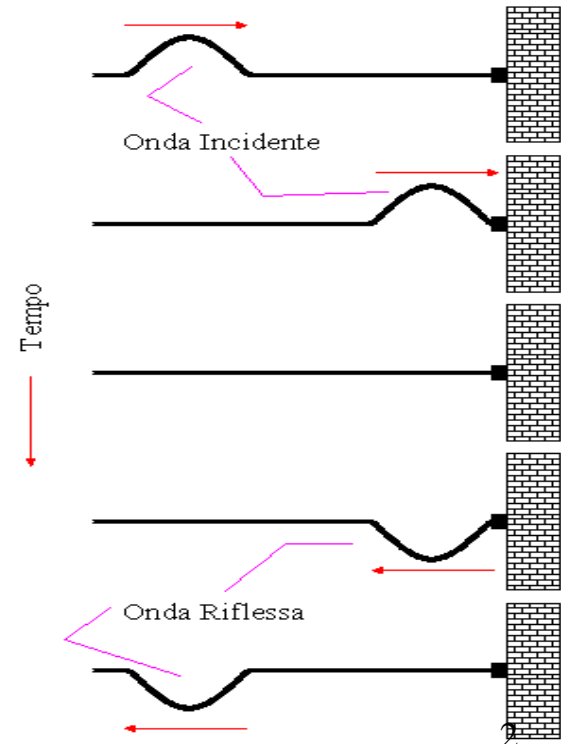
## Riflessione e Rifrazione



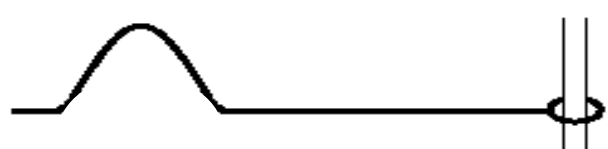
Perturbazione prodotta dal movimento dell'estremità libera di una corda tesa con l'altra estremità fissata al muro.



L'onda incidente dà vita nel punto di fissaggio a un'onda riflessa capovolta rispetto a quella incidente.



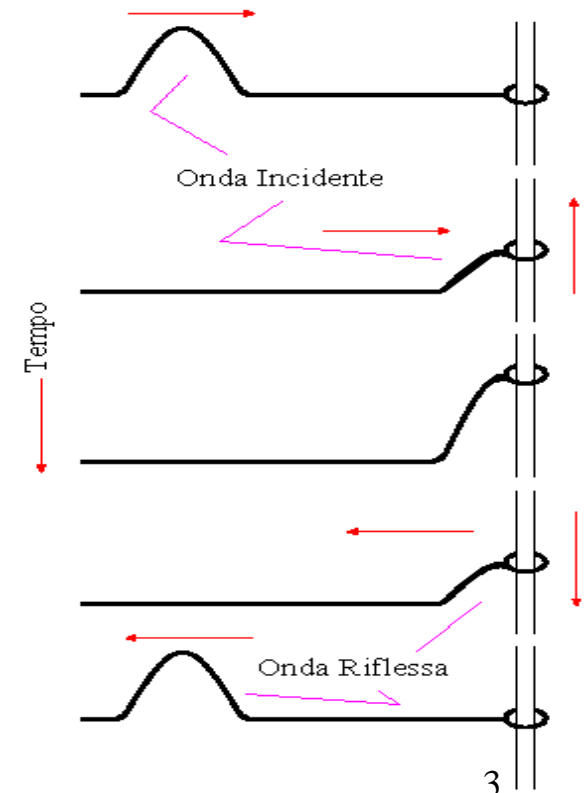
Perturbazione prodotta dal movimento dell'estremità libera di una corda tesa con l'altra estremità libera di muoversi in direzione verticale muro.



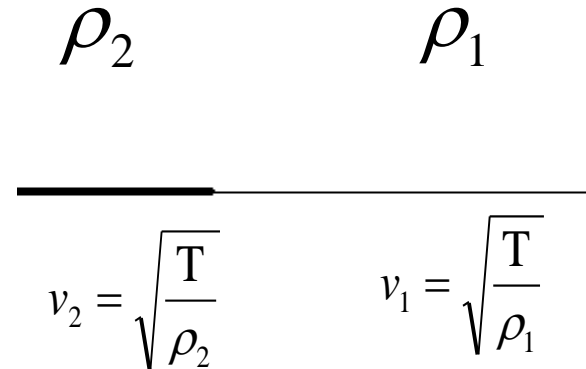
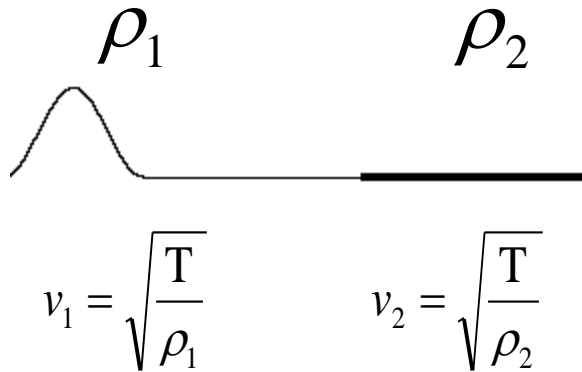
A diagram showing a pulse on a string fixed to a wall. The pulse is a hump moving towards the wall. The wall is represented by two vertical lines and a ring at the end of the string.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \leftrightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho_1}{T} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{con } v = \sqrt{\frac{T}{\rho_1}}$$

L'onda incidente in prossimità della giunzione produce lo spostamento dell'anello e l'onda riflessa non si inverte rispetto a quella incidente.



Più in generale nel passaggio da una corda ad un'altra



L'onda incidente nel passaggio da una porzione di corda a densità minore ad una a densità maggiore, genera un'onda trasmessa e un'onda riflessa dove quest'ultima è capovolta rispetto all'onda incidente.

L'onda incidente nel passaggio da una porzione di corda a densità maggiore ad una a densità minore produce un'onda trasmessa e ad una riflessa, dove quest'ultima non si inverte rispetto all'onda incidente.

Si considera una corda sia costituita da due porzioni densità  $\rho_1$  e  $\rho_2$



Le velocità  $v_1$  e  $v_2$  di propagazione nei due mezzi sono diverse mentre la frequenza ( $f$ ) e la pulsazione ( $\omega$ ) restano uguali

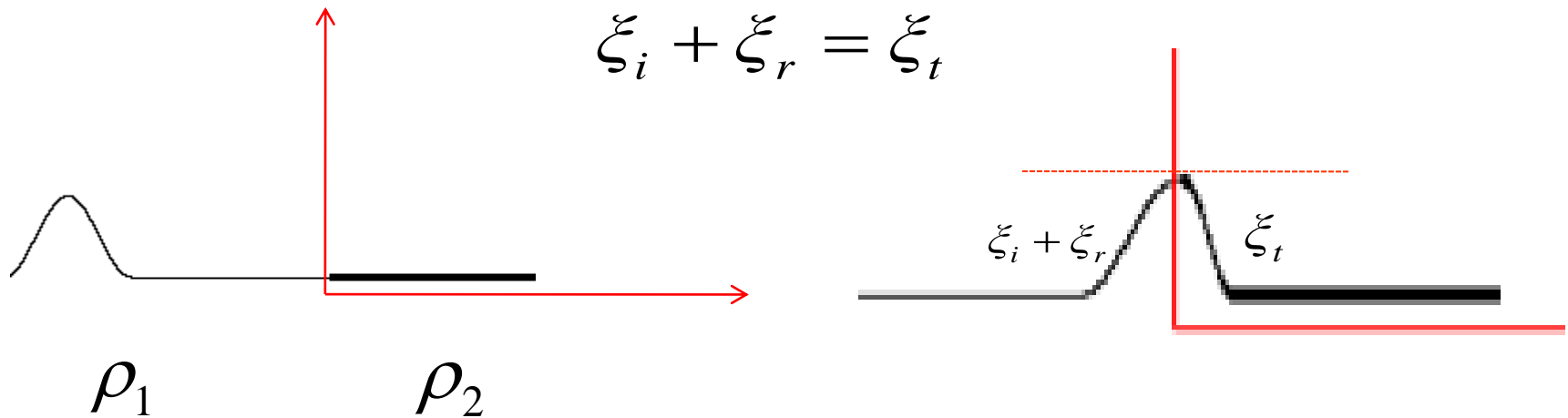
Equazioni delle tre onde

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i = X_{0,i} \cdot \cos(k_1 x - \omega t) \rightarrow \text{onda incidente} \\ X_r = X_{0,r} \cdot \cos(k_1 x + \omega t) \rightarrow \text{onda riflessa} \\ X_t = X_{0,t} \cdot \cos(k_2 x - \omega t) \rightarrow \text{onda trasmessa} \end{array} \right.$$

dove

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = \frac{\omega}{v_1} = \omega \cdot \sqrt{\frac{\rho_1}{T}} \\ k_2 = \frac{\omega}{v_2} = \omega \cdot \sqrt{\frac{\rho_2}{T}} \end{array} \right.$$

Scelto un sistema di riferimento avente l'origine dell'asse orizzontale in corrispondenza del punto di giunzione tra i due mezzi, in ogni istante la somma tra l'onda riflessa ( $\xi_r$ ) e l'onda incidente ( $\xi_i$ ) deve essere pari all'onda rifratta ( $\xi_t$ )



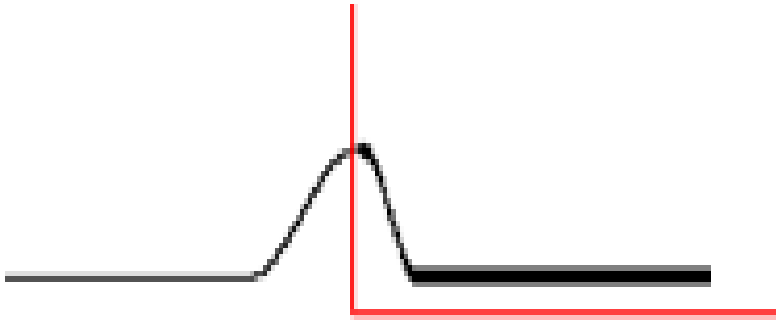
Per  $x = 0$  si ha:

$$X_i(0, t) = X_{0,i} \times \cos(k_1 x - \omega t) = X_{0,i} \times \cos(\omega t)$$

$$X_r(0, t) = X_{0,r} \times \cos(k_1 x + \omega t) = X_{0,r} \times \cos(\omega t)$$

$$X_t(0, t) = X_{0,t} \times \cos(k_2 x - \omega t) = X_{0,t} \times \cos(\omega t)$$

$$X_{0,i} + X_{0,r} = X_{0,t}$$



$$X_{0,i} + X_{0,r} = X_{0,t}$$

Inoltre, il limite da destra e sinistra della componente verticale della forza sul punto di contatto fra le due corde a diversa densità devono eguagliarsi

$$T \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\xi_i + \xi_r) \right]_{x=0} = T \left[ \frac{\partial \xi_t}{\partial x} \right]_{x=0}$$

$$-k_1 X_{0,i} \text{sen}(-\omega t) - k_1 X_{0,r} \text{sen}(\omega t) = -k_2 X_{0,t} \text{sen}(-\omega t)$$

$$k_1 (X_{0,i} - X_{0,r}) = k_2 X_{0,t}$$

$$k_1(X_{0,i} - X_{0,r}) = k_2X_{0,t}$$

$$X_{0,i} + X_{0,r} = X_{0,t}$$

$$X_{0,r} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} X_{0,i}$$

$$X_{0,t} = \frac{2k_1}{k_2 + k_1} X_{0,i}$$

→ Ampiezza onda riflessa

→ Ampiezza onda trasmessa

Da cui è possibile definire i seguenti coefficienti

**Riflessione**

$$r = \frac{X_{0,r}}{X_{0,i}} = \frac{\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}$$

**Trasmissione**

$$t = \frac{X_{0,t}}{X_{0,i}} = \frac{2\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}$$





## Riflessione

$$r = \frac{X_{0,r}}{X_{0,i}} = \frac{\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}$$

## Trasmissione

$$t = \frac{X_{0,t}}{X_{0,i}} = \frac{2\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}$$

- Il coefficiente “ $t$ ” è sempre positivo per cui l’onda trasmessa ( $\xi_t$ ) è sempre in fase con l’onda incidente ( $\xi_i$ );
- Il coefficiente “ $r$ ” è positivo ( se  $\rho_1 > \rho_2$  (da mezzo più denso a mezzo meno denso) per cui l’onda riflessa ( $\xi_r$ ) è in fase con l’onda incidente ( $\xi_i$ );
- Il coefficiente “ $r$ ” è negativo se  $\rho_2 > \rho_1$  (da mezzo meno denso a mezzo più denso) per cui l’onda riflessa ( $\xi_r$ ) è in opposizione fase con l’onda incidente ( $\xi_i$ ) e si capovolge;

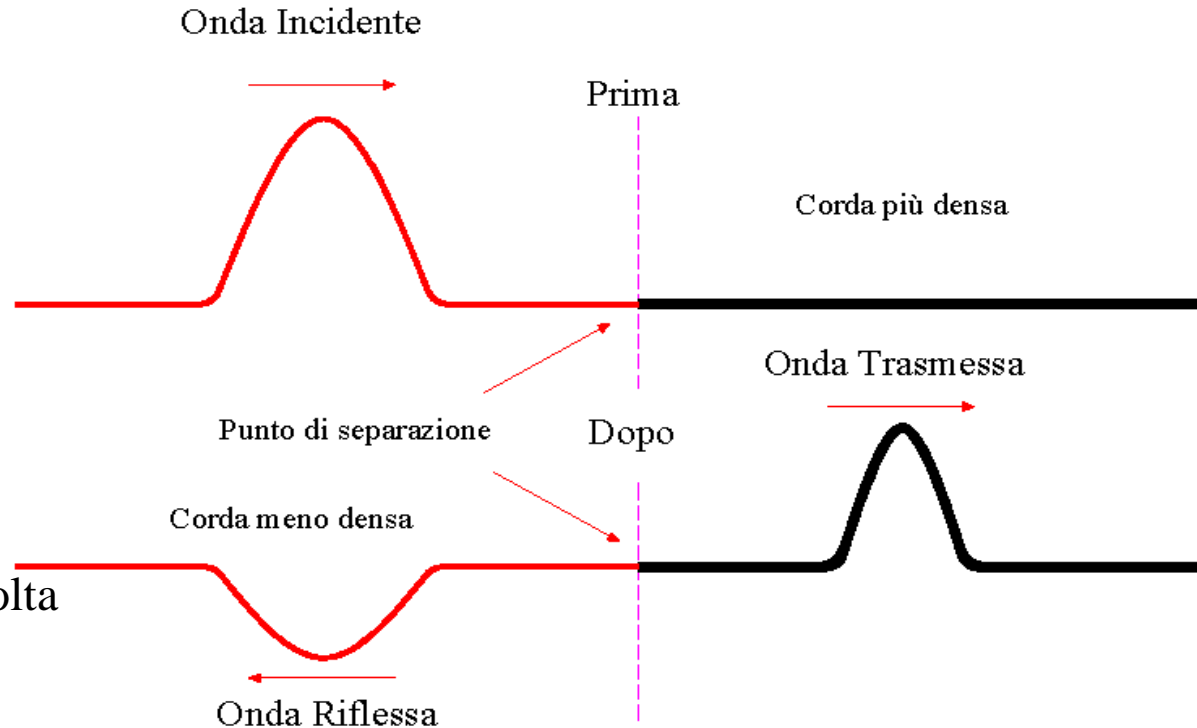
Se l'onda incide su una corda pesante da una corda leggera ( $\rho_2 > \rho_1$ ) si ha che l'onda riflessa è ridotta in ampiezza ed invertita mentre l'onda trasmessa ha un'ampiezza minore di quella dell'incidente ed una velocità minore rispetto alle altre due onde.

$$r = \frac{X_{0,r}}{X_{0,i}} = \frac{\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}$$

$$X_{0,i} + X_{0,r} = X_{0,t}$$

$$X_{0,i} + rX_{0,i} = X_{0,t}$$

$r < 0$  l'onda riflessa è capovolta



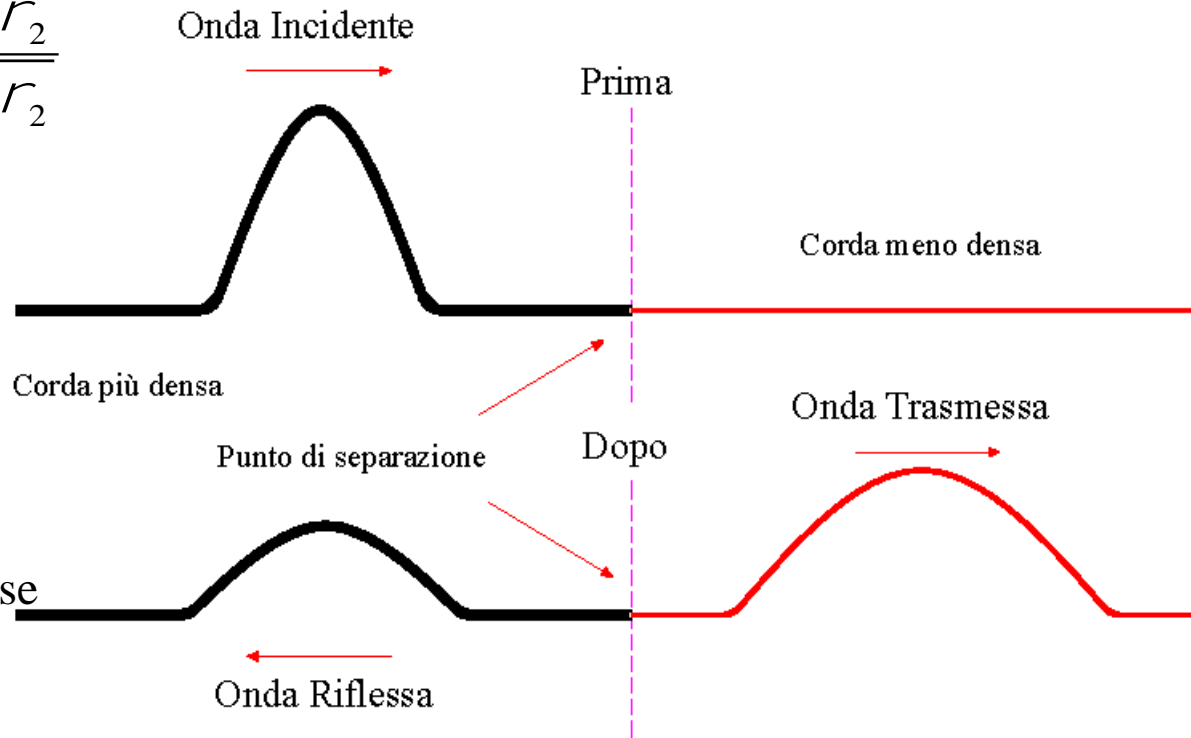
Se l'onda incide su una corda leggera da una corda più pesante ( $\rho_1 > \rho_2$ ), si ha che l'onda riflessa è ridotta in ampiezza e non invertita mentre l'onda trasmessa ha ampiezza minore rispetto a dell'incidente ed è caratterizzata da una velocità di propagazione maggiore rispetto a quella delle altre due onde.

$$r = \frac{X_{0,r}}{X_{0,i}} = \frac{\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}$$

$$X_{0,i} + X_{0,r} = X_{0,t}$$

$$X_{0,i} + rX_{0,i} = X_{0,t}$$

$r > 0$  l'onda riflessa è in fase



L'intensità di un'onda ( $I$ ) rappresenta il valor medio dell'energia che passa attraverso una sezione ortogonale alla direzione di propagazione per unità di tempo ed unità di area, in particolare per la corda si ha:

$$I_i = \frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 v_1 \xi_{0,i}^2 = \frac{1}{2} \sqrt{T \rho_1} \omega^2 \xi_{0,i}^2 \longrightarrow \text{Onda incidente}$$

$$I_r = \frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 v_1 \xi_{0,r}^2 = \frac{1}{2} \sqrt{T \rho_1} \omega^2 r^2 \xi_{0,i}^2 \longrightarrow \text{Onda riflessa}$$

$$I_t = \frac{1}{2} \rho_2 \omega^2 v_2 \xi_{0,t}^2 = \frac{1}{2} \sqrt{T \rho_2} \omega^2 t^2 \xi_{0,i}^2 \longrightarrow \text{Onda trasmessa}$$

Coefficienti di riflessione  $R$  e di trasmissione  $T$

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\chi_{0,r}^2}{\chi_{0,i}^2} = r^2 = \left( \frac{\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}} \right)^2$$

$$R+T=1$$

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{\rho_2 v_2 \xi_{0,t}^2}{\rho_1 v_1 \xi_{0,i}^2} = \frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1}} t^2 = \frac{4\sqrt{\rho_2}\sqrt{\rho_1}}{(\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1})^2}$$

Se definiamo  $n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1}}$  indice di rifrazione

$$r = -\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1} \quad R = \left( \frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1} \right)^2$$

Definiamo Impedenza della corda

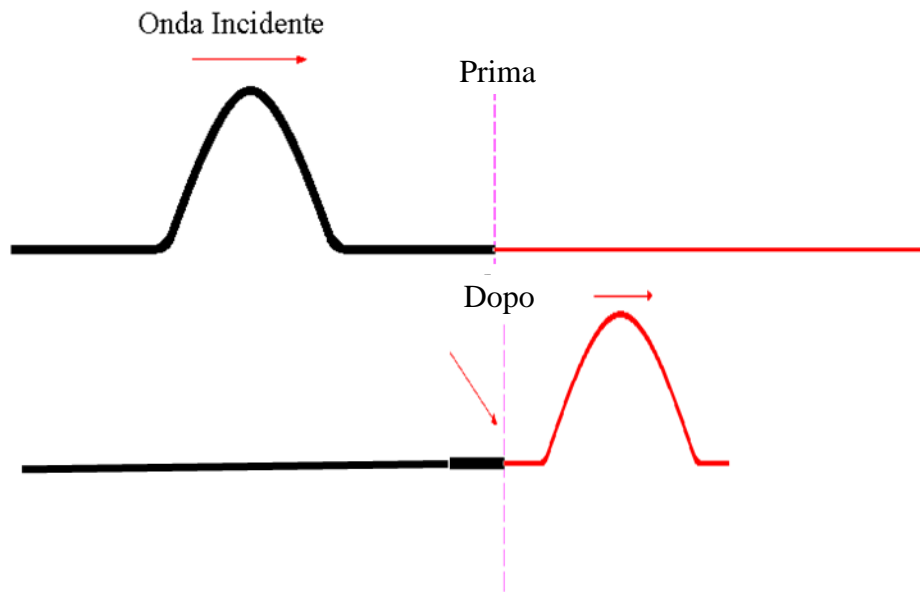
$$Z = \sqrt{T\rho}$$

$$r = \frac{X_{0,r}}{X_{0,i}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$t = \frac{\xi_{0,t}}{\xi_{0,i}} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

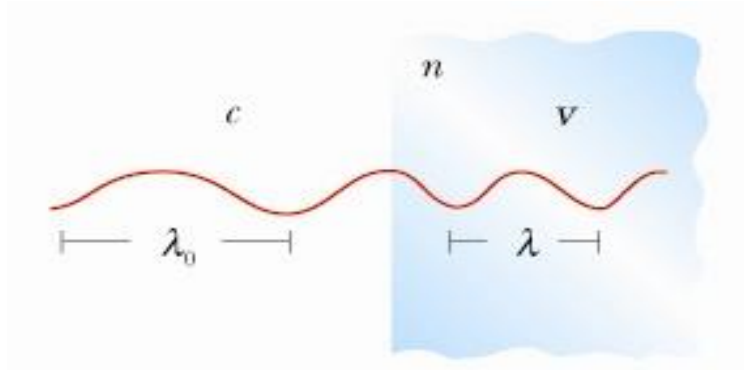
Per corde di ugual impedenza

$$r = \frac{\xi_{0,r}}{\xi_{0,i}} = 0$$



$$\lambda_0 = \frac{c}{f}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}, \quad \lambda = \frac{v}{f}$$

Nel passaggio dal vuoto da un mezzo cambiano  $v$ ,  $k$ ,  $\lambda$ , mentre restano invariate (perché determinate dalla sorgente)  $f$ ,  $\omega$



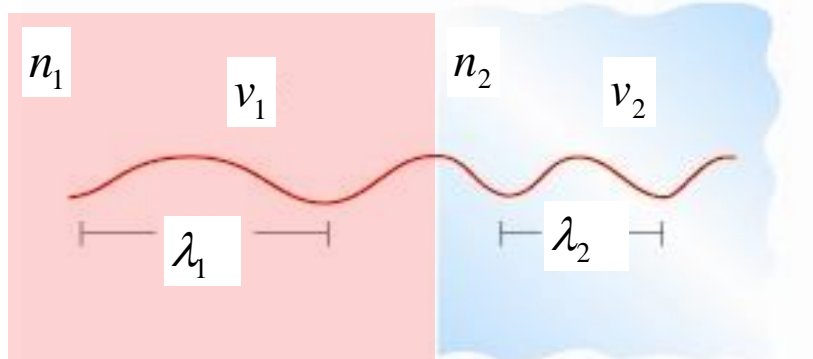
$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{c}{v}$$

$$n = \frac{c}{v}$$

$$\frac{k_0}{k} = \frac{v}{c}$$

Indice di rifrazione

Nel passaggio fra due mezzi



$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c}{n_1} \frac{n_2}{c} = \frac{n_2}{n_1}$$

L'indice di rifrazione assoluta di un mezzo  $n$  è dato dal rapporto fra la velocità della luce nel vuoto rispetto a quella nel mezzo in esame

$$n = \frac{c}{v}$$

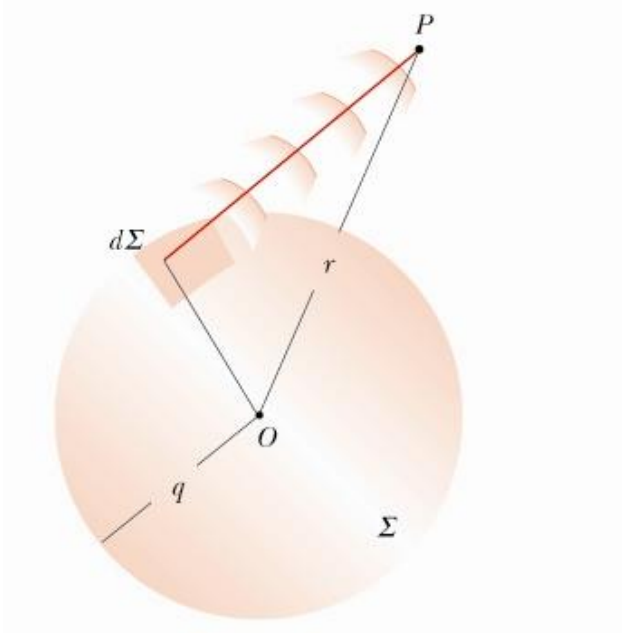
Indice di rifrazione	
Aria	1.000294
Idrogeno	1.000139
Acqua	1.33
Azoto	1.000297
Ossigeno	1.000272
Acetone	1.359
Etanolo	1.36
Etere etilico	1.352
Cloruro di sodio	1.53
Vetro comune	1.579
Plexiglas	1.48
Polietilene	1.54
Teflon	1.30
Diamante	2.465
Glicerolo	1.474
Olio di legno cedro	1.515
Calcite	1.658
Balsamo del Canada	1.530

$$n_{2,1} = \frac{n_2}{n_1}$$



## Il principio di Huygens-Fresnel può essere enunciato nel modo seguente

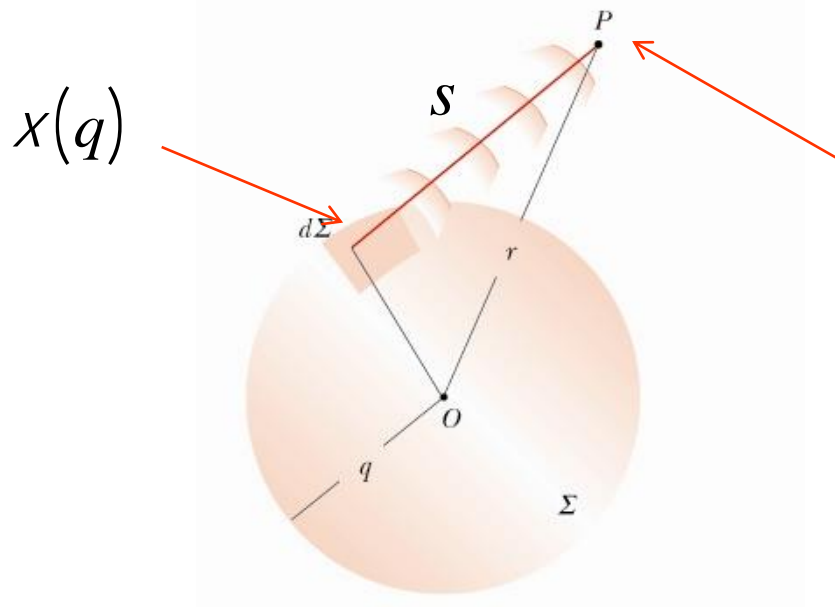
*“Ogni elemento di un fronte d’onda  $\Sigma$  può essere considerato come sorgente di onde sferiche secondarie che si propagano con la stessa velocità di fase dell’onda primaria. Il nuovo fronte d’onda  $\Sigma'$  ad un istante successivo è dato dalla superficie tangente o involuppo delle onde secondarie sferiche a tale istante di tempo”*



Tuttavia costruire il nuovo fronte d’onda si utilizza solo la parte in avanti delle onde sferiche secondarie, e non viene in alcun modo giustificata l’eliminazione delle parti all’indietro delle onde sferiche secondarie.

Il teorema di Kirchhoff fornisce una base matematica al principio di Huygens-Fresnel

*“Ogni elemento  $d\Sigma$  di una superficie d’onda  $\Sigma$  si può considerare formalmente come una sorgente di onde secondarie sferiche la cui ampiezza, proporzionale all’ampiezza dell’onda primaria e all’area  $d\Sigma$ , varia con l’angolo secondo il fattore direzionale  $f(\theta)$ ”.*

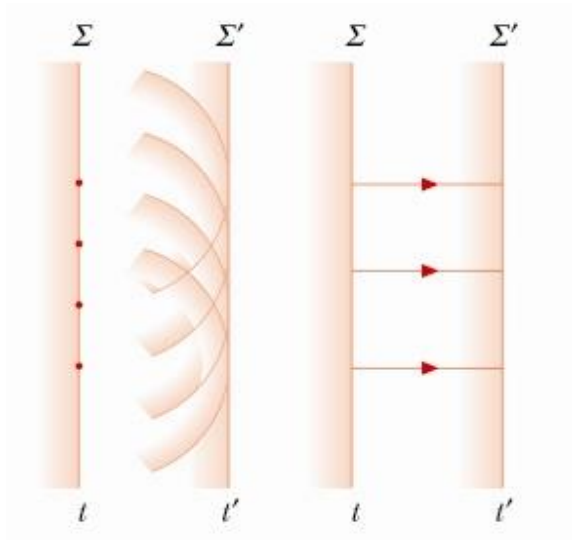


$$x_p(r) = \int_S f(\theta) x(q) dS$$

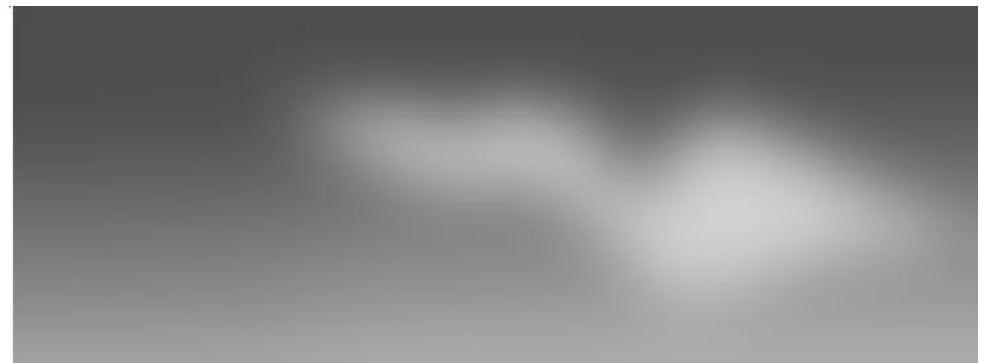
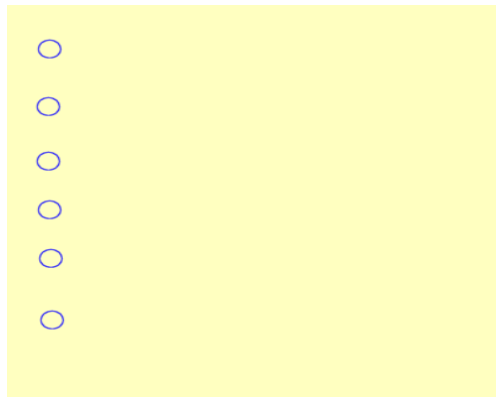
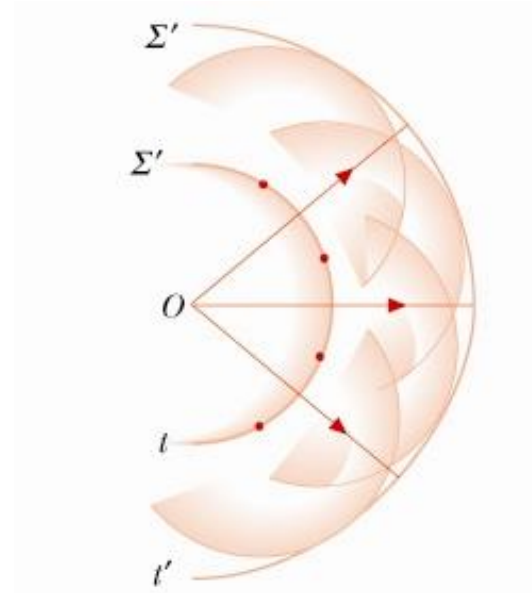
Per una onda sferica

$$f(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

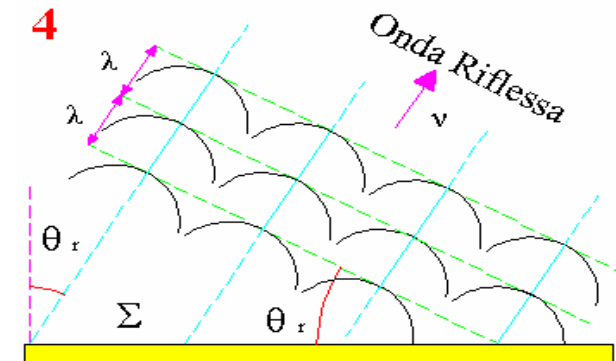
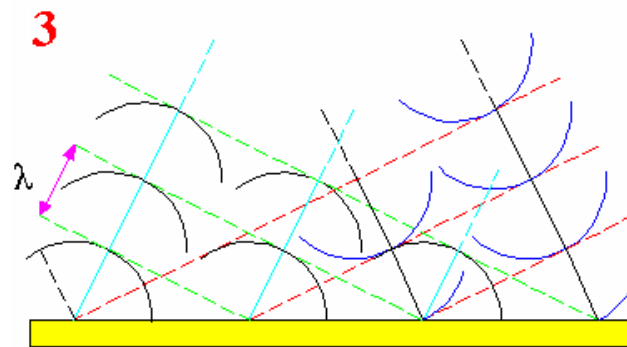
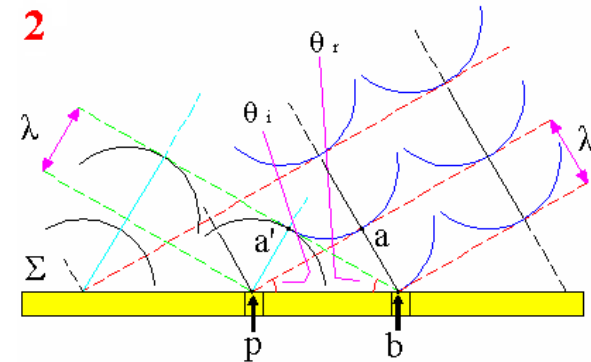
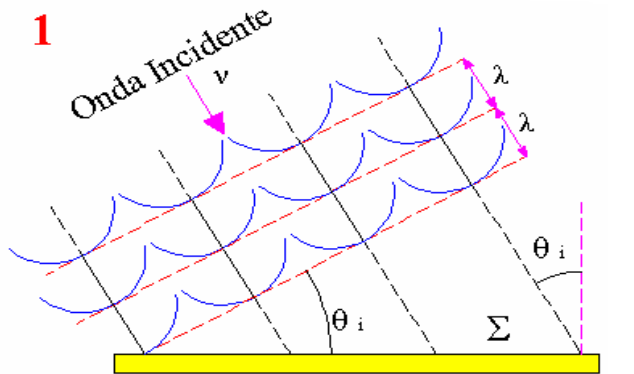
Costruzione dei fronti d'onda di una onda piana



Costruzione dei fronti d'onda di una onda sferica

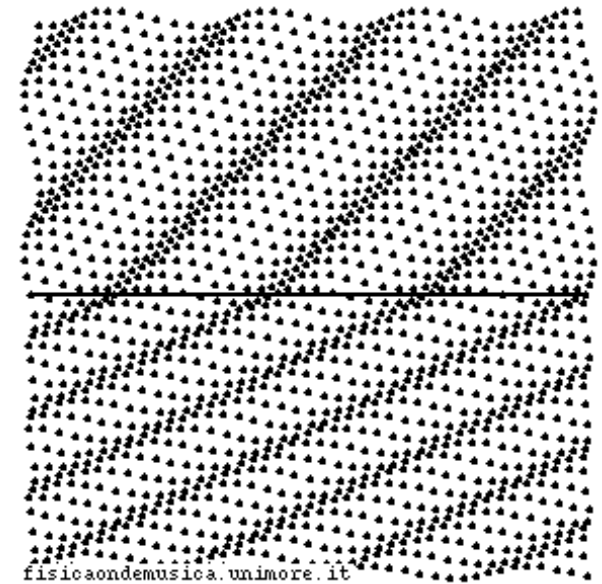
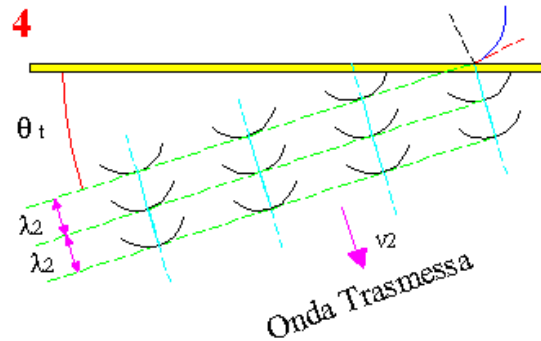
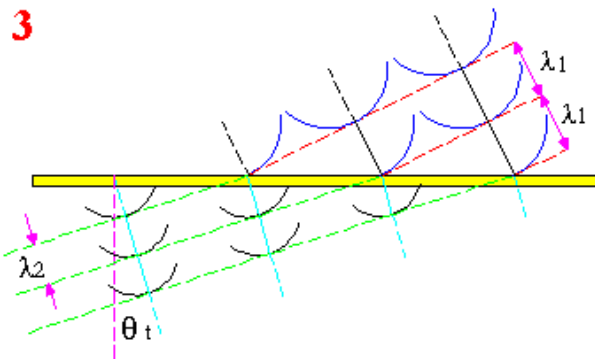
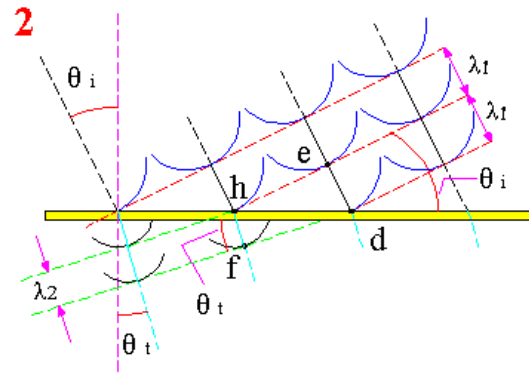
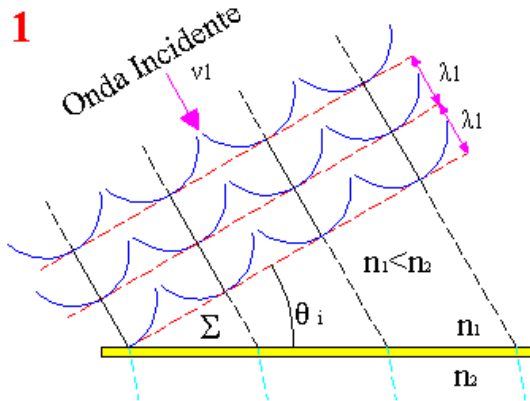


Deduzione delle leggi della riflessione e rifrazione dal principio di Huygens-Fresnel

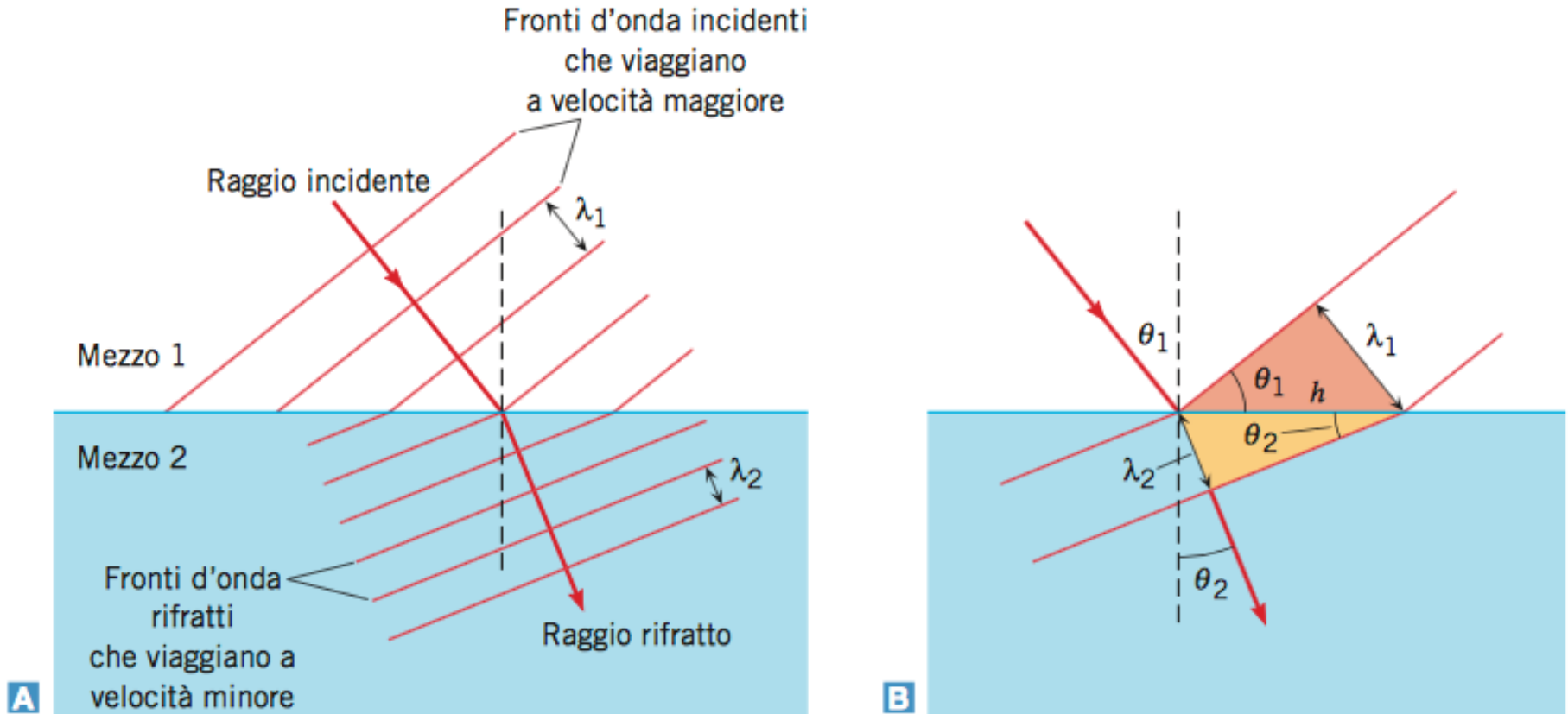


$$\vartheta_i = \vartheta_r$$

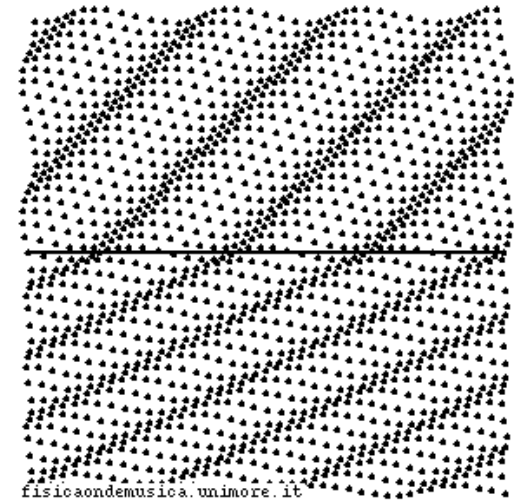
## Deduzione delle leggi della rifrazione dal principio di Huygens-Fresnel



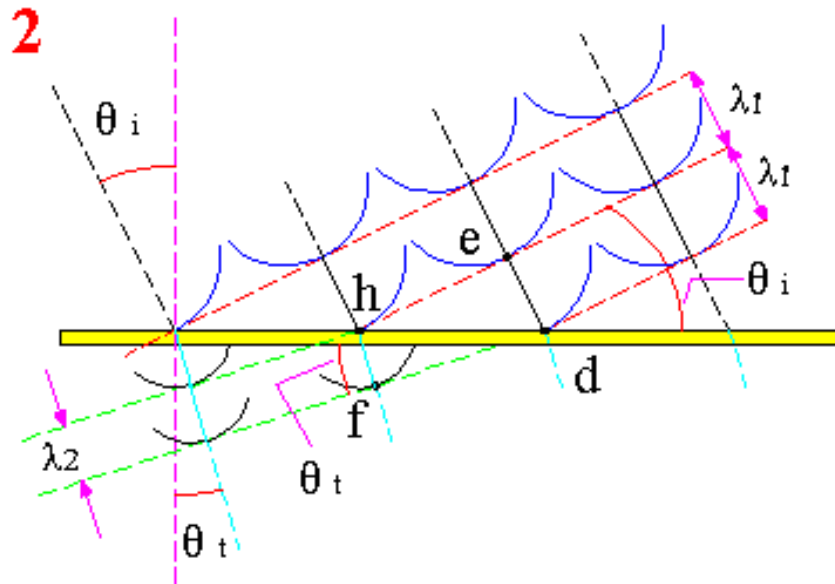
Deduzione delle leggi della rifrazione dal principio di Huygens-Fresnel



Deduzione delle leggi della rifrazione dal principio di Huygens-Fresnel



fisicaondemusica.unimore.it

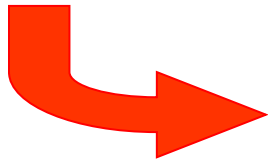


$$\sin \vartheta_i = \frac{\lambda_1}{hd} \quad \rightarrow \quad \text{per il triangolo } hde$$

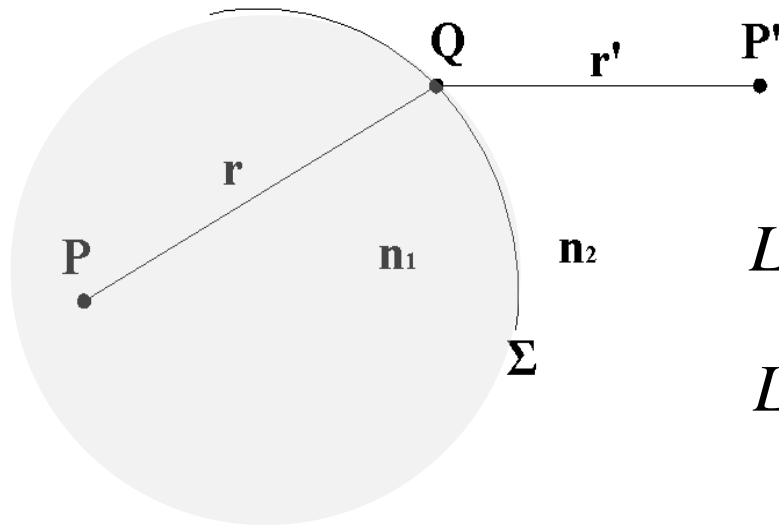
$$\sin \vartheta_t = \frac{\lambda_2}{hf} \quad \rightarrow \quad \text{per il triangolo } hdf$$

$$\frac{\sin \vartheta_i}{\sin \vartheta_t} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

*“Per andare da un punto all’altro, fra tutti i possibili percorsi la luce segue quello che richiede un tempo minimo rispetto ai percorsi vicini, con cui si possono congiungere i due punti ”*



Conseguenza del principio di Fermat si ha che in un mezzo omogeneo ed isotropo in assenza di ostacoli i percorsi della luce sono rettilinei in quanto, essendo questi i più brevi, richiedono un tempo minimo.



$$L_g = r + r' \quad \text{Cammino geometrico}$$

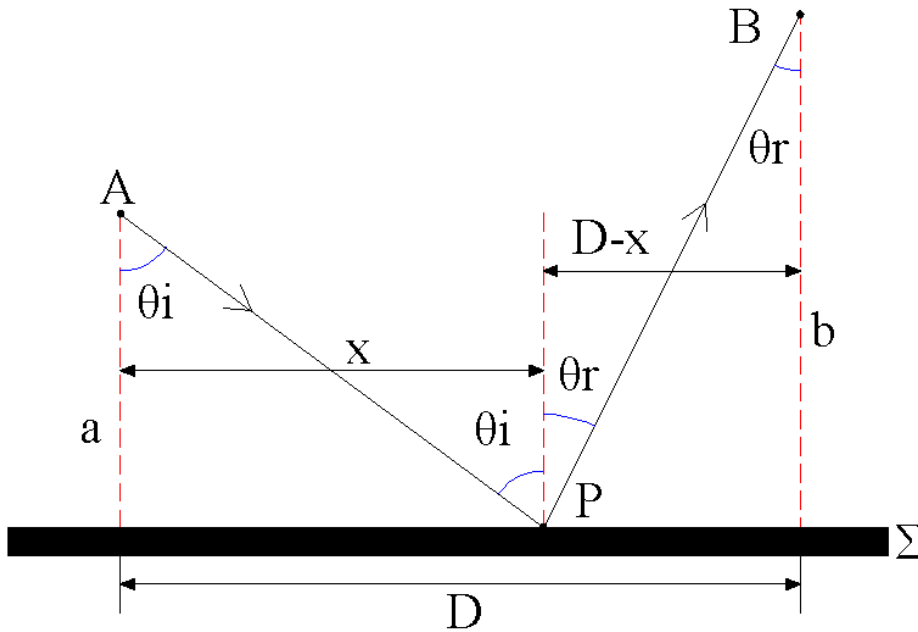
$$L = n_1 \cdot r + n_2 \cdot r' \quad \text{Cammino ottico}$$





# Riflessione

$$L = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (D-x)^2} \rightarrow \text{percorso del raggio}$$



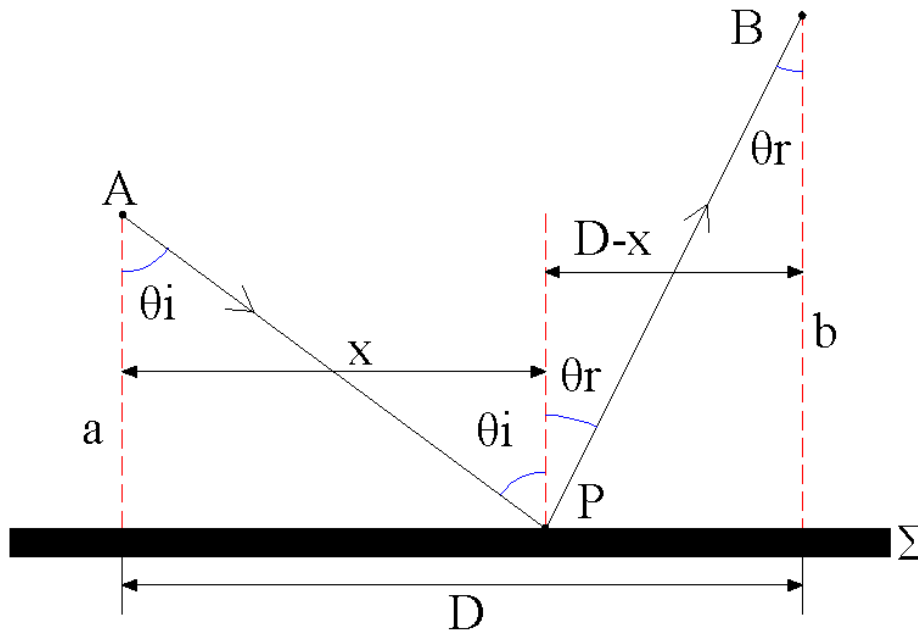
Il tempo di percorrenza della luce, ossia  $t=L/c$ , deve essere minimo. La condizione richiede che  $dt/dx=0$ .



$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \cdot \frac{dL}{dx} = \frac{1}{2 \cdot c} \cdot (a^2 + x^2)^{-1/2} \cdot 2 \cdot x - \frac{1}{2 \cdot c} \cdot [b^2 + (D-x)^2]^{-1/2} \cdot 2 \cdot (D-x) = 0$$

# Riflessione

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \cdot \frac{dL}{dx} = \frac{1}{2 \cdot c} \cdot (a^2 + x^2)^{-1/2} \cdot 2 \cdot x - \frac{1}{2 \cdot c} \cdot [b^2 + (D-x)^2]^{-1/2} \cdot 2 \cdot (D-x) = 0$$



$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{D-x}{\sqrt{b^2 + (D-x)^2}}$$

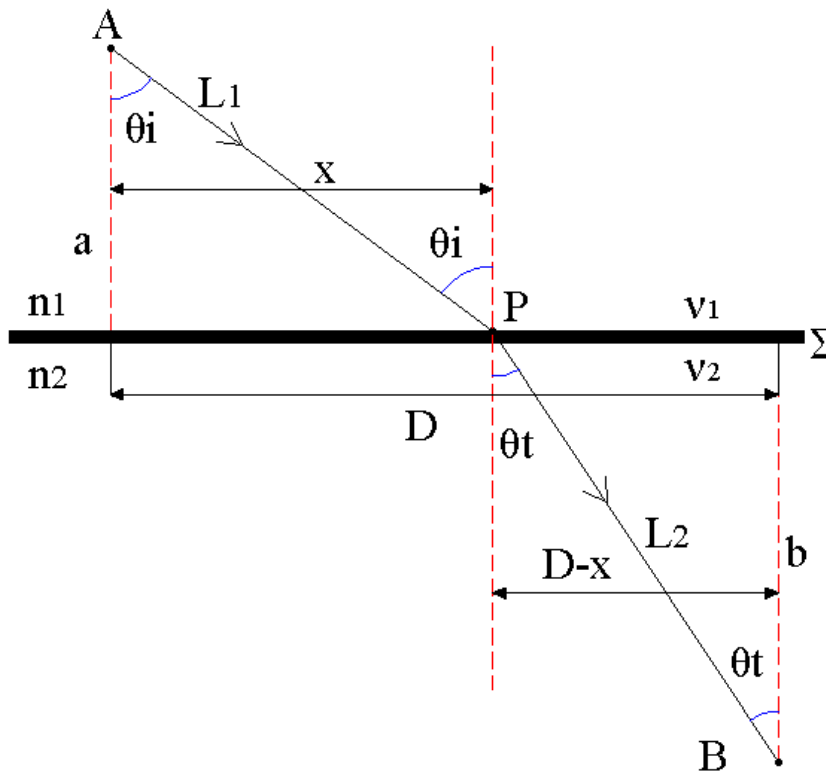
$$\sin \theta_i = \sin \theta_r$$

$$\theta_i = \theta_r$$



# Rifrazione

$$t = \frac{L_1}{v_1} + \frac{L_2}{v_2} \rightarrow t = \frac{n_1 \cdot L_1 + n_2 \cdot L_2}{c} = \frac{L}{c}$$

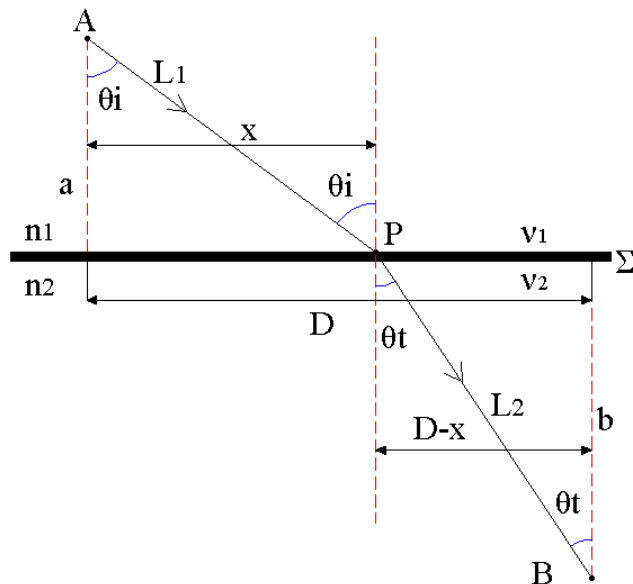


Il tempo  $t$  necessario per percorrere il tratto APB deve essere minimo, ossia  $t=L/c$  deve essere minimo. Quindi, come per la riflessione,  $dt/dx=0$ .

# Rifrazione

$$L = n_1 \cdot L_1 + n_2 \cdot L_2 = n_1 \cdot \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \cdot \sqrt{b^2 + (D-x)^2} \rightarrow \text{cammino ottico}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \cdot \frac{dL}{dx} = \frac{n_1}{2 \cdot c} \cdot (a^2 + x^2)^{-1/2} \cdot 2 \cdot x - \frac{n_2}{2 \cdot c} \cdot [b^2 + (D-x)^2]^{-1/2} \cdot 2 \cdot (D-x) = 0$$



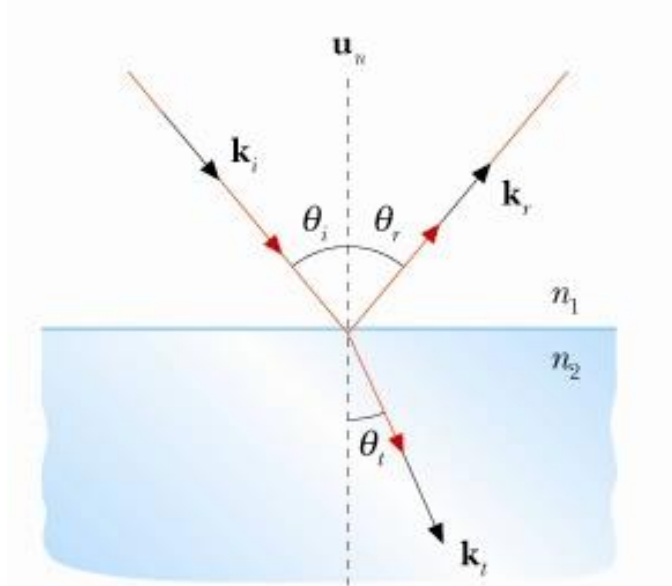
$$n_1 \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = n_2 \cdot \frac{D-x}{\sqrt{b^2 + (D-x)^2}}$$

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$





## Leggi di Snell

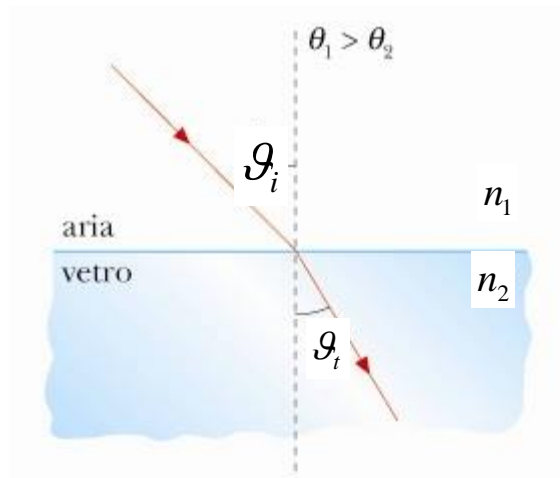


giacciono nel piano di incidenza

$$\vec{k}_i, \vec{k}_r, \vec{k}_t$$

$$\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_r$$

$$\frac{\sin \mathcal{J}_i}{\sin \mathcal{J}_t} = \frac{n_2}{n_1} = n_{2,1}$$

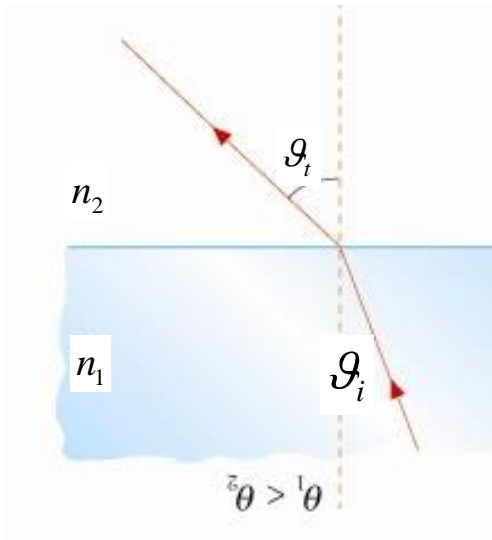


In questo caso  $n_2 > n_1$

$$\sin \mathcal{G}_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \mathcal{G}_i \quad \mathcal{G}_t < \mathcal{G}_i$$

## Leggi di Snell

In questo caso  $n_1 > n_2$

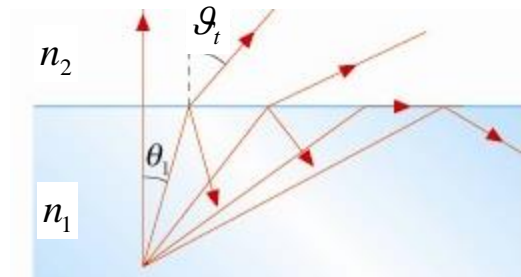


$$\frac{\text{sen } \mathcal{J}_i}{\text{sen } \mathcal{J}_t} = \frac{n_2}{n_1} = n_{2,1}$$

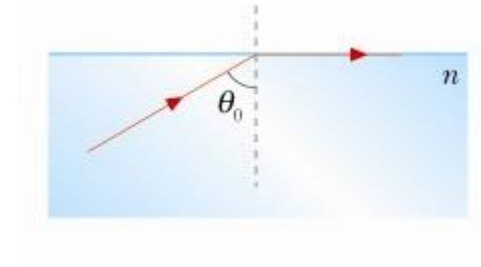
$$\text{sen } \mathcal{J}_t = \frac{n_1}{n_2} \text{sen } \mathcal{J}_i \quad \mathcal{J}_i < \mathcal{J}_t$$

## Riflessione totale

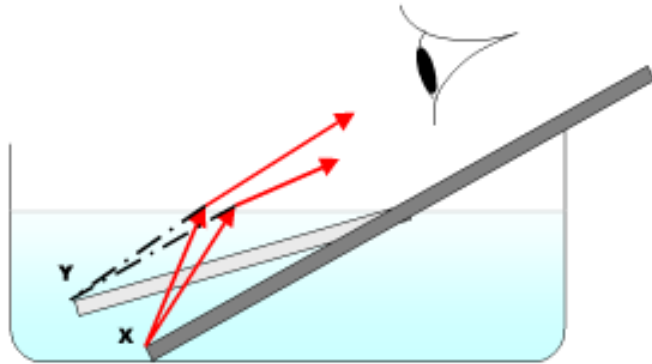
In corrispondenza dell'angolo limite o critico  $\theta_0$ , l'angolo di rifrazione risulta pari a  $\pi/2$ ; l'onda trasmessa è cioè tangente alla superficie  $\Sigma$ .



$$\mathcal{J}_0 = \text{arcsen} \left( \frac{n_2}{n_1} \right)$$

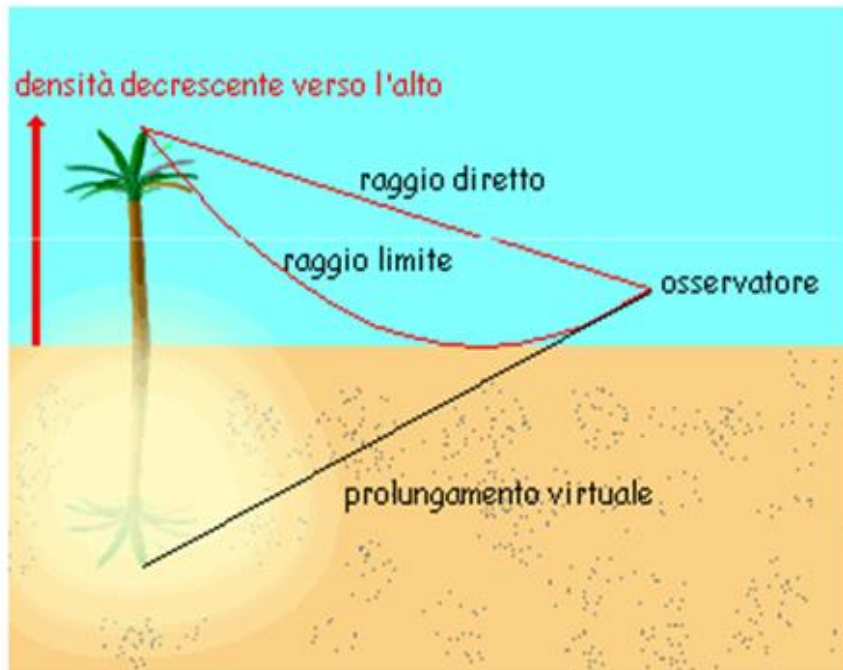


## Effetti della rifrazione

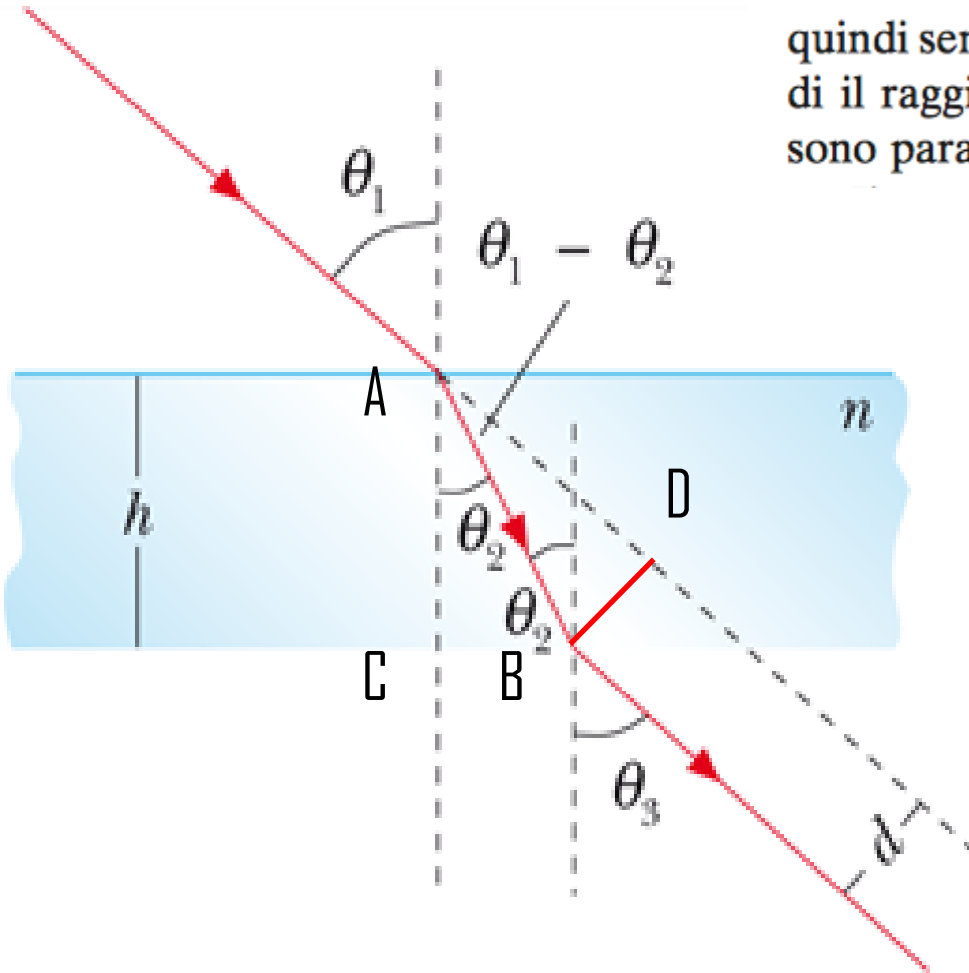




## Effetti della riflessione totale



Poiché l'aria circonda il vetro, si ha  $n_1 = n_3$  e quindi  $\text{sen } \theta_1 = \text{sen } \theta_3$ . Perciò  $\theta_1 = \theta_3$ , e quindi il raggio incidente e il raggio emergente sono paralleli.



$$= n \cdot \text{sen} \theta_2 = \text{sen} \theta_3 \Rightarrow \theta_1 = \theta_3$$

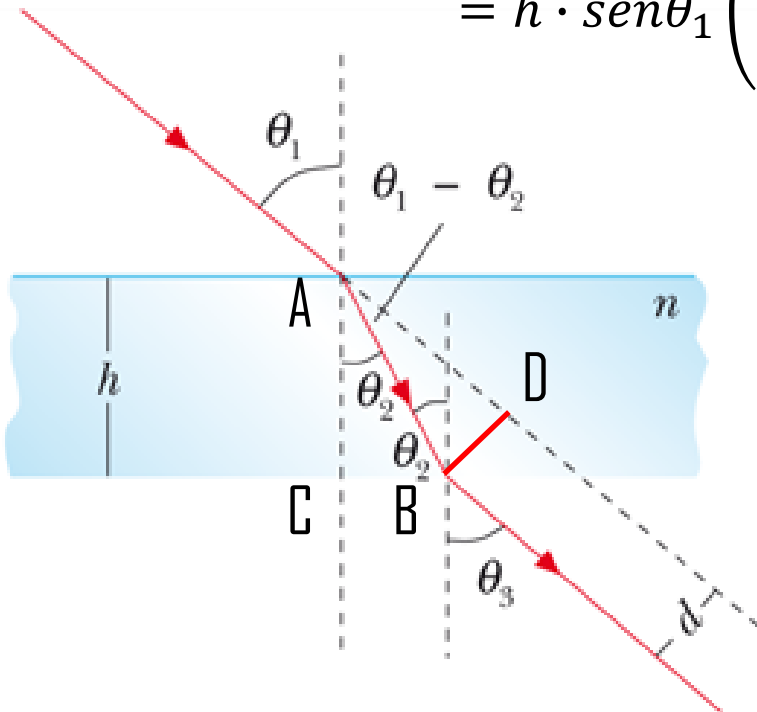
$$\overline{BD} = d = \overline{AB} \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{\cos \theta_2} = \frac{h}{\cos \theta_2}$$

$$d = \frac{h \cdot \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)}{\cos \theta_2}$$

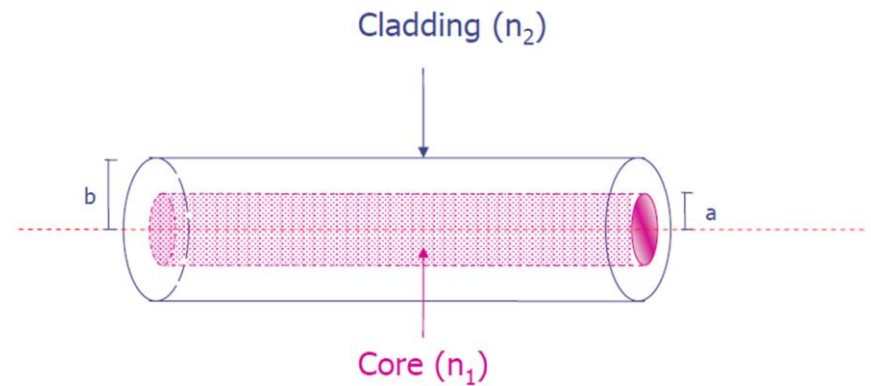
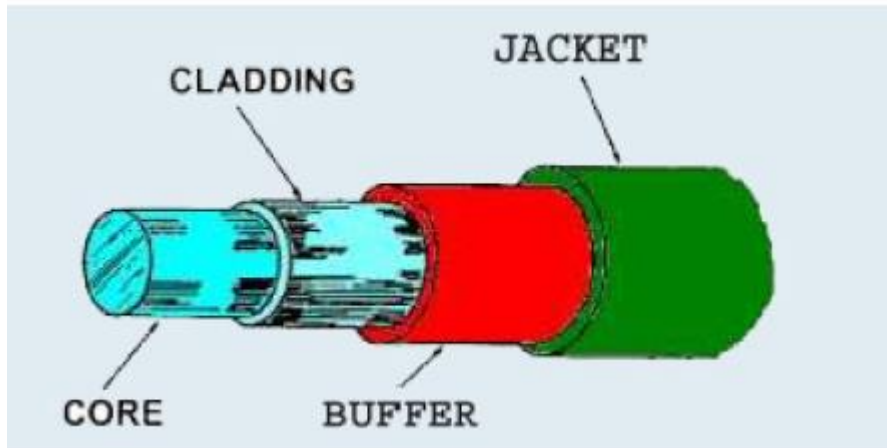
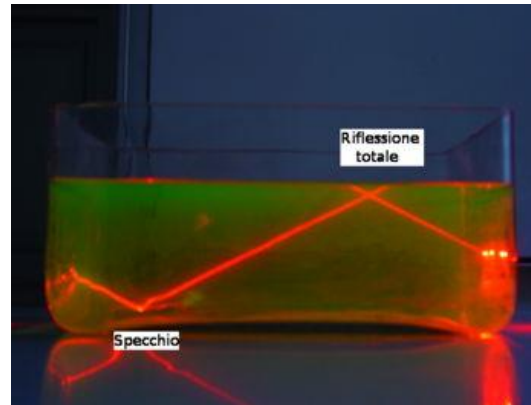
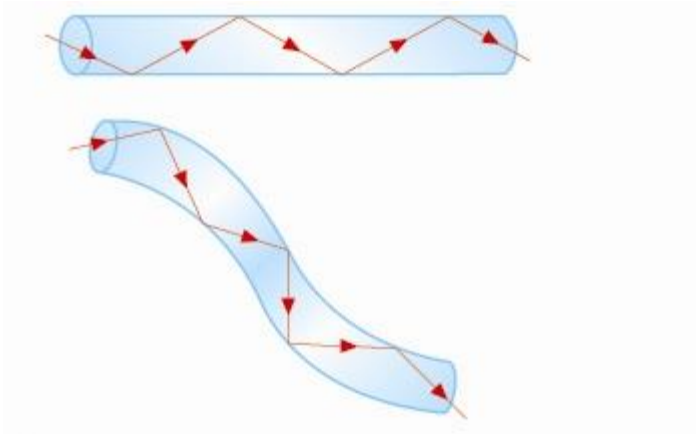
$$\text{sen} \theta_2 = \frac{\text{sen} \theta_1}{n}$$

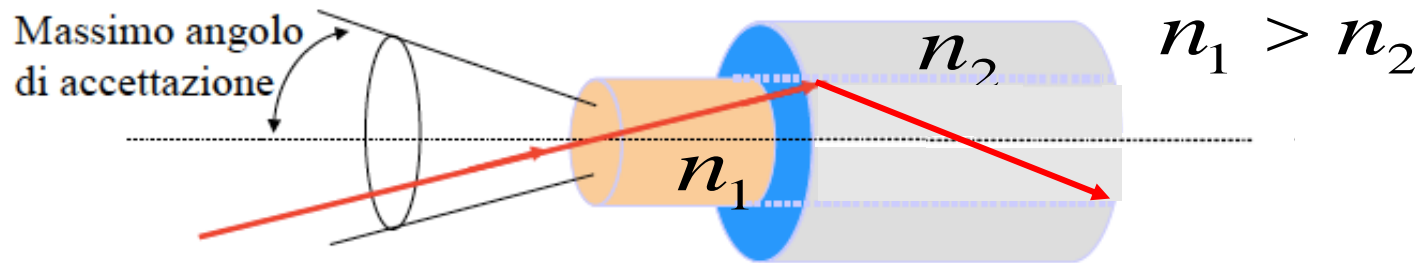
$$\begin{aligned}
 d &= h \cdot \frac{(\text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \text{sen}\theta_2)}{\cos\theta_2} = h \cdot \left( \text{sen}\theta_1 - \frac{\cos\theta_1 \text{sen}\theta_1}{\cos\theta_2 n} \right) = \\
 &= h \cdot \text{sen}\theta_1 \left( 1 - \frac{\cos\theta_1}{n \cos\theta_2} \right) = h \cdot \text{sen}\theta_1 \left( 1 - \frac{\cos\theta_1}{n \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}} \right) = \\
 &= h \cdot \text{sen}\theta_1 \left( 1 - \frac{\cos\theta_1}{n \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1 / n^2}} \right)
 \end{aligned}$$



$$d = h \cdot \text{sen}\theta_1 \left( 1 - \frac{\cos\theta_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}} \right)$$

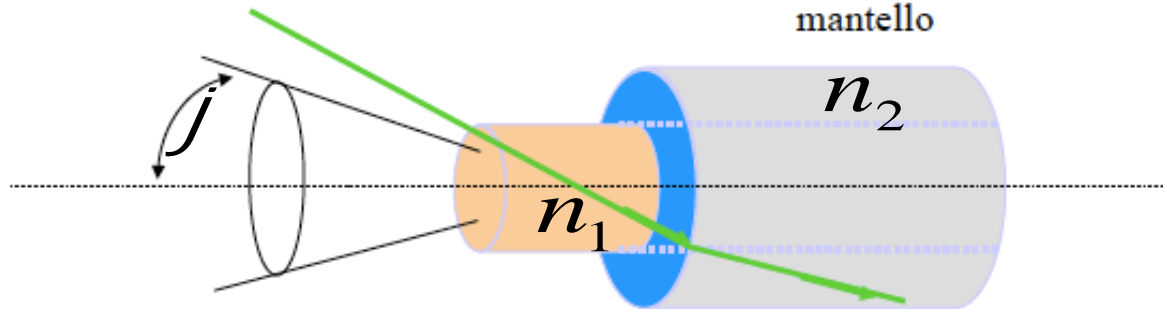
## Fibre scintillanti





Cono di accettazione

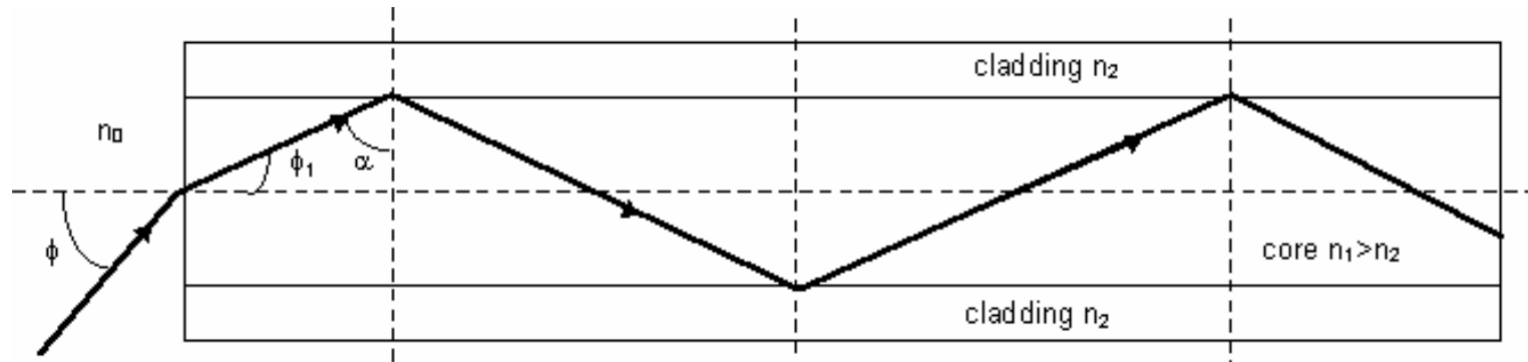
L'angolo di accettazione dipende dall'indice di rifrazione dei materiali che costituiscono il nucleo ed il mantello



Cono di accettazione

La propagazione avviene all'interno del nucleo se

$$NA = \text{sen} \varphi \leq \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$



- Scegliendo opportunamente l'angolo massimo  $\Phi$  di incidenza del segnale ottico nella fibra, si può fare in modo che il segnale si propaghi solo nel nucleo.
- La propagazione avviene nell'interno del nucleo se:  
per cui  $\Phi \leq \arcsin(NA)$
- Se  $n_1 = n_2$  si ha:  $NA = 0$  e quindi  $\phi_M = 0$ . In questo caso la propagazione può avvenire solo se si inviano raggi luminosi perfettamente paralleli all'asse del core: tuttavia, questo è difficile da realizzare.
- Se  $n_1$  è abbastanza diverso da  $n_2$  si ottiene una elevata apertura numerica, elevato angolo di accettazione  $\phi_M$  (condizione vantaggiosa) ma piccolo angolo limite che costringe il fascio a procedere fortemente a zig-zag all'interno della fibra.

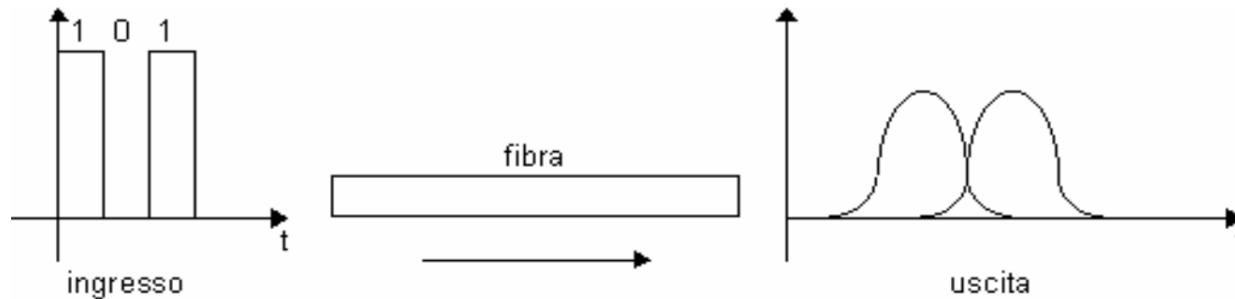
- Nel caso in cui un impulso di luce di breve durata è costituito da raggi luminosi paralleli all'asse della fibra e da raggi con angolo di entrata di vario valore fino all'angolo di accettazione (fibra multimodale) la propagazione dei raggi lungo la fibra si completa in tempi differenti: i raggi paralleli all'asse, compiendo un percorso più breve, impiegano un tempo inferiore ai raggi con angolo di entrata nella fibra maggiore di zero. Indicando con  $L$  la lunghezza della fibra, si ha:

$$t_{\min} = \frac{L}{v} = L \frac{n_1}{c} \qquad t_{\max} = L \frac{n_1}{c \sin(\alpha_L)} = L \frac{n_1^2}{c n_2}$$

per cui si ha: 
$$\Delta t = t_{\max} - t_{\min} = \frac{L n_1}{c n_2} (n_1 - n_2)$$

Questo fenomeno, noto come *dispersione modale*, degrada la forma dell'impulso inviato poiché lo allarga nel tempo.

- Nel caso di trasmissioni numeriche l'allargamento degli impulsi luminosi che transitano lungo la fibra limita la frequenza massima di lavoro.
- Nelle fibre multimodali si ricevono varie copie ritardate dello stesso segnale. Si parla in questo caso di **dispersione modale**.
- Come conseguenza si può avere la parziale sovrapposizione dei segnali uscita, fenomeno noto come **interferenza intersimbolica**, che compromette la corretta rivelazione dei dati.



- Il fenomeno dell'allargamento degli impulsi e dell'interferenza simbolica è particolarmente importante nelle fibre multimodali, poiché ogni modo che si propaga nella fibra segue un percorso diverso e quindi arriva in tempi diversi a destinazione. Altre cause che determinano la dispersione modale sono la superficie irregolare del mantello che provoca riflessioni anomale, conicità del nucleo che determina variazione della direzione del raggio riflesso e la superficie di giunzione tra due fibre che modifica la direzione del raggio.
- Nelle **fibre monomodali** si ha un solo modo che si propaga e quindi **il fenomeno della dispersione modale non esiste**.

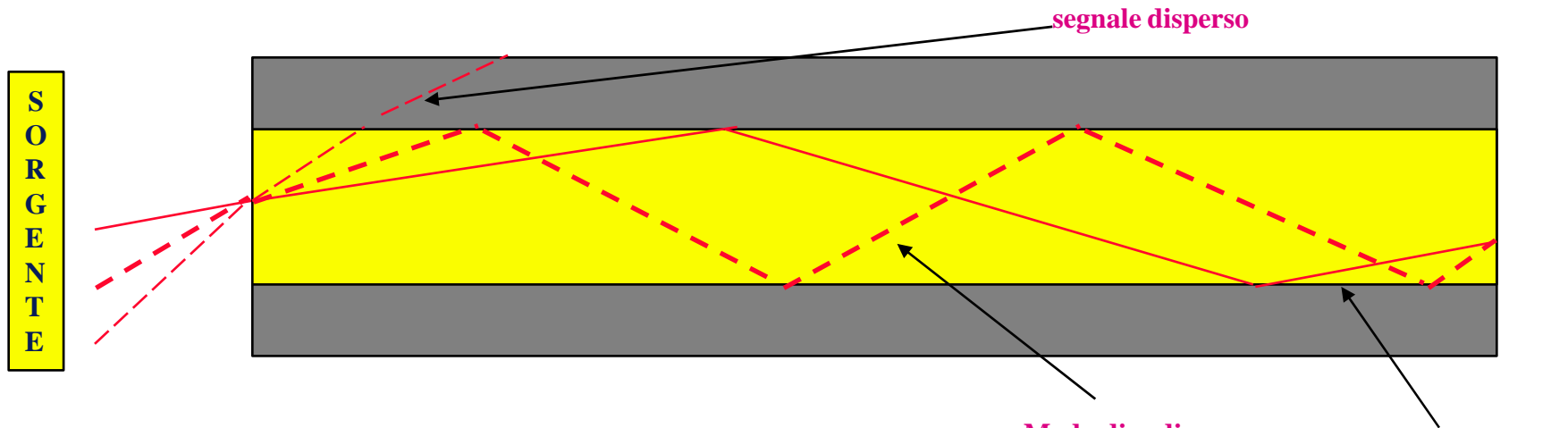


- Per ridurre la dispersione modale occorre rendere gli indici di rifrazione  $n_1$  e  $n_2$  molto vicini tra loro. Al limite, se  $n_1 = n_2$ , si avrebbe  $\alpha_L = 90^\circ$  e quindi la luce si può propagare lungo la direzione dell'asse. In questo caso esiste una sola direzione di propagazione e quest'ultima si dice *monomodale*.
- Se  $n_1$  è diverso da  $n_2$  esistono più *modi* di propagazione e quest'ultima si dice *multimodale*.
- La propagazione *monomodale* si può ottenere anche con  $n_1 \neq n_2$  ma rendendo il diametro del core molto piccolo e paragonabile alla lunghezza d'onda della radiazione usata. Nella propagazione monomodale, però, si penalizza l'apertura numerica.

### Esempio

- Nel caso in cui  $n_1=1.48$  e  $n_2=1.46$  si ha:

$$\mathbf{NA = 0.242; \phi_M = 14^\circ \text{ per } n_0 = 1 \text{ e } \Delta t/L = 67.8 \text{ ns/Km; } \alpha_L = 80^\circ}$$



- In una fibra ottica si propagano **M modi** indipendenti con

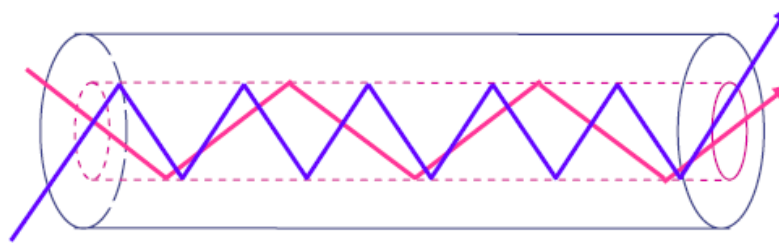
$$M = (1/2) (\pi d N_a / \lambda)^2$$

dove  $d$  = diametro del nucleo,  $\lambda$  = lunghezza d'onda

- Se  $M > 1$  si ha una **FIBRA MULTIMODALE**, che presenta un costo minore, ma anche prestazioni inferiori. Le fibre multimodali operano sostanzialmente nella prima finestra.
- Se  $M = 1$  si ha una **FIBRA MONOMODALE**, che presenta costi maggiori, ma prestazioni migliori. Attualmente le fibre usate nelle telecomunicazioni sono di tipo monomodale.

## STEP INDEX

$a = 20 \div 50 \mu\text{m}$

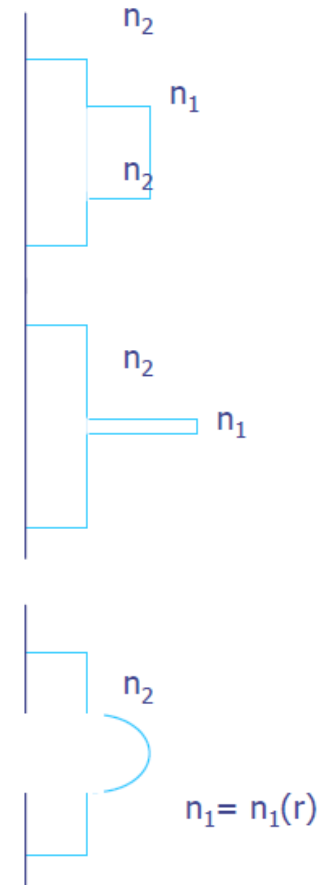
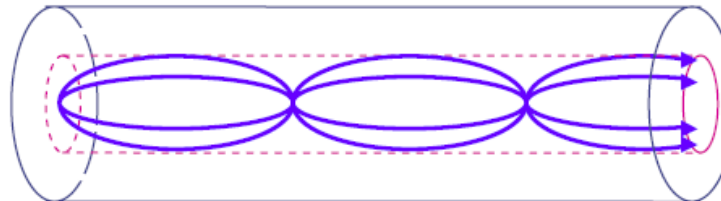


## SINGLE MODE

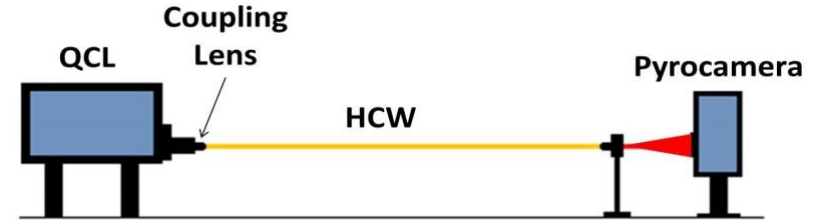
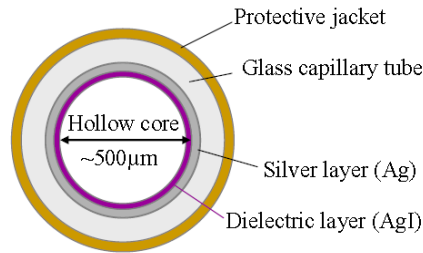
$a \leq 10 \mu\text{m}$



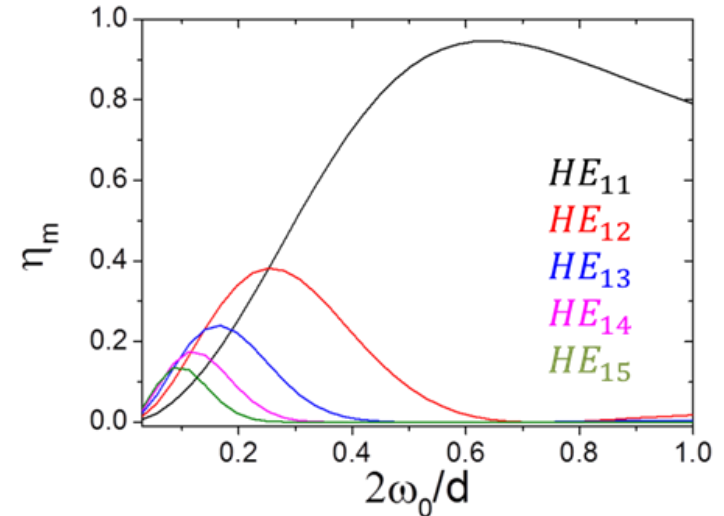
## GRADED INDEX



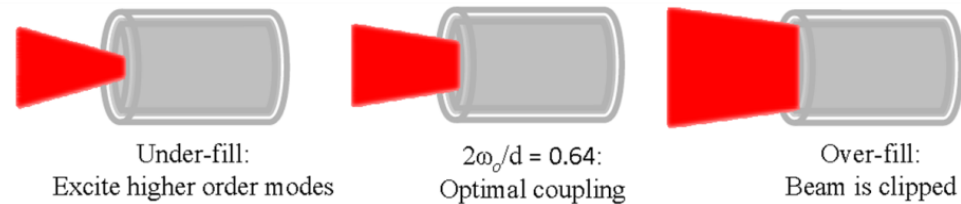
$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = \sum_m \eta_{1m} e^{-2\alpha_{1m}L}$$



$$\alpha_{1m} = \left(\frac{u_{1m}}{2\pi}\right)^2 \frac{\lambda^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^3} \left(\frac{n}{n^2 + k^2}\right) \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_d^2}{\sqrt{n_d^2 - 1}}\right)$$



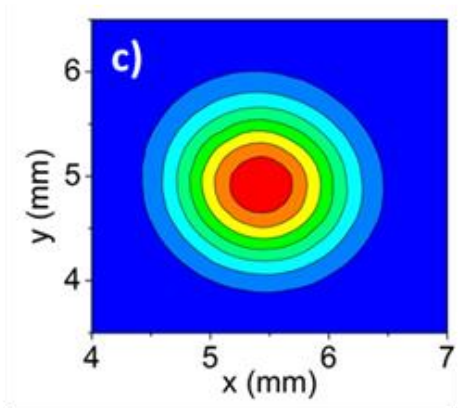
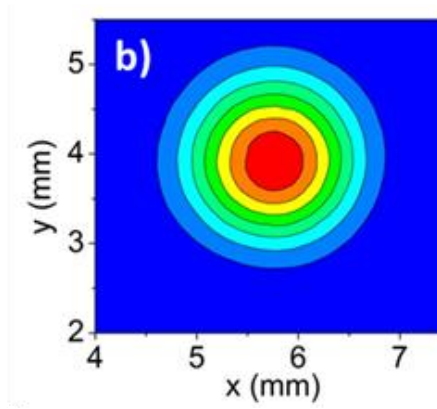
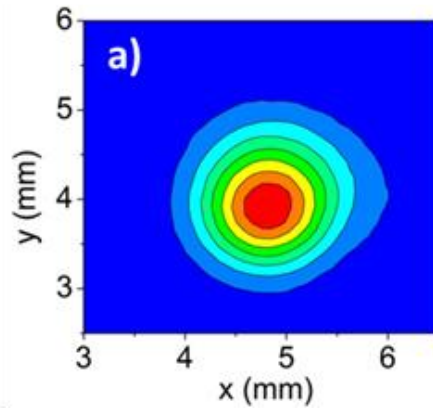
- I modi con perdite minori sono gli  $HE_{1m}$
- Regola sperimentale:  
la propagazione singolo modo e' possibile se  $d < 40\lambda$



A. Sampaolo et al., *Optics Express* 2015

# Riflessione e rifrazione

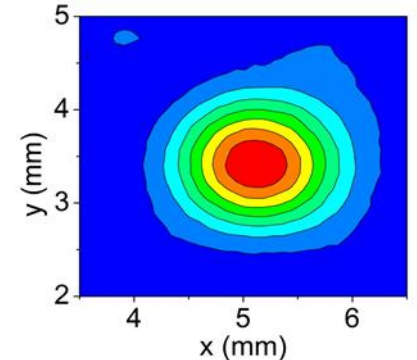
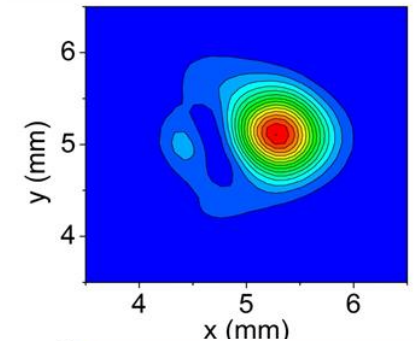
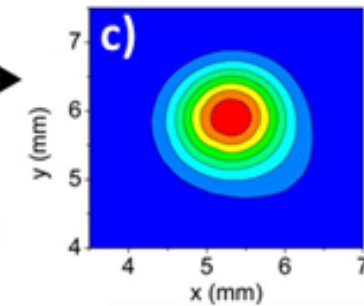
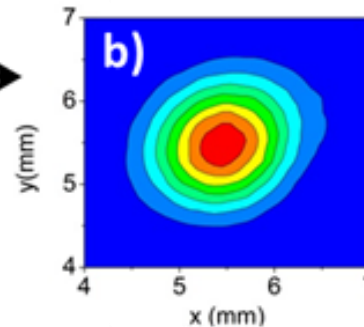
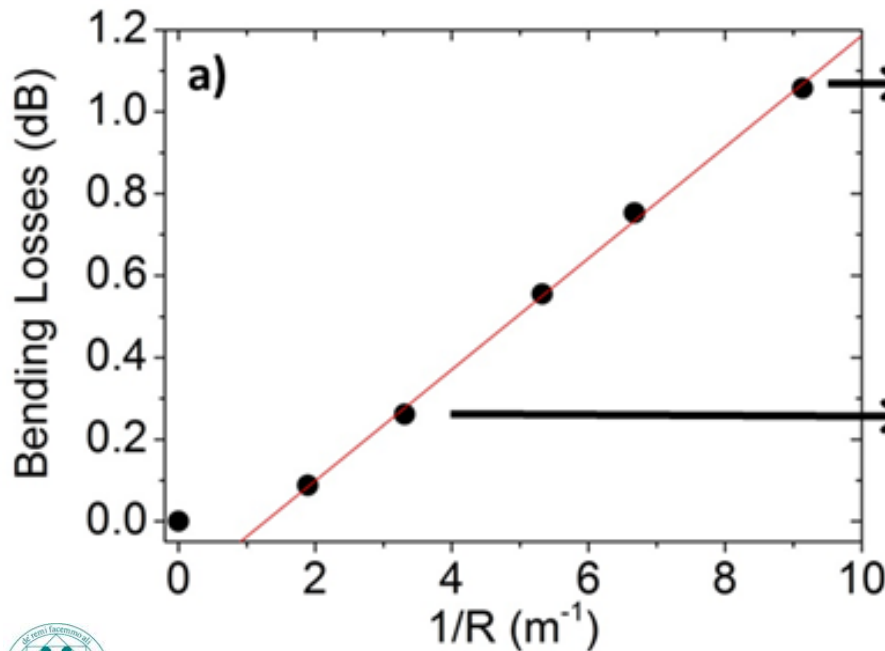
$L = 15\text{cm}$   
 $d = 200\mu\text{m}$   
 $\lambda = 5.4\mu\text{m}$   
 $f_1 = 25\text{mm}$   
 $f_2 = 50\text{mm}$   
 $f_3 = 76\text{mm}$



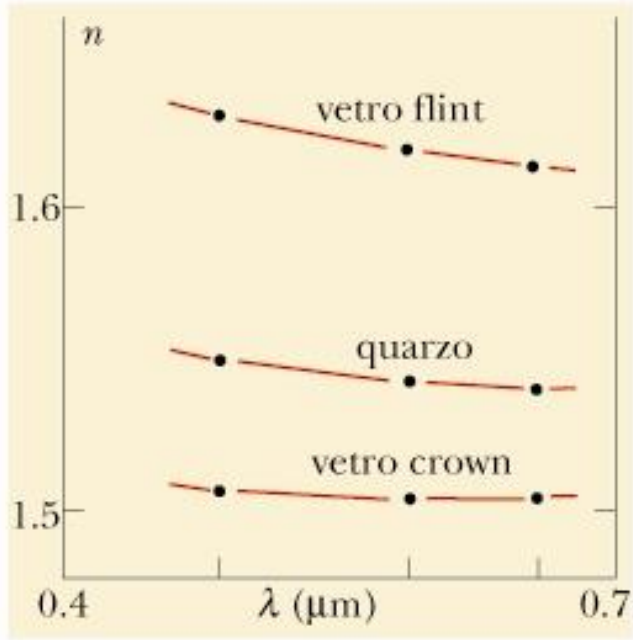
# Fibre ottiche

## PERDITE PER PIEGAMENTO

## MODE CLEANING (DFB-QCL @ 6.2μm)

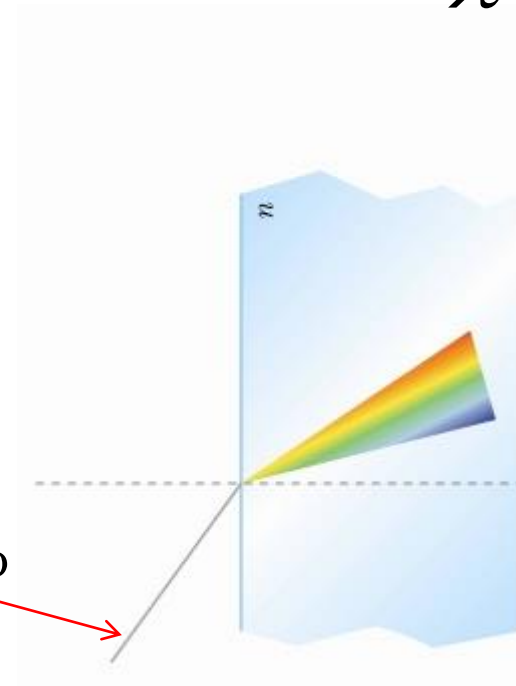


Dispersione della luce

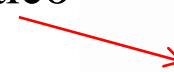


Formula di Cauchy

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

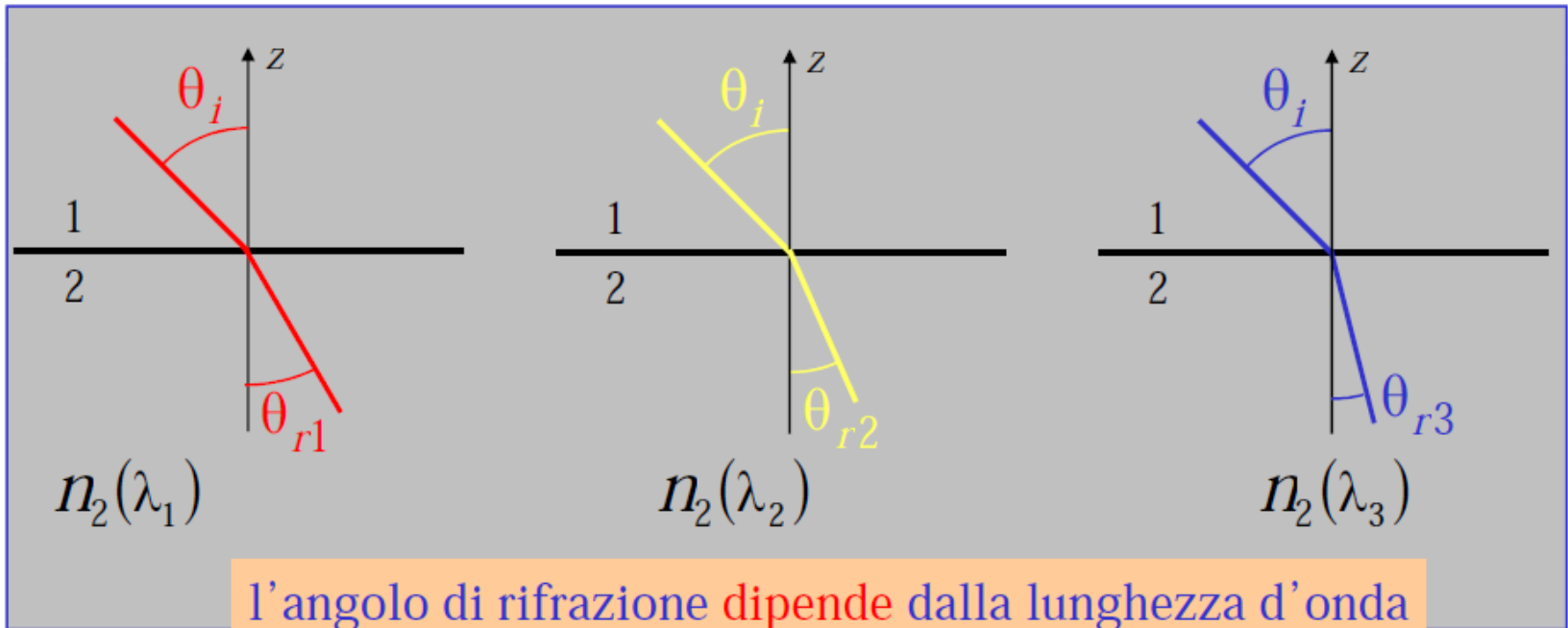


Fascio di onde luminose **non** monocromatico



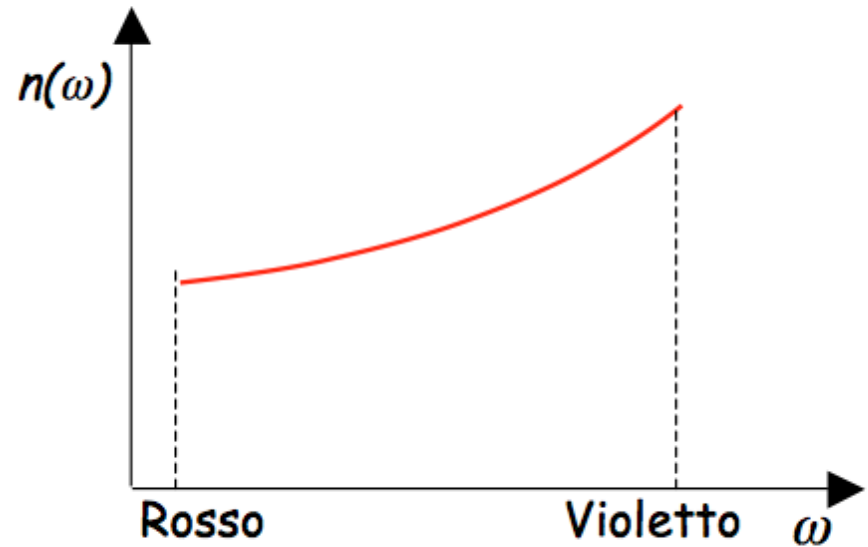
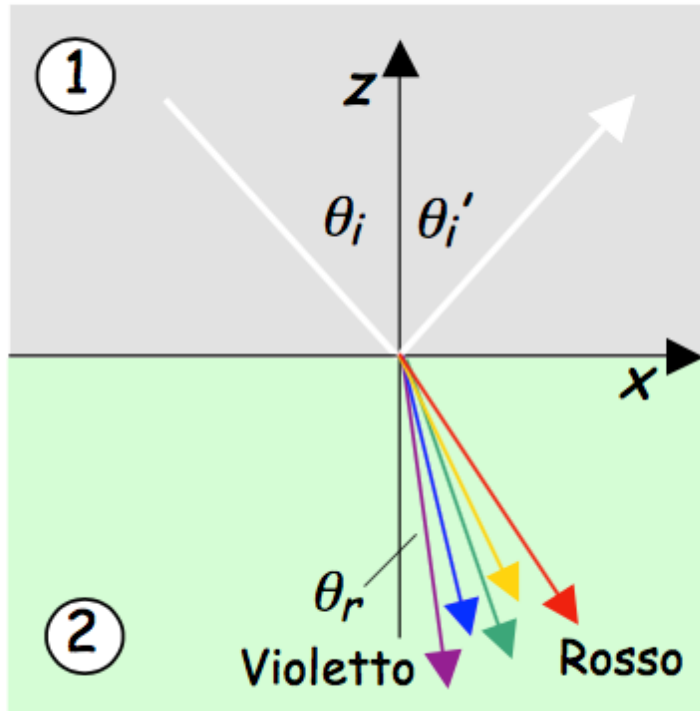
## Dispersione della luce

$$\text{sen } \vartheta_t = \frac{n_1}{n_2(\lambda)} \text{sen } \vartheta_i$$



## Dispersione della luce

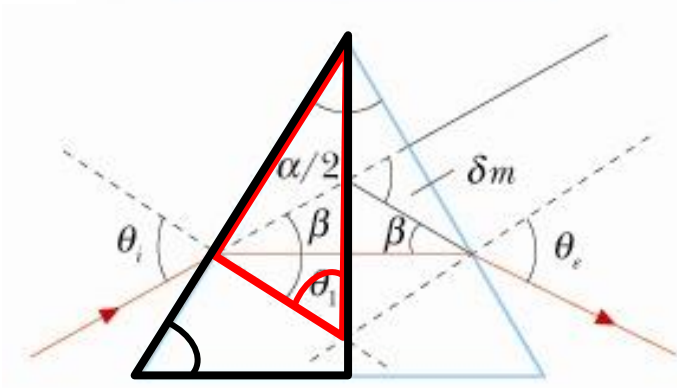
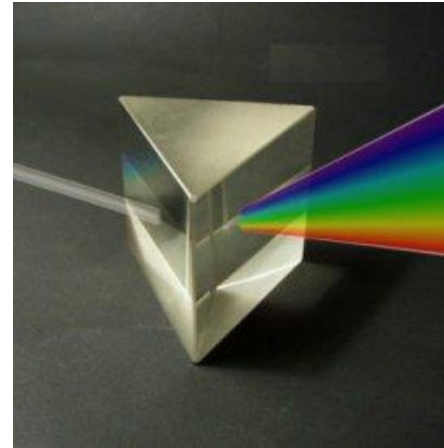
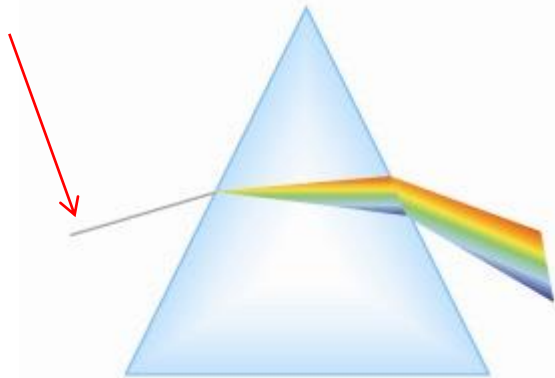
$$\text{sen } \vartheta_t = \frac{n_1}{n_2(\lambda)} \text{sen } \vartheta_i$$





Il prisma

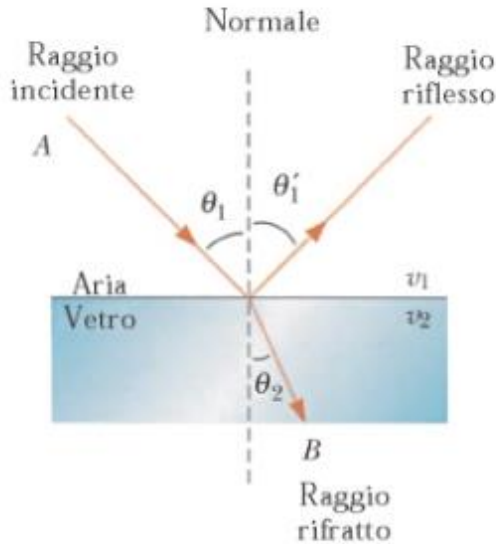
Fascio di onde luminose **non** monocromatico



$$n = \frac{\text{sen}\left(\frac{a + d_m}{2}\right)}{\text{sen}\frac{a}{2}}$$

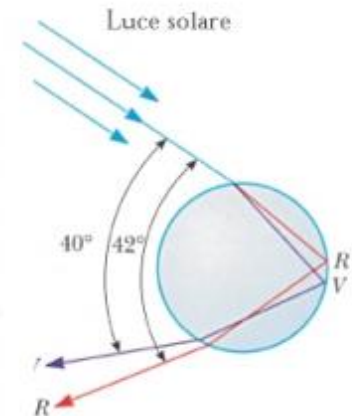
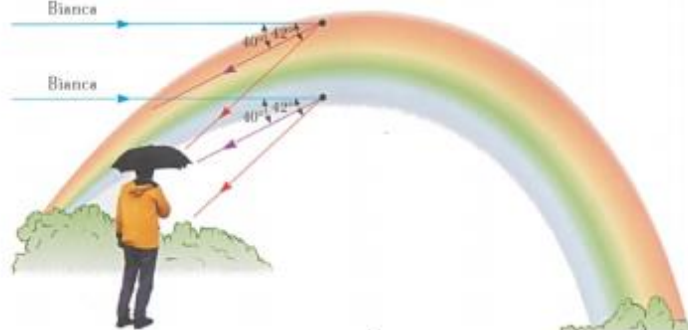
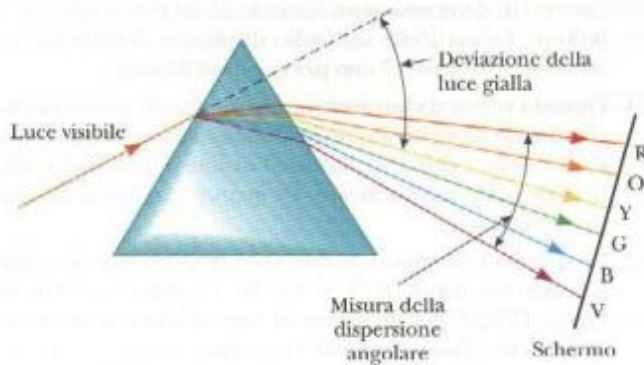
Utilizzando luce monocromatica, dalla misura della deviazione del raggio, si può calcolare l'indice di rifrazione

## Arcobaleno



$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \sin \theta_2 = \sin \theta_1 \cdot \frac{n_1}{n_2}$$

Sono maggiormente rifratti (ossia  $\theta_2$  è minore) i raggi con lunghezza d'onda minore (per i quali l'indice di rifrazione è maggiore). Quindi la luce viola ( $\lambda \sim 400 \text{ nm}$ ) viene rifratta di più della luce rossa ( $\lambda \sim 650 \text{ nm}$ ) quando passa dall'aria ad un altro materiale



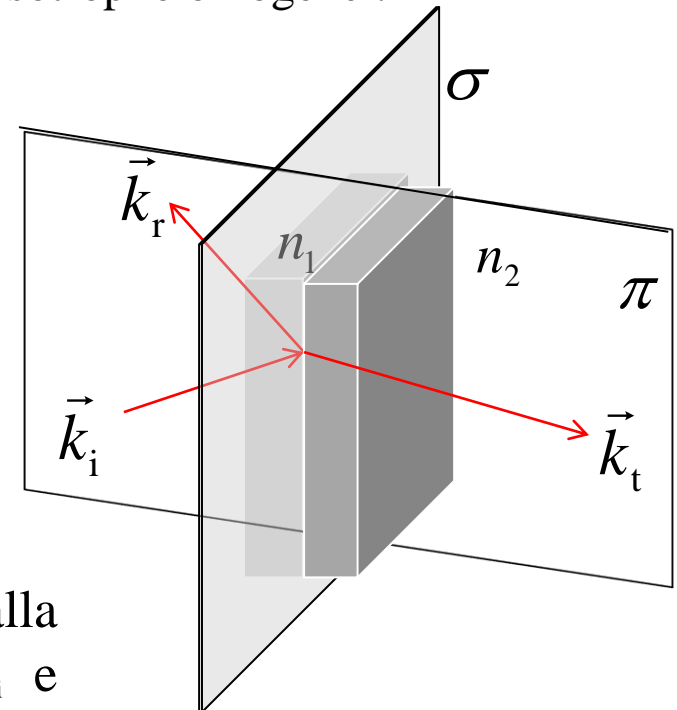
Si considera un'onda armonica piana che si propaga nel mezzo 1 in direzione  $\vec{k}_i$  e attraversa la superficie di separazione tra i due mezzi isotropi e omogenei.

$$\vec{E}_i = E_{0,i} \text{sen}(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{E}_r = E_{0,r} \text{sen}(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{E}_t = E_{0,t} \text{sen}(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Definiamo il piano di incidenza  $\pi$  individuato dalla direzione di propagazione dell'onda incidente  $\vec{k}_i$  e dalla normale alla superficie di separazione  $\Sigma$  nel punto di incidenza.



Componente *tangenziale* di  $\mathbf{E}$  è continua

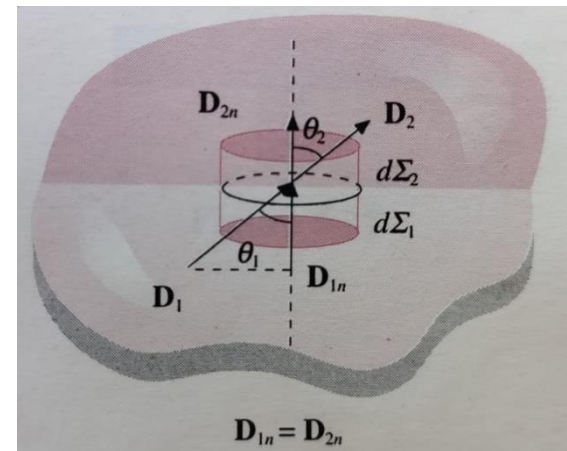
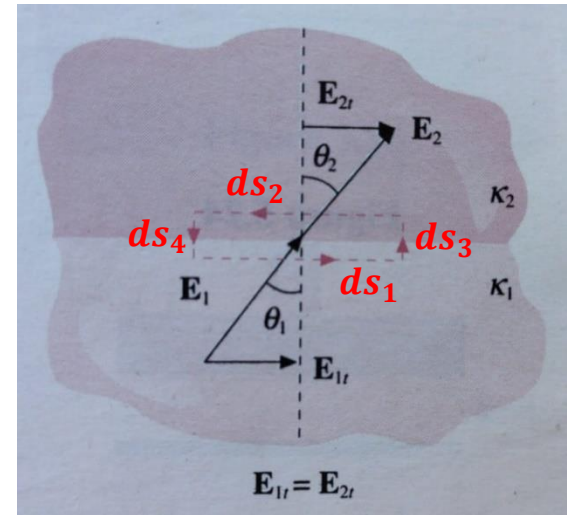
$$\mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{s}_2 = E_{1t} ds_1 + E_{2t} ds_2 = \\ = (E_{1t} - E_{2t}) ds = 0$$

$$E_{1t} = E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 = E_{2t}$$

Componente *normale* di  $\mathbf{D}$  è continua

$$\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{u}_2 d\Sigma + \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{u}_1 d\Sigma = (D_{1n} - D_{2n}) d\Sigma = 0$$

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \kappa_1 \varepsilon_0 E_1 \cos \theta_1 = \kappa_2 \varepsilon_0 E_2 \cos \theta_2$$



Onda polarizzata nel piano  $\pi$   
(Polarizzazione  $\pi$ )

componente campo elettrico parallela a  $x$  continua

$$\frac{D_{1,p}}{\epsilon_0 \kappa_1} = E_{1,p} = E_{2,p} = \frac{D_{2,p}}{\epsilon_0 \kappa_2}$$

componente campo induzione elettrica parallelo a  $y$  continua

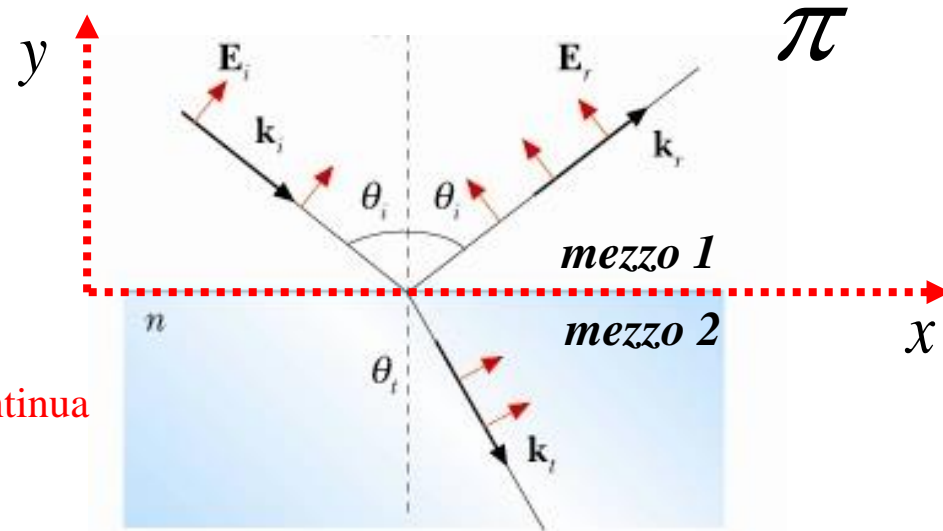
$$D_{1,n} = \epsilon_0 \kappa_1 E_{1,n} = \epsilon_0 \kappa_2 E_{2,n} = D_{2,n}$$

componente campo elettrico parallela a  $x$

$$E_{0,\pi}^i \cos\theta_i - E_{0,\pi}^r \cos\theta_i = E_{0,\pi}^t \cos\theta_t$$

incognite

componente campo induzione elettrica parallelo a  $y$

$$\kappa_1 E_{0,\pi}^i \sin\theta_i + \kappa_1 E_{0,\pi}^r \sin\theta_i = \kappa_2 E_{0,\pi}^t \sin\theta_t$$


$\pi$

mezzo 1

mezzo 2

$n$

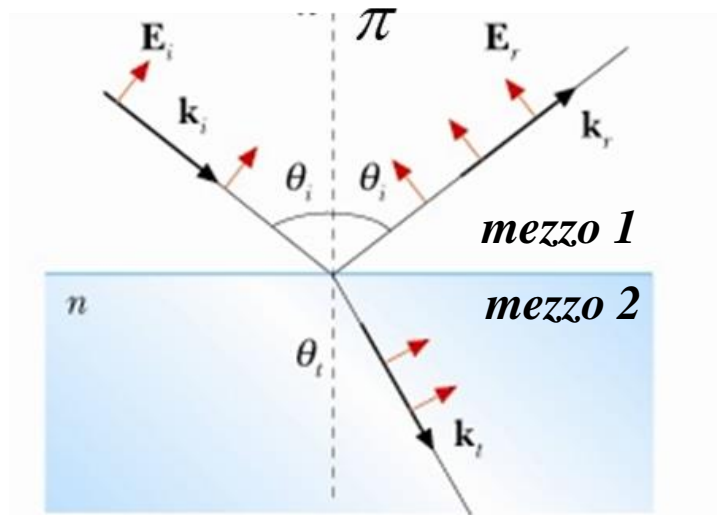
## Onda polarizzata nel piano $\pi$

Poiché

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}$$

Si ottiene

$$E_{0,\pi}^r = r_\pi \cdot E_{0,\pi}^i \quad E_{0,\pi}^t = t_\pi \cdot E_{0,\pi}^i$$



$$r_\pi = \left( \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}} \right)_\pi = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_t)}$$

con

$$t_\pi = \left( \frac{E_{0,t}}{E_{0,i}} \right)_\pi = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}$$

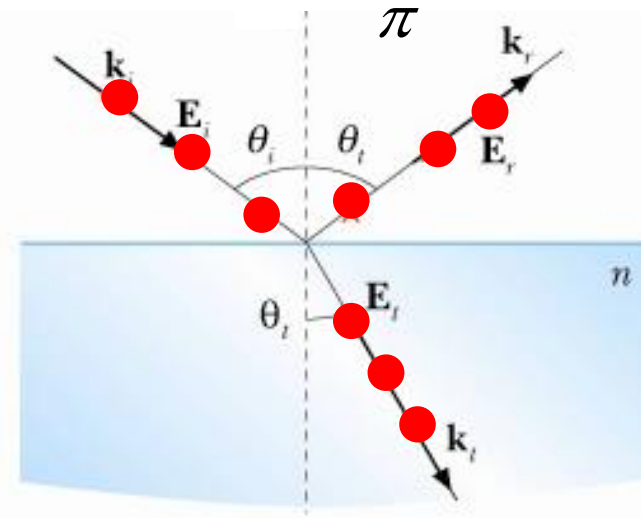
Se il campo elettrico incidente è polarizzato linearmente nel piano  $\pi$ , anche i campi elettrici riflesso e rifratto sono polarizzati linearmente nel piano  $\pi$

$$\begin{aligned}
 r_{\pi} &= \left( \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}} \right)_{\pi} = \frac{\cos\beta - \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta} \cos\alpha}{\cos\beta + \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta} \cos\alpha} = \frac{\text{sen}\beta \cos\beta - \text{sen}\alpha \cos\alpha}{\text{sen}\beta \cos\beta + \text{sen}\alpha \cos\alpha} = \\
 &= \frac{\text{sen}(\beta - \alpha) \cos(\beta + \alpha)}{\text{sen}(\beta + \alpha) \cos(\beta - \alpha)} = \frac{\text{tg}(\beta - \alpha)}{\text{tg}(\beta + \alpha)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_{\pi} &= \left( \frac{E_{0,t}}{E_{0,i}} \right)_{\pi} = \frac{2 \cos\alpha}{\cos\beta + \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta} \cos\alpha} = \frac{2 \text{sen}\beta \cos\alpha}{\text{sen}\beta \cos\beta + \text{sen}\alpha \cos\alpha} = \frac{2 \text{sen}\beta \cos\alpha}{\text{sen}(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}
 \end{aligned}$$

## Onda polarizzata nel piano perpendicolare a $\pi$ (Polarizzazione $\sigma$ )

Se il campo elettrico incidente è polarizzato linearmente nel piano perpendicolare a  $\pi$ , anche i campi elettrici riflesso e rifratto sono polarizzati linearmente nel piano perpendicolare a  $\pi$



$$E_{0,\sigma}^r = r_\sigma \cdot E_{0,\sigma}^i$$

e

con

$$E_{0,\sigma}^t = t_\sigma \cdot E_{0,\sigma}^i$$

$$r_\sigma = \left( \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}} \right)_\sigma = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

$$t_\sigma = \left( \frac{E_{0,t}}{E_{0,i}} \right)_\sigma = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$



$$r_{\pi} = \left( \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}} \right)_{\pi} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_t)}$$

$$r_{\sigma} = \left( \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}} \right)_{\sigma} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

$$t_{\rho} = \left( \frac{E_{0,t}}{E_{0,i}} \right)_{\rho} = \frac{2n_1 \cos q_i}{n_2 \cos q_i + n_1 \cos q_t} = \frac{2 \sin q_t \cos q_i}{\sin(q_i + q_t) \cos(q_i - q_t)}$$

$$t_{\sigma} = \left( \frac{E_{0,t}}{E_{0,i}} \right)_{\sigma} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

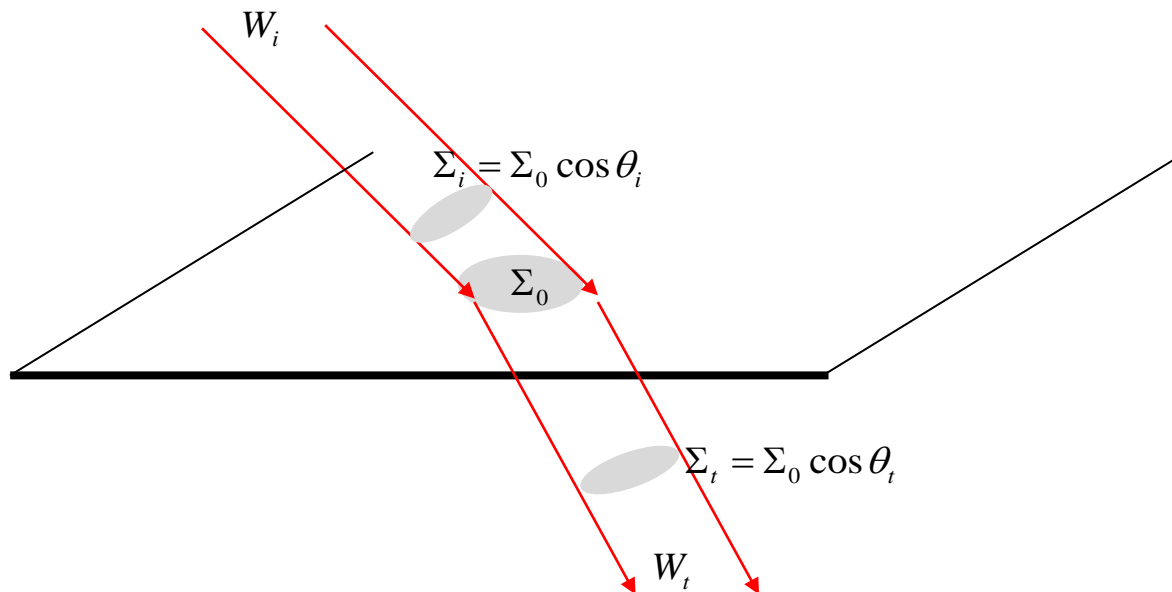
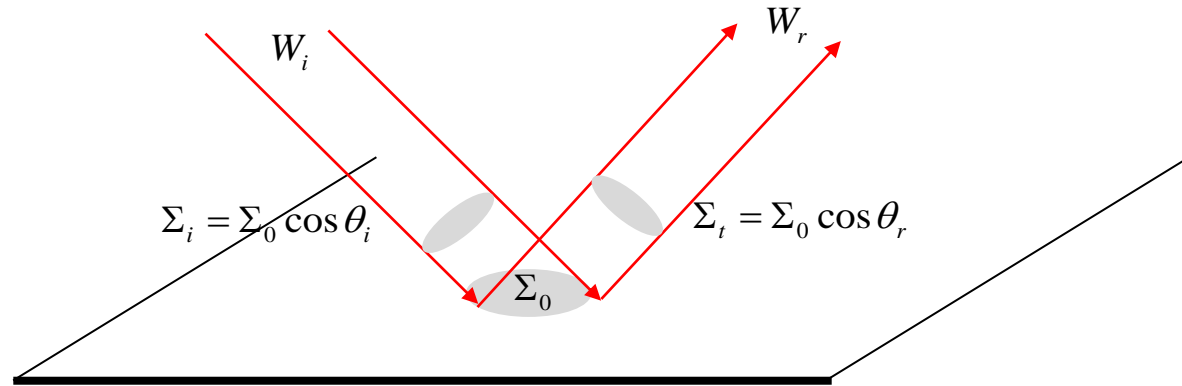
I coefficienti  $t_{\pi}$  e  $t_{\sigma}$  sono sempre positivi; **le onde trasmesse sono sempre in fase**

Il coefficiente  $r_{\sigma}$  ha sempre segno negativo se  $n_1 < n_2$  (**l'onda riflessa è sfasata di  $\pi$** ); ha sempre segno positivo se  $n_1 > n_2$ ;

Se  $n_1 < n_2$  il coefficiente  $r_{\pi}$  al crescere di  $\theta_i$  è dapprima positivo, poi si annulla e diventa negativo. Ha un comportamento esattamente contrario come segno se  $n_1 > n_2$ ;

Nel caso  $n_1 > n_2$  bisogna ricordare che superato l'angolo limite  $\theta_0$  si ha solo la riflessione, mentre nel caso  $n_1 < n_2$  tutto l'intervallo da zero a  $\pi/2$  è disponibile per la trasmissione ad eccezione del valore estremo  $\pi/2$ .

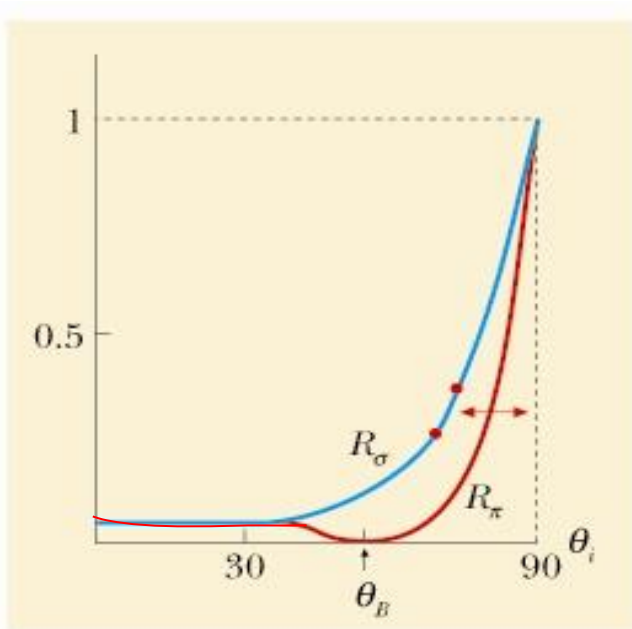
Calcoliamo le potenze riflesse e trasmesse



Calcoliamo la percentuale di potenza nel fascio riflesso

$$I_i = \frac{1}{2} v_1 \varepsilon_1 E_{0,i}^2$$

$$I_r = \frac{1}{2} v_1 \varepsilon_1 E_{0,r}^2$$



$$R_\pi = \left( \frac{W_r}{W_i} \right)_\pi = \left( \frac{\sum_r I_r}{\sum_i I_i} \right)_\pi = \left( \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}} \right)_\pi^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}^2(\theta_i + \theta_t)}$$

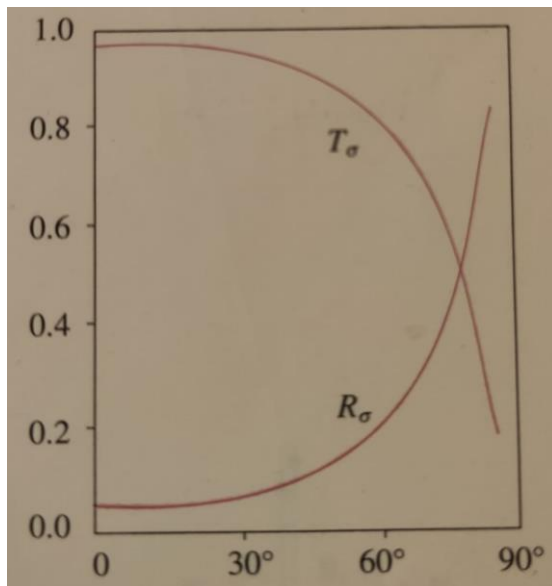
$$R_\sigma = \left( \frac{W_r}{W_i} \right)_\sigma = \left( \frac{\sum_r I_r}{\sum_i I_i} \right)_\sigma = \left( \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}} \right)_\sigma^2 = \frac{\operatorname{sen}^2(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{sen}^2(\theta_i + \theta_t)}$$

Calcoliamo la percentuale di potenza nel fascio trasmesso

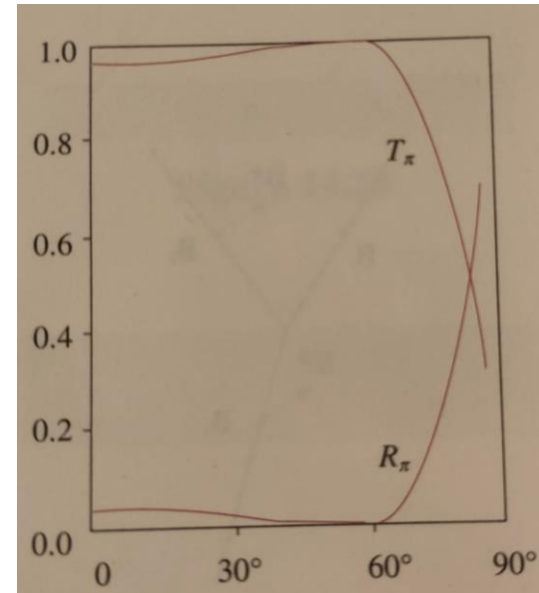
$$I_i = \frac{1}{2} v_1 \epsilon_1 E_{0,i}^2$$

$$I_t = \frac{1}{2} v_2 \epsilon_2 E_{0,t}^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} T_\rho &= \left( \frac{W_t}{W_i} \right)_\rho = \left( \frac{S_t I_r}{S_i I_i} \right)_\rho = \left( \frac{S_0 \cos q_t I_t}{S_0 \cos q_i I_i} \right)_\rho = \frac{\sin 2q_i \sin 2q_t}{\sin^2(q_i + q_t) \cos^2(q_i - q_t)} \\ T_\sigma &= \left( \frac{W_t}{W_i} \right)_\sigma = \left( \frac{\Sigma_0 \cos \theta_t I_t}{\Sigma_0 \cos \theta_i I_i} \right)_\sigma = \frac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_t}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)} \end{aligned} \right.$$



$$T_\sigma = 1 - R_\sigma$$

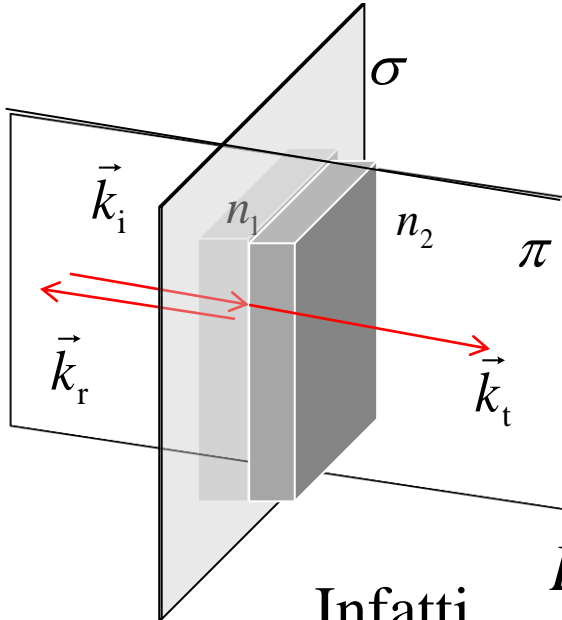


$$T_\pi = 1 - R_\pi$$

## Incidenza normale

Studiamo il caso di incidenza normale  $\theta_i = \theta_r = 0$ . Si ottiene:

Il piano  $\pi$  non è più definibile



$$r_\sigma = \left( \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}} \right)_\sigma = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad t_\sigma = \left( \frac{E_{0,t}}{E_{0,i}} \right)_\sigma = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Infatti

$$E_1 = E_{0,i} + E_{0,r} \quad E_{0,i} + E_{0,r} = E_{0,t}$$

$$E_2 = E_{0,t}$$

Inoltre per la conservazione dell'energia

$$I_i = I_r + I_t \quad n_1 E_{0,i}^2 = n_1 E_{0,r}^2 + n_2 E_{0,t}^2$$

Si ricordi che

$$I_i = \frac{1}{2} v \epsilon E^2 \quad n = \sqrt{\epsilon} / \sqrt{\epsilon_0}$$

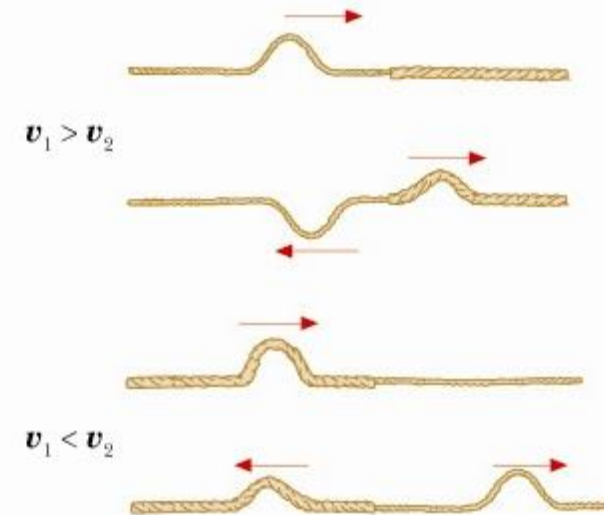
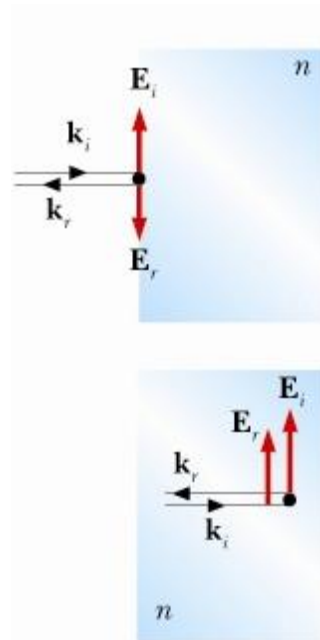
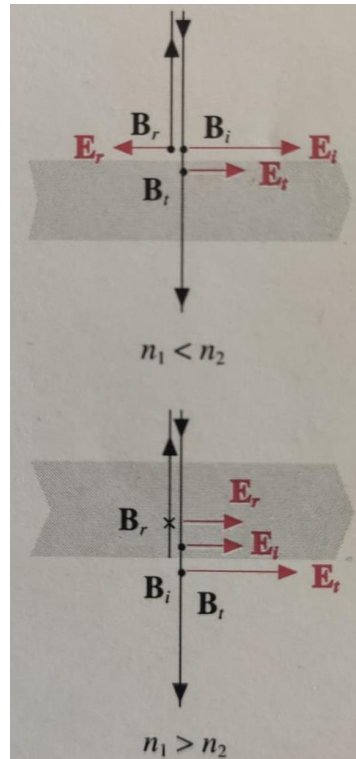
$$r = \left( \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}} \right) = -\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1}$$

$$R = \left( \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}} \right)^2 = \frac{(n_{21} - 1)^2}{(n_{21} + 1)^2}$$

$$t = \left( \frac{E_{0,t}}{E_{0,i}} \right) = \frac{2}{n_{21} + 1}$$

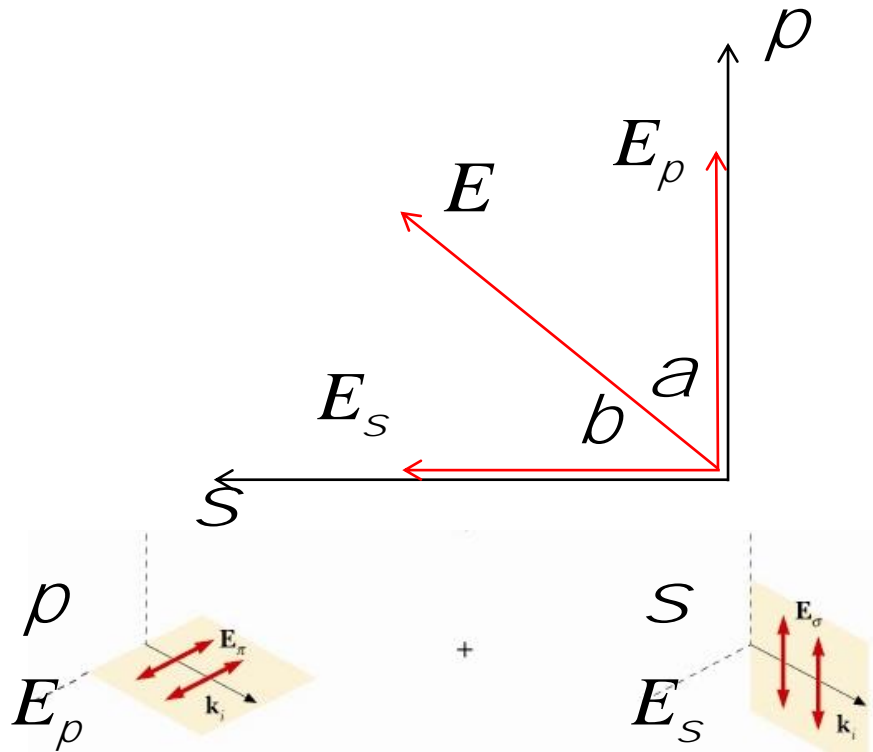
$$T = 1 - R$$

Per  $n = 1.5$  solo circa il 4% dell'energia viene riflessa



Onda polarizzata linearmente

Un fascio polarizzato in una direzione arbitraria può essere considerato come la somma delle sue componenti nel piano  $\pi$  e nel piano  $\sigma$

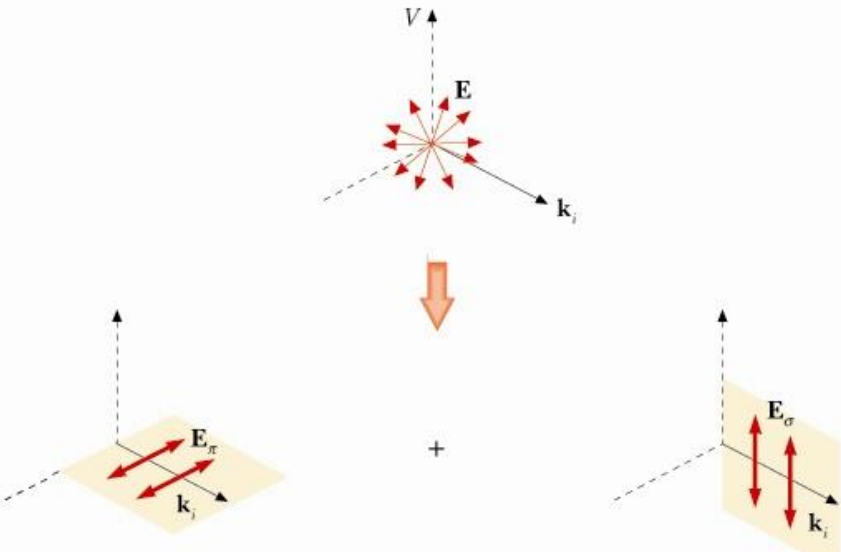


$$I_i^\rho = I_i \cos^2 a$$

$$I_i^S = I_i \cos^2 b$$

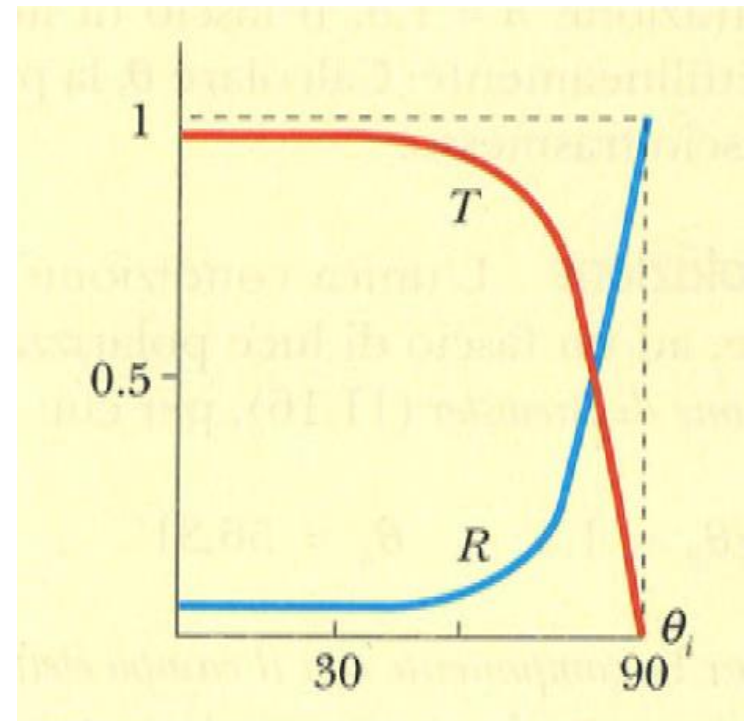
$$R = \left( \frac{W_r}{W_i} \right) = R_\rho \left( \frac{I_i^\rho}{I_i} \right) + R_S \left( \frac{I_i^S}{I_i} \right)$$

$$T = \left( \frac{W_t}{W_i} \right) = T_\rho \left( \frac{I_i^\rho}{I_i} \right) + T_S \left( \frac{I_i^S}{I_i} \right)$$



Un fascio non polarizzato può essere considerato come metà nel piano  $\pi$  e metà nel piano  $\theta$

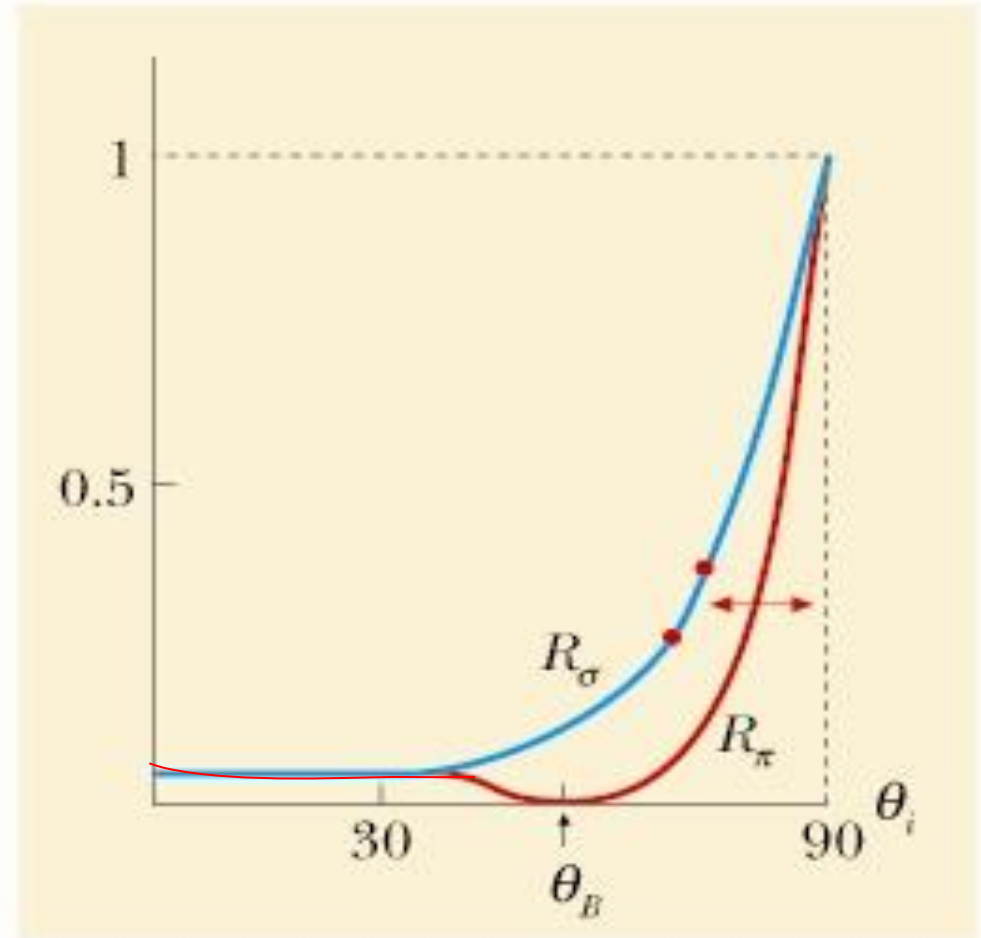
$$R = \frac{1}{2}(R_{\pi} + R_{\sigma})$$





$$R_{\pi} = \left( \frac{I_r}{I_i} \right)_{\pi} = \left( \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}} \right)_{\pi}^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}^2(\theta_i + \theta_t)}$$

Se  $\theta_i + \theta_t = \pi/2 \rightarrow$   
 $R_{\pi} = 0$



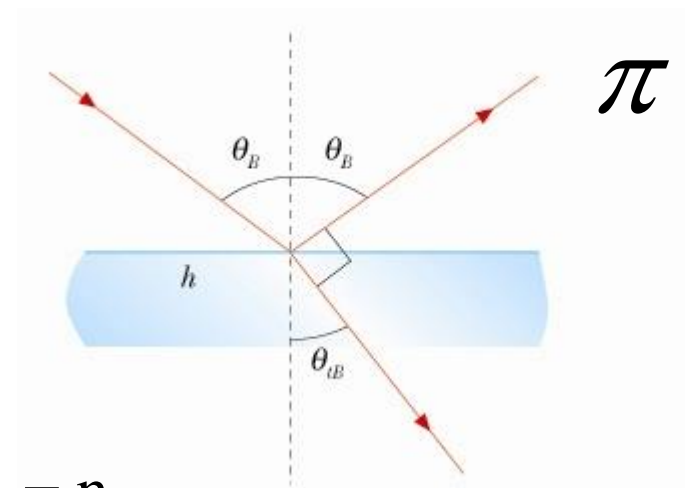
## Angolo di Brewster

Se  $\theta_B + \theta_t = \pi / 2$

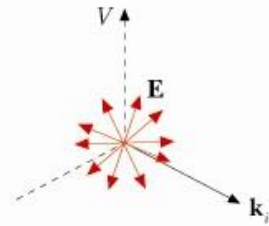
$$\frac{\sin \theta_B}{\sin \theta_t} = \frac{\sin \theta_B}{\sin(\pi / 2 - \theta_B)} = \frac{\sin \theta_B}{\cos(\theta_B)} = \operatorname{tg} \theta_B = n$$

$$\operatorname{tg} \theta_B = n$$

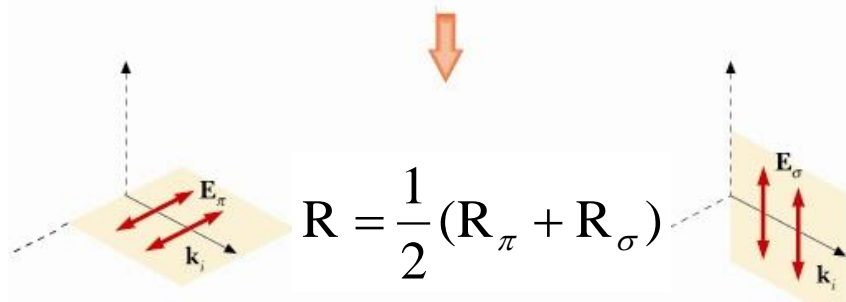
$$\theta_B = \operatorname{arctg}(n)$$



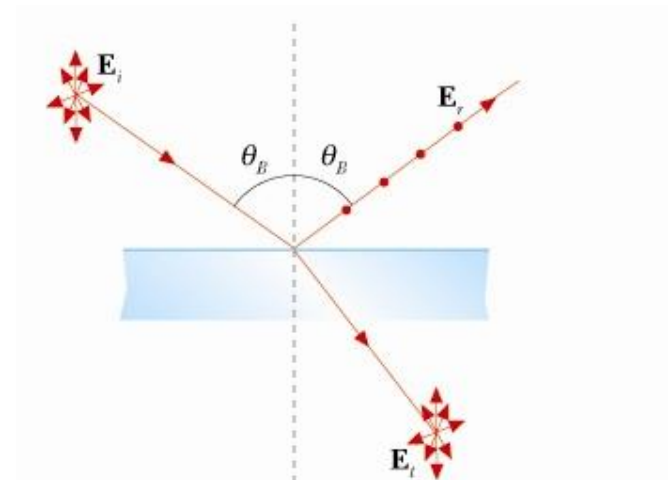
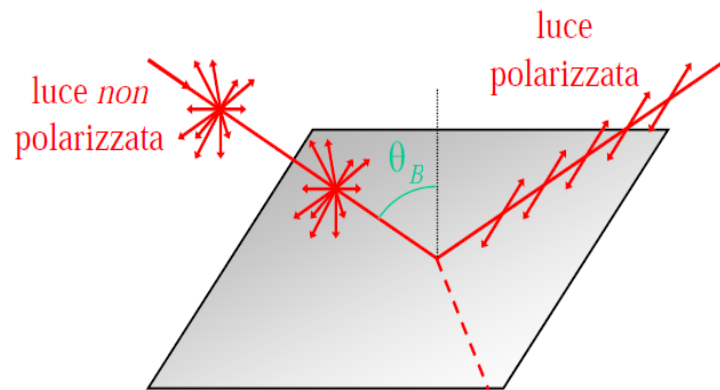
Nessun fascio rifleso per questo angolo nel piano  $\pi$

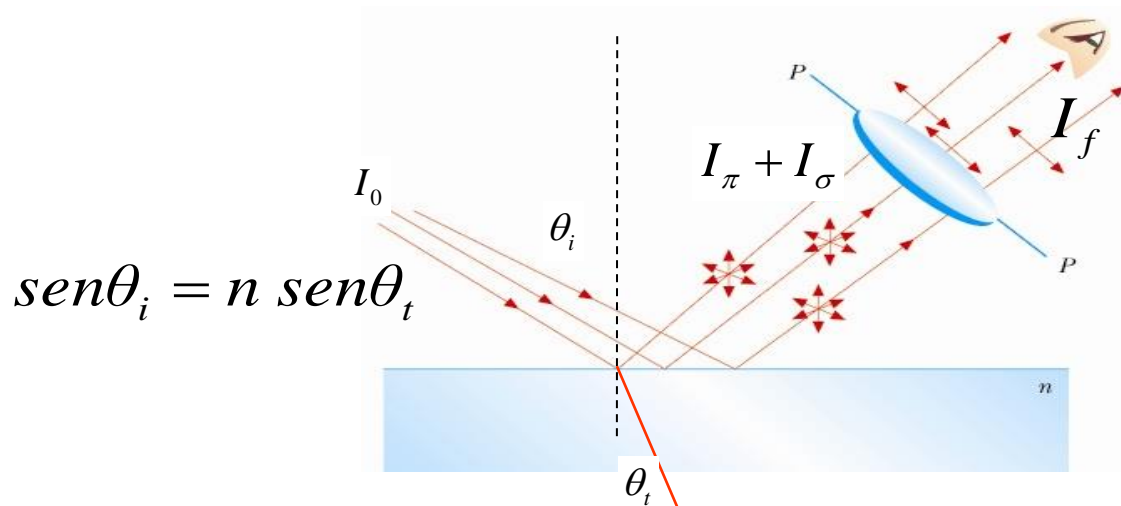


Un fascio non polarizzato può essere considerato come la somma delle sue componenti nel piano  $\pi$  e nel piano  $\sigma$



Per incidenza ad un angolo  $\theta_B$ , la componente riflessa nel  $\pi$  è nulla mentre quella nel piano nel piano  $\sigma$  è non nulla





$$\text{sen}\theta_i = n \text{sen}\theta_t$$

Scomponiamo l'onda riflessa nelle direzioni parallela e perpendicolare al piano  $\pi$  ( $\pi$  è il piano di incidenza in figura)

$$I_\pi = \frac{1}{2} I_0 R_\pi = \frac{1}{2} I_0 \frac{\text{tg}^2(\theta_i - \theta_t)}{\text{tg}^2(\theta_i + \theta_t)}$$

$$I_\sigma = \frac{1}{2} I_0 R_\sigma = \frac{1}{2} I_0 \frac{\text{sen}^2(\theta_i - \theta_t)}{\text{sen}^2(\theta_i + \theta_t)}$$

Il polarizzatore blocca la componente nel piano  $\sigma$  ( $I_\sigma$ ) e lascia passare la componente parallela a  $\pi$  ( $I_\pi$ )

$$I_f = I_\pi = \frac{1}{2} I_0 R_\pi$$

$$I_0 = 10 \text{ W/cm}^2$$

$$I_\pi = 0.21 \text{ W/cm}^2$$

$$\theta_i = 70^\circ$$

$$I_\sigma = 1.5 \text{ W/cm}^2$$

$$I_f = 0.21 \text{ W/cm}^2$$

