# Fisica Generale – Modulo A
# Classe B

# GRAVITAZIONE

Dott.ssa **Marilena Giglio**

marilena.giglio@poliba.it

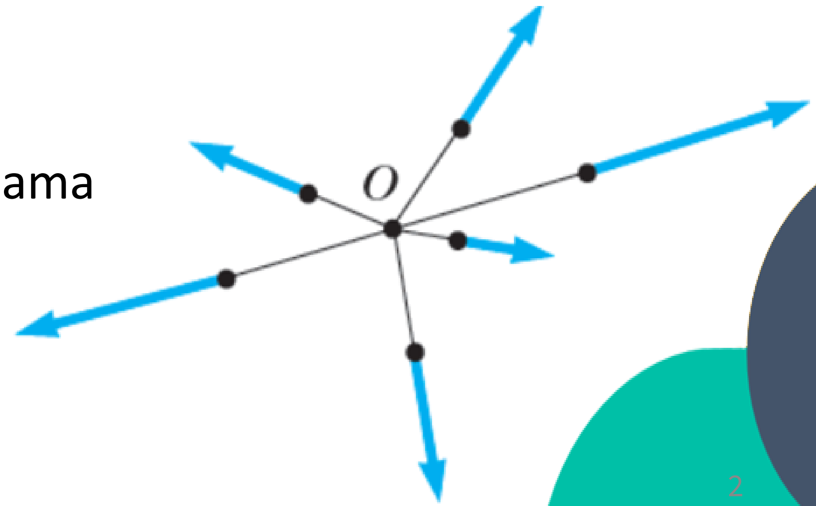
# Forze centrali

Definiamo **forza centrale** una forza agente in una regione di spazio con la caratteristica che in ogni punto di spazio:

- la direzione della forza è diretta sempre per un punto fisso O detto centro della forza
- il modulo della forza è funzione solo della distanza $r$ tra il punto O ed il punto $P$ di applicazione della forza, ovvero $F = F(r)$
- verso: diretta verso O se attrattiva, viceversa se repulsiva

Tra le forze centrali vi sono la forza elastica, quella gravitazionale e quelle elettriche (Modulo B).

Nella regione di spazio in cui agisce una forza centrale si stabilisce quello che si chiama un campo di forza.



# Proprietà delle forze centrali

Se calcoliamo il momento della forza centrale rispetto al polo O, centro della forza,  si ha:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = r\ \widehat{u_r} \times \widehat{u_r}\, F(r) = 0$$

per cui

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\,\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p} = \overrightarrow{cost}$$

In un campo di forze centrali il **momento angolare rispetto al centro della forza si conserva**.

Di conseguenza il moto di una particella soggetta a forze centrali deve giacere nel piano (fisso) definito da $\vec{r}$ e $\vec{v}$ (il moto è piano) ed $\vec{L}$ è costante ed ortogonale ad $\vec{r}$ e $\vec{v}$.

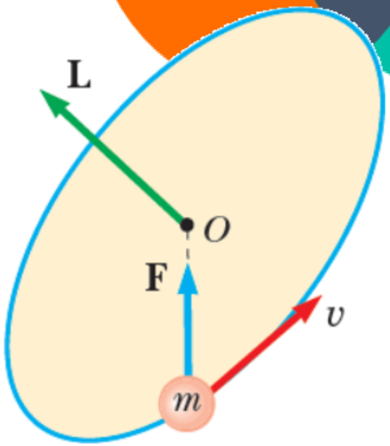
scomponendo $\vec{v}$ nelle componenti polari

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\,\vec{v} = \vec{r} \times m\,(\vec{v_r} + \vec{v_t}) = \vec{r} \times m\,\vec{v_t}$$

da cui

$$L = r\,m\,v_t = r\,m\,r\frac{d\theta}{dt} = m\,r^2\frac{d\theta}{dt}$$

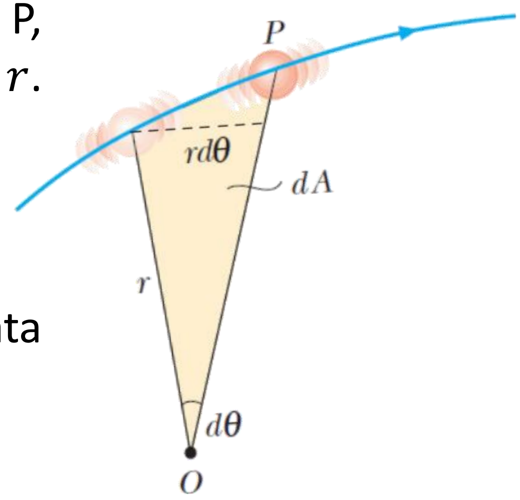
Poiché $L$ è costante, segue che $\frac{d\theta}{dt}$ è costante, ovvero la velocità angolare è costante.



# Proprietà delle forze centrali

Se consideriamo una porzione infinitesima della generica traiettoria definita dal punto nel suo movimento, possiamo definire l'area infinitesima spazzata dal raggio vettore $r$ tra i punti O e P, approssimandola ad un triangolo di base $ds = rd\theta$ e altezza $r$. L'area risulterà

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$




Definiamo velocità areale, la rapidità con la quale viene spazzata l'area dal vettore $r$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Quindi nel moto in un campo di forze centrali **la velocità areale è costante**. La costanza del momento angolare comporta la costanza della velocità aerale.

Se la traiettoria è chiusa (area $A$) come per i pianeti, calcoliamo il periodo impiegato a percorrerla:

$$\frac{dA}{dt} = cost = \frac{A}{T} \Longrightarrow \frac{L}{2m} = \frac{A}{T} \Longrightarrow T = \frac{2m}{L}A$$

# Le forze centrali sono conservative

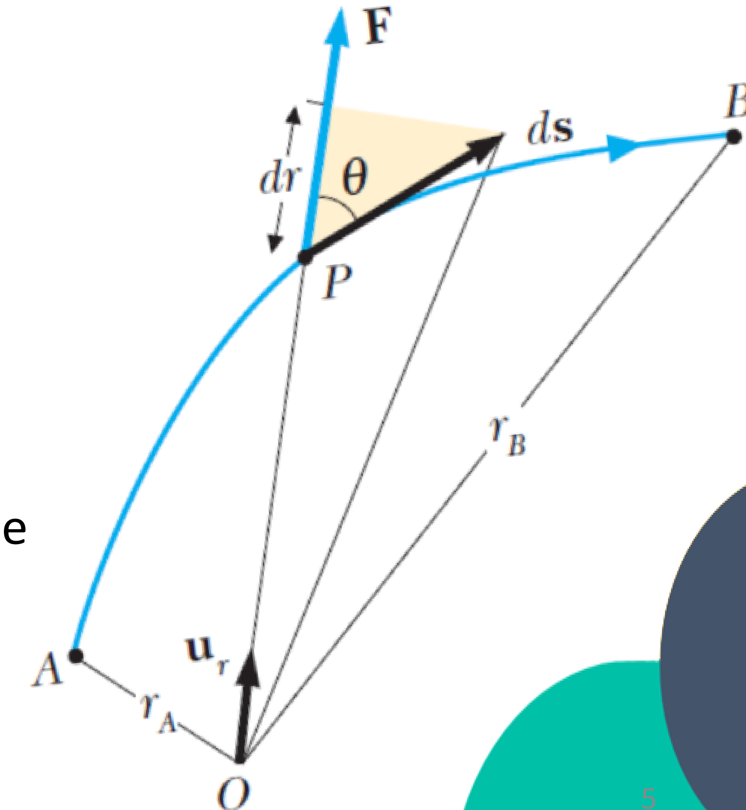
Tutte le forze centrali sono **conservative** infatti se calcoliamo il lavoro

$$W = W_{AB} = \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_A^B F(r)\,\widehat{u_r} \cdot \overrightarrow{ds}$$

Ma $\widehat{u_r} \cdot \overrightarrow{ds} = dr$ quindi

$$W = \int_{r_A}^{r_B} F(r)\,dr = f(r_B) - f(r_A)$$

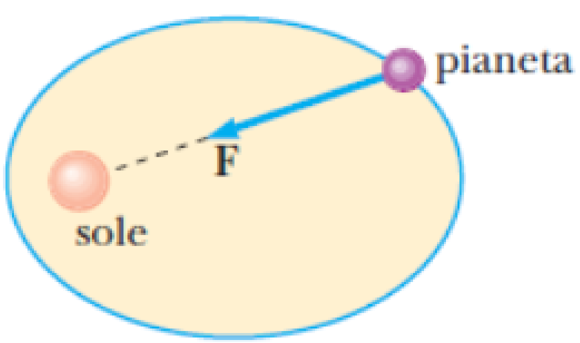
ovvero dipende solo dalle coordinate di A e B e non dal percorso effettuato.



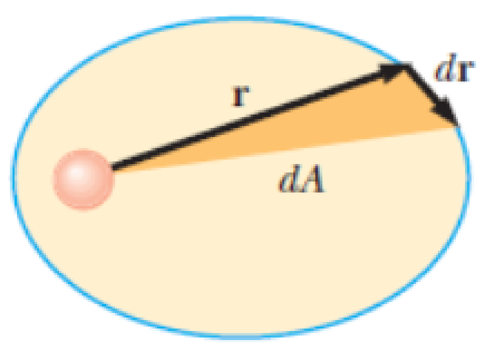
# Leggi di Keplero

Nel sistema solare è il Sole il principale attrattore gravitazionale:
il sistema solare costituisce un campo gravitazionale centrato nel Sole ed essendo un campo di forza centrale il moto dei pianeti è piano.
Si hanno le seguenti leggi (leggi cinematiche del moto dei pianeti):

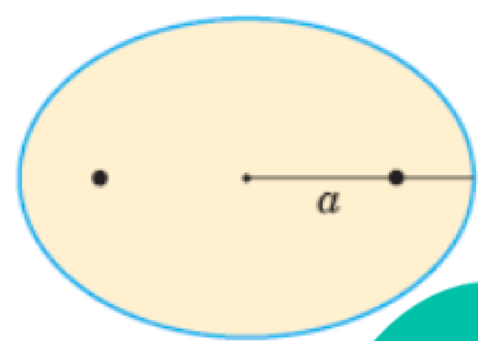
- **I Legge di Keplero**: il moto dei pianeti avviene su orbite ellittiche attorno al Sole, di cui il Sole occupa uno dei fuochi dell'ellisse
- **II Legge di Keplero**, Legge delle aree: il raggio vettore che collega il Sole ad un pianeta descrive aree uguali in tempi uguali $\frac{dA}{dt} = cost$
- **III Legge di Keplero**, il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse: $T^2 = k\, a^3$



orbita ellittica
I legge



$dA\,/\,dt$ = costante
II legge

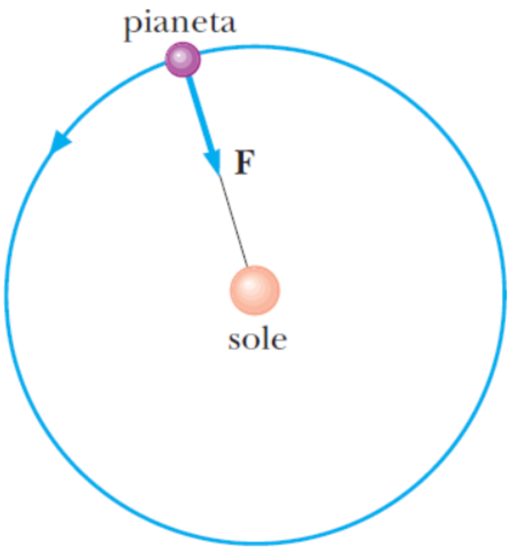


$T^2 = ka^3$
III legge

# La forza gravitazionale

Dalle leggi di Keplero si può dedurre la legge di gravitazione universale:
approssimando le orbite ellittiche ad orbite circolari ($r = cost$), dalla seconda legge di Keplero si ha:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = cost \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = cost$$




quindi il moto è circolare uniforme.
Di conseguenza l'accelerazione è solo centripeta (componente tangenziale nulla).
La forza che agisce sul pianeta si scrive (f. a distanza):

$$F = m\, a_c = m\, \omega^2 r = m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

con $T$ periodo di rivoluzione e utilizzando la terza legge di Keplero che per la circonferenza è $T^2 = k\, r^3$:

$$F = m \frac{4\pi^2}{T^2} r = m \frac{4\pi^2}{k\, r^3} r = \frac{4\pi^2}{k} \frac{m}{r^2}$$

La forza esercitata dal Sole sui pianeti, che incurva la loro orbita, è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal Sole.

# La forza gravitazionale

Nel sistema Terra-Sole, la forza esercitata dal Sole sulla Terra è

$$F_{S-T} = \frac{4\pi^2}{k_T}\frac{m_T}{r^2}$$

Viceversa, la forza esercitata dalla Terra sul Sole è

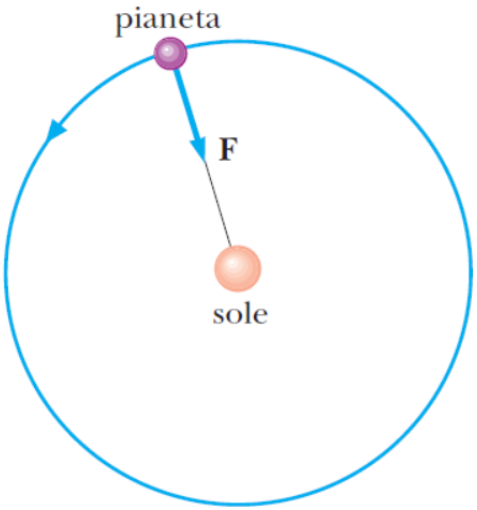
$$F_{T-S} = \frac{4\pi^2}{k_S}\frac{m_S}{r^2}$$

Queste forze hanno modulo uguali per la terza legge della dinamica:

$$F_{S-T} = F_{T-S} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{k_T}\frac{m_T}{r^2} = \frac{4\pi^2}{k_S}\frac{m_S}{r^2} \Rightarrow m_T k_S = m_S k_T$$

Definendo la costante di proporzionalità

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{m_T k_S} = \frac{4\pi^2}{m_S k_T}$$




Il modulo della forza Terra-Sole (la direzione è data dalla congiungente Terra-Sole)

$$F = \gamma \frac{m_T m_S}{r^2}$$

**Legge di gravitazione universale, Newton 1687, formula universale valida per qualsiasi coppia di corpi.**

# Legge di gravitazione universale

Date due masse qualsiasi, di dimensioni trascurabili rispetto alla distanza mutua, tra di esse agisce una **forza attrattiva** diretta lungo la retta congiungente le due masse, il cui modulo dipende direttamente dal prodotto delle masse e inversamente dal quadrato della distanza.

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 \, m_2}{r^2} \, \widehat{u_r}$$

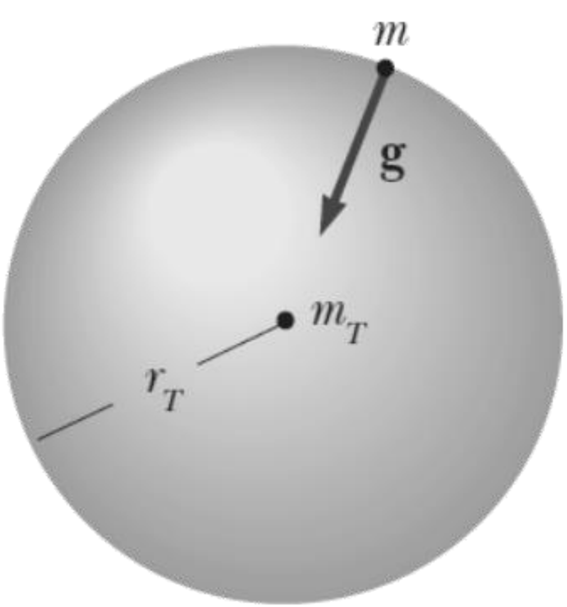
$$\left|\vec{F}\right| = \gamma \frac{m_1 \, m_2}{r^2}$$

con $r$ la distanza tra le masse $m_1$ e $m_2$ e $\gamma = 6.67 \;\; 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ è una costante universale, caratteristica dell'interazione gravitazionale.

# Gravità vicino la Terra

Quando siamo sulla Terra, approssimandola ad una sfera di raggio $R_T$, otteniamo che la forza gravitazionale è data da

$$F = \gamma \frac{M_T\, m}{R_T^2}$$




se l'oggetto di massa m è lasciato libero di cadere esso è soggetto ad accelerazione per cui

$$F = m\, a \implies a = \gamma \frac{M_T}{R_T^2} = g$$

con $M_T = 5.98\ \ 10^{24}\, kg$ e $R_T = 6400\, km$

Questa accelerazione ( $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$) è indipendente dalla massa $m$.

Deviazioni dalla costanza di g sono dovute a:

1. la Terra non è omogenea
2. la Terra non è sferica
3. la Terra ruota su se stessa

# Massa inerziale e massa gravitazionale

Nell'equazione $F = \gamma \frac{M_T\, m}{R_T^2}$, la forza dipende da una caratteristica dei corpi che partecipano all'interazione ($m$ e $M_T$) che chiamiamo masse gravitazionali.
A priori non c'è alcuna ragione per cui tali masse gravitazionali siano uguali alle masse inerziali che compaiono nella seconda legge della dinamica.

Per un corpo in caduta libera sulla superficie terrestre vale l'equazione:

$$m_I g = \gamma \frac{M_{T,G}\, m_G}{R_T^2}$$

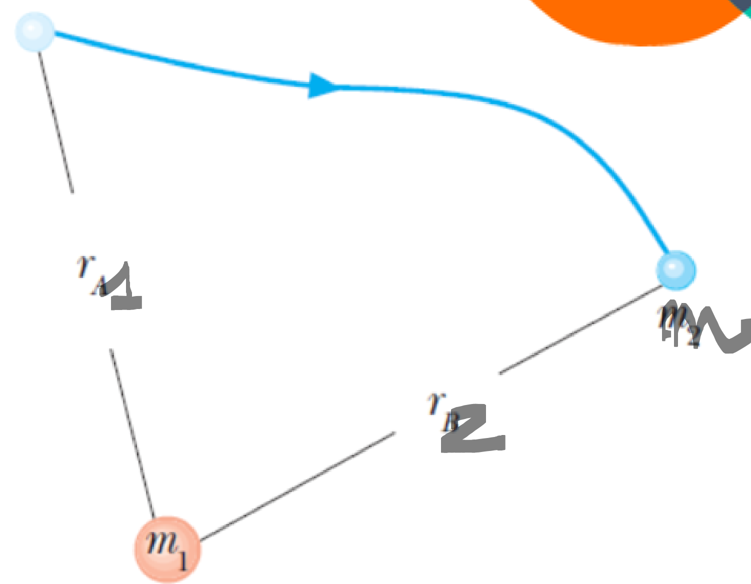
(pedici I e G per inerziale e gravitazionale)

$$g = \gamma \frac{M_{T,G}}{R_T^2} \frac{m_G}{m_I}$$

vera per qualunque corpo. Quindi per qualsiasi corpo $\frac{m_G}{m_I}$ è pari ad una costante, ovvero le due masse sono tra loro proporzionali.
Poiché non c'è un modo diretto per misurare tale rapporto, si pone: $m_G = m_I$

# Energia potenziale gravitazionale

$$dW = \overrightarrow{F_{12}} \cdot \overrightarrow{ds} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \widehat{u_r} \cdot \overrightarrow{ds}$$




Il prodotto scalare $\widehat{u_r} \cdot \overrightarrow{ds} = dr$

$$dW = -\gamma \frac{Mm}{r^2} dr$$

$$\Delta E_p = -\mathcal{L} = -\int_{r_1}^{r_2} F(r)dr = +\gamma Mm \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr =$$

$$\gamma Mm[-\frac{1}{r}]_{r_1}^{r_2} = \frac{\gamma Mm}{r_1} - \frac{\gamma Mm}{r_2}$$

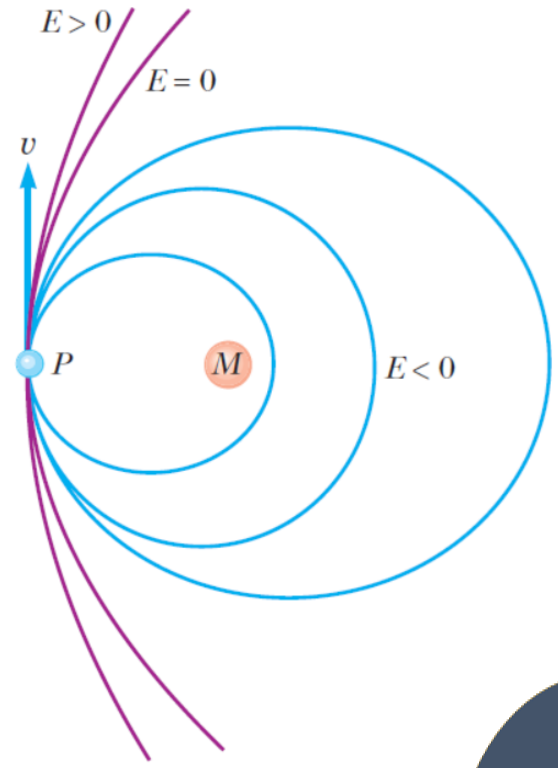
$$\Delta E_p = U(r_2) - U(r_1) = \frac{\gamma Mm}{r_1} - \frac{\gamma Mm}{r_2} \Rightarrow$$

$$E_p = -\gamma \frac{\mathbf{Mm}}{\mathbf{r}}$$

Avendo posto la costante arbitraria $= 0$ per $r \longrightarrow \infty$.
Quando m si avvicina ad M, la forza gravitazionale compie un lavoro positivo, m acquista energia cinetica e poiché la forza è conservativa e l’energia meccanica deve conservarsi, l’energia potenziale deve diminuire.

# Orbite del moto di un corpo nel campo gravitazionale

Il moto in un campo di forze centrali è sempre piano e si dimostra che è descritto da una conica (ellisse, iperbole, parabola) a seconda dell'energia totale della particella.




Consideriamo una massa m sotto l'azione gravitazionale di una massa M. L'energia totale di m è data da $E = E_k + E_p$.

Nel caso di orbite aperte (iperbole, parabola) $E \geq 0$ ed m non è gravitazionalmente legata: m si allontana indefinitamente da M assumendo energia potenziale nulla.

Nel caso $E < 0$ la traiettoria ha un'orbita ellittica e m risulta gravitazionalmente legato.