Fisica Generale – Modulo A

Classe B

CINEMATICA DEL PUNTO – MOTI LUNGO UNA RETTA

Dott.ssa **Marilena Giglio**

marilena.giglio@poliba.it

Meccanica

La meccanica è la parte della fisica che studia il moto dei corpi e le cause del loro moto (forze).

Per trovare le relazioni esistenti tra cause e moti dei corpi, che possono essere anche estesi, si parte dallo studio del caso più semplificato: si considera l'astrazione del **punto materiale**, considerato puntiforme, ovvero un oggetto di dimensioni trascurabili (ai fini del moto) rispetto a quelle dello spazio in cui può muoversi o degli altri corpi con cui può interagire, ma avente le stesse proprietà fisiche di un oggetto esteso (massa in particolare).

Ad esempio: un'automobile che percorre un'autostrada. Se vogliamo conoscere come percorre l'autostrada e in quanto tempo, non occorre conoscere la forma e le dimensioni dell'auto ma solamente sapere le posizioni intermedie durante il tragitto.

La meccanica a sua volta viene suddivisa in:

- **cinematica** che è la parte della meccanica che studia il solo **moto** dei corpi, indipendentemente dalle cause che lo hanno generato
- **dinamica** che studia l'azione delle **forze** (la **causa** del moto dei corpi)

Come si studia il moto di un corpo?

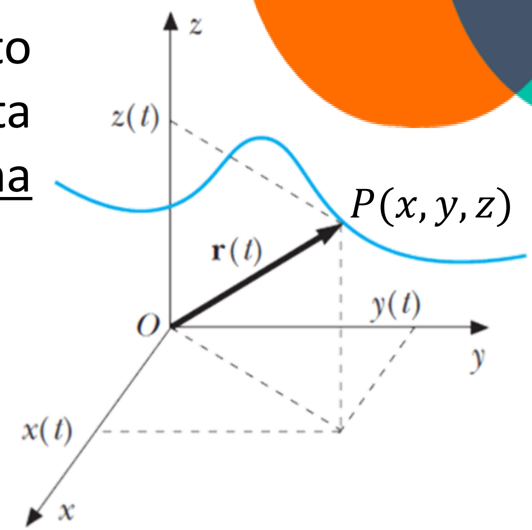
- Si trascurano le dimensioni dell'oggetto e lo si assume ridotto ad un **punto materiale**
- Bisogna localizzare il corpo che si muove avendo scelto un **riferimento** (lo assumeremo in genere fisso)
- Bisogna descrivere le variazioni della posizione nel tempo (posizione in funzione del tempo) ovvero lo **spostamento** del corpo.

Quindi per la descrizione di un moto *per prima cosa si stabilisce un riferimento* e *in seguito si determinano le coordinate del punto rispetto l'origine del sistema di riferimento* (di solito si scelgono coordinate cartesiane ma anche altre scelte possono farsi ad esempio coordinate sferiche o cilindriche).

In un sistema di riferimento cartesiano scriveremo le coordinate del punto P come (x, y, z) con x=x(t), y=y(t), z=z(t).

Cinematica del punto materiale

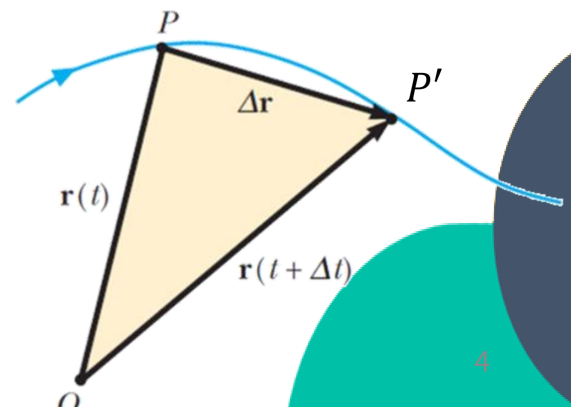
Definito il sistema di riferimento, la posizione del punto materiale P in tale sistema è UNIVOCAMENTE determinata dal **vettore posizione $\vec{r}$** che congiunge l'origine del sistema con il punto P.



$$\textit{raggio vettore}\ \ \overrightarrow{OP} = \vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$$
$$= x(t)\,\widehat{u_x} + y(t)\widehat{u_y} + z(t)\,\widehat{u_z}$$

Se la posizione del punto materiale P varia nell'intervallo di tempo $\Delta \boldsymbol{t}$ da una posizione iniziale ad una finale, definiamo il **vettore spostamento**$\Delta\vec{s}$ dato dalla differenza tra il vettore posizione finale e il vettore posizione iniziale:



$$\textit{Vettore spostamento}\ \ \overrightarrow{PP'} = \Delta\vec{s}$$

$$\Delta\vec{s}\,(t) = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

Recap: Definizioni nella meccanica

- PUNTO MATERIALE: oggetto di dimensioni trascurabili ed avente massa
- IL SISTEMA DI COORDINATE è destrorso (l’orientazione degli assi segue le dita della mano destra: indice asse x, medio l’asse y, il pollice l’asse z)
- LA POSIZIONE (**VETTORE**) di un punto materiale deve essere sempre riferita ad un sistema di coordinate
- LA TRAIETTORIA (**linea** curva blu in figura) è il luogo geometrico dei punti occupati successivamente dal punto materiale in movimento e costituisce una curva continua
- GRANDEZZE FONDAMENTALI in cinematica: spazio [L], tempo [T], velocità $[L\ T^{-1}]$ e accelerazione $[L\ T^{-2}]$
- SPOSTAMENTO: **VETTORE** dato dalla differenza tra la posizione finale e quella iniziale ha carattere vettoriale
- IL MOTO DI UN CORPO è determinato se è nota la posizione in funzione del tempo (diagramma orario)
- QUIETE: è un particolare tipo di moto in cui **le coordinate del punto materiale restano costanti** (e quindi velocità ed accelerazione sono nulle) nel dato sistema di riferimento.

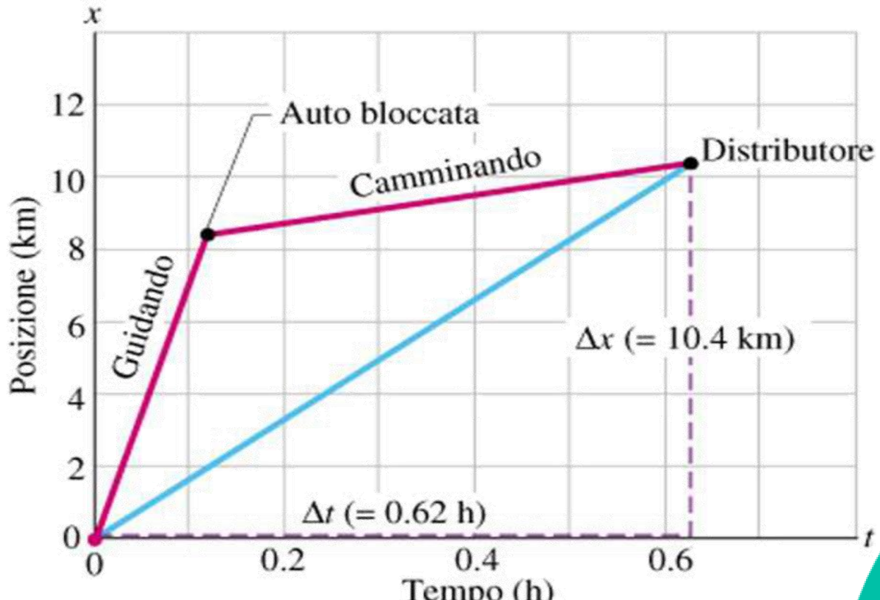
Moto rettilineo (1D)

I moti rettilinei sono quelli per i quali la **traiettoria** è una **retta**, il moto è in una sola dimensione quindi scegliamo come <u>sistema di riferimento un asse lungo la retta su cui si svolge il movimento</u>. Il punto sarà individuato da una sola coordinata, P(x).

Se indichiamo con *x* l'asse lungo il quale si svolge il moto, i valori delle posizioni *x* del punto, in funzione del tempo *t*, costituiscono una funzione *x(t)* rappresentabile in un sistema di assi cartesiani.

Il diagramma della ***x(t)*** in funzione di t costituisce il **diagramma orario** del moto o legge oraria.

L'esempio in figura descrive due differenti situazioni di percorrenza di una strada.



Moto rettilineo - Velocità del punto materiale

Supponiamo che al tempo t_1 il punto si trovi in $x(t_1) = x_1$
e al tempo t_2 il punto si trovi in $x(t_2) = x_2$
Nell'intervallo di tempo in $\Delta t = t_2 - t_1$
Il modulo dello **spostamento** del punto è
$\Delta x = x_2 - x_1$

Definiamo il **vettore velocità media**, ovvero la rapidità con la quale cambia la posizione, come:

$$\overrightarrow{v_m} = \langle \vec{v} \rangle = \frac{\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

Si tratta dunque di una grandezza che fornisce un'informazione della rapidità con cui è avvenuto lo spostamento senza fornire nessuna indicazione di come avviene il moto nell'intervallo di tempo considerato.

Unità di misura: $[v] = \left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\right] = \frac{[L]}{[T]} = \frac{m}{s}$

Problema 1.1

Alla guida di un'automobile, dopo aver percorso una strada rettilinea per 8.4 km a 70 km/h, siete rimasti senza benzina. Avete quindi proseguito a piedi, nella stessa direzione, per 2.0 km sino al distributore, dove siete arrivati dopo 30 min di cammino. Determinare:

1) lo spostamento ;
2) il tempo di percorrenza;
3) la velocità media complessiva.

Soluzione:

$$\Delta x = 10{,}4\ km$$
$$\Delta t = 0{,}62\ h$$
$$v_m = 16{,}8\ m/s$$

Moto rettilineo-Velocità istantanea

La **velocità istantanea** si ottiene come limite per intervalli di tempo $\Delta t \to 0$ del rapporto incrementale $\frac{\Delta x}{\Delta t}$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = x'(t)$$

La velocità istantanea è la rapidità di variazione della posizione all'istante t: geometricamente v è la pendenza della retta tangente al diagramma orario nel punto P.
La velocità può essere a sua volta ancora una funzione del tempo, $v(t)$.

Quindi, se è nota la posizione $x = x(t)$, la velocità istantanea è data dalla derivata della posizione rispetto al tempo t:

$$v = \frac{dx(t)}{dt} = x'(t)$$

Viceversa nota la velocità si ha ($\boldsymbol{x_0}$ **e** $\boldsymbol{v_0}$ **sono posizione e velocità iniziale**):

$$dx = v\, dt = x'(t)\, dt$$

$$\Delta x = x - x_0 = \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t) dt = \int_{t_0}^{t} x'(t) dt$$

Moto rettilineo uniforme

Nel caso in cui $\mathbf{v(t) = costante = v_0} \Rightarrow$ **moto rettilineo uniforme**

$$\mathbf{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 dt =}$$

$$\mathbf{= x_0 + v_0 \int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0)}$$

Nel caso in cui $t_0 = 0$ la formula diventa:

$$\mathbf{v(t) = v_0 \Rightarrow}$$

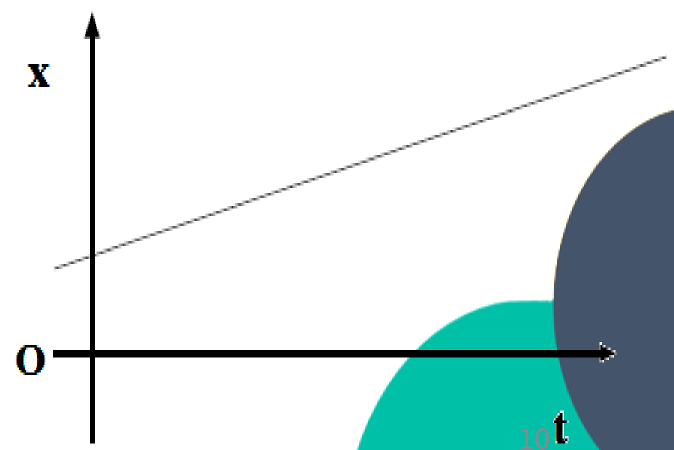
$$\mathbf{x(t) = x_0 + v_0 \cdot t}$$ **legge oraria del moto r.u.**

Viceversa, se è nota la legge oraria si può ottenere la velocità istantanea con l'operazione di derivazione:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\ (x_0 + v_0 t)}{dt} = v_0$$

Quindi, nel moto rettilineo uniforme lo spazio percorso x è una funzione lineare del tempo t

Diagramma orario del moto rettilineo uniforme



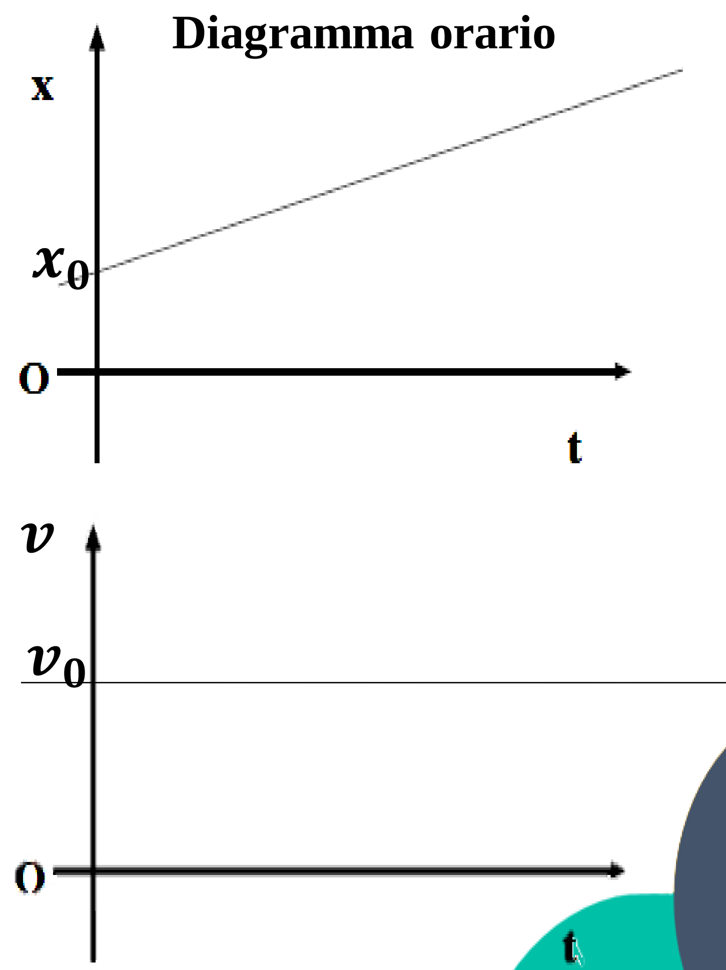
Moto rettilineo uniforme

Leggi orarie o equazioni del moto rettilineo uniforme

$x = x_0 + v_0 t$

$v = v_0$ costante

$a = 0$ (dalle prossime slide)



Accelerazione media

Nel caso più generale di moto rettilineo, la velocità è funzione del tempo:

$v = v(t)$.

Quando la velocità varia nel tempo, il moto si dice **accelerato**.

Se tra gli istanti t_1 e t_2 la velocità varia da v_1 a v_2, si definisce accelerazione media del punto il rapporto tra la variazione di velocità Δv e l'intervallo di tempo Δt in cui avviene la variazione:

Accelerazione media

$$\overrightarrow{a_m} = < \vec{a} > = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Unità di misura dell'accelerazione

$$[a] = \left[\frac{\Delta v}{\Delta t}\right] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{[L\,T^{-1}]}{[T]} = \frac{[L\,]}{[T^2]} = \frac{m}{s^2}$$

Anche l'accelerazione è una **grandezza vettoriale**. Tuttavia nel caso unidimensionale del moto rettilineo la direzione è fissata e la natura vettoriale si manifesta nel segno, cioè nel verso.

Problema 1.2

Un'automobile viaggia a $45\ km/h$ all'istante $t = 0$.
Qual è la sua accelerazione se raggiunge la velocità di $70\ km/h$ nell'istante $t = 2s$?

Sol: Dalla definizione troviamo che:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$a = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} = \frac{70 - 45}{2} \; \frac{\frac{km}{h}}{s} \Rightarrow$$

$$a = \frac{(70 - 45)\frac{km}{h}}{2\ s} \cdot \frac{1000\frac{m}{km}}{3600\frac{s}{h}} = 3.47\ ms^{-2}$$

Segno di a:

$a > 0$ la velocità cresce nel tempo

$a < 0$ la velocità decresce nel tempo

IMPORTANTE: il verso del moto (in avanti o indietro) è dato dal segno della velocità istantanea e non dal segno dell'accelerazione.

Accelerazione istantanea

In modo analogo allo spostamento anche per la velocità possiamo definire la sua rapidità di variazione temporale che chiamiamo **accelerazione istantanea**

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$ accelerazione istantanea

Quindi l'accelerazione è la derivata rispetto al tempo della velocità ($a = v'(t)$), la quale è a sua volta la derivata rispetto al tempo della posizione (indicata con x per il moto 1-D), per cui l'accelerazione è anche la derivata seconda della posizione rispetto al tempo ($a = x''(t)$).

Geometricamente l'accelerazione rappresenta la concavità (verso l'alto/basso è positiva/negativa) della curva diagramma orario.

Se $a = 0$ allora la velocità v è costante ed il moto è **rettilineo uniforme**.

Se $a = costante \neq 0$ il moto si dice **rettilineo uniformemente accelerato**

Relazione tra Velocità e Accelerazione

Abbiamo appena detto che se è nota la $v(t)$, è possibile conoscere la a(t) mediante derivata, $a = \frac{dv}{dt}$

Viceversa, se è nota la $a(t)$ allora si può conoscere la $v(t)$ tramite integrazione dell'equazione

$$dv = a(t)\,dt$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

$$[v]_{v_0}^{v} = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

$$v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

$$\Delta v = \int_{t_0}^{t} a(t)dt \Rightarrow v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

Legami tra a, v, x e t:

In generale se è nota la $a = a(t)$ si può ricavare per successive integrazioni prima la $v = v(t)$ e poi la $x = x(t)$:

$$\mathbf{v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt}$$

$$\mathbf{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt}$$

Caso particolare: **moto rettilineo uniformemente accelerato**: abbiamo in questo caso $a = cost$

$$v(t) = \quad v_0 + \int_{t_0}^{t} a dt = v_0 + a(t - t_0) \Rightarrow$$

$$\mathbf{(se\ t_0 = 0)\quad v(t) = v_0 + at}$$

$$x(t) = \quad x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt =$$

$$x_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 + a\,(t - t_0))\ dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0\, dt + \int_{t_0}^{t} a\,(t - t_0)\, dt =$$

$$x_0 + v_0[t]_{t_0}^{t} + a\,\frac{1}{2}[(t - t_0)^2]_0^{t+t_0} =$$

$$x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

$$\mathbf{(se\ t_0 = 0) x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

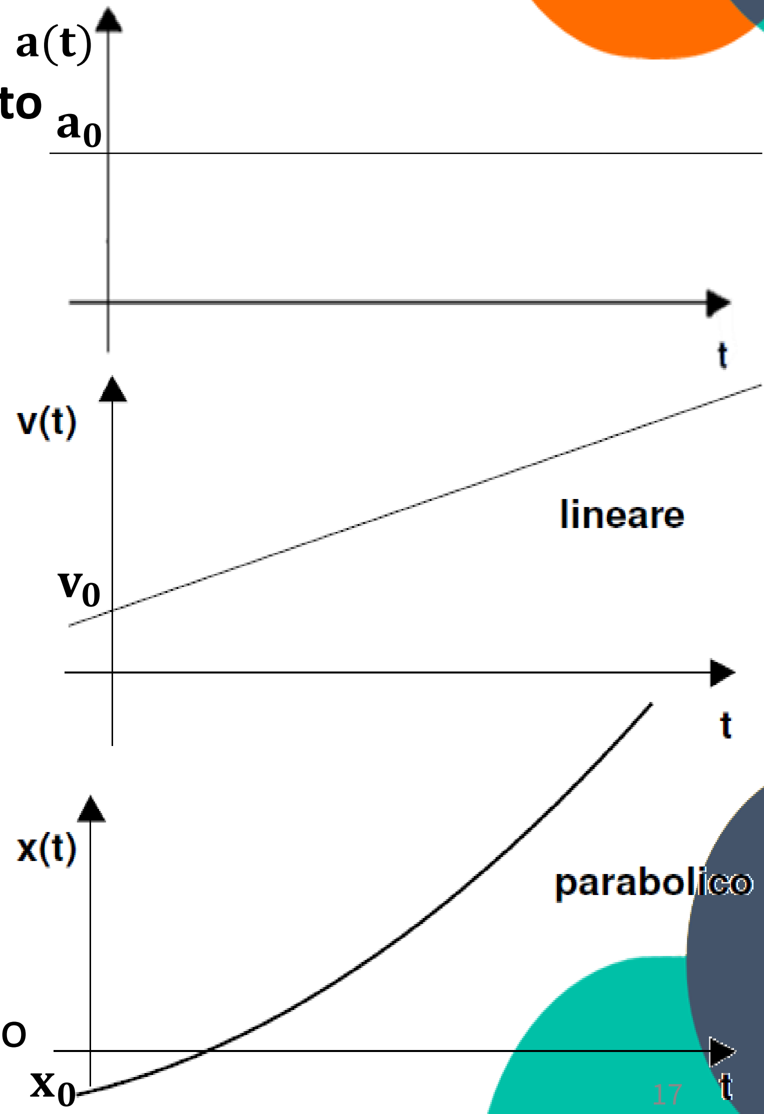
Leggi orarie o equazioni
del moto rettilineo uniformemente accelerato

Scegliendo il caso (quello più frequente) $t_0 = 0$ le precedenti formule diventano:

$$\mathbf{a(t) = costante = a_0}$$

$$\mathbf{v(t) = v_0 + a \cdot t}$$

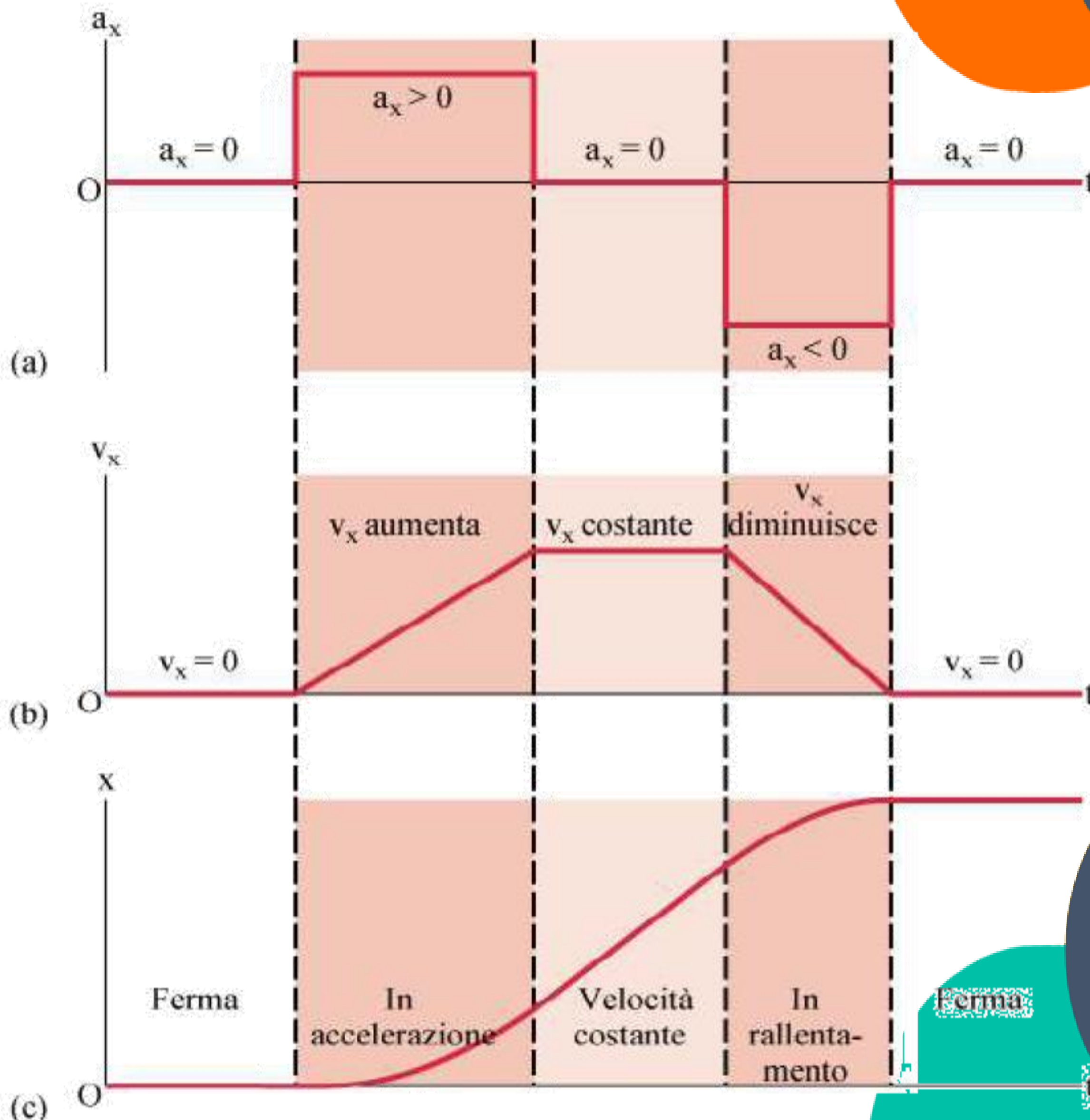
$$\mathbf{x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2}$$



Grafici orari di accelerazione, velocità e posizione nel moto uniformemente accelerato

Come interpretare rapidamente il diagramma orario

Diagramma orario
relativo al moto
di un punto materiale.

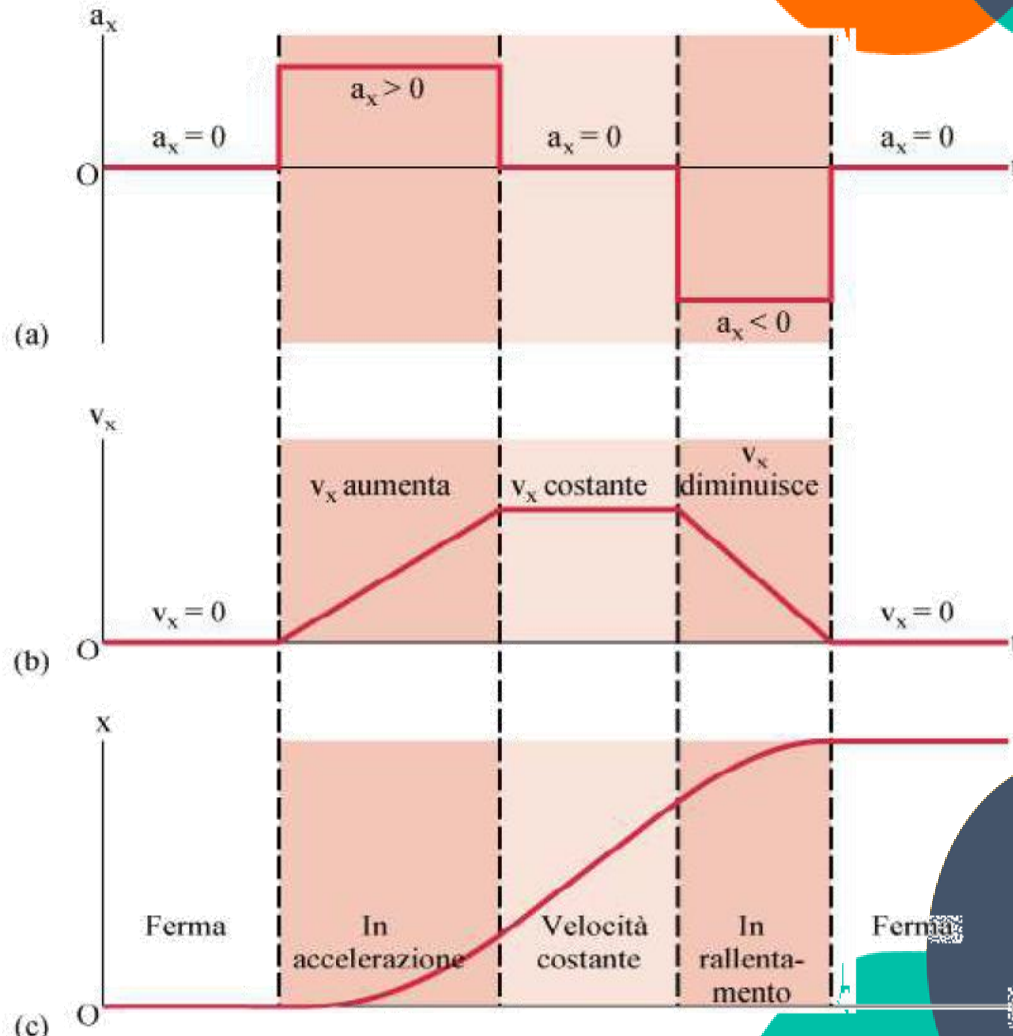


Come interpretare rapidamente il diagramma orario

Il punto materiale è inizialmente ferma poi accelera raggiungendo una certa velocità. Procede a velocità costante per un po', poi decelera ed infine si ferma.

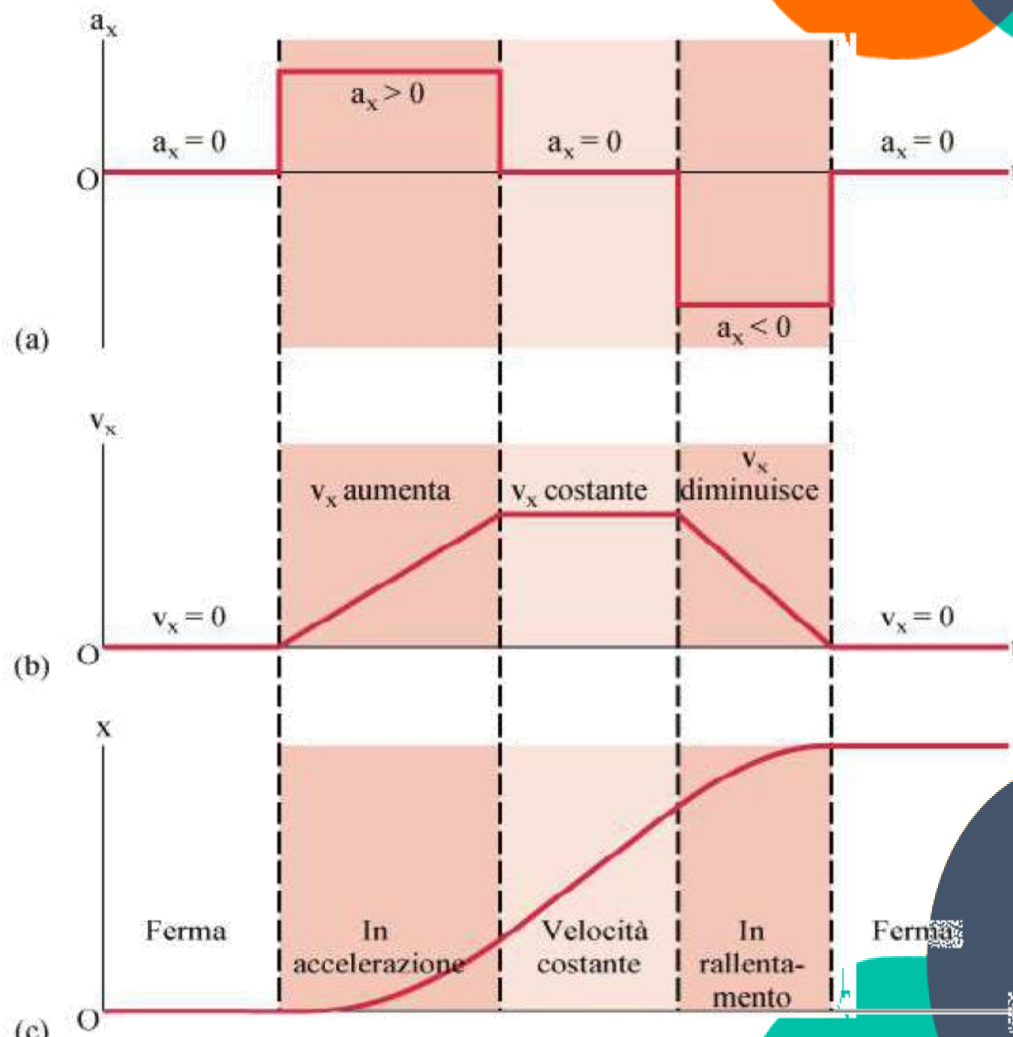
Infatti essendo la velocità la derivata prima della posizione, rappresenta anche la **pendenza** del diagramma orario (quindi la velocità è positiva se la funzione è crescente, negativa se decrescente).

Nel grafico inferiore vediamo infatti che la pendenza è nulla nella prima regione (partendo da $t = 0$), positiva dalla 2 alla 4 e nulla di nuovo nell'ultima.



Come interpretare rapidamente il diagramma orario

Il grafico della velocità che ricaveremmo dal diagramma orario è nella figura (b). Sempre analizzando la (c) possiamo dedurre informazioni sull'acc.: l'acc. è la derivata seconda (rispetto al tempo) e quindi per il diagramma orario rappresenta il tipo di concavità della curva: nella regione 1 abbiamo una retta quindi $a = 0$, nella 2 una curva con concavità verso l'alto quindi $a > 0$ nella 3 di nuovo una retta $a = 0$, nella quarta regione la concavità è verso il basso quindi $a < 0$ ed infine nell'ultima regione di nuovo $a = 0$.



Problema 1.3

Un'automobile è in grado di passare dalla quiete alla velocità di $100\ km/h$ in t secondi, muovendosi di **moto uniformemente accelerato**.
Calcolare l'accelerazione usando il valore di $t = t_1 = 5\ s$ e $t = t_2 = 8\ s$.
Quale sarà lo spazio percorso nei due casi?

Soluzione:

$$x_1 = 70\ m$$
$$x_2 = 112\ m$$

Problema 1.4

Un'automobile viaggia a $45\ km/h$ all'istante $t = 0$. Qual è la sua accelerazione se raggiunge la velocità di $70\ km/h$ nell'istante $t = 2\ s$?
Nell'istante in cui l'automobile ha raggiunto la suddetta velocità (di $70\ km/h$), parte una seconda auto che la raggiunge, con moto accelerato, in $10\ s$. Che distanza ha percorso la seconda auto per raggiungere la prima? Che velocità ha la seconda auto quando ha raggiunto la prima?

Soluzione:

$$a_{M1} = 3{,}5\ m/s^2$$
$$x_{M2} = 405\ m$$
$$v_{M2} = 81\ m/s$$

Problema 1.5

I freni della vostra auto possono esercitare una decelerazione di $5.2\, m/s^2$. Se state viaggiando a $137\, km/h$ e notate la polizia stradale, qual è il tempo minimo entro il quale potete portare la velocità entro il limite dei $90\ km/h$?

Soluzione:

$$t = 2{,}5\ s$$

Moto verticale di caduta libera

Se si lascia libero di cadere un corpo in vicinanza della Terra, trascurando la resistenza dell'aria, esso si muoverà verso il basso con accelerazione costante che in modulo è $g = 9.8\ m/s^2$ ed è detta **accelerazione di gravità**

Tale accelerazione è la stessa per tutti gli oggetti ed è praticamente costante sulla superficie della Terra.

Il moto di **caduta libera** (da una altezza h) è **rettilineo uniformemente accelerato**.

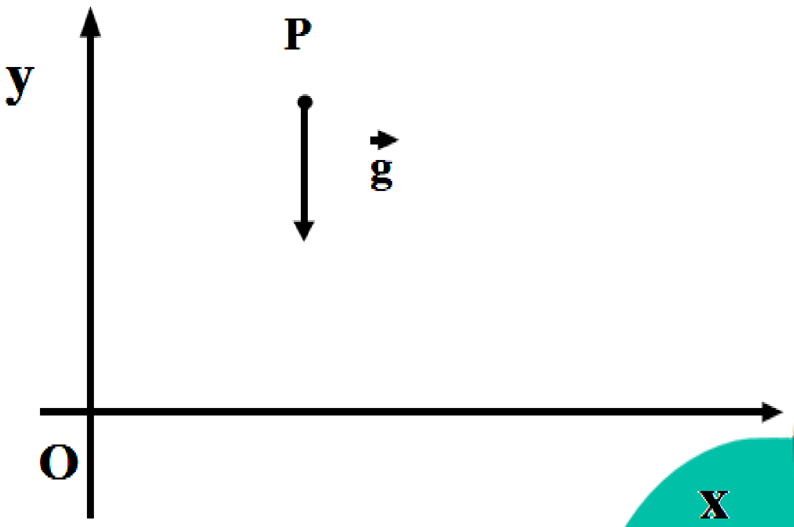
Scegliendo un riferimento come in figura, l'accelerazione è $\vec{a} = \vec{g} = -g\hat{j}$.

Pertanto, se la velocità iniziale è $v_0 = 0\ m/s$ (ovvero stiamo descrivendo il caso in cui l'oggetto è inizialmente fermo) allora

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a\, t^2 =$$

$$= y_0 + \cancel{v_0 t} - \frac{1}{2} g t^2 = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v = \cancel{v_0} + at = -g\, t$$



Moto verticale di caduta libera

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

e indicando $y_0 = h$ la posizione a $t = 0$, l'equazione diventa:

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2$$

che fornisce la posizione y a qualunque istante di tempo $t > 0$.

Calcolo del tempo necessario a raggiungere il suolo

Il suolo è a $y = 0 \Rightarrow \; 0 = h - \frac{1}{2}gt^2$

da cui $t^2 = \frac{2h}{g} \Longrightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

La velocità segue invece la legge

$$v = \; -gt \quad (v_0 = 0)$$

per cui all'impatto si ha

$$v_{FIN} = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$$

Problema 1.6

Dalla cima di una torre alta 90 m, viene lasciata cadere una sferetta. Nello stesso momento viene lanciata dal suolo, verso l'alto e verticalmente, una seconda sfera con velocità $30\ m/s$. Calcolare dove si incontrano le due sfere e le loro velocità all'incontro.

Soluzione:

$$y_{incontro} = 45{,}9\ m$$
$$v_{s1} = -29{,}4\ m/s$$
$$v_{s2} = 0{,}6\ m/s$$

Problema 1.7

Un sasso viene lasciato cadere dalla sommità di una rupe.
Un altro sasso viene lanciato verso il basso 1.6 s più tardi, dallo stesso punto con velocità di 32 m/s. I due sassi arrivano insieme a terra. Qual è l'altezza della rupe?

Soluzione:

$$y = 27{,}5\ m$$

Problema 1.8

Un sasso viene lanciato verso il basso da una rupe di 200 m.
Durante l'ultimo mezzo secondo di volo il sasso percorre una distanza di 45 m.
Determinare la velocità iniziale del sasso.

Soluzione:

$$\overrightarrow{v_{s1}} = -6{,}8\,\frac{m}{s}\,\hat{j}$$