

CAPITOLO 6

Ottica Geometrica



Definizioni

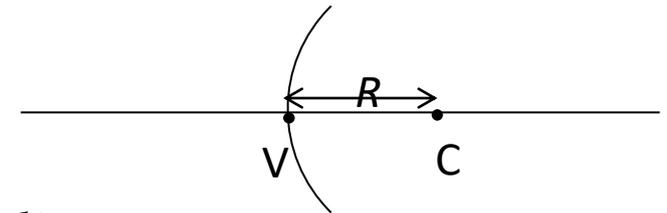
- Si dice **oggetto** un corpo che emette luce propria o diffonde luce di un altro corpo.
- **Strumento ottico** è un apparato, semplice o complesso, che riflette o rifrange la luce emessa da un oggetto (uno specchio, una lente, l'occhio, un telescopio).
- **Immagine** è la luce emessa dall'oggetto dopo essere stata trasformata dallo strumento ottico e raccolta su uno schermo.
- **L'ottica geometrica** (OG) studia la formazione di immagini mediante strumenti ottici, considerando la luce emessa dall'oggetto come un insieme di raggi.

Approssimazioni

- Nell'OG si considera la luce come formata da particelle che si muovono in line retta e interagiscono con le superfici dello strumento ottico secondo le leggi della riflessione e della rifrazione
- Nell'OG non entra mai in gioco la natura ondulatoria della luce
- Tale approssimazione è generalmente ben soddisfatta, perché le dimensioni delle superfici degli strumenti ottici sono di molto superiori della lunghezza d'onda della luce

Elementi Ottici

- Assumiamo che gli elementi ottici abbiano un asse di simmetria cilindrica;
- Assumiamo che gli elementi ottici siano costituiti solo da porzioni di superfici piane o sferiche;
- Per ciascuna superficie sono definiti:
 - un centro C e un raggio di curvatura R ;
 - un vertice V come intersezione tra la superficie e l'asse;
- Una superficie che appartiene ad un elemento ottico, e presenta solo riflessione è detta **superficie catottrica** o **specchio**;
- Una superficie che appartiene ad un elemento ottico e presenta rifrazione è detta **superficie diottrica** o **diottro**;
- Una **lente** è l'insieme di due **diottri** opportunamente disposti.



Di norma le superfici rifrangenti presentano anche riflessione, ma in approssimazione parassiale l'onda riflessa ha intensità trascurabile e con i cosiddetti trattamenti antiriflesso la percentuale di luce riflessa può essere ulteriormente ridotta.

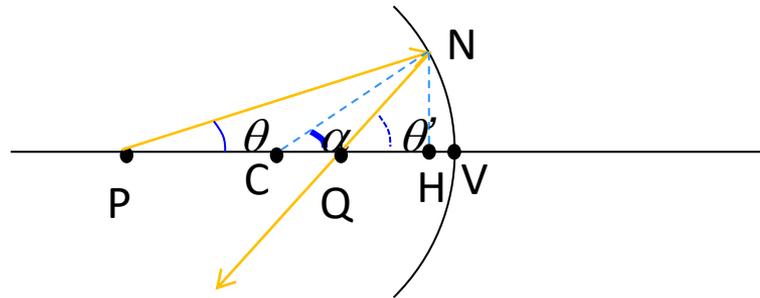
Elementi Ottici

- Un elemento ottico *stigmatico* trasforma un punto oggetto in un *unico* punto immagine;
- L'elemento può essere stigmatico per uno o alcuni punti oppure può esserlo per tutti i punti dello spazio oggetto;

Lo stigmatismo è difficile da ottenere e l'a-stigmatismo è un problema comune negli elementi e negli strumenti ottici, così come nell'occhio umano.

Approssimazione Gaussiana

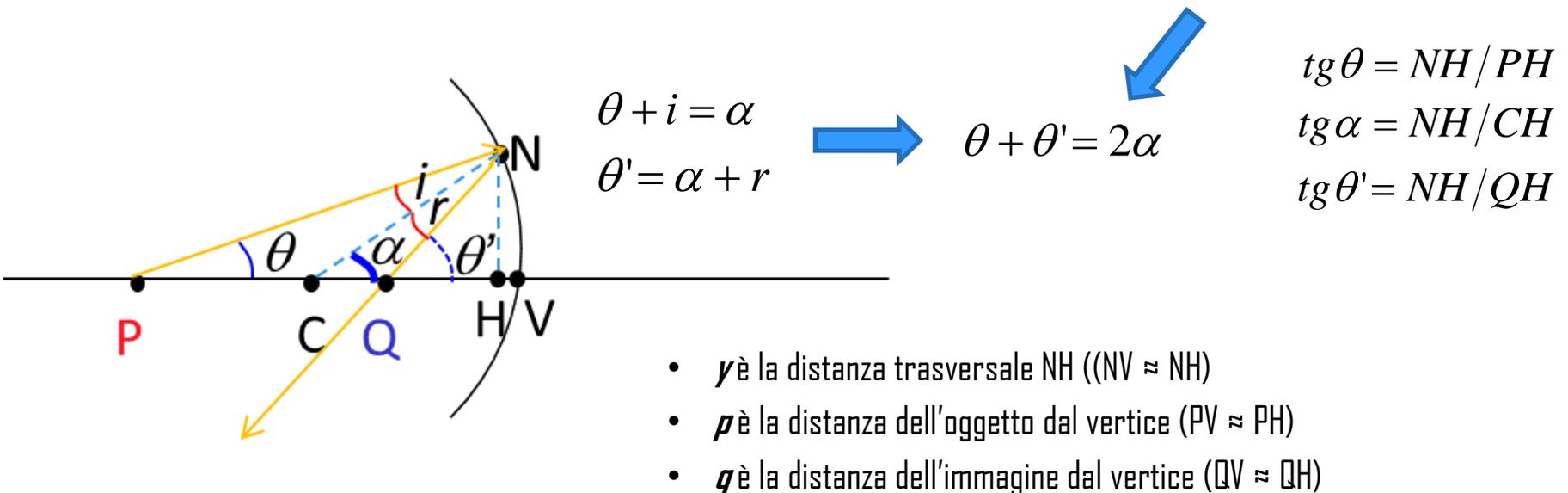
- Con buona approssimazione gli elementi ottici possono essere assunti come stigmatici se si lavora nella condizione di *raggi parassiali*, cioè *poco inclinati* rispetto all'asse ottico dello strumento e *poco distanti* da esso
- Con angoli piccoli la tangente e il seno di un angolo con l'angolo stesso (espresso in radianti)
- In questa approssimazione *gaussiana* gli angoli θ , α , θ' sono tutti piccoli e la sagitta HV , relativa al semi-arco NV si può considerare nulla



Le equazioni che si ottengono in approssimazione parassiale sono valide solo in quella approssimazione. Non sono più accurate quando consideriamo raggi con grandi angoli rispetto all'asse, raggi lontani dall'asse, luce non monocromatica per elementi ottici rifrattivi

Specchio concavo

- Consideriamo un raggio (luminoso) PN emesso da P e incidente sul punto N dello specchio
- Tracciamo il raggio (geometrico) CN dal centro dello specchio a N : l'angolo PNC è l'angolo d'incidenza i
- Il raggio PN viene riflesso secondo l'angolo di riflessione $CNQ = r = i$



Specchio concavo

In approssimazione gaussiana gli angoli sono piccoli e $HV \approx 0$.

$$\operatorname{tg} \theta = NH/PH$$

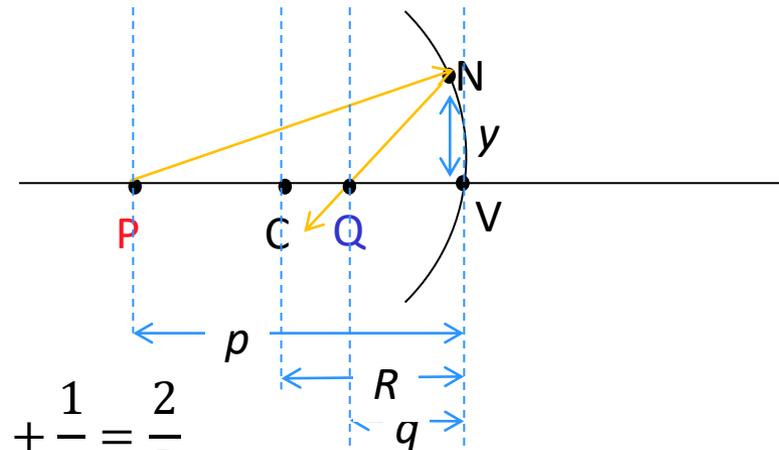
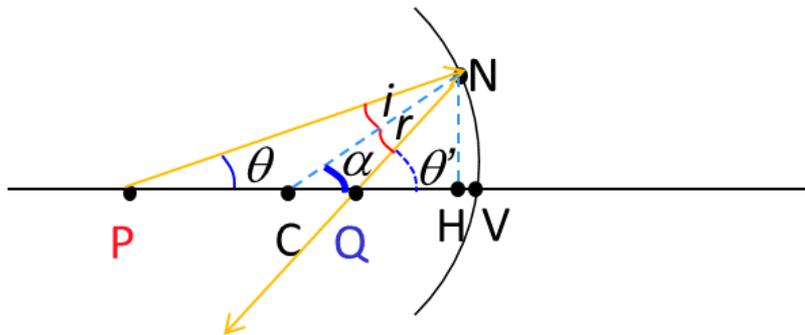
$$\theta \approx \operatorname{tg} \theta \approx y/p$$

$$\operatorname{tg} \alpha = NH/CH$$

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx y/R$$

$$\operatorname{tg} \theta' = NH/QH$$

$$\theta' \approx \operatorname{tg} \theta' \approx y/q$$



$$\theta + \theta' = 2\alpha \implies \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R}$$

Il valore di q non dipende dal raggio luminoso che usiamo, cioè non dipende da θ o y , quindi siamo nella condizione di **STIGMATISMO**.

Specchio concavo

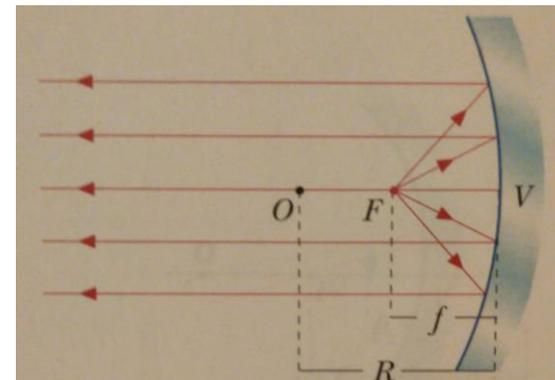
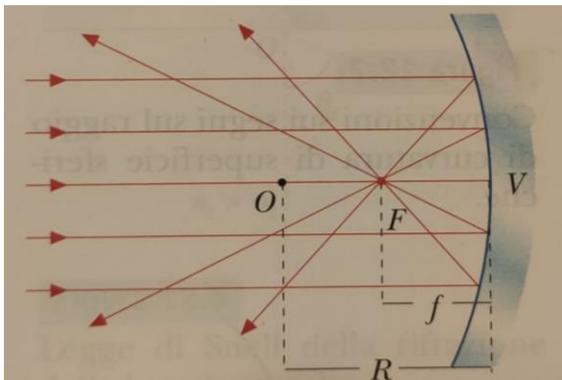
Se facciamo tendere P all'infinito ($p \rightarrow \infty$) il raggio PN diventa parallelo all'asse e il raggio riflesso interseca l'asse in un punto F detto *fuoco*

Dall'equazione dello specchio ricaviamo la posizione del fuoco ($q = f$)

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} \qquad f = \frac{R}{2}$$

In ottica esiste il *principio di invertibilità del raggio luminoso (o cammino ottico)*, secondo cui invertendo il verso di un raggio, si ottiene ancora un possibile raggio, quindi un raggio emesso dal fuoco viene riflesso parallelamente all'asse.

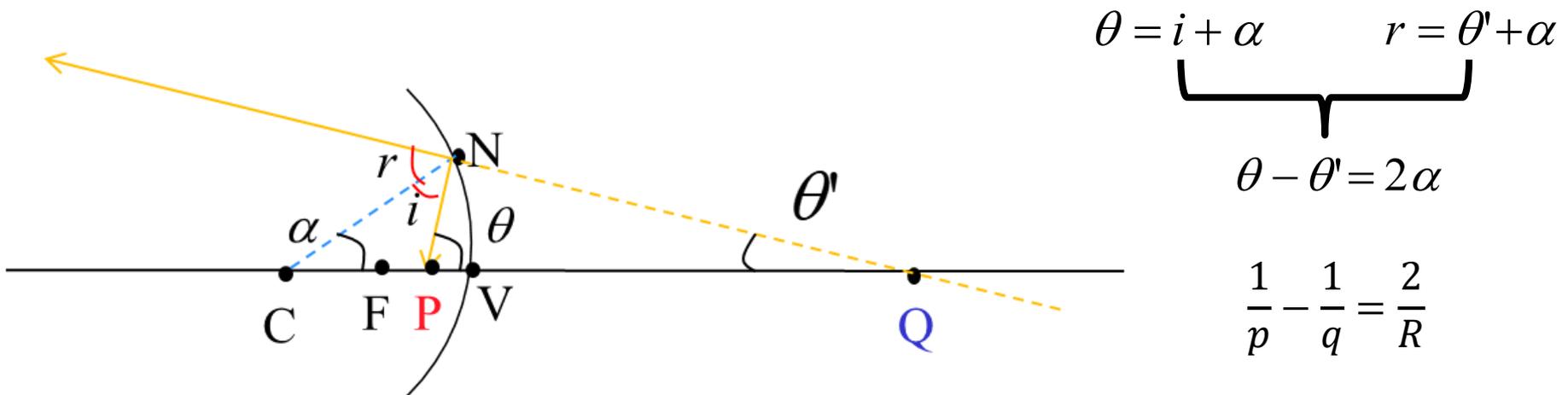
Allora $p = f$ implica $q \rightarrow \infty$



Specchio concavo

Cerchiamo l'immagine Q di un punto oggetto P giacente sull'asse a destra del fuoco.

Il raggio riflesso e l'asse sono ora divergenti e non esiste un punto in cui i raggi convergano, ma se prolunghiamo il raggio riflesso oltre lo specchio esiste un punto Q che viene detto *immagine virtuale* di P. Non si incontrano i raggi, ma i loro prolungamenti geometrici.



Specchio convesso

Consideriamo il raggio PN da P incidente sul punto N dello specchio: angolo d'incidenza i e riflessione $r = i$.

$$i = \theta + \alpha$$

$$\theta' = r + \alpha$$

$$\longrightarrow -\theta + \theta' = 2\alpha$$

$$\text{tg } \theta = NH/PH$$

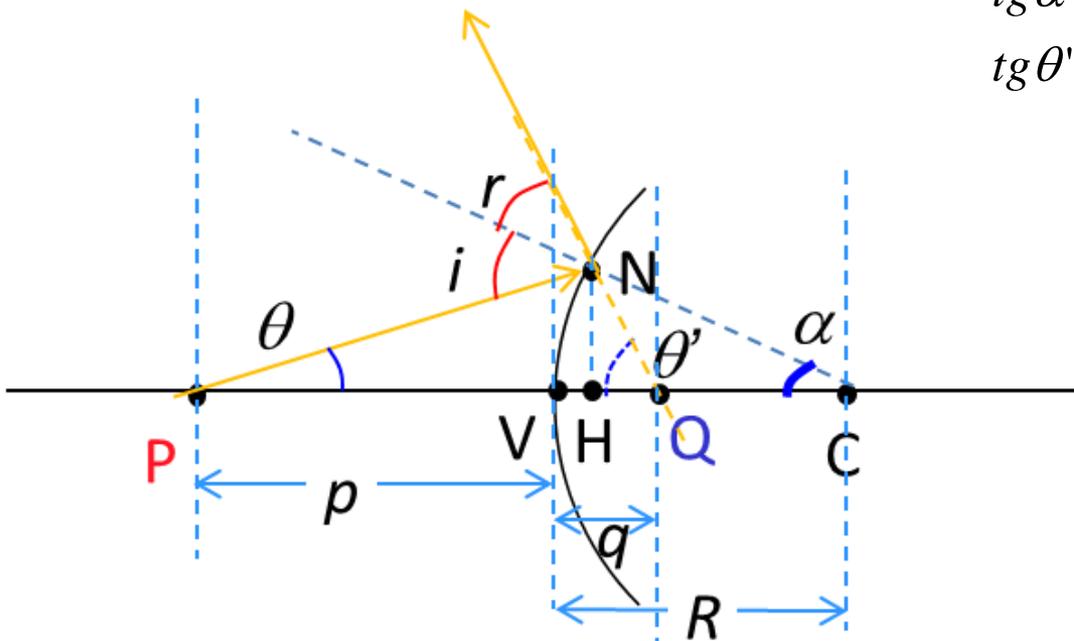
$$\text{tg } \alpha = NH/CH$$

$$\text{tg } \theta' = NH/QH$$

$$\underline{y = NH}$$

$$\underline{q = QH = QV}$$

$$\underline{p = PH = PV}$$



Anche se spostiamo P verso lo specchio l'immagine è SEMPRE VIRTUALE



Specchio convesso

In approssimazione gaussiana gli angoli sono piccoli e $HV \approx 0$.

$$\operatorname{tg} \theta = NH/PH$$

$$\theta \approx \operatorname{tg} \theta \approx y/p$$

$$\operatorname{tg} \alpha = NH/CH$$

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx y/R$$

$$\operatorname{tg} \theta' = NH/QH$$

$$\theta' \approx \operatorname{tg} \theta' \approx y/q$$

$$-\theta + \theta' = 2\alpha \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R}$$

$$p \rightarrow \infty \quad \longrightarrow \quad f = \frac{R}{2}$$

Equazione dello specchio

Abbiamo due equazioni per lo specchio concavo

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R}$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{2}{R}$$

e una per lo specchio convesso

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R}$$

C'è modo di ridurle ad una sola?

Sì. Con le opportune convenzioni

Convenzione dei segni

Scegliamo la seguente equazione: $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R}$ o $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{1}{f}$ con le seguenti convenzioni:

- la luce incidente proviene da sinistra;
- la *distanza* p di un *oggetto* P dal *vertice* V è *positiva* se l'oggetto si trova a *sinistra del vertice*, *negativa* se l'oggetto è a *destra di* V ;
- la *distanza* q dell'*immagine* Q dal *vertice* V è *positiva* se l'*immagine* si trova a *destra del vertice*, *negativa* se l'*immagine* è a *sinistra di* V ;
- il *raggio di curvatura* R della superficie sferica è *positivo* se il centro di curvatura si trova a *destra di* V (superficie sferica convessa), *negativo* se il centro di curvatura è a *sinistra di* V (superficie sferica concava);
- a *sinistra di* V gli *angoli* che i raggi formano con l'asse sono *positivi* se considerati nel verso *antiorario* a partire dall'asse; a *destra di* V il verso *positivo* è quello *orario*;
- le *distanze* y dall'*asse* sono positive per punti al di *sopra* dell'*asse*, *negative* per punti al di *sotto*, se si tratta di *oggetti*; per le *immagini* vale il *contrario*

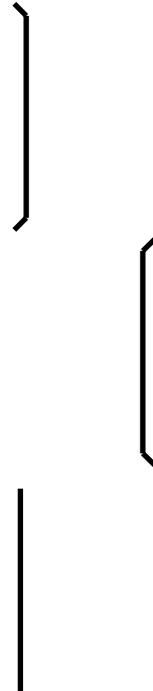


Simboli grafici

- Specchio concavo

- Specchio convesso

- Specchio piano

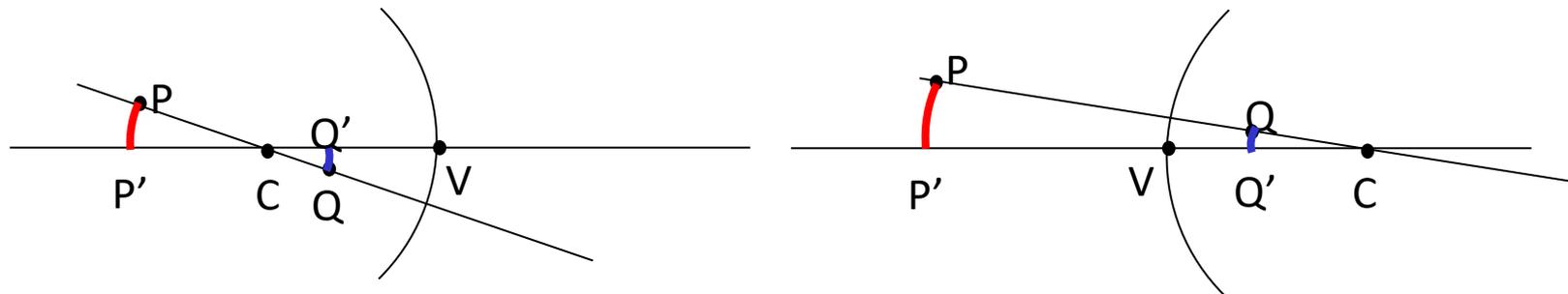


Punti fuori asse

Tracciamo le superfici sferiche di raggio CP e di raggio CQ e dette P' e Q' le intersezioni con l'asse abbiamo che $P'C=PC$, $Q'C=QC$

La relazione oggetto-immagine tra P e Q è la medesima che tra P' e Q'

Quindi lo specchio trasforma una **superficie sferica oggetto PP'** in una **superficie sferica immagine QQ'**



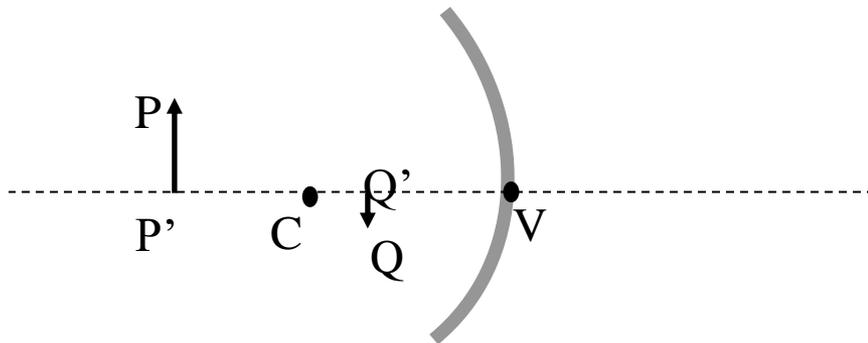
In approssimazione parassiale, gli angoli sono piccoli e quindi vale il principio geometrico per il quale possiamo confondere arco e corda sottesa. Le superfici sferiche possono essere considerate piane.

Gli specchi trasformano quindi **superfici oggetto piane perpendicolari all'asse** in **superfici immagine piane perpendicolari all'asse**

Costruzione dell'immagine

Per determinare l'immagine di un oggetto PP' ortogonale all'asse ottico basta trovare l'immagine Q e Q' dei punti oggetto estremi P e P'

Convenzionalmente un oggetto esteso si rappresenta con una freccia



Per *strumenti stigmatici* la determinazione di un punto immagine Q necessita di soli due raggi
 Q è l'intersezione dei due raggi riflessi

Costruzione dell'immagine – Raggi NOTEVOLI

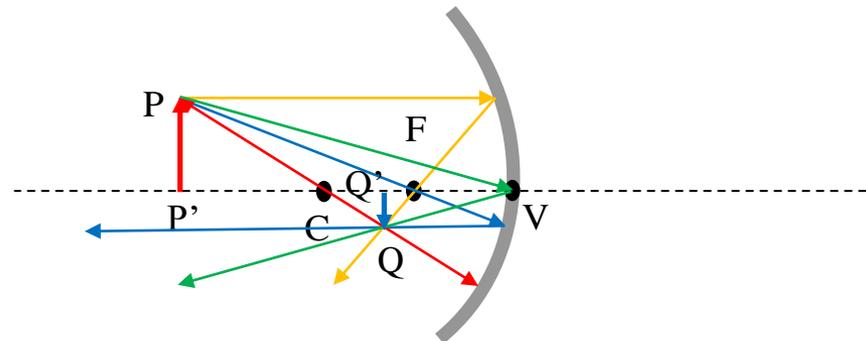
Il raggio parallelo all'asse, riflesso nel fuoco

Il raggio passante per il fuoco, riflesso parallelamente all'asse

Il raggio passante per il centro dello specchio, riflesso all'indietro sovrapposto al raggio d'incidenza

Il raggio passante per il vertice dello specchio che viene riflesso simmetricamente rispetto all'asse

L'immagine Q del punto P si trova all'intersezione dei raggi e il segmento QQ' è l'immagine del segmento PP'



Oggetti virtuali

Supponiamo di avere un elemento ottico che faccia convergere i raggi che su di esso incidono, ma che la presenza di un secondo elemento ottico impedisca che questi raggi convergano per formare l'immagine.

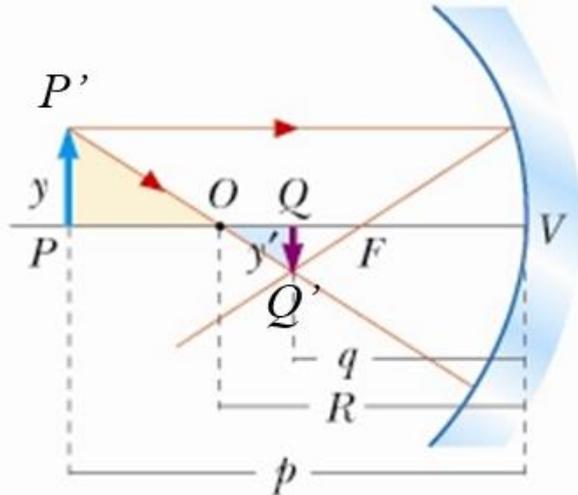
L'immagine non si forma, ma noi possiamo costruirla prolungando i raggi luminosi *come se il secondo elemento ottico non ci fosse*.

L'immagine che otteniamo è virtuale, perché sarebbe reale solo se il secondo elemento ottico non ci fosse.

Ma poiché l'immagine del primo elemento è l'oggetto del secondo elemento, possiamo parlare di oggetto virtuale per il secondo elemento ottico

Un oggetto posto dietro uno specchio è un oggetto virtuale per lo specchio, che potrebbe essere stato creato da un elemento ottico convergente posto prima dello specchio la cui immagine si forma oltre lo specchio.

Ingrandimento trasversale dello specchio



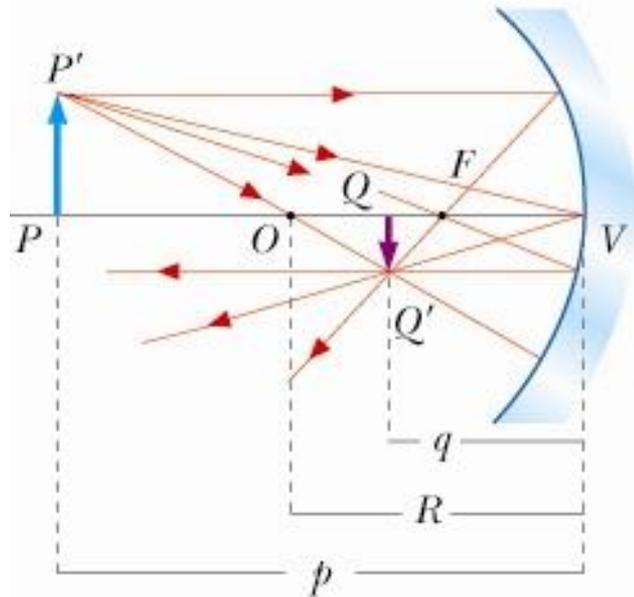
$$I_y = I = \frac{y'}{y} = \frac{QQ'}{PP'}$$

$$I_y = I = \frac{y'}{y} = \frac{QQ'}{PP'} = \frac{OQ}{OP} = \frac{|R| - |q|}{p - |R|} = \frac{-R + q}{p + R} = -\frac{R - q}{p + R} = -\frac{q}{p} \left(\frac{\frac{R}{q} - 1}{1 + \frac{R}{p}} \right)$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R} \quad \longrightarrow \quad \frac{R}{p} = \frac{R}{q} - 2 \quad \longrightarrow \quad 1 + \frac{R}{p} = \frac{R}{q} - 1$$

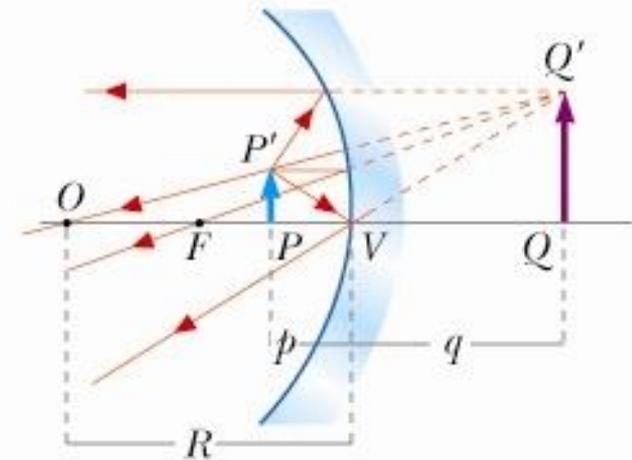
$$I_y = I = -\frac{q}{p}$$

Ingrandimento specchio concavo



$$I = -\frac{q}{p}$$

Essendo $p > 0$ e $q < 0$ si ha $I > 0$,
quindi immagine (reale) capovolta.

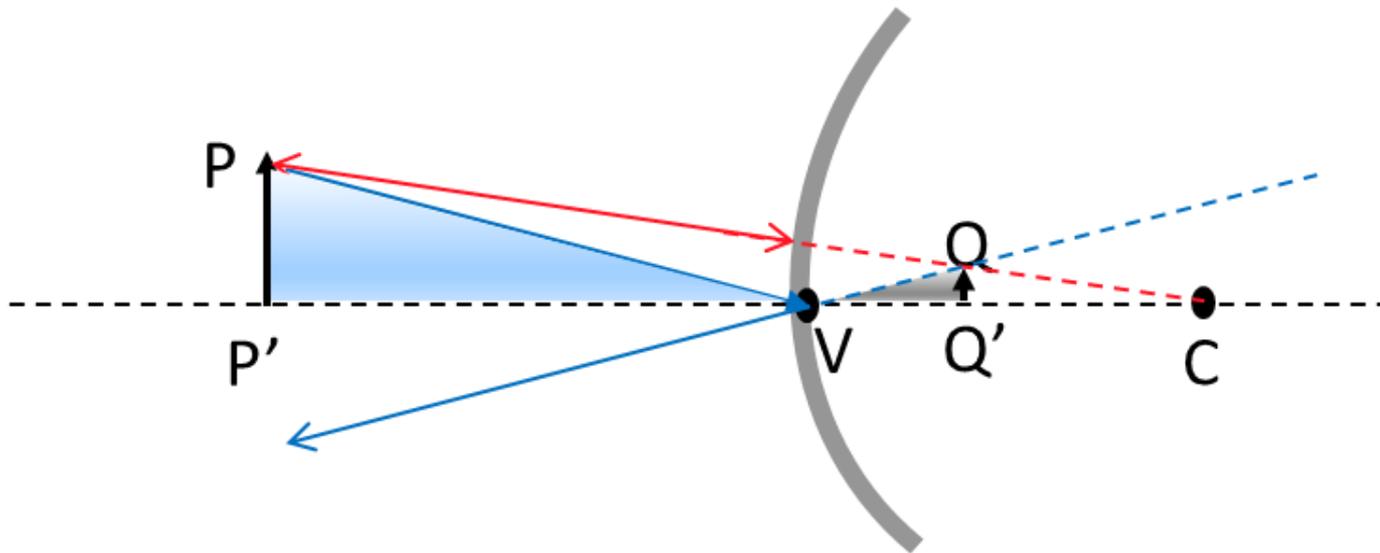


$$I = -\frac{q}{p}$$

Essendo $p > 0$ e $q > 0$ si ha $I < 0$,
quindi immagine (virtuale) dritta.

Ingrandimento specchio convesso

Nello specchio convesso l'immagine è sempre virtuale.

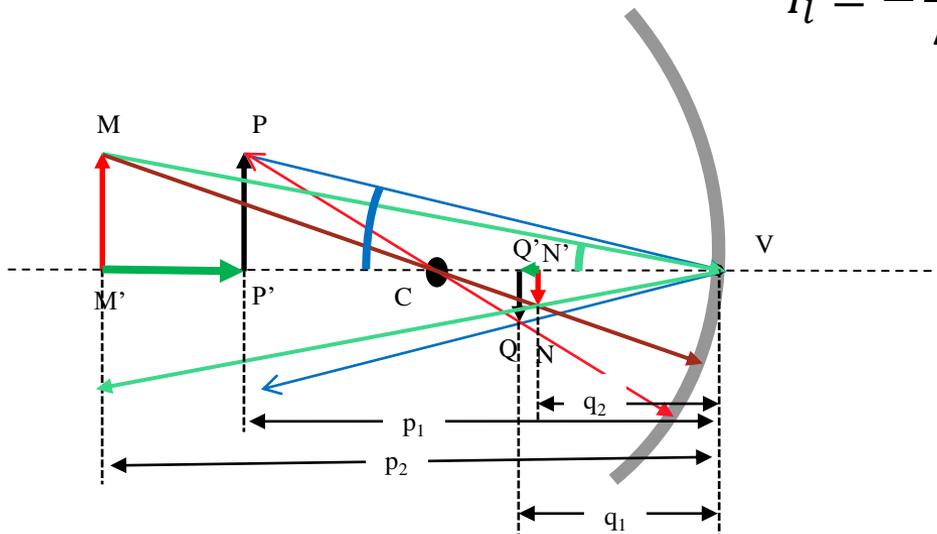


$$I = -\frac{q}{p}$$

Essendo $p > 0$ e $q > 0$ si ha $I < 0$, quindi immagine (virtuale) dritta.

Ingrandimento longitudinale nello specchio

$$I_l = -\frac{\Delta x'}{\Delta x} = -\frac{Q'N'}{P'M'} = -\frac{|q_1| - |q_2|}{p_1 - p_2} = \frac{q_1 - q_2}{p_1 - p_2}$$



$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R}$$

$$q = \frac{pR}{2p + R} \quad \frac{q}{p} = \frac{R}{2p + R} = -I$$

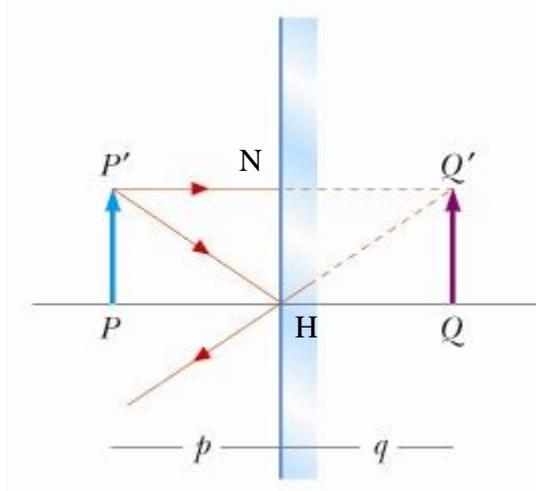
(dipende da p)

$$I_l = \frac{q_1 - q_2}{p_1 - p_2} = \frac{\frac{p_1 R}{2p_1 + R} - \frac{p_2 R}{2p_2 + R}}{p_1 - p_2} = \frac{2p_1 p_2 R + p_1 R^2 - 2p_1 p_2 R - p_2 R^2}{(p_1 - p_2)(2p_1 + R)(2p_2 + R)} =$$

$$= \frac{R^2(p_1 - p_2)}{(p_1 - p_2)(2p_1 + R)(2p_2 + R)} = \frac{R}{(2p_1 + R)} \frac{R}{(2p_2 + R)} = \frac{q_1 q_2}{p_1 p_2} = (-I_1)(-I_2) = I_1 I_2$$



Specchio piano



Per uno specchio piano R è infinito, di conseguenza $q=p$

L'immagine è oltre lo specchio (è virtuale) e posta simmetricamente all'oggetto rispetto allo specchio (q positivo)

Lo specchio piano è stigmatico. Infatti i triangoli rettangoli PHN e QHN sono uguali e quindi $PH=QH$ (oltre che $P'N=Q'N$).

$$I = \frac{y'}{y} = -\frac{q}{p} = -1$$

$$p=q > 0 \Rightarrow I < 0 \text{ (Immagine virtuale dritta).}$$

Immagine di punti all'infinito

Immaginiamo un fascio di luce parallelo che formi un'angolo α con l'asse ottico. Questo accade, p.e., per oggetti molto lontani come le stelle.

Per trovare l'immagine Q usiamo i raggi passanti per V e C

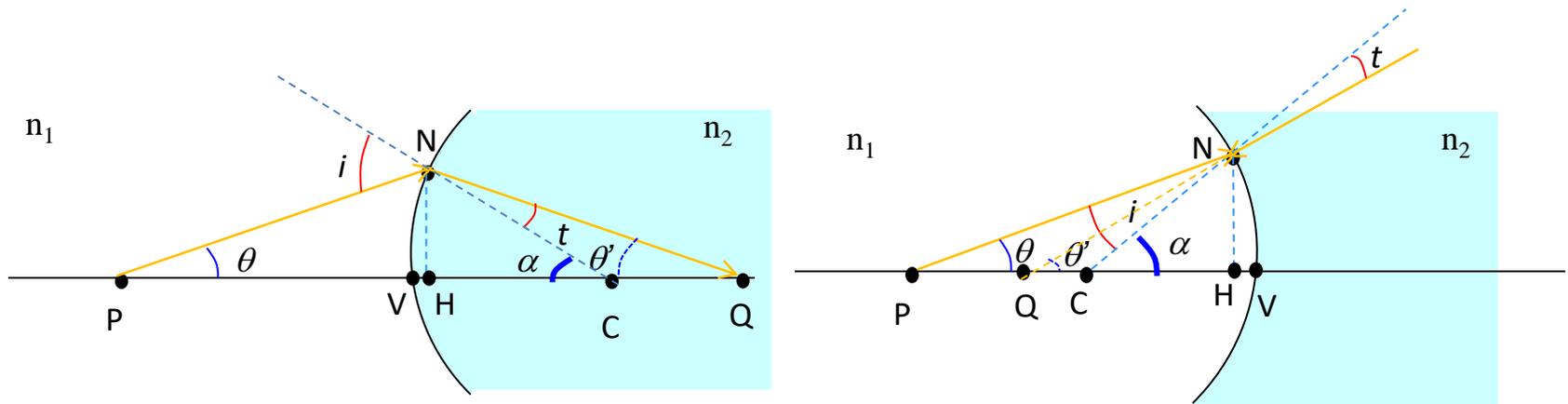


Poiché i raggi provengono dall'infinito l'immagine (punto Q), indipendentemente da α si forma sul piano focale che è il piano perpendicolare all'asse ottico passante per il fuoco F

Diottri

Due mezzi trasparenti con indice di rifrazione diverso, separati da una superficie, costituiscono un diottro. (Limitiamo lo studio alle superfici sferiche o piane)

Supponiamo che il mezzo di sinistra abbia indice n_1 e il mezzo di destra n_2 e che $n_1 < n_2$

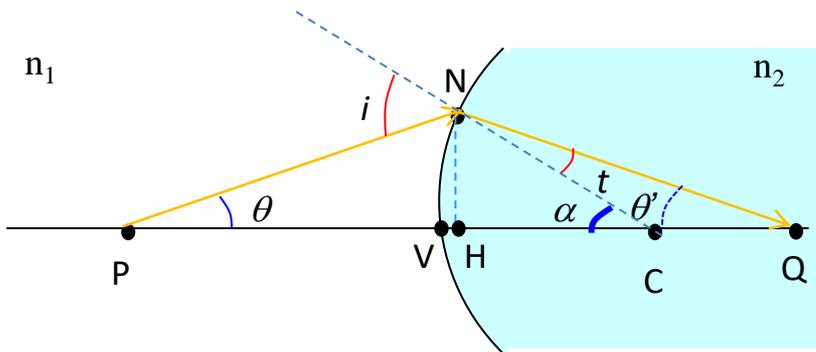


Diotto convesso

Diotto concavo



Diottri – diottro convesso



(gli angoli sono sempre piccoli perché siamo in ottica parassiale)

$$i = \theta + \alpha \qquad \alpha = \theta' + t$$

$$n_1 i = n_2 t \qquad (n_1 \sin i = n_2 \sin t)$$

$$n_1(\alpha + \theta) = n_2(\alpha - \theta')$$

$$n_1 \theta + n_2 \theta' = -(n_2 - n_1) \alpha$$

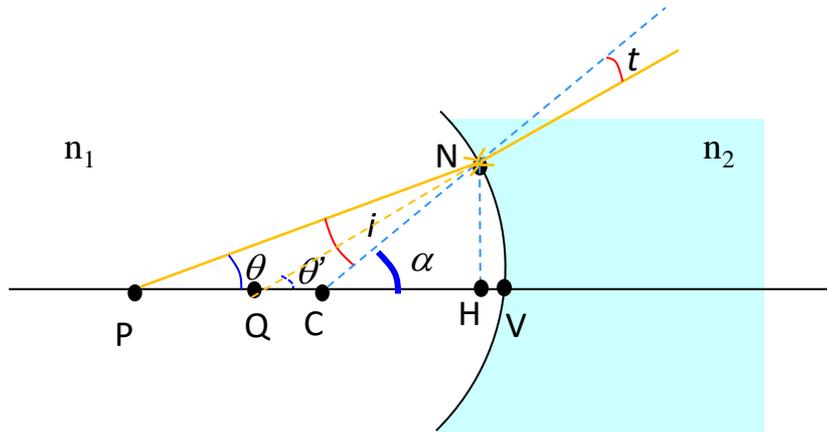
$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$\begin{aligned} \text{tg} \theta &= NH/PH & \theta &\approx \text{tg} \theta \approx y/p \\ \text{tg} \alpha &= NC/CH & \alpha &\approx \text{tg} \alpha \approx y/R \\ \text{tg} \theta' &= NH/QH & \theta' &\approx \text{tg} \theta' \approx y/q \end{aligned}$$

Poiché non vi compare la posizione di N (cioè y) il diottro è uno strumento stigmatico



Diottri – diottro concavo



$$tg\theta = NH/PH$$

$$tg\alpha = NC/CH$$

$$tg\theta' = NH/QH$$

$$\theta \approx tg\theta \approx y/p$$

$$\alpha \approx tg\alpha \approx y/R$$

$$\theta' \approx tg\theta' \approx y/q$$

$$\alpha = \theta + i$$

$$\alpha = \theta' + t$$

$$n_1 i = n_2 t \quad (n_1 \text{sen } i = n_2 \text{ sen } t)$$

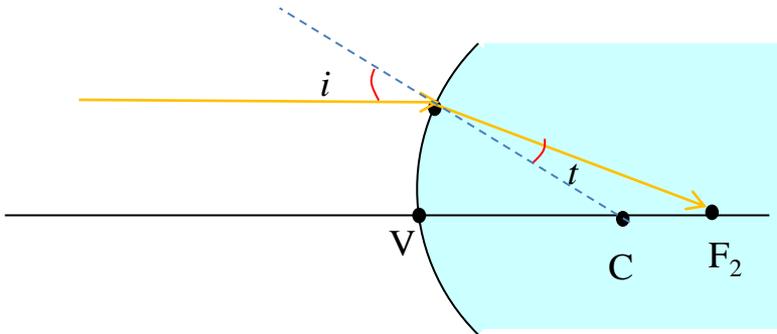
$$n_1(\alpha - \theta) = n_2(\alpha - \theta')$$

$$n_1\theta - n_2\theta' = -(n_2 - n_1)\alpha$$

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = -\frac{n_2 - n_1}{R}$$

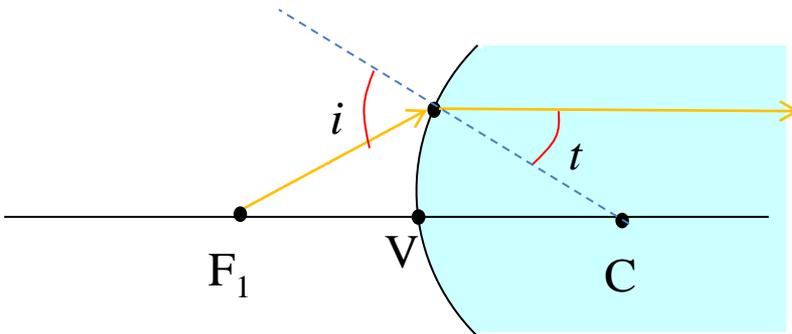


Diottri – Fuochi



Se P tende all'infinito, Q tende ad un punto detto fuoco posteriore ($q = f_2$)

$$\frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \longrightarrow \quad q = f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R$$



Se Q si forma all'infinito, P si trova in un punto detto fuoco anteriore ($p = f_1$)

$$\frac{n_1}{p} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \longrightarrow \quad p = f_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R$$

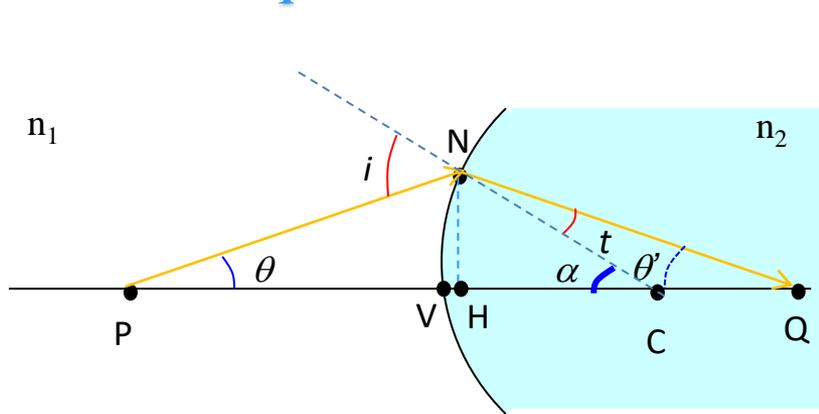
Diottri – convenzione dei segni

Come per gli specchi, per il diottro assumiamo una convenzione sui segni delle quantità ottiche che generalizza l'equazione del diottro convesso e concavo riducendo le due equazioni ad una.

Assumendo che la luce provenga da sinistra (spazio d'incidenza) e si propaghi verso destra (spazio di trasmissione):

- p è positiva se l'oggetto è nello spazio di incidenza, negativa se giace nello spazio di trasmissione
- q è positiva se l'immagine è nello spazio di trasmissione, negativa se giace nello spazio di incidenza
- R è positivo se il centro di curvatura è nello spazio di trasmissione, negativo se giace nello spazio di incidenza
- y (y') è positivo (negativo) se è verso l'alto (il basso) cioè sopra (sotto) l'asse ottico, negativo se è verso il basso (l'alto) cioè sotto (sopra) l'asse ottico

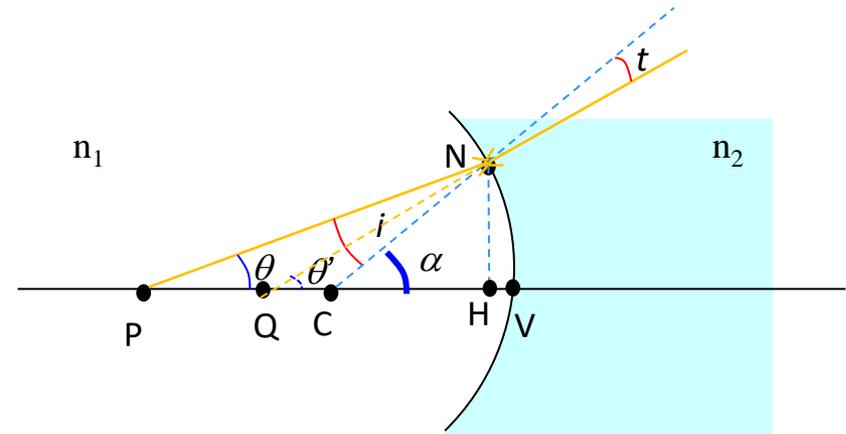
Diottri – Equazione unica



Diottri convesso

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$(p > 0; q > 0; R > 0)$



Diottri concavo

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = -\frac{n_2 - n_1}{R}$$

$(p > 0; q < 0; R < 0)$



$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$



Diottri – Altre equazioni

Partendo dall'equazione del diottri:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

e ricordando che

$$f_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R$$

$$f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R$$

abbiamo che

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

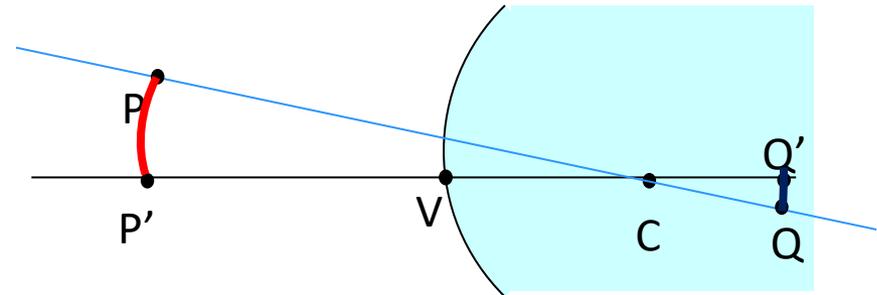
$$\frac{f_1}{p} + \frac{f_2}{q} = 1$$



Diottri – Punti fuori asse

(come per gli specchi)

Se P un punto fuori asse, è sempre possibile tracciare una retta passante per P e per il centro C



Tracciamo due superfici sferiche, una di raggio CP e l'altra di raggio CQ e siano P' e Q' le intersezioni con l'asse ($P'C=PC$, $Q'C=QC$)

La relazione oggetto-immagine tra P e Q è la medesima che tra P' e Q'

Quindi il diottero trasforma una **superficie sferica oggetto PP'** in una **superficie sferica immagine QQ'** , che possono essere approssimate a dei piani nell'approssimazione parassiale.

Diottri – Costruzione dell'immagine

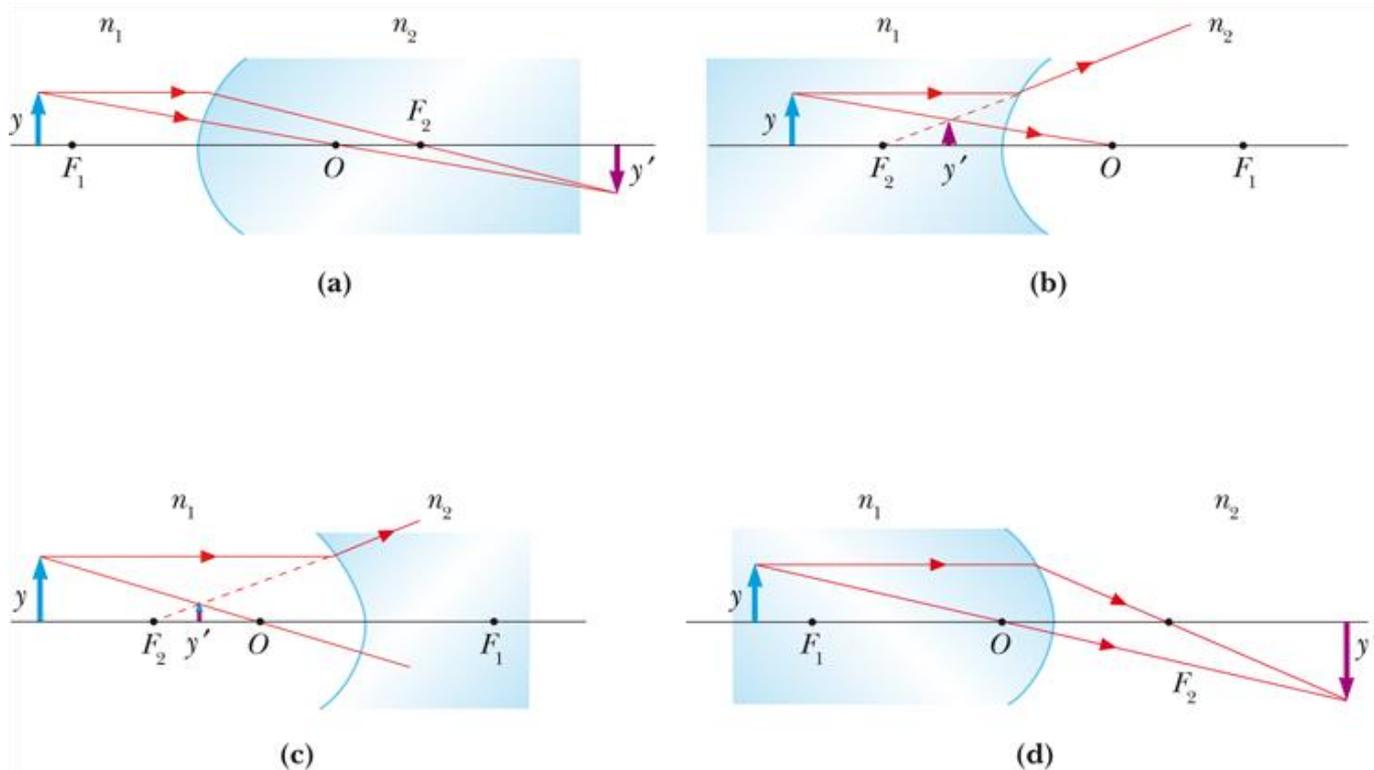
Il diottro trasforma un (segmento) oggetto perpendicolare all'asse ottico in un (segmento) immagine perpendicolare all'asse ottico, basta quindi costruire l'immagine dei *due punti estremi* dell'oggetto per conoscere l'estensione dell'immagine

In condizione stigmatica bastano *due* raggi per determinare un punto immagine

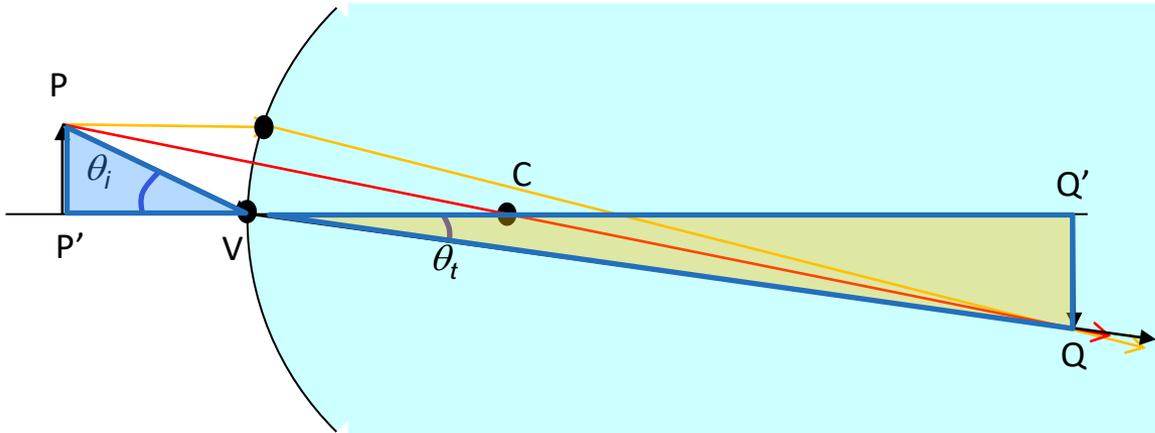
I raggi notevoli emessi dall'oggetto sono, in questo caso:

- Il raggio parallelo all'asse ottico che viene rifratto nel fuoco posteriore (f_2)
- Il raggio passante per il fuoco anteriore (f_1) che viene rifratto parallelamente all'asse ottico
- Il raggio passante per il centro di curvatura che viene rifratto senza deviazione

Diottri – Costruzione dell'immagine



Diottri – Ingrandimento trasversale



Usiamo il raggio incidente nel vertice. Dai triangoli $PP'V$ e $QQ'V$ abbiamo

$$PP' = P'V \cdot \operatorname{tg} \theta_i$$

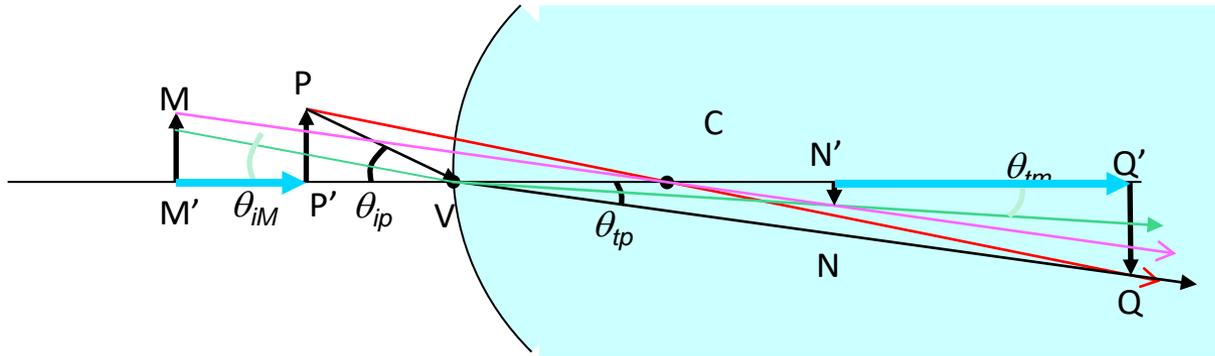
$$QQ' = Q'V \cdot \operatorname{tg} \theta_t$$

$$n_1 \theta_i = n_2 \theta_t$$

$$I = \frac{y'}{y} = \frac{QQ'}{PP'} = \frac{Q'V \cdot \operatorname{tg} \theta_t}{P'V \cdot \operatorname{tg} \theta_i} \approx \frac{Q'V \cdot \theta_t}{P'V \cdot \theta_i} = \frac{Q'V n_1}{P'V n_2} = \frac{n_1 q}{n_2 p}$$

$$I = \frac{n_1 q}{n_2 p} = \frac{f_1 q}{f_2 p} = \frac{f_1}{p - f_1} \left(= \frac{q - f_2}{f_2} \right) \quad (\text{dipende da } p)$$

Diottri – Ingrandimento longitudinale



$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$I_l = \frac{Q'N'}{P'M'} = \frac{Q'V - N'V}{P'V - M'V} = \frac{q_1 - q_2}{p_1 - p_2}$$

$$\frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} - \frac{n_1}{p} = \frac{(n_2 - n_1)p - n_1R}{pR}$$

$$q = \frac{n_2 p R}{(n_2 - n_1)p - n_1 R}$$



Diottri – Ingrandimento longitudinale

$$I_1 = \frac{n_1 q_1}{n_2 p_1} \quad I_2 = \frac{n_1 q_2}{n_2 p_2} \quad q_1 = \frac{n_2 p_1 R}{(n_2 - n_1)p_1 - n_1 R} \quad q_2 = \frac{n_2 p_2 R}{(n_2 - n_1)p_2 - n_1 R}$$

$$\begin{aligned} I_l &= \frac{q_1 - q_2}{p_1 - p_2} = \frac{q_1 - q_2}{p_1 - p_2} = \frac{\frac{n_2 p_1 R}{(n_2 - n_1)p_1 - n_1 R} - \frac{n_2 p_2 R}{(n_2 - n_1)p_2 - n_1 R}}{p_1 - p_2} = \\ &= \frac{n_2 p_1 R ((n_2 - n_1)p_2 - n_1 R) - n_2 p_2 R ((n_2 - n_1)p_1 - n_1 R)}{(p_1 - p_2) [((n_2 - n_1)p_1 - n_1 R)] [((n_2 - n_1)p_2 - n_1 R)]} = \\ &= \frac{n_2 p_1 p_2 R (n_2 - n_1) - n_1 n_2 p_1 R^2 - n_2 p_1 p_2 R (n_2 - n_1) + n_1 n_2 p_2 R^2}{(p_1 - p_2) [((n_2 - n_1)p_1 - n_1 R)] [((n_2 - n_1)p_2 - n_1 R)]} = \\ &= -\frac{n_1}{n_2} \frac{n_2^2 R^2 (p_1 - p_2)}{(p_1 - p_2) [((n_2 - n_1)p_1 - n_1 R)] [((n_2 - n_1)p_2 - n_1 R)]} \end{aligned}$$



Diottri – Ingrandimento longitudinale

$$\begin{aligned}
 I_l &= -\frac{n_1}{n_2} \frac{n_2^2 R^2 (p_1 - p_2)}{(p_1 - p_2) [(n_2 - n_1)p_1 - n_1 R] [(n_2 - n_1)p_2 - n_1 R]} = \\
 &= -\frac{n_1}{n_2} \frac{n_2 R}{[(n_2 - n_1)p_1 - n_1 R]} \frac{n_2 R}{[(n_2 - n_1)p_2 - n_1 R]} = \\
 &= -\frac{n_1}{n_2} \frac{q_1 q_2}{p_1 p_2} = -\frac{n_1}{n_2} \left(\frac{n_2}{n_1} I_1 \right) \left(\frac{n_2}{n_1} I_2 \right) = -\frac{n_2}{n_1} I_1 I_2
 \end{aligned}$$

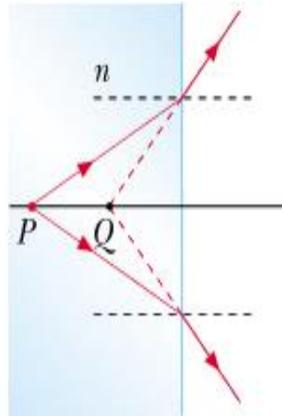
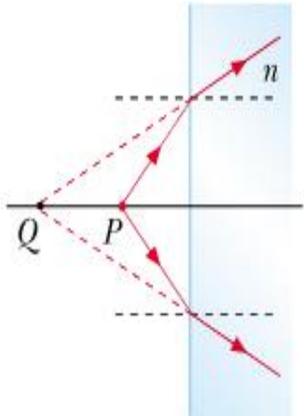
$$I_{t1} = I_1 = \frac{n_1 q_1}{n_2 p_1} = \frac{f_1}{p_1 - f_1} \qquad I_{t2} = I_2 = \frac{n_1 q_2}{n_2 p_2} = \frac{f_1}{p_2 - f_1}$$

$$I_l = -\frac{n_2}{n_1} I_1 I_2 = -\frac{n_2}{n_1} \frac{f_1}{p_1 - f_1} \frac{f_1}{p_2 - f_1}$$

(in aria $n_1=1$, $n_2=n$ $I_l = -n I_1 I_2$)



Diottri – diottro piano



$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$(R \rightarrow \infty)$$

$$q = -\frac{n_2}{n_1}p$$

$$I = \frac{n_1 q}{n_2 p} = \frac{n_1}{n_2} p \left(-\frac{n_2}{n_1 p} \right) = -1$$

$q < 0$ significa che l'immagine è virtuale, $I < 0$ che l'immagine è dritta.

Se $n_1 < n_2$ l'immagine è più distante dalla superficie del diottro di quanto lo sia l'oggetto

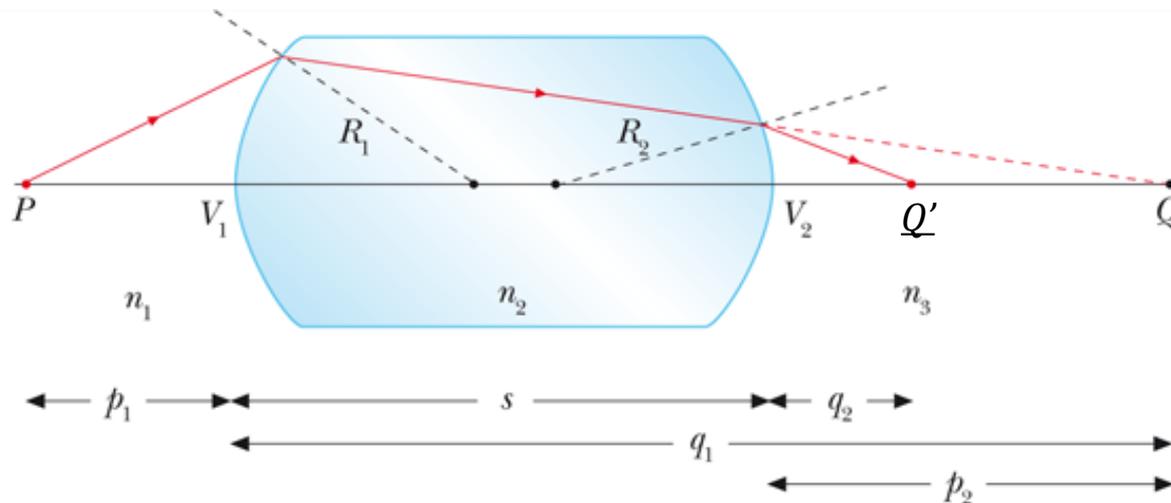
se $n_1 > n_2$ l'immagine è più vicina alla superficie del diottro rispetto all'oggetto.

Lenti

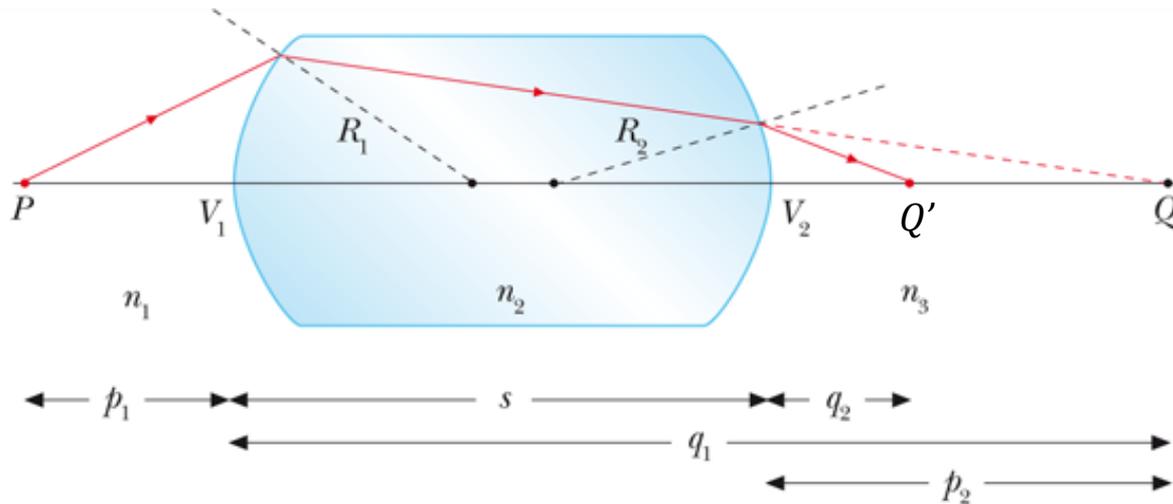
Una lente può essere considerata l'insieme di due diottri (solitamente in aria)

L'azione totale della lente è data dalla rifrazione successiva dei due diottri

Siano R_1 e R_2 i raggi di curvatura delle superfici della lente e n_1 , n_2 ed n_3 gli indici di rifrazione del mezzo e del materiale.



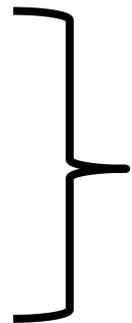
Lenti – lente spessa



$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{q_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}$$

$$\frac{n_2}{p_2} + \frac{n_3}{q_2} = \frac{n_3 - n_2}{R_2}$$

$$p_2 = s - q_1$$



$$\xrightarrow{n_1 = n_3}$$

$$\frac{n_1}{p_1} + \left[\frac{n_2 s}{q_1 (s - q_1)} \right] + \frac{n_1}{q_2} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Lenti – lente sottile

$$s \rightarrow 0$$



$$\left[\frac{n_2 s}{q_1 (s - q_1)} \right] \rightarrow 0$$



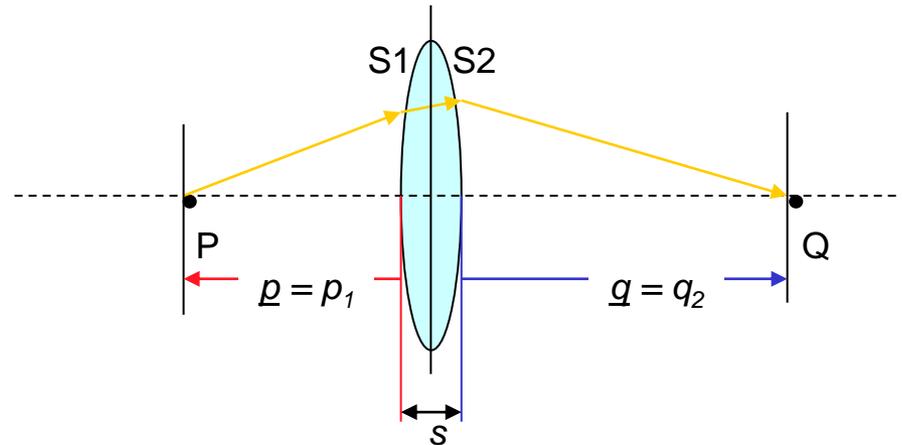
$$\frac{n_1}{p_1} + \left[\frac{n_2 s}{q_1 (s - q_1)} \right] + \frac{n_1}{q_2} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_1}{q_2} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \xrightarrow[p_1 = p]{q_2 = q} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

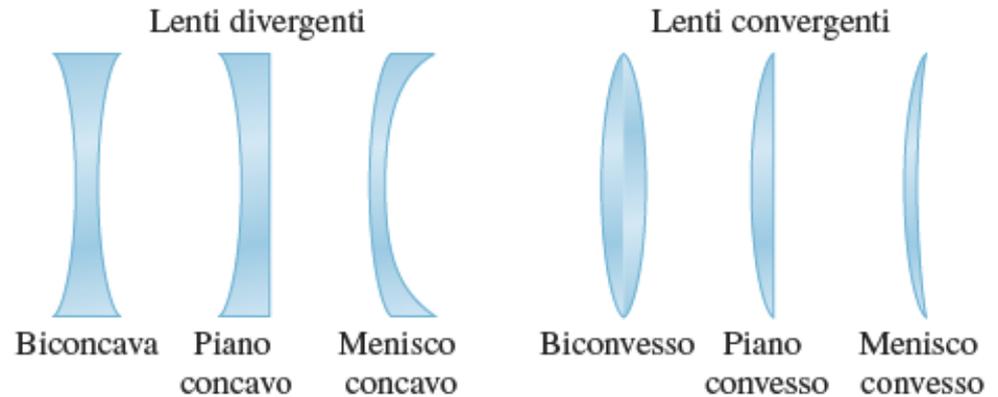
$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \longrightarrow$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$



Classificazione delle lenti

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



	$1/R_1$	$1/R_2$	R_1 vs. R_2	$1/f$
Biconcava	<0	>0	$\underline{R_1 = R_2}$	$<0 \rightarrow$ divergente
Piano concava	<0	0	$//$	$<0 \rightarrow$ divergente
Menisco concava	>0	>0	$\underline{R_1 > R_2}$	$<0 \rightarrow$ divergente
Biconvessa	>0	<0	$\underline{R_1 = R_2}$	$>0 \rightarrow$ convergente
Piano convessa	>0	0	$//$	$>0 \rightarrow$ convergente
Menisco convessa	>0	>0	$\underline{R_1 < R_2}$	$>0 \rightarrow$ convergente



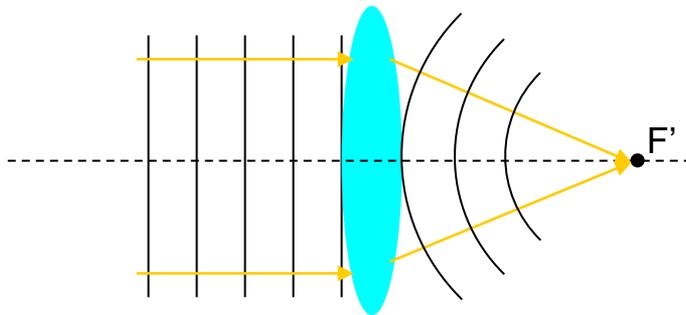
Lente convergente

Consideriamo una lente biconvessa (p.e. di vetro) con indice $n=1.5 > 1$

I fronti d'onda piani incidenti devono attraversare uno spessore di vetro maggiore al centro della lente che nella parte esterna

Poiché la velocità della luce è minore nel vetro che nell'aria, la parte centrale di ciascun fronte d'onda è in ritardo rispetto alla parte esterna

Questo produce un'onda sferica che converge nel fuoco F' , e i raggi, perpendicolari ai fronti, passano per F'



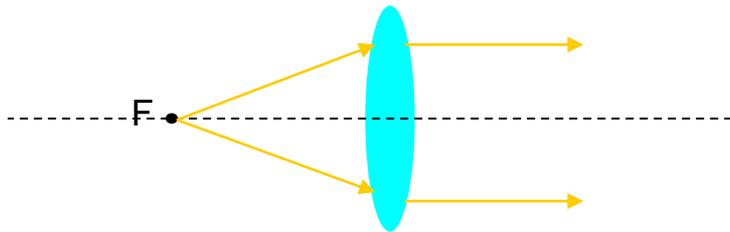
Simbolo della lente convergente



Lente convergente - fuochi

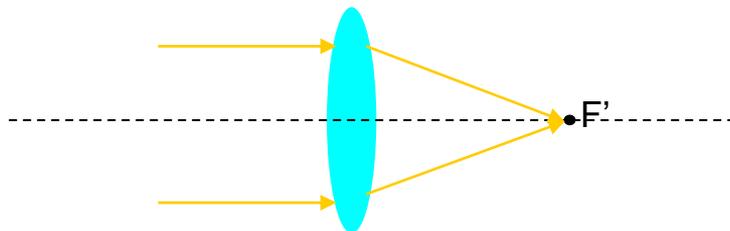
I fuochi si trovano facendo tendere p e q all'infinito:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

$$q \rightarrow \infty \Rightarrow p = f$$



$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

$$p \rightarrow \infty \Rightarrow q = f$$

La distanza focale è identica sia prima che dopo la lente

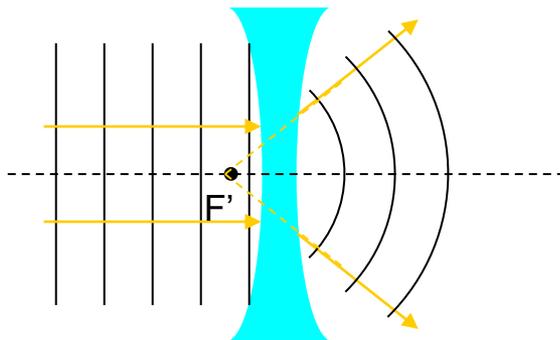
Lente divergente

Consideriamo una lente biconcava (p.e. di vetro) con indice $n=1.5 > 1$

I fronti d'onda piani incidenti devono attraversare uno spessore di vetro minore al centro della lente che nella parte esterna

Poiché la velocità della luce è minore nel vetro che nell'aria, la parte centrale di ciascun fronte d'onda è in anticipo rispetto alla parte esterna

Questo produce un'onda sferica che diverge e i prolungamenti dei raggi, perpendicolari ai fronti d'onda, passano per F'



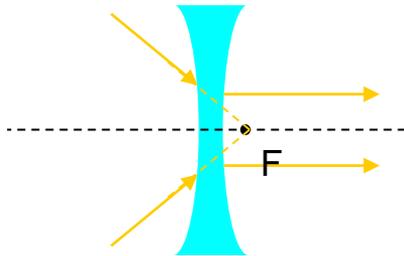
Simbolo della lente divergente



Lente divergente - fuochi

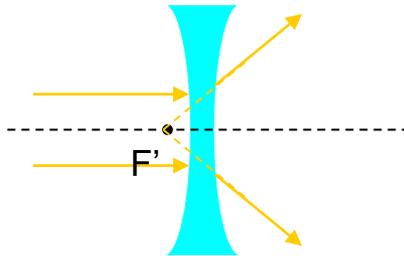
I fuochi si trovano facendo tendere p e q all'infinito:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

$$q \rightarrow \infty \Rightarrow p = f$$



$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

$$p \rightarrow \infty \Rightarrow q = f$$

La distanza focale è identica sia prima che dopo la lente

Lenti – potere convergente

Il potere convergente di una lente è l'inverso della distanza focale

$$P = \frac{1}{f}$$

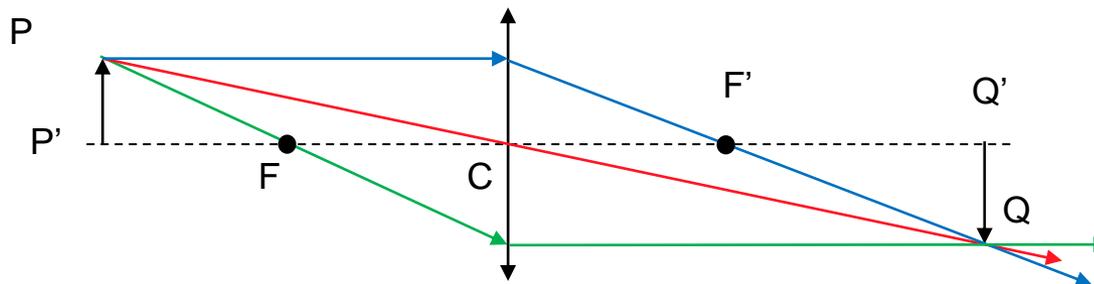
L'unità di misura del potere convergente D è m^{-1}

Il potere convergente è positivo per lenti convergenti e negativo per lenti divergenti

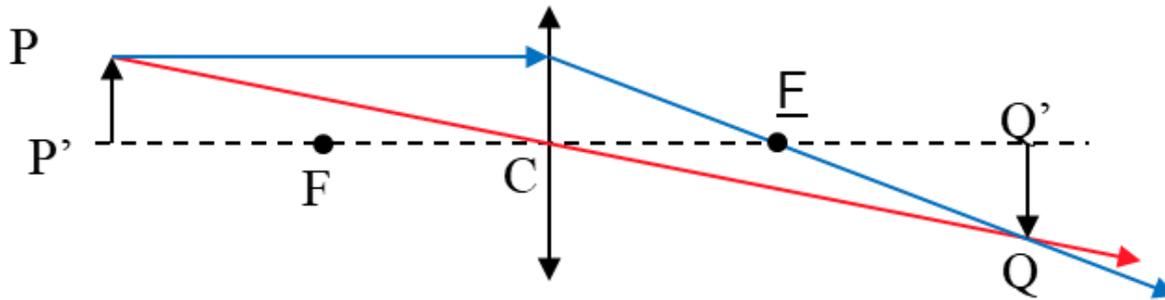
Lenti – costruzione dell'immagine

I raggi notevoli emessi dall'oggetto sono, in questo caso

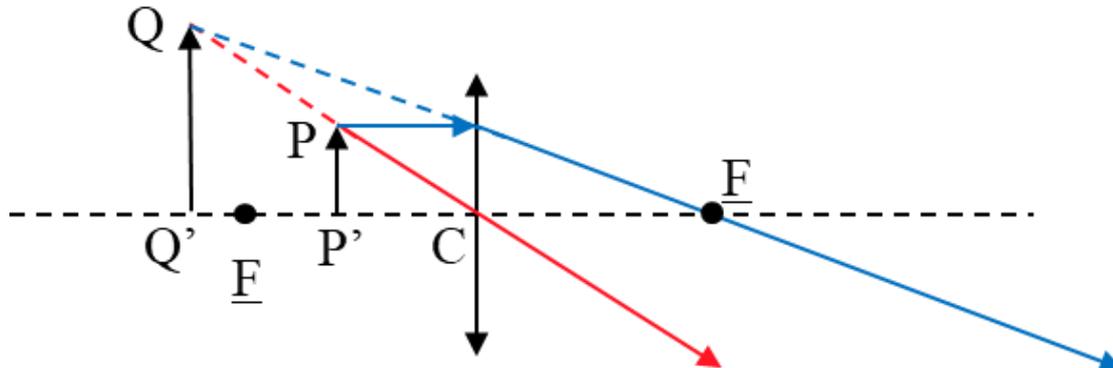
- Il raggio **parallelo all'asse** che viene rifratto nel secondo fuoco
- Il raggio **passante per il primo fuoco** che viene rifratto parallelamente all'asse
- Il raggio **passante per il centro della lente** che viene rifratto senza deviazione (le facce della lente sono parallele per questo raggio e quindi esso emerge nella stessa direzione, ma lievemente spostato. Poiché la lente è sottile, tale spostamento è trascurabile)



Lenti – costruzione dell'immagine (lente convergente)

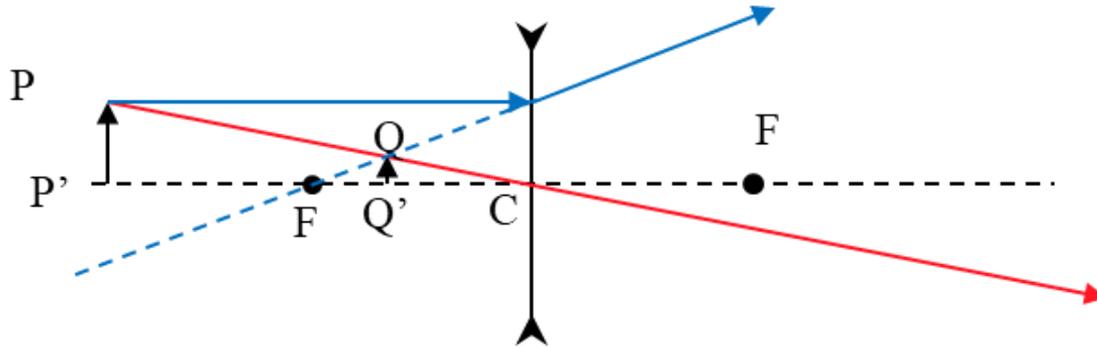


Oggetto «prima» del fuoco:
immagine reale e capovolta

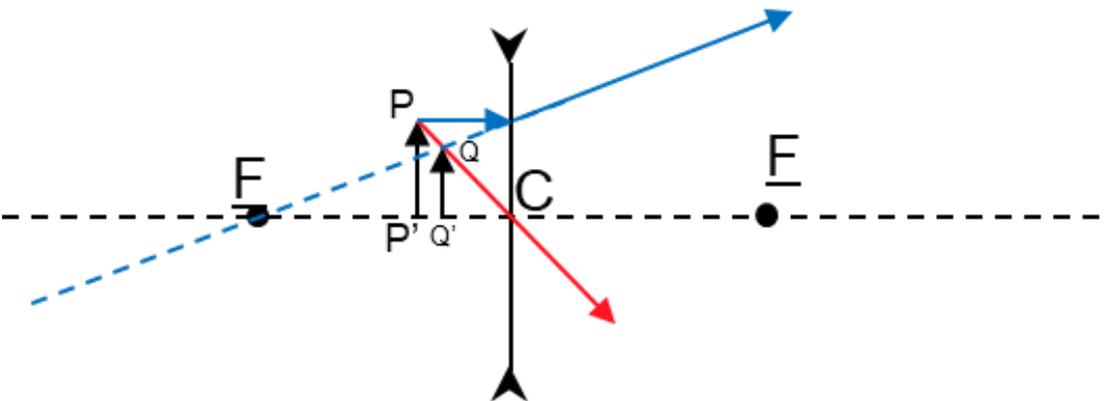


Oggetto fra il fuoco e la
lente: immagine virtuale e
dritta

Lenti – costruzione dell'immagine (lente divergente)



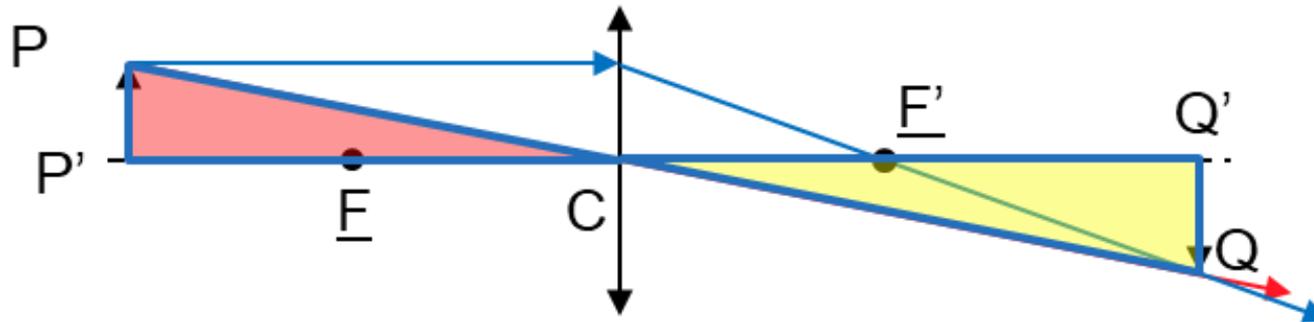
Oggetto «prima» del fuoco:
immagine virtuale e dritta



Oggetto fra il fuoco e la
lente: immagine virtuale e
dritta

Lenti – ingrandimento (trasversale)

Usiamo il raggio incidente nel centro della lente: dai triangolo $PP'C$ e $QQ'C$.

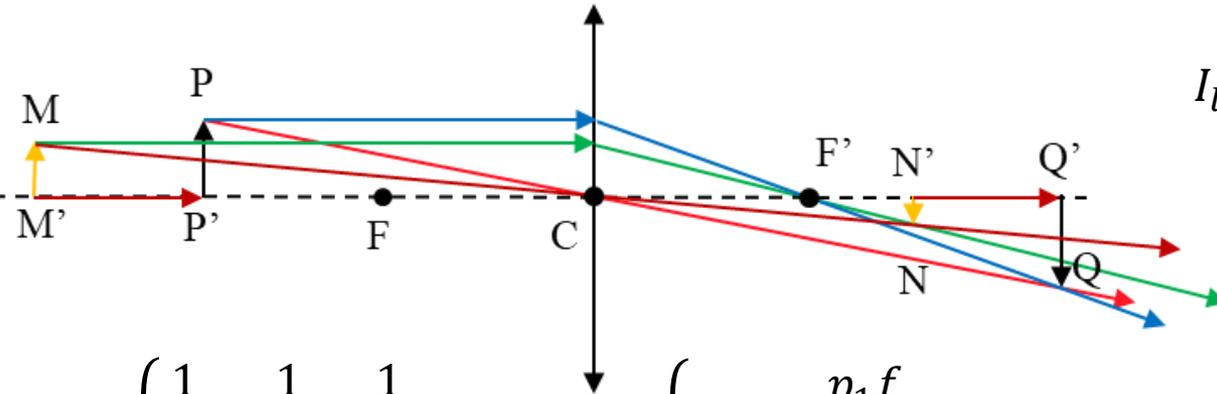


$$I = \frac{QQ'}{PP'} = \frac{Q'C}{P'C} = \frac{q}{p}$$

$$I = \frac{q}{p} = \frac{q - f}{q} = \frac{f}{p - f}$$

(dipende da p)

Lenti – ingrandimento (longitudinale)



$$I_l = \frac{Q'N'}{P'M'} = \frac{Q'C - N'C}{P'C - M'C} = \frac{q_1 - q_2}{p_1 - p_2}$$



$$\begin{cases} \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f} \\ \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f} \end{cases}$$



$$\begin{cases} q_1 = \frac{p_1 f}{p_1 - f} \\ q_2 = \frac{p_2 f}{p_1 - f} \end{cases}$$



$$I_l = \frac{q_1 - q_2}{p_1 - p_2} = \frac{\frac{p_1 f}{p_1 - f} - \frac{p_2 f}{p_2 - f}}{p_1 - p_2}$$

$$I_l = \frac{\frac{p_1 f}{p_1 - f} - \frac{p_2 f}{p_2 - f}}{p_1 - p_2} = \frac{1}{p_1 - p_2} f \frac{p_1 p_2 - p_1 f - p_1 p_2 + p_2 f}{(p_1 - f)((p_1 - f))} = \frac{1}{p_1 - p_2} f \frac{f(p_2 - p_1)}{(p_1 - f)((p_1 - f))}$$

$$I_l = \frac{f}{((p_1 - f))} \frac{f}{(p_2 - f)} = \frac{q_1 q_2}{p_1 p_2} = I_1 I_2$$



Sistemi di lenti

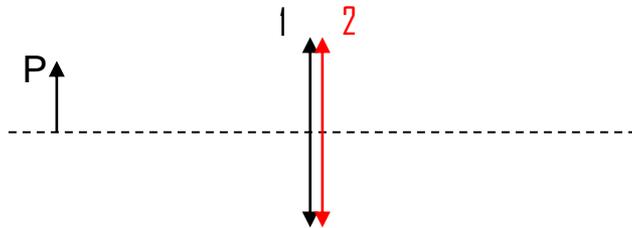
Se si hanno più lenti, si può trovare l'immagine del sistema procedendo una lente per volta. L'immagine di una lente, reale o virtuale che sia, sarà l'oggetto della lente consecutiva

Si dicono *addossate* lenti poste in modo che la distanza fra loro sia nulla.

Si può dimostrare (nel caso di due lenti) che valgono:

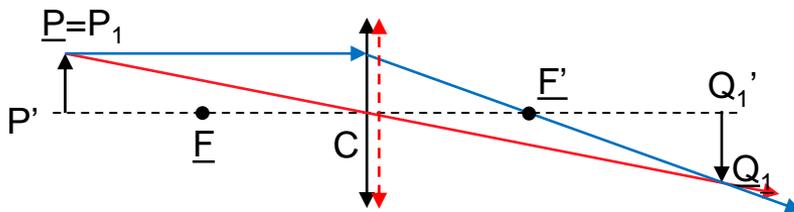
$$\frac{1}{f_{eq}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \qquad P_{eq} = P_1 + P_2$$

Sistemi di lenti addossate



Sia dato un sistema di due lenti addossate di fuochi rispettivi f_1 e f_2 , troviamo l'immagine Q di un punto oggetto P

Troviamo dapprima l'immagine Q_1 dalla lente 1

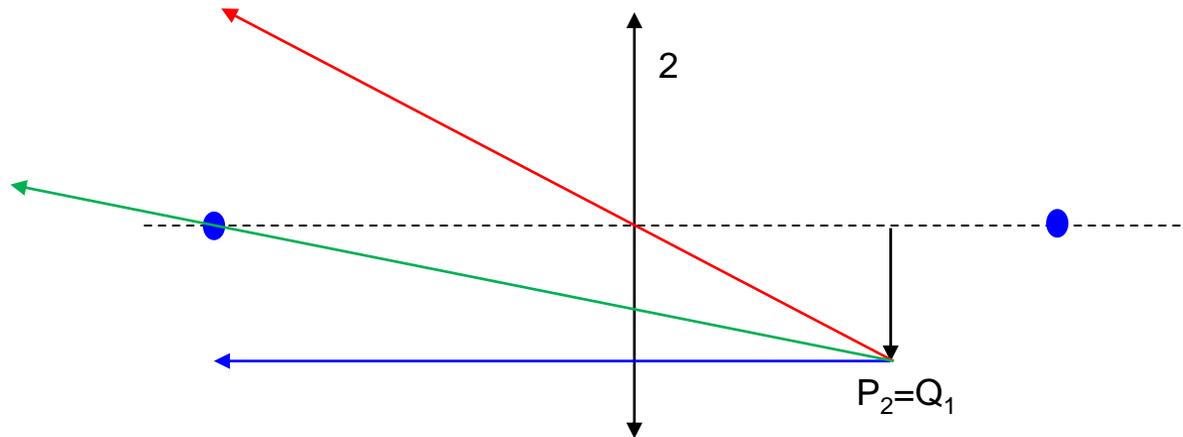


$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1}$$

L'immagine della prima lente diviene l'oggetto della seconda lente. L'oggetto si trova a destra della seconda lente e quindi è VIRTUALE.

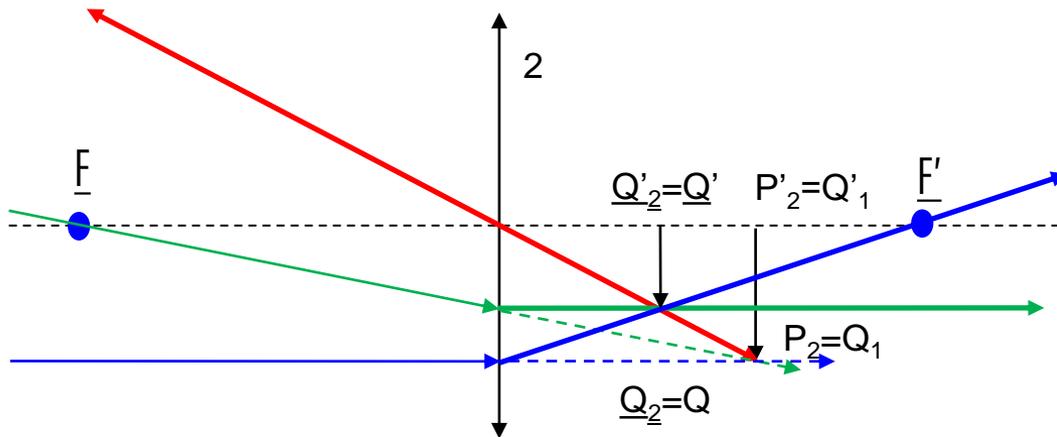
Sistemi di lenti addossate

Consideriamo ora solo la lente 2 e tracciamo allora all'indietro, cioè da Destra a Sinistra, i raggi uscenti dall'oggetto fino a oltrepassare la lente, come se questa non ci fosse.



Sistemi di lenti addossate

Invertiamo ora il verso dei raggi e attraversando la lente 2 costruiamo i raggi rifratti dalla lente (Indicati qui in grassetto)



$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = -\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = -\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}$$

Aberrazioni

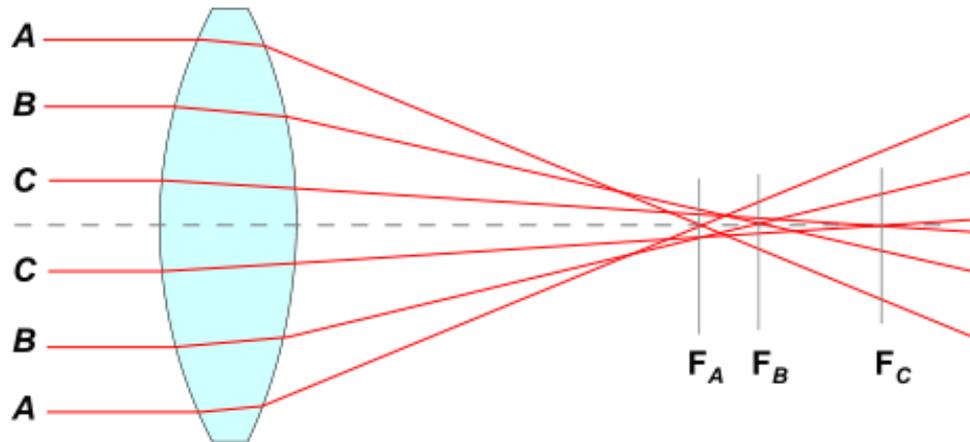
Le lenti forniscono immagini puntiformi di oggetti puntiformi solo quando è verificata la condizione Gauss: parassialità e lenti sottili. Se ciò non accade si hanno i fenomeni di aberrazione.

Esistono diversi tipi di aberrazioni:

- Geometriche:
 - Aberrazione sferica;
 - Astigmatismo;
 - Coma;
 - Curvatura di campo;
 - Distorsione di campo;
- Cromatiche:
 - dovute alla dipendenza di n da λ e all'uso di luce non monocromatica.

Aberrazioni – aberrazione sferica

Se il fascio intercettato dalla lente è grande (*non siamo in condizioni parassiali*) \Rightarrow i raggi che emergono sono focalizzati in punti diversi dell'asse ottico e un punto è focalizzato in diversi fuochi. I fuochi F_A e F_B si dicono marginali.



Interponendo uno schermo tra F_A e F_C si ottiene un cerchio luminoso circondato da una corona circolare.

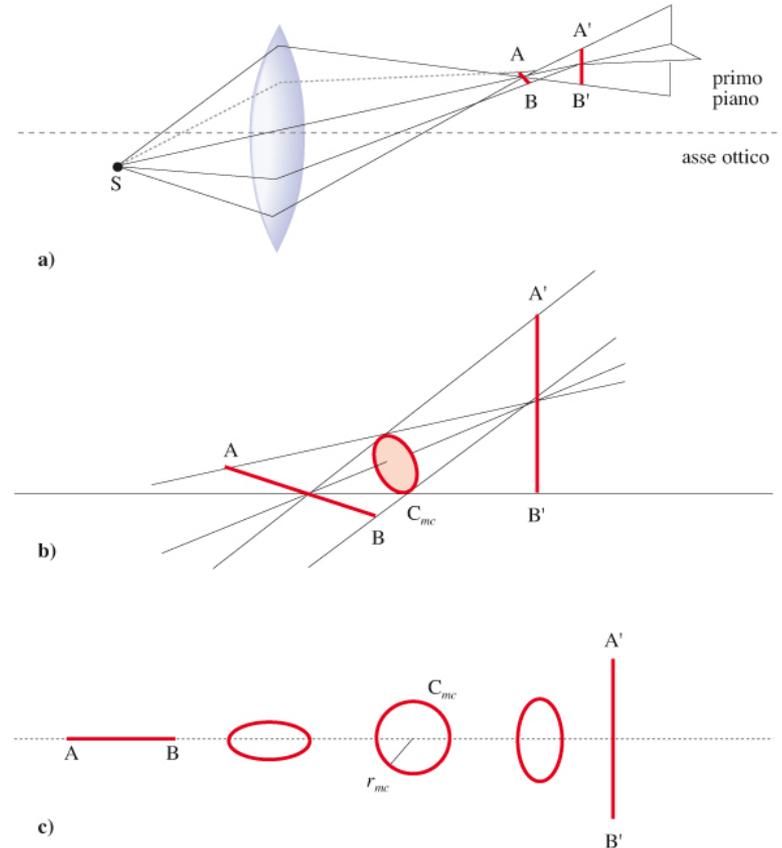
Il cerchio minimo si chiama *cerchio di minima confusione* ed è la migliore immagine del punto.

L'aberrazione sferica può essere corretta diaframmando la lente, ossia utilizzando la sola porzione in prossimità dell'asse ottico.

Aberrazioni – astigmatismo

L'astigmatismo si ha quando una superficie non è perfettamente sferica e i raggi di curvatura di due sezioni ortogonali della lente differiscono.

Preso una sorgente luminosa S puntiforme che non sia sull'asse ottico della lente per la quale non sia più valida l'approssimazione di Gauss, abbiamo che i raggi emergenti NON sono più focalizzati sull'asse ottico ma su piani fra loro differenti.

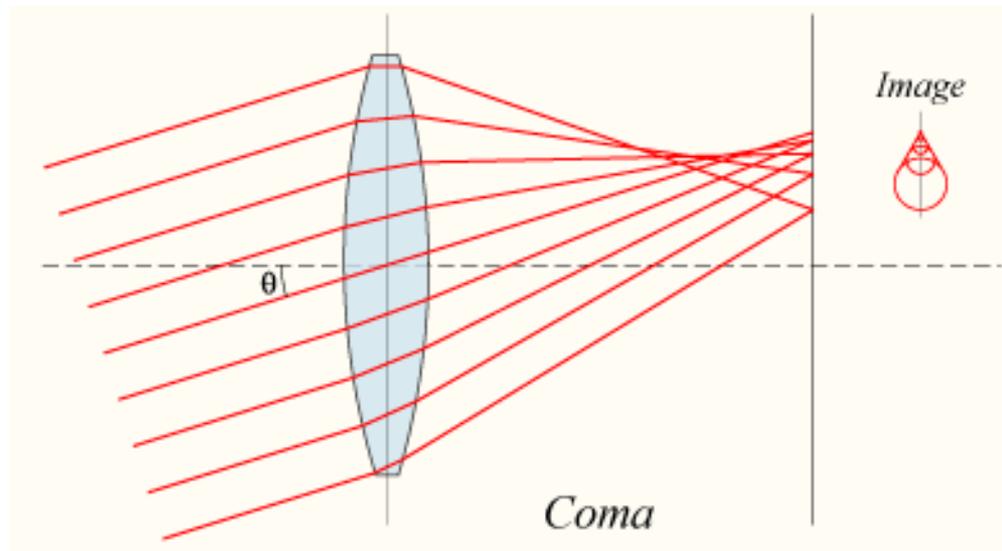


Aberrazioni – coma

Se l'oggetto ripreso è spostato lateralmente rispetto all'asse ottico di un angolo $\theta \Rightarrow$ I raggi che passano per il centro della lente di focale f , sono focalizzati alla distanza $f \tan\theta$.

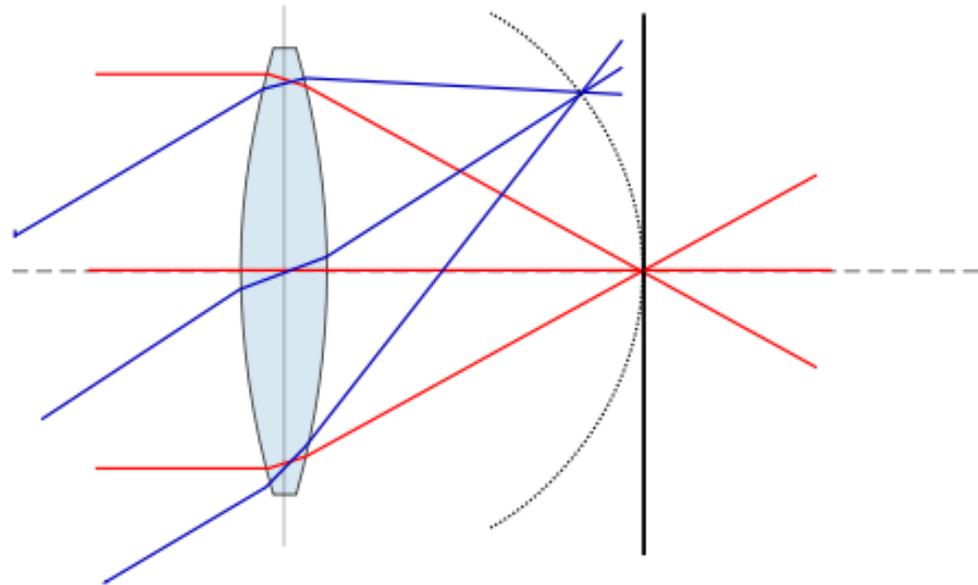
I raggi che passano in periferia sono focalizzati invece in un punto diverso sull'asse, più lontano (coma positiva) o più vicino (coma negativa).

In generale, il fuoco ha la forma di una successione di anelli sul piano focale. La sovrapposizione di questi diversi anelli ha una forma a V, simile alla coda di una cometa.



Aberrazioni – curvatura di campo

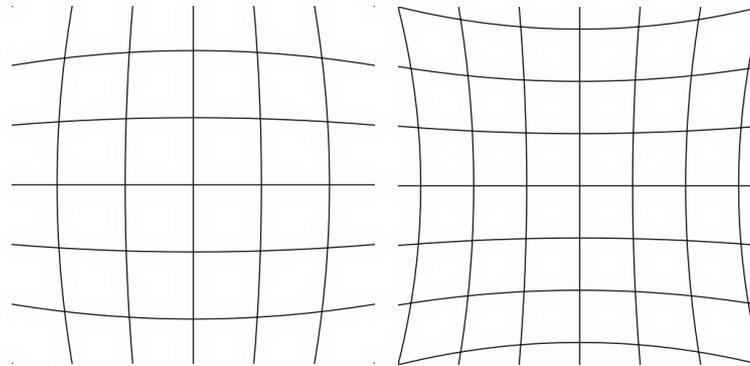
Questa aberrazione si ha quando a ciascun punto di un oggetto piano corrisponde ancora un punto immagine, ma l'immagine complessiva che ne risulta è curva, invece che piana.



Aberrazioni – distorsione di campo

E' causata dalla variazione dell'ingrandimento con la distanza dall'asse. L'oggetto viene riprodotto «deformato» a causa dell'ingrandimento differente in funzione della distanza dei suoi punti dall'asse ottico. Si può evidenziare illuminando una grata e proiettandone l'immagine con una lente di grande apertura.

Barile

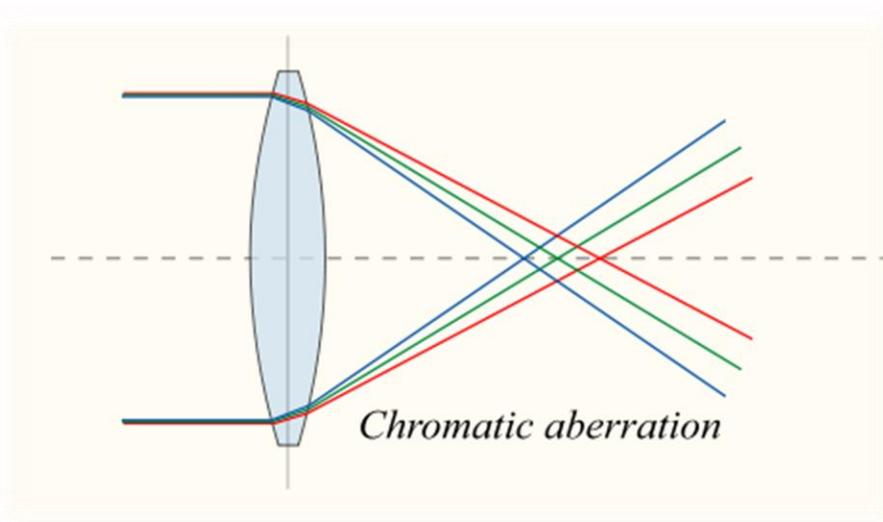


Cuscino

Aberrazioni – aberrazione cromatica (cromatismo)

n varia al variare di λ . Ricordando che:
$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

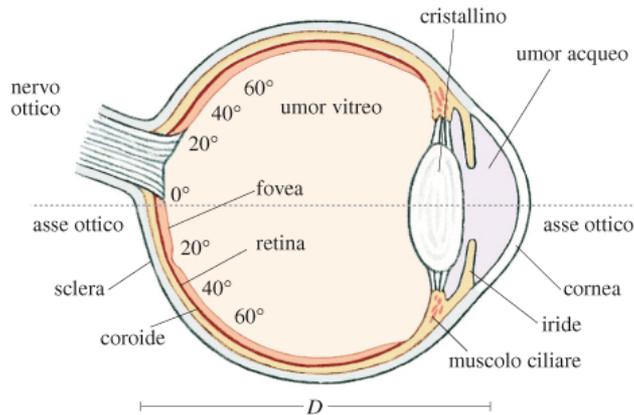
al variare di n varia anche la distanza focale per le diverse λ .



Se si considera un fascio di luce incidente **NON monocromatico**, ogni componente di diverso colore subirà una diversa rifrazione;

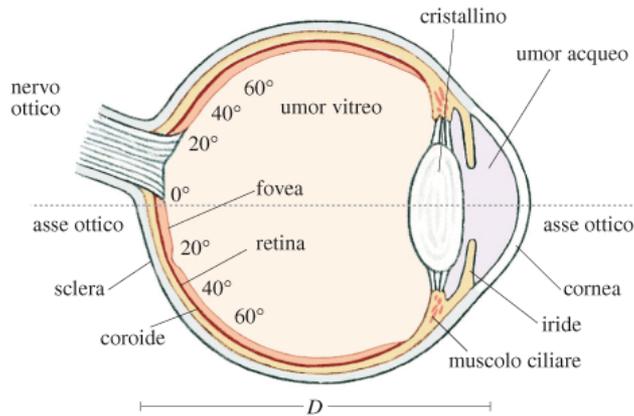
Ogni colore converge in un proprio punto immagine dell'asse

Schema ottico dell'occhio



1. La **cornea** si può considerare, dato il suo piccolo spessore un *diottra sferico*, di raggio di curvatura 8 mm;
2. Il **cristallino**, formato da sei strati con indice di rifrazione differente, si può considerare come **un'unica lente biconvessa sottile** di indice di rifrazione 1.42;
3. Si può assumere che **l'umor acqueo** ($n = 1.333$) e **l'umor vitreo** ($n = 1.336$) abbiano lo stesso indice di rifrazione: **1.336**: è come avere lo stesso mezzo ottico tra cornea e cristallino e tra cristallino e retina;
4. Il **centro di curvatura** della cornea è spostato dalla parte temporale relativamente al centro delle superfici del cristallino, spostamento che è circa di 0.1 mm e che comporta una variazione di circa 1° nella nostra definizione di asse ottico. Non si fa quindi un grosso errore nel considerare **tutti i centri di curvatura su una retta**, che si può chiamare *asse ottico* dell'occhio;

Schema ottico dell'occhio



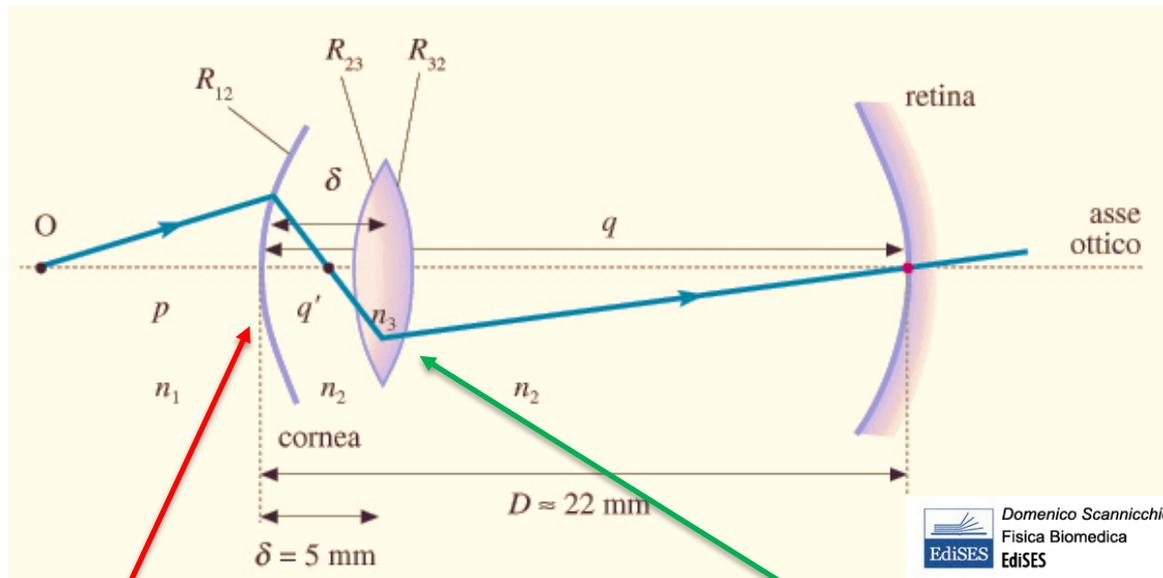
5. Nell'approssimazione parassiale si assume che i raggi di luce siano inclinati rispetto alle perpendicolari alle superfici rifrangenti, con angoli di incidenza i piccoli abbastanza perché il $\sin(i) \cong i$. Poiché solo un fascio ristretto di raggi riesce a penetrare attraverso la pupilla (diametro variabile tra 2 e 8 mm) si ha una differenza massima di circa l'1% tra i e $\sin(i)$ per le varie superfici rifrangenti. Non si fa quindi un grosso errore nell'applicare *l'approssimazione parassiale*.

Schema ottico dell'occhio

L'occhio può essere schematizzato come un diottro con dentro una lente sottile.

Il diottro è costituito da aria-umor acqueo (cornea, umor acqueo e umor vitreo hanno lo stesso n , e quindi da un punto di vista ottico costituiscono un unico mezzo);

La lente sottile è il cristallino.



diottro

lente sottile

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q'} = \frac{n_2 - n_1}{R_{12}}$$

$$\frac{1}{\delta - q'} + \frac{1}{q - \delta} = \frac{n_3 - n_2}{n_2} \left(\frac{1}{R_{23}} - \frac{1}{R_{32}} \right)$$



L'occhio – visione remota

Per $p = \infty$ e col cristallino in posizione a riposo, determiniamo q :

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q'} = \frac{n_2 - n_1}{R_{12}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q'} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 R_{12}} = \frac{0.33}{1.33 * 8} = 0.031 \text{mm}^{-1}$$

$$q' = 32.26 \text{ mm}$$

$$\frac{1}{\delta - q'} + \frac{1}{q - \delta} = \frac{n_3 - n_2}{n_2} \left(\frac{1}{R_{23}} - \frac{1}{R_{32}} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q - \delta} = \frac{n_3 - n_2}{n_2} \left(\frac{1}{R_{23}} - \frac{1}{R_{32}} \right) - \frac{1}{\delta - q'}$$

$$\frac{1}{q - \delta} = \frac{0.09}{1.33} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{5 - 32.26} = 0.055 \text{mm}^{-1}$$

$$q = 23.2 \text{ mm} \approx D \text{ (lunghezza del bulbo oculare)}$$

$n_1 = 1$
$n_2 = 1.33$
$n_3 = 1.42$
$R_{12} = 8 \text{mm}$
$R_{23} = 10 \text{mm}$
$R_{32} = -6 \text{mm}$
$\delta \approx 5 \text{mm}$



L'occhio – visione prossima

L'occhio umano «sano» è in grado di mettere a fuoco immagini che vanno dall'infinito ad un punto detto **punto prossimo**, posto a circa $L = 25$ cm dall'occhio stesso. Imponiamo $p = 250$ mm e $q = 22$ mm (immagine formata sulla retina) e determiniamo R_{23} :

$n_1 = 1$
$n_2 = 1.33$
$n_3 = 1.42$
$R_{12} = 8\text{mm}$
$R_{23} = 10\text{mm}$
$R_{32} = -6\text{mm}$
$\delta \approx 5\text{mm}$

$$q' = n_2 \left(\frac{pR_{12}}{p(n_2 - n_1) - R_{12}n_1} \right) = 35.4 \text{ mm}$$

$$\frac{1}{\delta - q'} + \frac{1}{q - \delta} = \frac{n_3 - n_2}{n_2} \left(\frac{1}{R_{23}} - \frac{1}{R_{32}} \right) \Rightarrow \frac{1}{R_{23}} = \frac{n_2}{n_3 - n_2} \left(\frac{1}{\delta - q'} + \frac{1}{q - \delta} \right) + \frac{1}{R_{32}}$$

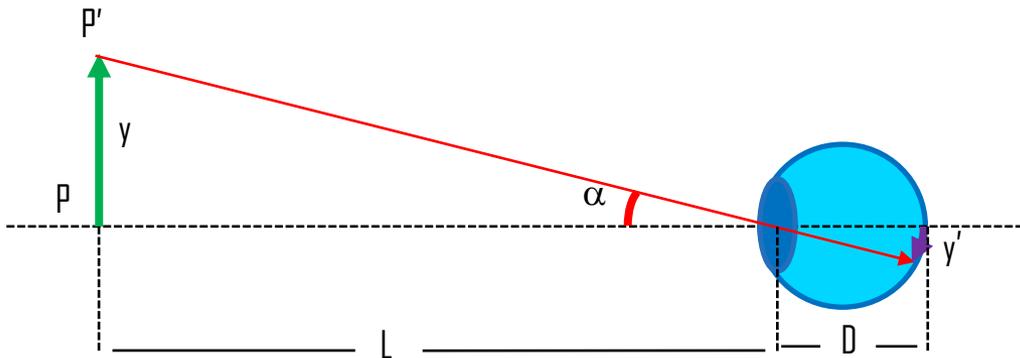
$$R_{23} = 6.8 \text{ mm}$$

Contraendo il cristallino il **punto prossimo** può essere portato a $p=50$ mm da cui si ricava che $R_{23}=3$ mm.

N.B. La cornea ha un potere di rifrazione predominante rispetto al cristallino. In acqua la cornea si trova a separare due mezzi: l'acqua e l'umor acqueo, di indice di rifrazione quasi uguale e quindi la sua azione è molto ridotta. Quindi la visione sott'acqua risulta inizialmente fuori fuoco.



Acuità visiva



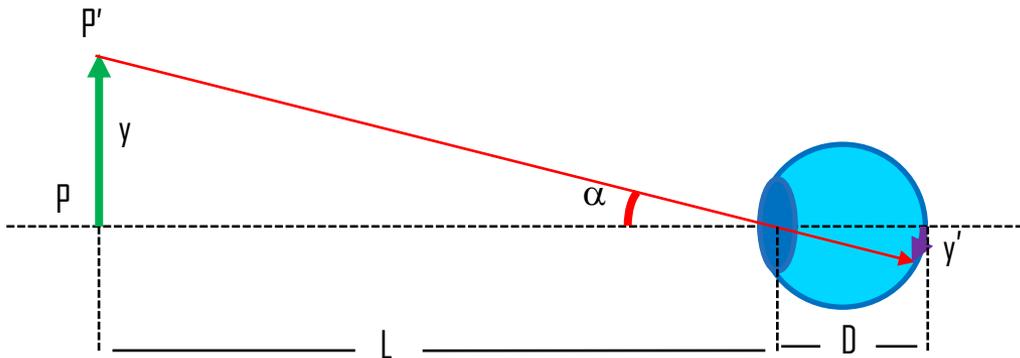
Assumiamo che l'occhio sia «profondo» $D=22 \text{ mm}$ e che sia in condizione di riposo (punto prossimo a $L=250 \text{ mm}$).

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{L}$$

L'*acuità visiva*, individuata dall'angolo α_m , corrisponde alla distanza d_m alla quale i due oggetti puntiformi P e P' sono separabili. I principali fattori che limitano il potere separatore dell'occhio sono:

- La minima distanza tra i fotorecettori situati sulla retina;
- La diffrazione.
- L'età
- L'intensità luminosa

Acuità visiva



Si dimostra che, considerando una luce incidente con $\lambda=500 \text{ nm}$ (BLU), il fattore limitante per l'occhio umano «sano» è dato dalla minima distanza fra i fotorecettori situati sulla retina.

$$\alpha_{min} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Per esempio la distanza a cui sono distinguibili i fari di un'automobile distanti fra loro $y = 1.2 \text{ m}$, assumendo l'acuità visiva pari a α_{min} , sarà:

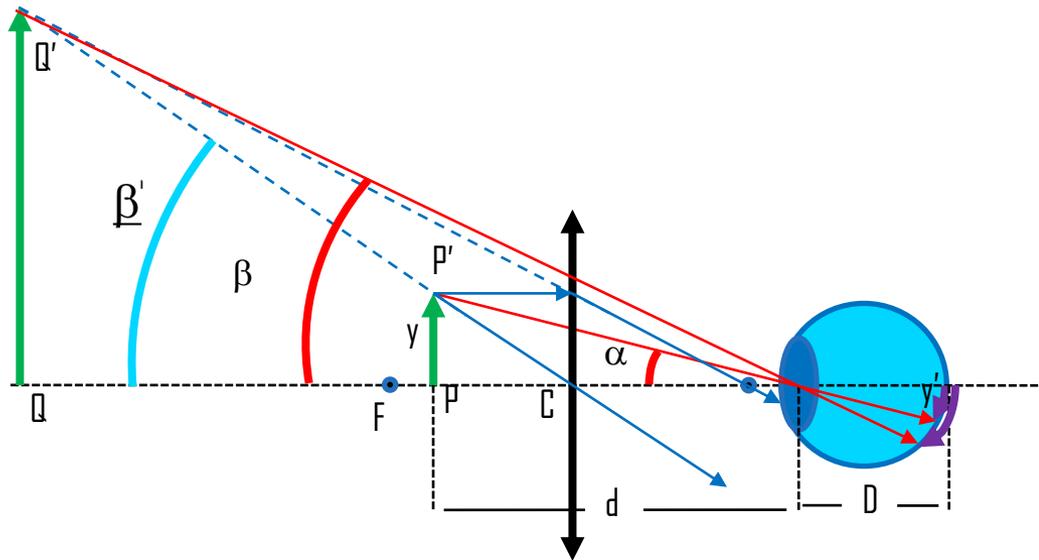
$$d = \frac{y}{\text{tg}\alpha_{min}} = \frac{y}{\alpha_{min}} = \frac{1.2}{8 \cdot 10^{-4}} = 1500 \text{ m}$$

Strumenti ottici

- Gli strumenti ottici sono ottenuti componendo due o più lenti. Gli esempi più noti sono i telescopi e i microscopi.
- Lo scopo di un telescopio è aumentare le dimensioni angolari di oggetti molto lontani.
- Si definisce *ingrandimento visuale* V il rapporto tra la tangente dell'angolo β sotto cui l'oggetto è visto con lo strumento e la tangente dell'angolo α sotto cui è visto senza strumento

$$V = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Lente di ingrandimento



$$I_{vis} = I = \frac{tg\beta'}{tg\alpha} \quad tg\alpha = \frac{y}{d}$$

Quando l'oggetto PP' si trova nel fuoco F della lente (di focale f), l'immagine QQ' tenderà a formarsi all'infinito (occhio rilassato) e quindi β tenderà a β'

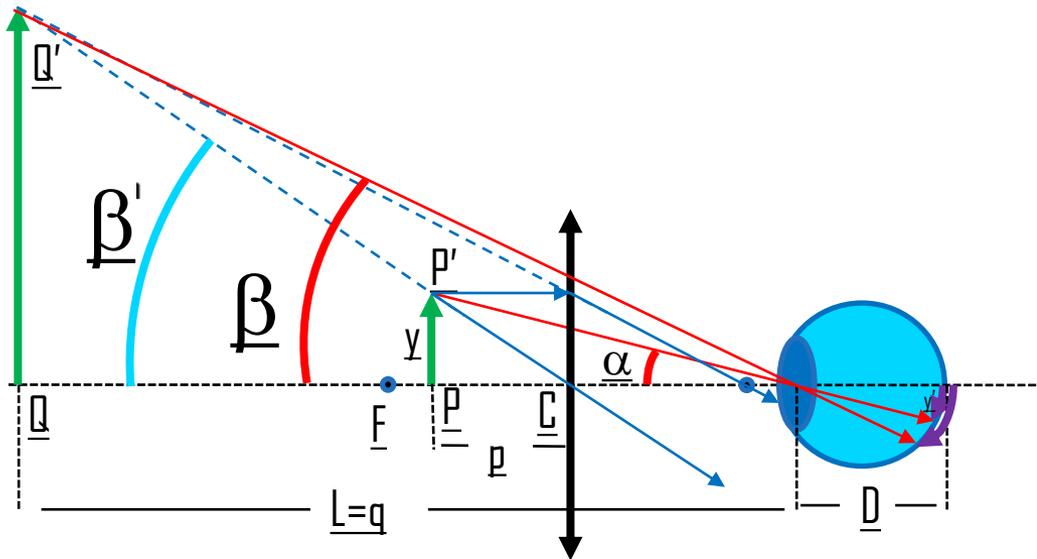
$$tg\beta' = \frac{QQ'}{QC} = \frac{PP'}{PC} = \frac{y}{p} \approx \frac{y}{FC} = \frac{y}{f}$$

$$I = \frac{tg\beta'}{tg\alpha} = \frac{y/f}{y/d} = \frac{d}{f} \quad \text{se } d = L = 25 \text{ cm}$$

$$I = \frac{L}{f} = \frac{25 \text{ cm}}{f}$$



Lente di ingrandimento



Nella pratica l'ingrandimento visuale massimo si raggiunge quando l'immagine QQ' si forma nel punto prossimo L. In questo caso l'immagine è nello spazio oggetto e per la convenzione dei segni $q = -L$.

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{L} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{L+f}{Lf}$$

$$\text{tg}\beta = \frac{y}{p} = \frac{y}{Lf} (L+f)$$

$$I_{max} = \frac{\text{tg}\beta}{\text{tg}\alpha} = \frac{y/p}{y/L} = \frac{L}{Lf} (L+f) = \left(1 + \frac{L}{f}\right) = \left(1 + \frac{25 \text{ cm}}{f}\right)$$



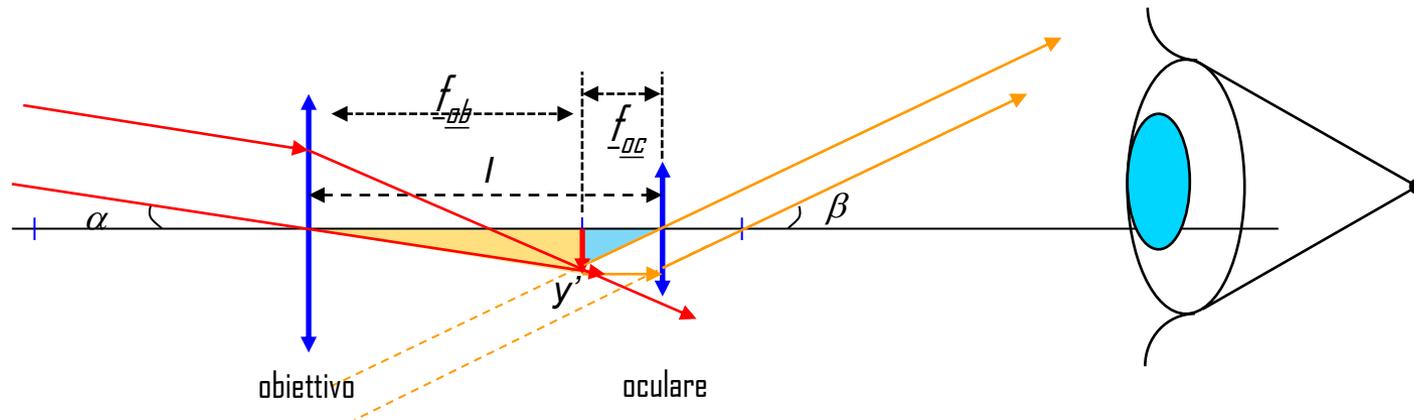
Telescopio

Nella versione più semplice un telescopio è formato da due lenti: la più vicina all'occhio dell'osservatore è detta *oculare* (distanza focale f_c), mentre l'altra è detta *obiettivo* (distanza focale f_b).

I telescopi possono essere rifrattori o riflettori. I due telescopi rifrattori più celebri sono:

- Il telescopio di **Galileo** è formato da una lente convergente e una divergente.
- Il Telescopio di **Keplero** è formato da due lenti convergenti.

Telescopio di Keplero



L'obiettivo è una lente convergente. Poiché i raggi luminosi provengono dall'infinito l'immagine si forma nel piano focale posteriore f_{ob} dell'obiettivo. La seconda lente, l'oculare, è ancora una lente convergente e ha il fuoco anteriore f_{oc} coincidente con il fuoco della prima lente. La distanza tra le due lenti $l = f_{ob} + f_{oc}$ è chiamata lunghezza del cannocchiale.

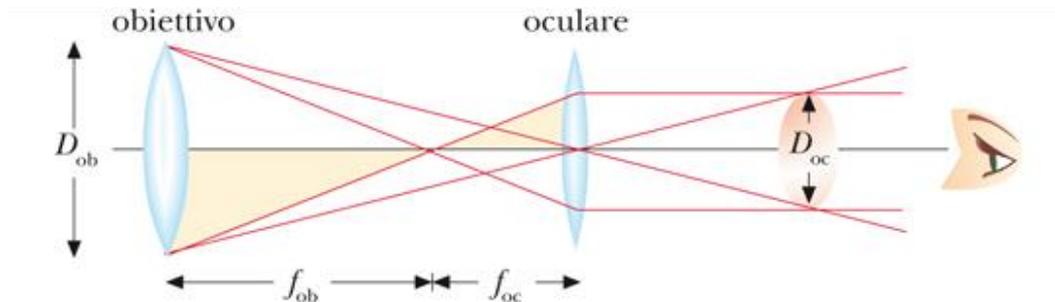
$$tg\alpha = \frac{y'}{f_{ob}} \quad tg\beta = -\frac{y'}{f_{oc}} \quad \longrightarrow \quad V = \frac{tg\beta}{tg\alpha} = -\frac{y' f_{ob}}{f_{oc} y'} = -\frac{f_{ob}}{f_{oc}}$$



Telescopio di Keplero

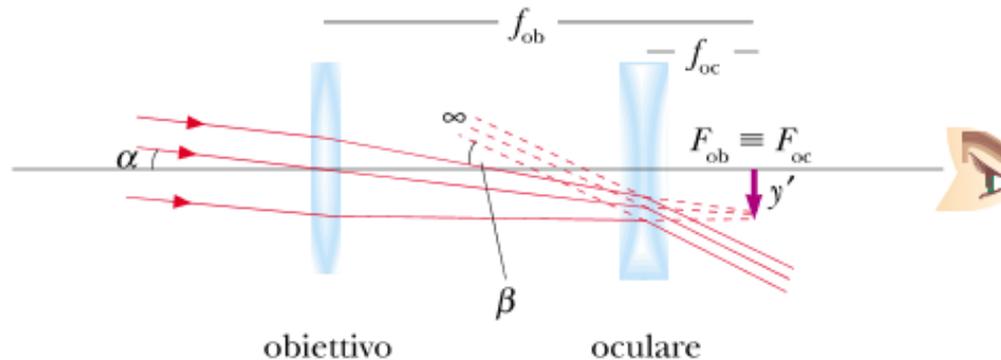
L'immagine che l'occhio vede con il cannocchiale è capovolta rispetto all'oggetto.
Va bene nelle osservazioni astronomiche, ma non per quelle terrestri.

$$V = -\frac{f_{ob}}{f_{oc}} = -\frac{D_{ob}}{D_{oc}}$$



Il rapporto fra le lunghezze focali fissa anche il rapporto tra l'apertura dell'obiettivo, che è la **pupilla d'entrata**, e quella dell'oculare che è la **pupilla d'uscita**, affinché tutti i raggi che entrano nell'obiettivo sotto un certo angolo riescano a passare per l'oculare. Si capisce quindi che è inutile usare degli oculari il cui diametro eccede quello della pupilla dell'occhio, che varia da **2 a 8 mm** a seconda dell'illuminazione.

Telescopio di Galileo



L'obiettivo è una lente convergente. Poiché i raggi luminosi provengono dall'infinito l'immagine si «formerebbe» nel piano focale posteriore f_{ob} dell'obiettivo. Ma i raggi incontrano la seconda lente, l'oculare, che è divergente. I fuochi delle due lenti coincidono, solo che ora è $l = f_{ob} - f_{oc}$.

$$tg\alpha = \frac{y'}{f_{ob}} \quad tg\beta = -\frac{y'}{|f_{oc}|} \quad \longrightarrow \quad V = \frac{tg\beta}{tg\alpha} = -\frac{y'}{|f_{oc}|} \frac{f_{ob}}{y'} = -\frac{f_{ob}}{|f_{oc}|}$$

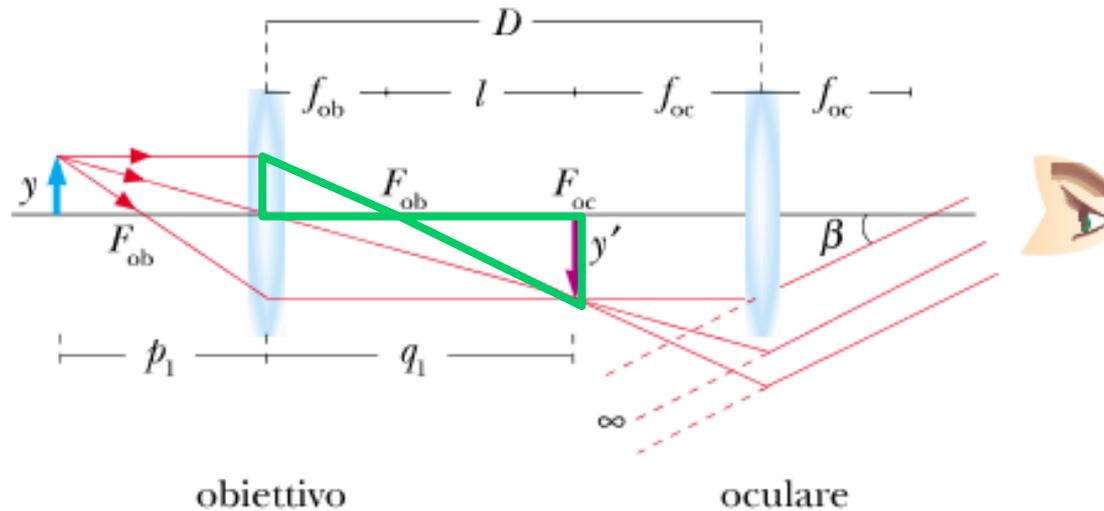
Microscopio

Nella versione più semplice un microscopio è, come il telescopio, formato da due lenti: la più vicina all'occhio dell'osservatore è detta *oculare* (distanza focale f_c), mentre l'altra è detta *obiettivo* (distanza focale f_b).

Il funzionamento è simile a quello di un telescopio, ma la funzione è completamente diversa perché il telescopio visualizza oggetti lontani, mentre il microscopio visualizza oggetti vicini.

Entrambi funzionano producendo immagini ingrandite.

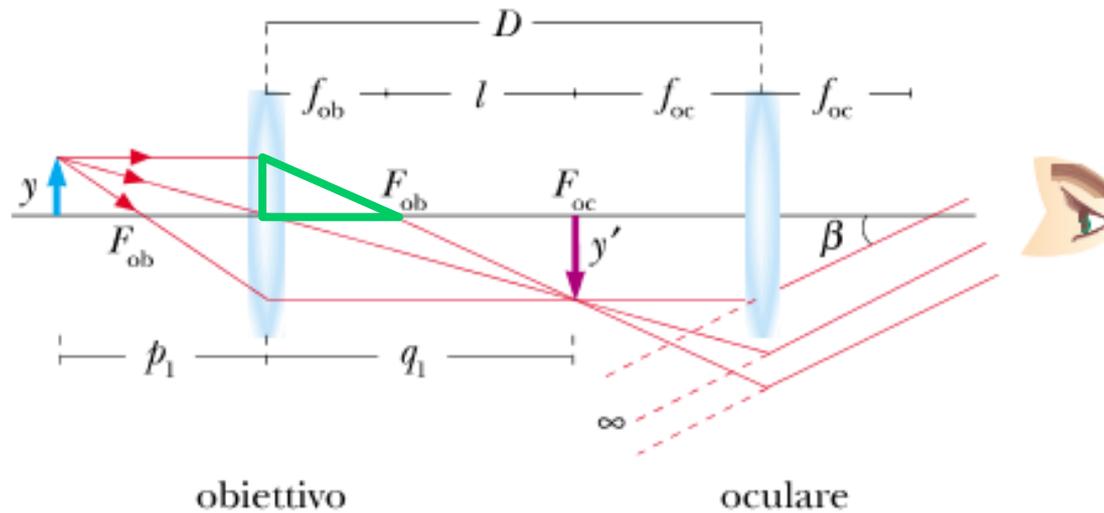
Microscopio



y è posto poco oltre il fuoco dell'obiettivo e le lenti sono disposte in modo che l'immagine y' cada esattamente nel fuoco dell'oculare. In questo modo l'immagine dell'oculare si formerà all'infinito (occhio rilassato), l è chiamata lunghezza ottica

$$I_{ob} = \frac{y'}{y} = \frac{q}{p} = \frac{q_1 - f_{ob}}{f_{ob}} = \frac{l}{f_{ob}}$$

Microscopio



Per il calcolo dell'ingrandimento visuale, considerato che l'oculare è equivalente ad una lente di ingrandimento.

$$tg\alpha = \frac{y}{d} = \frac{y}{25\text{ mm}} \quad \text{e} \quad tg\beta = \frac{y'}{f_{oc}} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{tg\beta}{tg\alpha} = \frac{y' \cdot 25}{f_{oc} \cdot y} = I_{ob} \frac{25}{f_{oc}} = \frac{l \cdot 25}{f_{ob} \cdot f_{oc}}$$

Microscopio

In genere la focale dell'obiettivo, f_{ob} , è minore o uguale a 2 mm e l'ingrandimento dell'obiettivo I_{ob} è compreso tra 50 e 100.

L'ingrandimento dell'oculare, I_{oc} , è compreso fra 5 e 10.

In condizioni normali si hanno ingrandimenti compresi fra 250 e 1000.

L'ingrandimento massimo ottenibile di un microscopio composto è circa $2000\times$ ed è limitato essenzialmente dagli effetti della diffrazione.