



Capitolo 7

Teorema di Ampere

7.1 Campo magnetico prodotto da una corrente

TEOREMA DI
AMPERE
7.1 Campo
magnetico
prodotto da una
corrente

Sperimentalmente si osserva che cariche in movimento generano campi magnetici. Il primo a mettere in **relazione le sorgenti del campo magnetico con il campo stesso** fu Laplace il quale, mediante una procedura simile a quella usata da Coulomb, giunse alla cosiddetta **prima legge elementare di Laplace**. Se consideriamo un filo di lunghezza infinitesima ds percorso da una corrente i , il campo magnetico da esso generato in un punto P distante \vec{r} dall'elemento di filo è

$$d\vec{B} = k_m i \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} = k_m i \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2} = k_m \frac{i ds}{r^2} \hat{u}_i \times \hat{u}_r$$

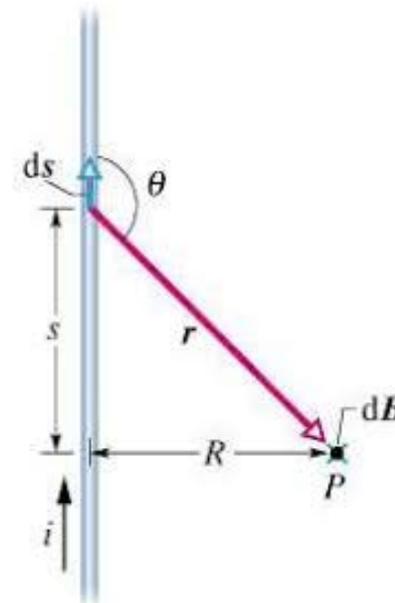
La costante k_m viene generalmente espressa come $k_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$

dove μ_0 è detta permeabilità magnetica del vuoto e vale $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$. **H, Henry**

In definitiva la prima legge di Laplace diventa

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i ds}{r^2} \hat{u}_i \times \hat{u}_r$$

Andamento $1/r^2$ come per il campo elettrico!



Il campo magnetico generato da un elemento infinitesimo di circuito avrà, quindi:

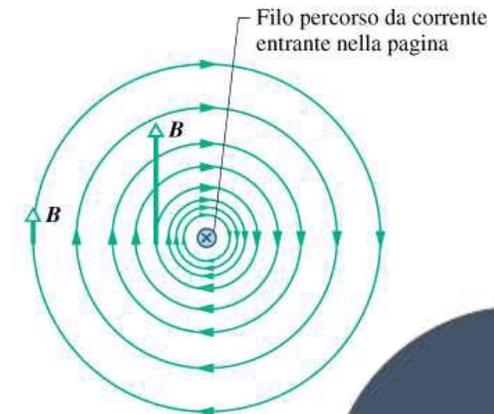
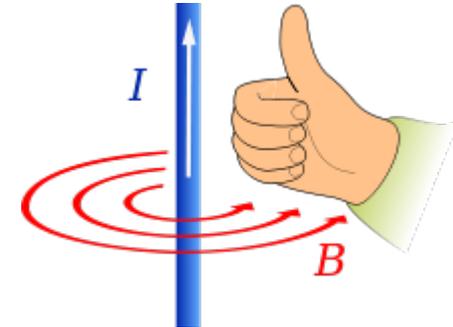
- **Modulo** pari a $\frac{\mu_0 i ds}{4\pi r^2} \text{sen}\theta$
- **Direzione** perpendicolare al piano definito da \widehat{u}_i e \widehat{u}_r
- **Verso** determinato dalla regola della mano destra
e si misurerà in Tesla.

Il campo magnetico generato da un circuito chiuso si ottiene suddividendo il circuito in tratti infinitesimi e «sommando» i contributi di ciascun elemento:

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \widehat{u}_r}{r^2}$$

Questa legge prende il nome di **legge di Ampere-Laplace**.

Osserviamo che le **linee del campo magnetico** si avvolgono attorno al filo e consistono in tante **linee concentriche al filo aventi verso di percorrenza dato dalla regola della mano destra**.



7.2 Campo magnetico prodotto da conduttori filiformi di diversa geometria

TEOREMA DI AMPERE
7.2 Campo magnetico prodotto da conduttori filiformi di diversa geometria

7.2.1 Filo rettilineo

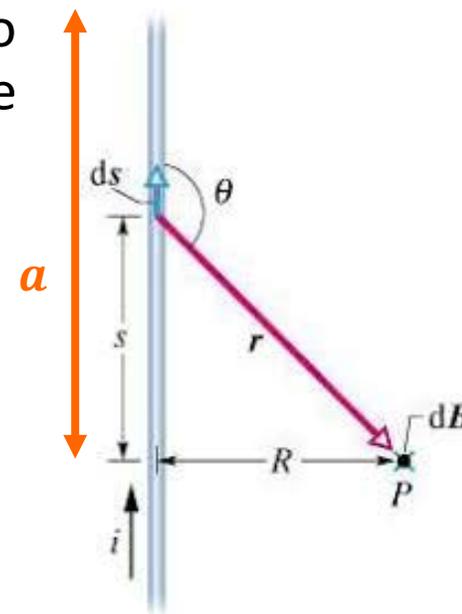
Consideriamo un filo rettilineo di lunghezza $2a$ percorso da una corrente i . Il campo magnetico generato da un elemento infinitesimo ds del filo in un punto P, sull'asse mediano del filo, distante R dal filo è

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2} \quad |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 i ds \sin\theta}{4\pi r^2}$$

Osserviamo che $R = r \sin(\pi - \theta) = r \sin\theta$ $\Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\theta}{R^2}$

e $s = R \cdot \cotg(\pi - \theta)$ $\Rightarrow ds = \frac{R d\theta}{\sin^2\theta}$

Per cui otteniamo $|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 i \sin\theta d\theta}{4\pi R} = -\frac{\mu_0 i d(\cos\theta)}{4\pi R}$



Il modulo del campo magnetico generato dal tratto superiore del filo vale

$$|\vec{B}_{sup}| = \int |d\vec{B}| = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\cos\vartheta_a}^0 \frac{d(\cos\theta)}{R} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \cos\vartheta_a$$

Naturalmente il campo magnetico generato da tutto il filo ha modulo

$$|\vec{B}| = 2|\vec{B}_{sup}| = 2 \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \cos\vartheta_a = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$$

e avrà direzione e verso del versore \hat{u}_φ , tangente alla circonferenza di raggio R (che rappresenta la linea di campo magnetico passante per P) e orientato, rispetto al verso della corrente, secondo la regola della mano destra.

Supponiamo ora che il filo conduttore abbia lunghezza infinita. Otteniamo

**Versore parallelo al filo,
 concorde con la corrente**

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \hat{u}_i \times \hat{u}_R$$

**Versore normale al filo,
 diretto verso il punto P**

Questa relazione è nota come **legge di Biot-Savart** ed afferma che **le linee del campo magnetico di un filo rettilineo indefinito sono circonferenze concatenate al filo.**

7.2.2 Spira circolare

TEOREMA DI AMPERE
7.2 Campo magnetico prodotto da conduttori filiformi di diversa geometria

Consideriamo ora una spira circolare di raggio R attraversata dalla corrente i e calcoliamo il campo magnetico sull'asse della spira. Suddividiamo la spira in elementi infinitesimi $d\vec{s}$; il modulo del campo infinitesimo nel punto P è

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{|d\vec{s} \times \hat{u}_r|}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds}{r^2} \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds}{r^2}$$

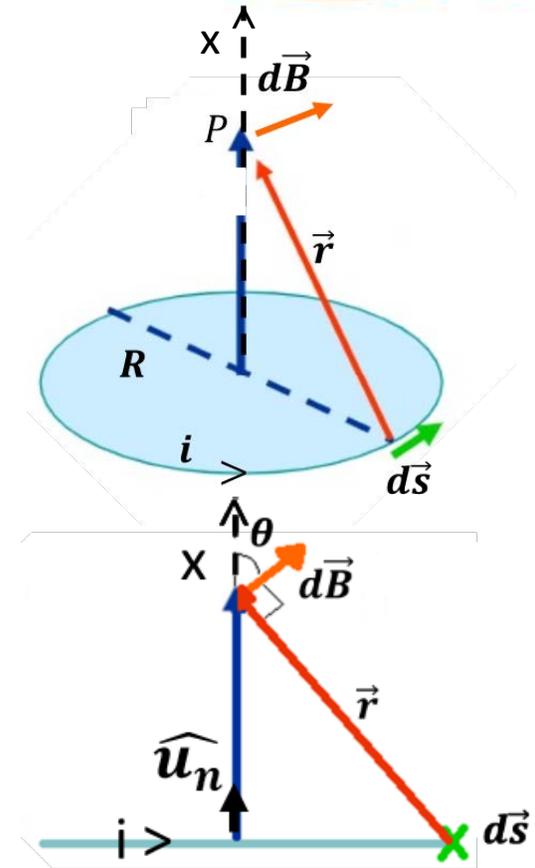
Osserviamo che le componenti sul piano yz dei contributi $d\vec{B}$ di tutti gli elementi di corrente $i d\vec{s}$ si elidono, mentre le componenti lungo l'asse delle x si sommano. Quindi il campo magnetico totale generato dalla spira sul suo asse sarà diretto secondo il versore \hat{u}_n . Otteniamo

$$\vec{B} = \oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds}{r^2} \cos\theta \hat{u}_n = \frac{\mu_0 i \cos\theta}{4\pi} \frac{2\pi R}{r^2} \hat{u}_n = \frac{\mu_0 i R}{2} \frac{R}{r^2} \frac{1}{r} \hat{u}_n = \frac{\mu_0 i R^2}{2 r^3} \hat{u}_n$$

Osserviamo che il campo magnetico ha la stessa direzione e verso in ogni punto dell'asse e assume valore massimo nel centro della spira, dove vale

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2R} \hat{u}_n$$

mentre tende a 0 per $r \rightarrow \infty$.



7.2.3 Solenoide

TEOREMA DI AMPERE
7.2 Campo magnetico prodotto da conduttori filiformi di diversa geometria

Un solenoide ideale è costituito da un lungo filo avvolto a forma di spirale (elica cilindrica) di piccolo passo. Sia d la lunghezza del solenoide, molto più grande del suo raggio R . Se N è il numero totale di spire, definiamo una densità di spire $n=N/d$.

Nel caso ideale in cui le spire sono molto fitte, possiamo supporle distribuite con continuità. Se consideriamo un tratto dx del solenoide, il campo magnetico al centro è

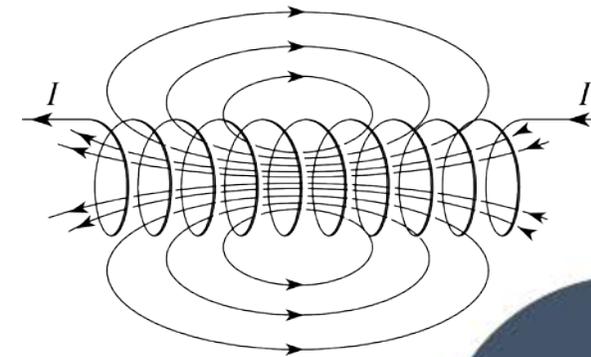
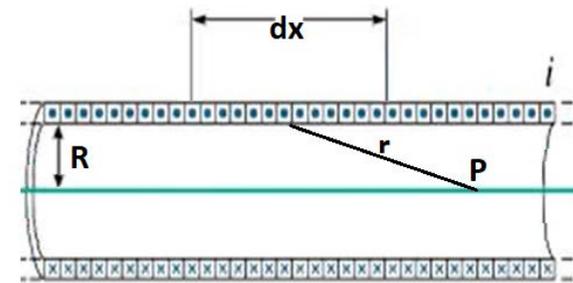
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i n R^2}{2 r^3} dx \hat{u}_x$$

Mediante alcuni passaggi matematici si ottiene il campo magnetico generato dal solenoide nei punti del suo asse

$$\vec{B}_{asse} = \mu_0 n i \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4R^2}} \hat{u}_x \approx \mu_0 n i \hat{u}_x \quad \text{per } d \gg R$$

L'andamento del campo magnetico è riportato in figura. Il campo all'interno del solenoide tende a disporsi secondo l'asse orizzontale

Si verifica che, al diminuire del rapporto R/d , la zona interna al solenoide in cui il campo ha valore pari a \vec{B}_{asse} è sempre più estesa e, per un solenoide di lunghezza infinita e passo molto piccolo, le linee di campo restano confinate all'interno.



7.3 Forza tra due conduttori paralleli

Consideriamo due fili conduttori rettilinei, paralleli e molto lunghi, distanti r e percorsi dalle correnti i_1 e i_2 . Ciascun filo genera un campo magnetico nello spazio circostante e, sua volta, risente del campo generato dall'altro conduttore, per effetto della forza di Lorentz. **I due fili, quindi, interagiscono reciprocamente.**

Un tratto di lunghezza ds_2 del secondo filo risente della forza

$$d\vec{F}_{12} = i_2 d\vec{s}_2 \times \vec{B}_1 = i_2 ds_2 \hat{u}_2 \times \vec{B}_1$$

dove \hat{u}_2 è il versore parallelo e concorde con la corrente i_2 .

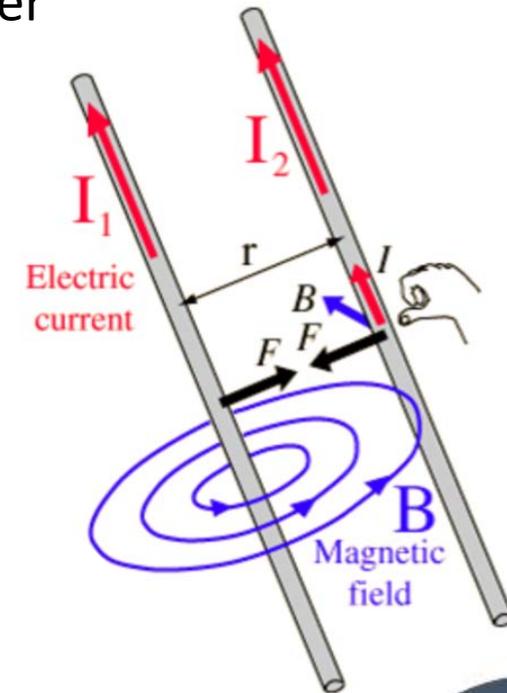
La **forza per unità di lunghezza** agente sul filo 2 per effetto del campo magnetico generato da i_1 è

$$\frac{\vec{F}_{12}}{\ell} = i_2 \hat{u}_2 \times \vec{B}_1 = i_2 \hat{u}_2 \times \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \hat{u}_{B1} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r} \hat{u}_r$$

Allo stesso modo si calcola la forza per unità di lunghezza esercitata dal filo 2 sul filo 1

$$\frac{\vec{F}_{21}}{\ell} = i_1 \hat{u}_1 \times \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r} \hat{u}_r$$

Tali **forze sono attrattive se le due correnti hanno lo stesso verso, repulsive se le correnti hanno verso opposto.**



7.4 Legge di Ampère

Calcoliamo la circuitazione del campo magnetico, che indicheremo con $\Gamma(\vec{B})$

$$\Gamma(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

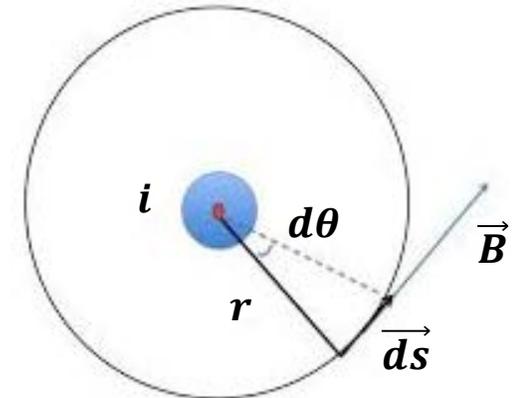
Consideriamo il campo magnetico generato da un filo rettilineo indefinito percorso da corrente i ed iniziamo considerando uno spostamento infinitesimo $d\vec{s}$ coincidente con un arco infinitesimo preso su una linea di campo. Otteniamo

$$d\Gamma(\vec{B}) = \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\theta$$

Da cui segue che la circuitazione del campo magnetico ha espressione

$$\Gamma(\vec{B}) = \oint d\Gamma(\vec{B}) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\theta$$

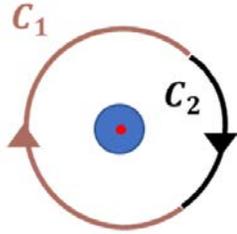
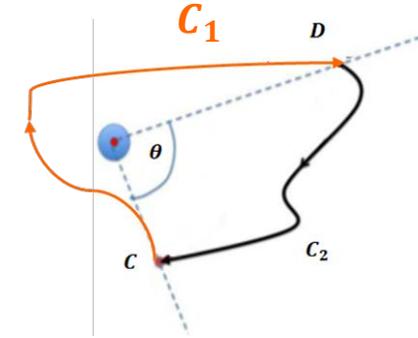
ovvero dipende dall'angolo sotteso dal percorso chiuso di circuitazione.



Possiamo distinguere tra due diversi casi:

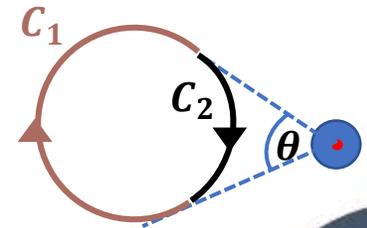
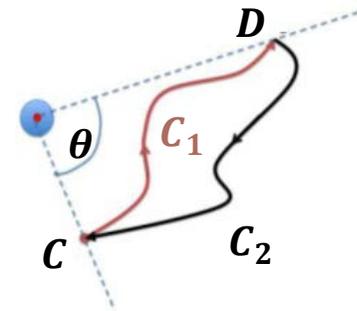
1. La linea di integrazione concatena la corrente (cioè ci gira intorno)

$$\oint d\theta = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \Gamma(\vec{B}) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} 2\pi = \mu_0 i$$



2. La linea di integrazione NON concatena la corrente

$$\oint d\theta = \theta - \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(\vec{B}) = 0$$



Concludiamo, allora, che **la circuitazione di \vec{B} lungo un percorso chiuso dipende dalle correnti concatenate al percorso stesso**. Tale legge è nota come **legge di Ampère (o teorema di Ampère)** e stabilisce che

$$\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 \sum_k i_{conc,k}$$

È importante osservare che il campo magnetico \vec{B} a primo membro è quello dovuto a tutte le correnti presenti, mentre, ribadiamo, al secondo membro c'è la somma algebrica delle sole correnti concatenate. Il segno delle correnti è positivo se sono concordi (secondo l'avvitamento della mano destra) alla direzione nel percorso di integrazione, negativo se discordi.

La legge di Ampère ci dice anche che **il campo magnetico non è conservativo**.

7.4.1 Solenoide bis

Utilizziamo il teorema di Ampère per determinare il modulo del campo magnetico generato da un solenoide. Analizziamo una sezione trasversale del solenoide e scegliamo un percorso rettangolare ABCD.

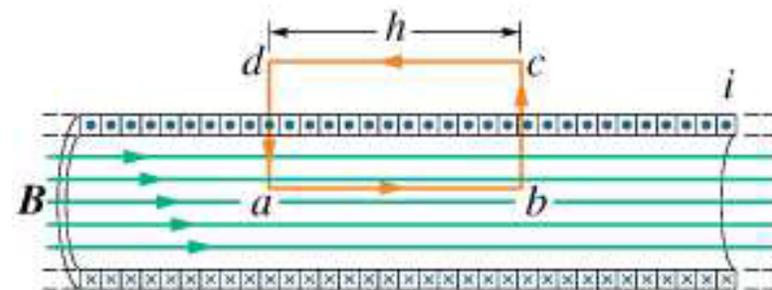
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{conc}$$

Osserviamo che

$$\int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{perché } \vec{B} = 0 \text{ all'esterno del solenoide}$$

$$\int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{perché } d\vec{s} \text{ e } \vec{B} \text{ sono ortogonali tra loro}$$

Otteniamo $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{s} = Bh = \mu_0 i_{conc} = \mu_0 nih \quad \Rightarrow \quad B = \mu_0 ni$



Esercizio 7.1

Utilizzare il teorema di Ampere per calcolare il campo magnetico prodotto da un filo rettilineo infinito.

Esercizio 7.2

Un cilindro di lunghezza indefinita e raggio R è percorso da una corrente di intensità i avente densità omogenea su tutta la sezione del cilindro. Determinare il campo magnetico all'interno del cilindro.

Esercizio 7.3

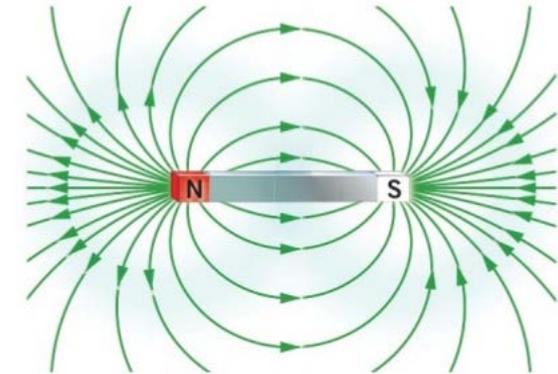
In un cilindro cavo di raggi interni $a = 2 \text{ cm}$ ed esterno $b = 4 \text{ cm}$ scorre una corrente uscente rispetto al piano della figura con densità di corrente non uniforme secondo la legge $j = cr^2$ con $c = 3.0 \cdot 10^6 \text{ A/m}^4$ ed r in metri. Quanto vale \vec{B} in un punto distante 3 cm dal centro?

7.5 Legge di Gauss per il campo magnetico

Come abbiamo visto nei diversi esempi, le linee del campo magnetico sono sempre linee chiuse continue e, lungo una linea di campo, il verso di \vec{B} non cambia. Calcoliamo il flusso del campo magnetico attraverso una qualunque superficie chiusa Σ .

$$\Phi(\vec{B}) = \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \widehat{u}_N d\Sigma$$

Per le caratteristiche delle linee del campo magnetico, ogni linea di campo entrante in una superficie chiusa deve necessariamente uscirne. Ne consegue che il flusso entrante deve essere uguale al flusso uscente, per cui si avrà :



$$\Phi(\vec{B}) = 0$$

La **legge di Gauss per il campo magnetico** afferma, dunque, che il **flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa è sempre nullo**.

Questo risultato **equivale** ad affermare la **non esistenza dei monopoli magnetici**.

Equazioni di Maxwell

Tutte le proprietà dei campi elettrostatici e magnetostatici \vec{E} e \vec{B} studiate sino ad ora, nel vuoto, sono riassunte dalle seguenti quattro equazioni, note come **equazioni di Maxwell**

Legge di Gauss per \vec{E}
$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Legge di Gauss per \vec{B}
$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0$$

Circuitazione \vec{E}
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Legge di Ampere per \vec{B}
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_c$$

Le cariche elettriche sono sorgenti di \vec{E} e il campo è radiale

Il campo magnetico è solenoidale e non esistono i monopoli magnetici

Il campo elettrostatico è conservativo

Le correnti elettriche sono le sorgenti di \vec{B} e il campo non è conservativo