Fisica Generale – Modulo A

Classe B

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Dott.ssa **Marilena Giglio**

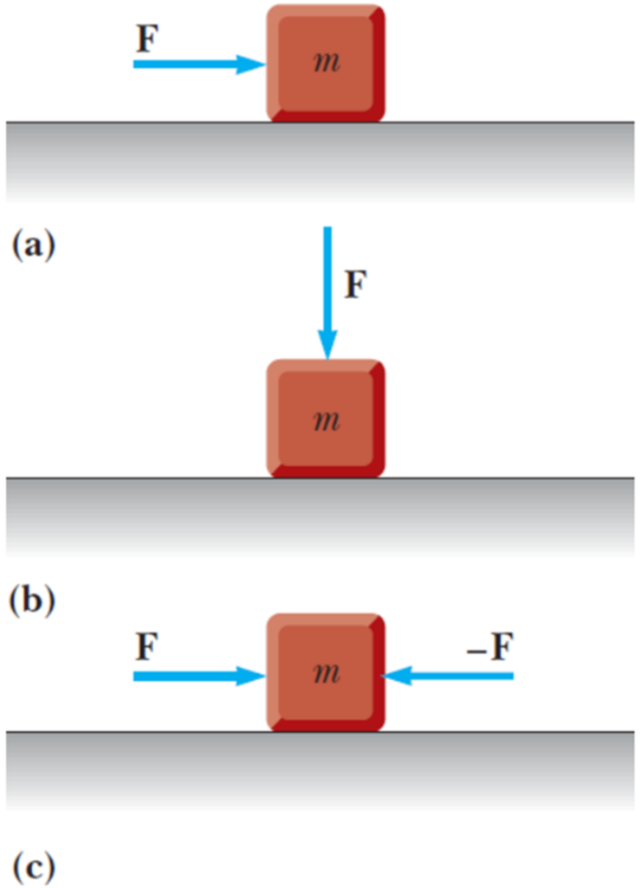
marilena.giglio@poliba.it

Introduzione al concetto di forza

Definiamo **FORZA** l'**interazione** del punto materiale con l'ambiente circostante **che imprime una accelerazione al punto** (variazione del suo stato di moto).

La forza è un **vettore**.

Le forze possono agire sia per contatto che a distanza (forze di attrazione gravitazionale, forze elettrostatiche).



Prima legge della Dinamica o di Newton (Principio di inerzia)

Se su un oggetto non agiscono forze (**o se la risultante delle forze è nulla**) **esso permane nel proprio stato di moto**, **ovvero la sua velocità non cambia**. Ciò implica che esso resterà in quiete se era fermo ($\vec{v} = 0$), oppure si muoverà con moto rettilineo uniforme se si muoveva lungo una retta con $\vec{v} = \text{costante} \neq 0$.

Al contrario, **la variazione di velocità** (in modulo e/o in direzione) di un corpo in movimento, ovvero la sua accelerazione, è da imputarsi all'azione di una o più forze.
Per cui possiamo affermare che **la forza è la grandezza fisica** che **esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici**.
La forza si misura in **Newton** (N) e l'intensità di una forza può essere misurata tramite uno strumento chiamato dinamometro.
Definiamo sistemi inerziali quelli per i quali è strettamente valida la 1^a Legge della Dinamica.
Ogni sistema in moto rettilineo ed uniforme rispetto ad un sistema inerziale è anch'esso inerziale.
Un ulteriore limite di validità della $\mathbf{1}^{\boldsymbol{a}}$ Legge della Dinamica è la sua applicabilità solo se la velocità dei punti considerati è molto minore alla velocità della luce $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s)

Massa inerziale

Se tentiamo di modificare lo stato di moto di un corpo, questo si oppone a tale cambiamento.

Tale opposizione è una misura della risposta di un corpo alle forze esterne. Diremo pertanto che un corpo manifesta una **inerzia** al cambiamento dello stato di moto, ossia a modificare la velocità (in modulo, direzione e verso)
Tale inerzia è collegata alla massa m del corpo che nel S.I. è misurata in kg.

Si osserva anche che **maggiore è la massa**, **minore sarà l'accelerazione risultante sul corpo, a parità di forza agente** $\left(a \propto \frac{1}{m}\right)$

La massa è una proprietà intrinseca del corpo, indipendente da come viene misurata o da ciò che circonda il corpo. Inoltre, essa è una grandezza fisica scalare e additiva.

Seconda legge della dinamica (II legge di Newton)

Il legame tra la forza esercitata su un corpo ed il suo stato di moto è espresso dalla seconda legge della dinamica: l'interazione di un corpo (punto materiale) con l'ambiente circostante, espressa tramite la forza netta (ovvero risultante) agente su un corpo, determina una accelerazione del punto secondo un fattore di proporzionalità m pari alla massa inerziale del punto. Quindi la forza è pari al prodotto della massa inerziale per la sua accelerazione:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\begin{cases} F_x = m\,a_x = m\dfrac{dv_x}{dt} = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ F_y = m\,a_y = m\dfrac{dv_y}{dt} = m\dfrac{d^2y}{dt^2} \\ F_z = m\,a_z = m\dfrac{dv_z}{dt} = m\dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

$$1N = [F] = [m]\,[a] = kg\,\frac{m}{s^2} \Longrightarrow 1N = 1\,kg\,\frac{m}{s^2}$$

Ovvero, $1\ N$ è la forza che applicata ad un copro di massa $m = 1kg$, lo fa muovere con accelerazione $a = 1\ \frac{m}{s^2}$.

Quantità di moto

Possiamo riscrivere la seconda legge della dinamica:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad \xRightarrow{m\ cost} \quad \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La quantità

$$\vec{p} = m\,\vec{v}$$

è detta **quantità di moto**. Pertanto il secondo principio si può anche esprimere affermando l'applicazione di una forza su un punto materiale genera una variazione della sua quantità di moto:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Questa formulazione generale della seconda legge di Newton è utilizzabile anche se la massa del punto materiale non è costante (non discusso in questo corso).

Nel caso particolare in cui $\vec{F} = 0$ si ha una **legge di conservazione**:
la quantità di moto si conserva se la <u>risultante</u> delle forze è nulla.

Impulso

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{F}\,dt = d\vec{p}$$

Ovvero, l'azione di una forza nel tempo *dt* provoca una variazione infinitesima della q.d.m. del punto. Si definisce **impulso della forza** il vettore

$$\vec{J} = \int_0^t \vec{F}\;dt = \int_{\vec{p}}^{\vec{p}_0} d\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \Delta\vec{p}$$

Questa espressione rappresenta la forma integrale della seconda legge di Newton e viene detta **Teorema dell'impulso**.

L'impulso di una forza applicata ad un punto materiale provoca una variazione della sua quantità di moto.

Se $\vec{F} = 0$, allora $\Delta\vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{p} = cost$

Ovvero vale il principio di conservazione della q.d.m.: **in assenza di forze applicate, la q.d.m. di un punto materiale rimane costante (si conserva).**

Se la massa m è costante:

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = m(\vec{v} - \vec{v}_0) = m\Delta\vec{v}$$

Unità di misura: **q.d.m. e impulso si misurano in $N \cdot s$**

Forza peso

La forza peso $\overrightarrow{P}$ è una forza gravitazionale per la quale tutti i corpi sulla Terra (qualunque sia la loro massa inerziale) sono attratti verso il centro della Terra con la stessa accelerazione ($\overrightarrow{g}$!).
Usando la 2ª Legge della dinamica si ha che

$$\overrightarrow{P} = m\,\overrightarrow{g}$$

La forza peso ha:

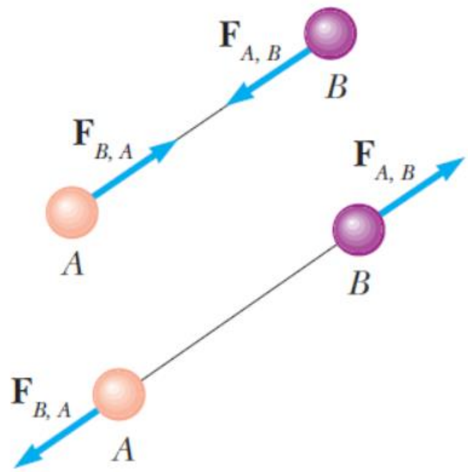
- Modulo $\mathrm{P} = mg$
- direzione normale alla superficie terrestre
- verso che punta al centro della Terra (ovvero verso il basso)

Terza legge della dinamica (III legge di Newton)

Quando due corpi interagiscono, le forze esercitate da un corpo sull'altro hanno uguale modulo e direzione ma verso opposto. Tale legge è detta terza legge di Newton o **principio di azione e reazione** delle forze.

Possiamo riformulare il terzo principio affermando che se un corpo A esercita una forza $\overrightarrow{F_{AB}}$ su un corpo B, il corpo B reagisce esercitando una forza $\overrightarrow{F_{BA}}$ sul corpo A, con $\overrightarrow{F_{AB}} = -\overrightarrow{F_{BA}}$.

Le due forze hanno la stessa retta d'azione.



Esempio: in base al 3° principio della dinamica, la forza che la Terra ($m_T = 6 \cdot 10^{24}\ kg$) esercita su un corpo è uguale ed opposta a quella che il corpo esercita sulla Terra. Qual è l'accelerazione impressa alla Terra a causa della sua interazione con una persona avente massa $m_p = 60\ kg$?

$$m_T\overrightarrow{a_T} = \vec{F} = -\vec{P} = m_p\vec{g} \Rightarrow \overrightarrow{a_T} = -\frac{m_p}{m_T}\vec{g}$$

da cui $|\overrightarrow{a_T}| = \frac{60\ kg}{6 \cdot 10^{24}\ kg} 9{,}8\,\frac{m}{s^2} = 9{,}8 \cdot 10^{-23}\,\frac{m}{s^2}$

Risultante delle forze ed equilibrio statico

Consideriamo un punto materiale di massa *m* su cui agiscano n forze $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \ldots, \overrightarrow{F_n})$. Definiamo **risultante delle forze $\vec{R}$ la somma vettoriale**:

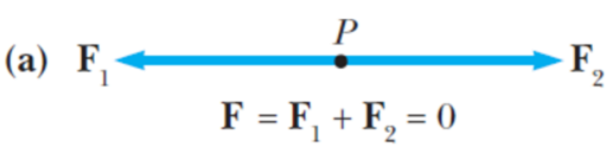
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}$$

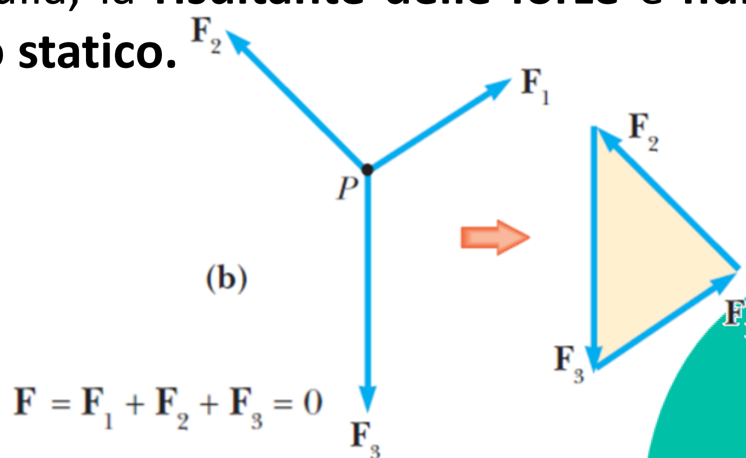
Il punto materiale si muoverà con una accelerazione pari **alla somma vettoriale delle accelerazioni** $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n})$ che il punto avrebbe per effetto dell'azione di ciascuna singola forza (indipendenza delle azioni simultanee):

$$\vec{a} = \frac{\vec{R}}{m} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{F_i}}{m} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{a_i}$$

Se su un corpo con velocità iniziale nulla, la **risultante delle forze** è **nulla**, allora esso si trova in condizione di **equilibrio statico.**

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = 0$$





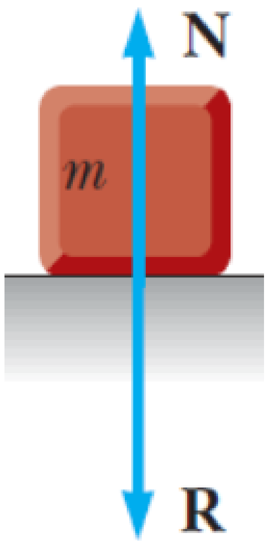
Reazione vincolare

Consideriamo un oggetto poggiato su un supporto rigido non deformato. Sappiamo che, per effetto della sua interazione con la Terra, l'oggetto è sottoposto alla forza di gravità $\vec{P}$.

Nonostante l'applicazione della forza di gravità, l'oggetto rimane fermo sul supporto. Dobbiamo concludere che, affinché $\vec{a}$ sia nulla, deve esistere una seconda forza esercitata sul corpo, che indichiamo con $\vec{N}$, tale che la risultante delle forze $\vec{R} = \vec{P} + \vec{N} = 0$.

Osserviamo che, per effetto della forza di gravità, il corpo preme con una forza $\vec{P}$ sul supporto. Allora, per il terzo principio della dinamica, il supporto reagirà esercitando una forza sul corpo, uguale ed opposta a $\vec{P}$. Tale forza è detta **reazione vincolare normale** $\vec{N}$, con $\vec{N} = -\vec{P}$.

Concludiamo dicendo che, in generale, si definisce **reazione vincolare la forza con cui l'ambiente circostante reagisce alla forza su di esso esercitata dal punto materiale** e, pertanto, può avere **componenti sia normale sia parallela al vincolo**.



Esempio: l'ascensore

Una persona di massa 80 kg si trova in un ascensore. Quale sarà la reazione vincolare esercitata dall'ascensore nei seguenti casi?

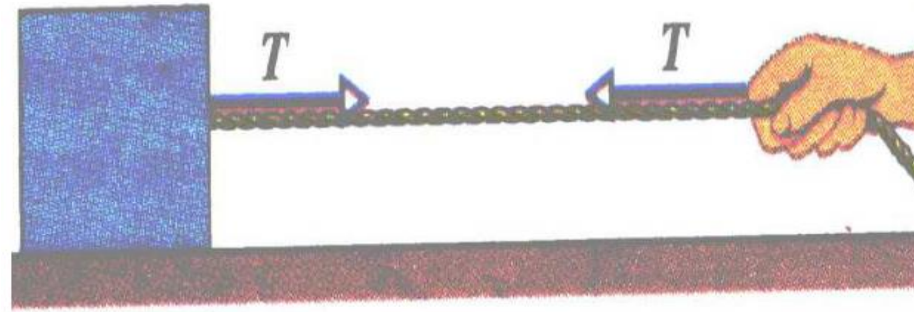
1. l'ascensore sale con accelerazione costante verso l'alto di 1 m/s^2;
2. l'ascensore scende con accelerazione costante verso il basso di 1 m/s^2;
3. l'ascensore sale con velocità costante di 3 m/s.

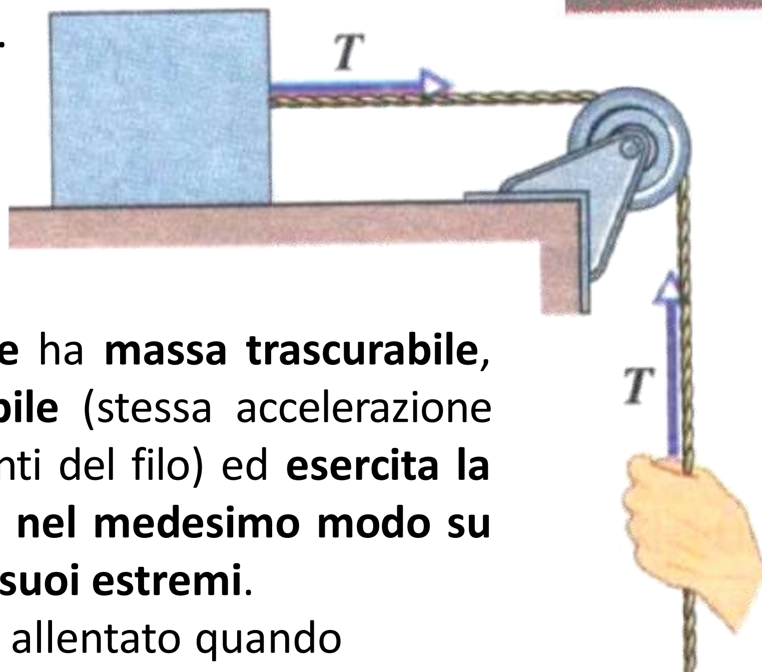
Soluzione:

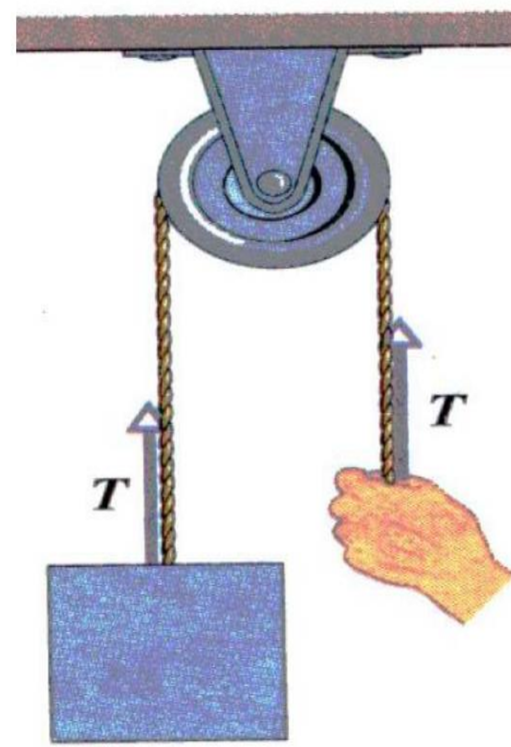
1. $\mathrm{N} = 864\ \mathrm{N}$
2. $\mathrm{N} = 704\ \mathrm{N}$
3. $\mathrm{N} = 784\ \mathrm{N}$

Tensione dei fili (tensione della fune)

Quando un filo è fissato ad un corpo e tirato si dice che esso è sotto tensione. Il filo esercita sul corpo una forza (**tensione**) nel verso di trascinamento del corpo e diretto come la fune.







Un **filo ideale** ha **massa trascurabile**, è **inestensibile** (stessa accelerazione per tutti i punti del filo) ed **esercita la sua funzione nel medesimo modo su ciascuno dei suoi estremi**.

N.B. Un filo è allentato quando

$$T = 0$$

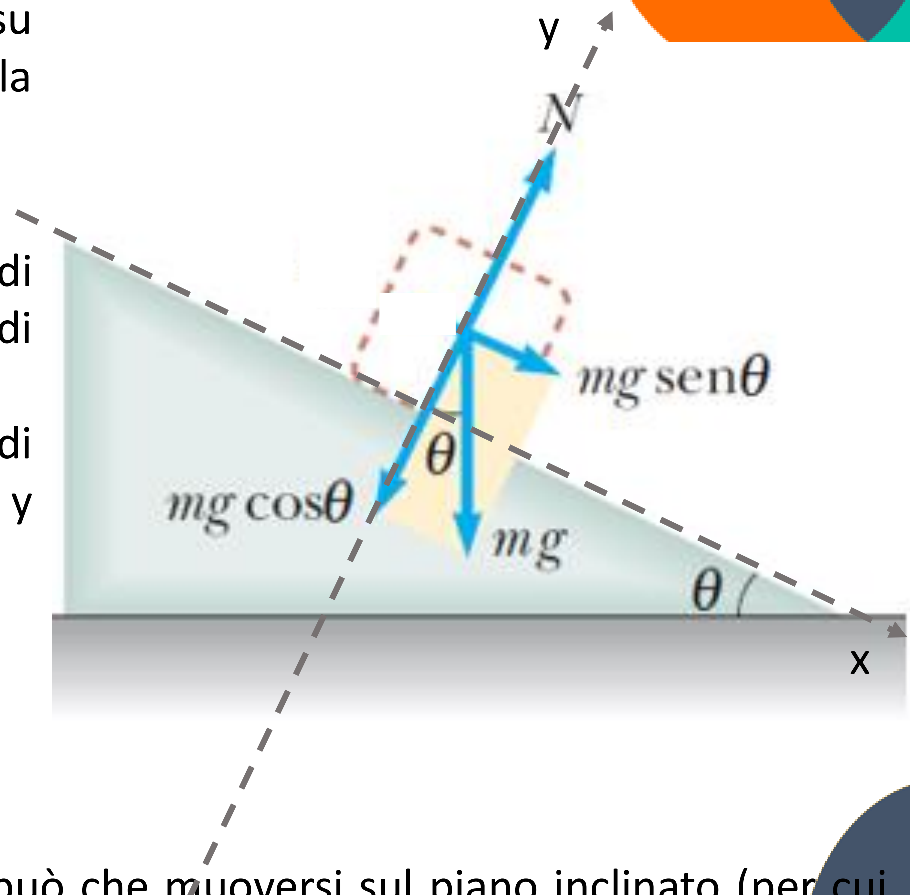
Piani inclinati

Se un corpo (punto materiale) è poggiato su un **piano inclinato** (Θ), sotto l'azione della forza peso $\overrightarrow{P}$, allora si ha che

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{N} = m\,\overrightarrow{a}$$

dove $\overrightarrow{N}$ è la reazione vincolare del piano di appoggio ed è normale al piano in caso di vincolo liscio.

Scegliamo per comodità un sistema di riferimento con la x parallela al piano e la y normale, per cui:



x : $\quad m\ g\ \sin\Theta = ma$

y: $\quad \mathrm{N} - m\ g\ \cos\Theta = 0$

Questo perché sappiamo che il corpo non può che muoversi sul piano inclinato (per cui non vi può essere accelerazione sull'asse y. Il corpo si muove con moto uniformemente accelerato sull'asse x con $\overrightarrow{a} = a$; $|a| = \sin\Theta < g$

Verifiche

Se su un corpo non agiscono forze allora:

1. Rimane fermo
2. Continua a muoversi con moto rettilineo uniforme se era in moto o rimane in quiete se era fermo
3. Continua a muoversi con moto rettilineo uniformemente accelerato o rimane in quiete se era fermo

Quali affermazioni sono corrette?

1. la massa è il peso in assenza di gravità
2. la massa è proporzionale all'accelerazione del corpo quando soggetto ad una forza
3. la massa è l'inerzia che presenta un corpo alla variazione del suo stato di moto
4. la massa è la capacità di un corpo a variare il suo stato quando è in quiete

Problema 3.1

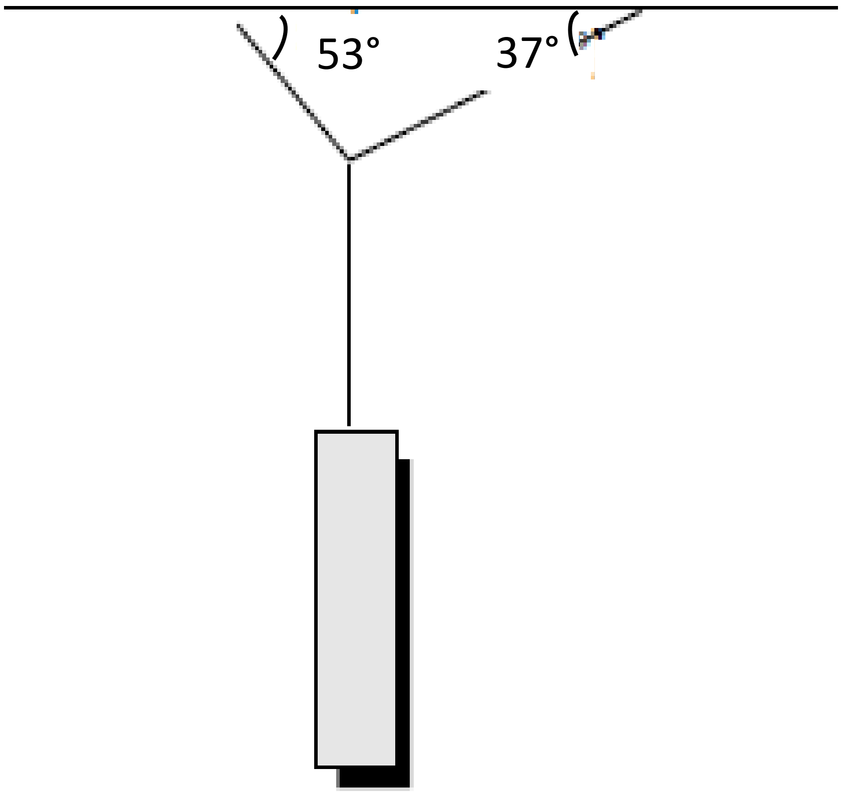
Un oggetto di peso P=700 kN si muove lungo un piano orizzontale ed è tirato tramite una corda ad un angolo di 30° rispetto al piano orizzontale con una forza pari a 1200 N. Determinare l’accelerazione con la quale si muove l’oggetto.

Soluzione:

$$a = 1{,}5\ 10^{-2}\ \mathrm{m}/s^2$$

Problema 3.2

Un semaforo di peso 125 N pende da un cavo leggero connesso ad altri due cavi leggeri come in figura. Determinare le tensioni dei cavi in condizioni di equilibrio.



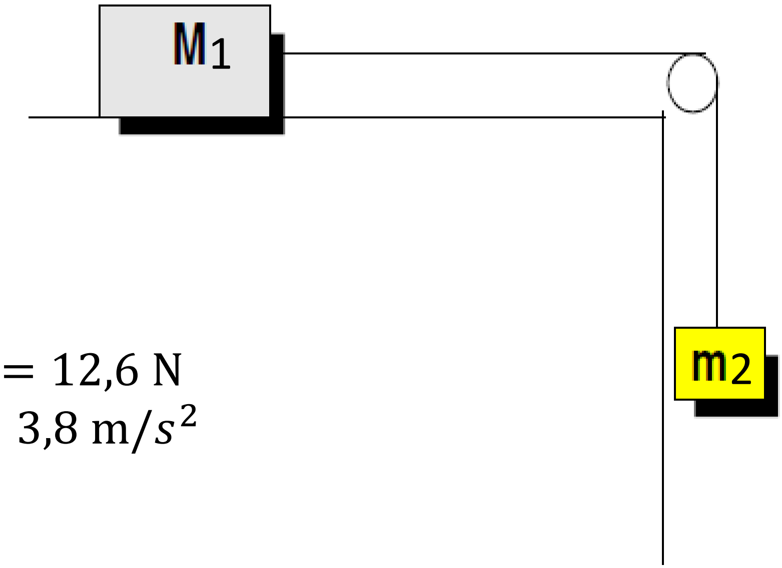
Soluzione:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= 125 \text{ N} \\
T_2 &= 100 \text{ N} \\
T_3 &= 75 \text{ N}
\end{aligned}
$$

Problema 3.3

Un blocco di massa m1=3.3 kg è poggiato su una superficie liscia e senza attrito ed è collegato tramite una fune inestensibile ed una carrucola (ideale) come in figura, ad un'altra massa m2=2.1 kg.

Assumendo cavi e puleggia senza massa, determinare le accelerazioni e le tensioni dei fili.

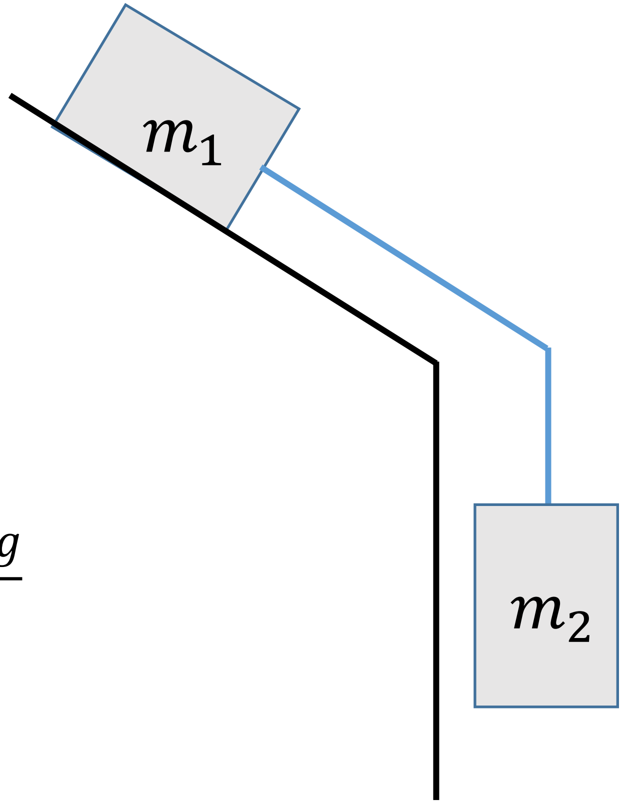


Soluzione:

$$T = 12{,}6 \text{ N}$$
$$\text{a} = 3{,}8 \text{ m}/s^2$$

Problema 3.4

Due alpinisti si trovano sul bordo di un crepaccio di un ghiacciaio, con pendenza Θ e sono tra loro legati. Uno dei due cade trascinando anche il primo. Prima che riesca a fermarsi con la picozza, l'alpinista rimasto sul ghiacciaio scivola senza attrito. Assumendo che le masse dei due alpinisti siano m_1 e m_2, determinare l'accelerazione che hanno i due alpinisti durante la loro caduta.



Soluzione:

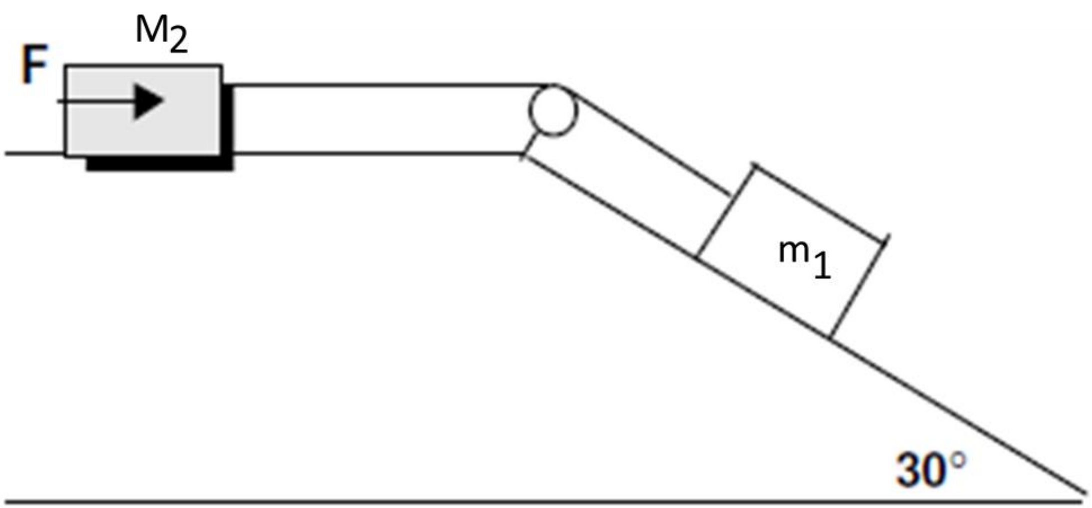
$$a = \frac{m_1\ g\ sen\theta + m_2\ g}{m_1 + m_2}$$

Problema 3.5

Una scatola di massa m1=1.0 kg su uno scivolo privo di attrito inclinato di 30° è collegata ad un’altra di massa M2=3.0 kg appoggiata su una superficie orizzontale egualmente priva di attrito e spinta da una forza $\vec{F}$.

a) Se il modulo di F è pari a 2.3 N, qual è la tensione nella corda?

b) Qual è l’intensità massima di F per evitare che la corda si allenti?

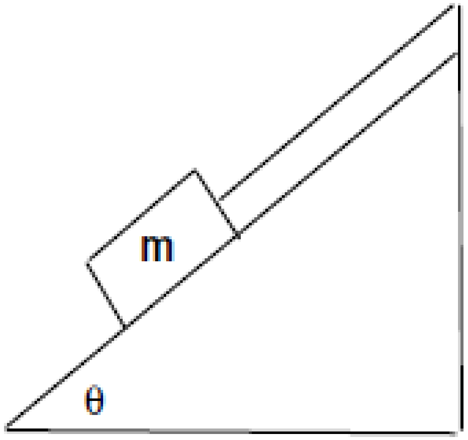


Soluzione:

a) $T = 3{,}1\ \mathrm{N}$
b) $\mathrm{F} = 14{,}7\ \mathrm{N}$

Problema 3.6

Un oggetto di massa m=15 kg è poggiato su un piano inclinato di 27° e tenuto fermo tramite una fune. Calcolare i moduli della tensione T e della reazione N all'equilibrio.

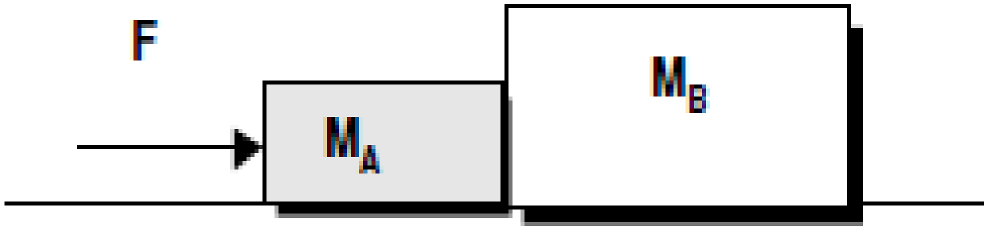


Soluzione:

$T = 66{,}7 \text{ N}$
$\text{N} = 131 \text{ N}$

Problema 3.7

Calcolare l'accelerazione dei blocchi se M_A= 4 kg e M_B= 6 kg con una forza applicata F = 20 N e la forza di contatto tra i due blocchi.

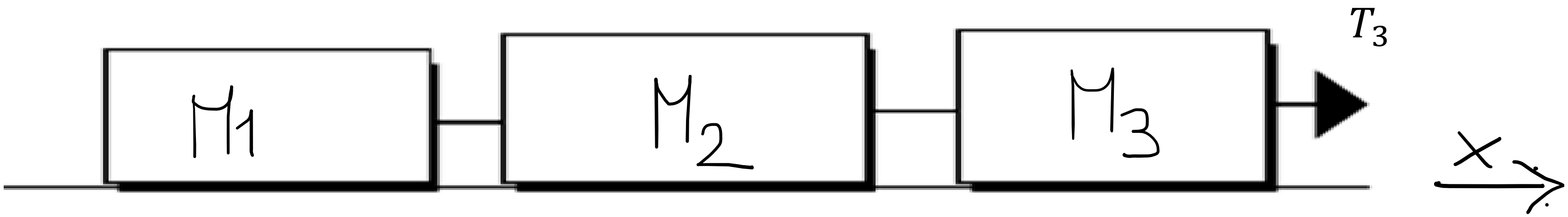


Soluzione:

$$F_c = 12\ \mathrm{N}$$
$$\mathrm{a} = 2\ \mathrm{m}/s^2$$

Problema 3.8

Tre blocchi collegati tra loro come in figura, sono tirati verso destra su un piano orizzontale liscio da una forza T_3 =65.0 N. Se m_1=12.0 kg, m_2=24.0 kg e m_3=31.0 kg, calcolare l'accelerazione del sistema e le tensioni T_1 e T_2.



Soluzione:

$$T_1 \ = 11{,}64 \text{ N}$$
$$T_2 \ = 34{,}92 \text{ N}$$
$$\text{a} = 0{,}97 \text{ m}/s^2$$

Problema 3.9

Due masse di 8 kg e 10 kg sono unite tramite una corda e scivolano su piani inclinati lisci. La massa di 8 kg è su un piano inclinato di 40° l'altra su un piano inclinato di 50°. Determinare le accelerazioni e la tensione della fune.

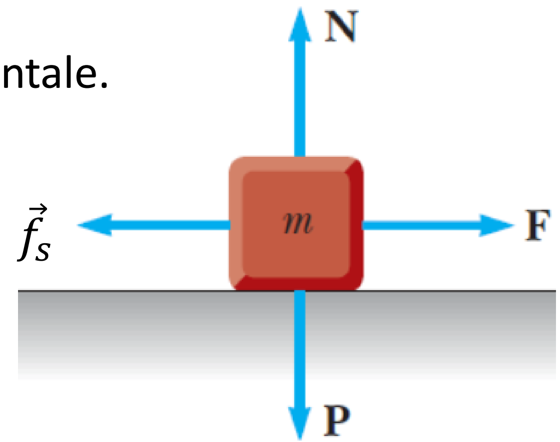
Soluzione:

$$T = 61{,}3 \text{ N}$$
$$\text{a} = 1{,}39 \text{ m}/s^2$$

Forza di attrito radente

Quando un corpo si muove su una **superficie scabra** vi è una resistenza al moto dovuta all'interazione del corpo con la superficie o con il mezzo. Tale interazione è detta forza di ATTRITO ed è, pertanto, una reazione vincolare.

Consideriamo un blocco di massa m poggiato su un piano orizzontale.



Se applichiamo una forza $\vec{F}$ parallela al piano d'appoggio, osserviamo sperimentalmente che il corpo non si muoverà fino a quando il modulo di $\vec{F}$ non supera il valore $f_s = \mu_s N$, dove $\vec{f_s}$ è detta **forza di attrito statico**, μ_s è detto **coefficiente di attrito statico** e N è la **reazione vincolare normale**. Possiamo quindi dire che il **piano scabro esercita una reazione vincolare avente componenti $\vec{N}$, perpendicolare al piano, e $\vec{f}_s$, parallela al piano.**

Pertanto, fino a che $|\vec{F}| \leq \mu_s N$, il blocco è in quiete $\Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{N} + \vec{f_s} + \vec{F} = 0$

In tal caso avremo:

$$N - P = 0$$
$$F - f_s = 0$$

Osserviamo che la forza di attrito statico non ha valore fissato, bensì varia con $\vec{F}$ fino a che non si raggiunge la condizione $|\vec{F}| = \mu_s N$.

Forza di attrito radente

Quando la forza applicata supera il valore massimo dell'attrito statico $\vec{f}_{s_{max}} = \mu_s N$, il blocco si muove.

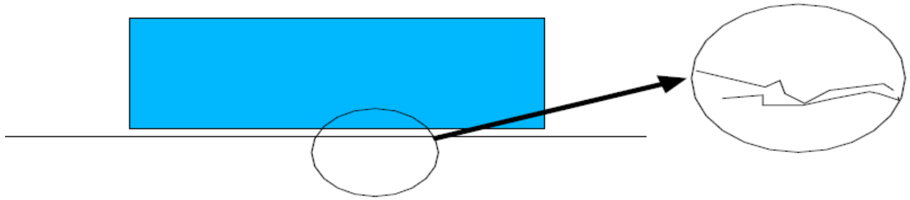
Tuttavia, al suo moto continuerà ad opporsi la resistenza dovuta all'interazione con il piano scabro.

Infatti, il piano esercita un **attrito dinamico** parallelo al piano che rallenta il moto del blocco:

$$\vec{f}_d = \mu_d N$$

con $\mu_d < \mu_s$ **coefficiente di attrito dinamico** e N la **reazione vincolare normale**.

Forza di attrito radente



L’attrito a livello microscopico è dovuto ai **legami** che si instaurano tra i corpi a contatto (forze di coesione).
Per vincere tale attrito è necessario applicare una forza esterna che stiri e rompa tali legami (e questo spiega la minima forza necessaria a iniziare il moto) i quali però si riformano continuamente ad ogni contatto con le asperità (con questo spieghiamo l’attrito dinamico).

L’attrito è proporzionale alla effettiva **superficie di contatto.** Osserviamo che la superficie di contatto dipende dalle forze normali alla superficie: maggiore è la compressione, tanto maggiore sarà la superficie di contatto microscopica.
Questa è allora la ragione per cui $f_{attr} \propto N$.

Verifica

La forza di attrito statica ha espressione:

1. 0
2. $\mu_s M g$
3. $\mu_s N$
4. $\leq \mu_s N$

Problema 3.10

Si trascina una cassa di massa $m = 67\ kg$, sul pavimento mediante una corda attaccata alla cassa ed inclinata di 15° sopra l'orizzontale. Se il coefficiente d'attrito statico è 0.5:

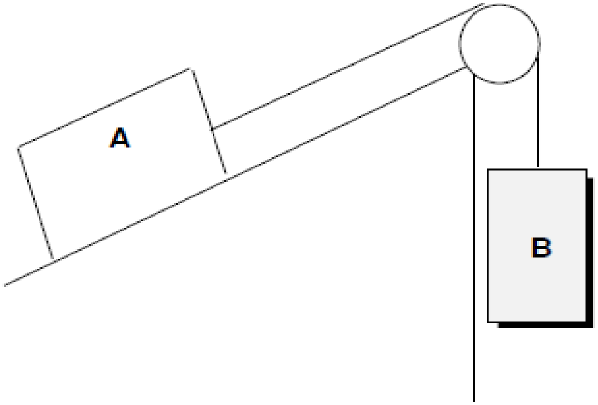
1) qual è il modulo della forza minima necessaria a smuovere la cassa?
2) Se il coefficiente $\mu_d = 0.35$, qual è l'accelerazione della cassa?

Soluzione:

1) $T_{min} = 299{,}7\ \mathrm{N}$
2) $\mathrm{a} = 1{,}29\ \mathrm{m}/s^2$

Problema 3.11

Due blocchi sono collegati tra loro come in figura, attraverso una puleggia. La massa A sul piano inclinato di 30° ha massa 10 kg e il coefficiente d'attrito dinamico è $\mu_d = 0.2$. Se la massa A scivola verso il basso lungo il piano inclinato con velocità costante, qual è il valore della massa B?

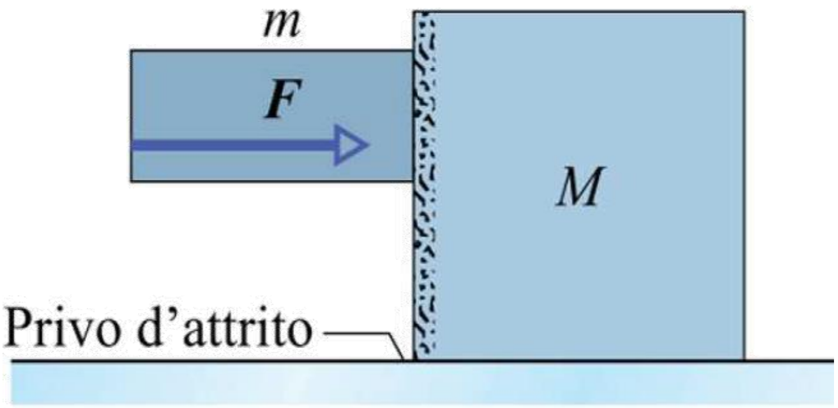


Soluzione:

$$m_B = 3,3\ kg$$

Problema 3.12

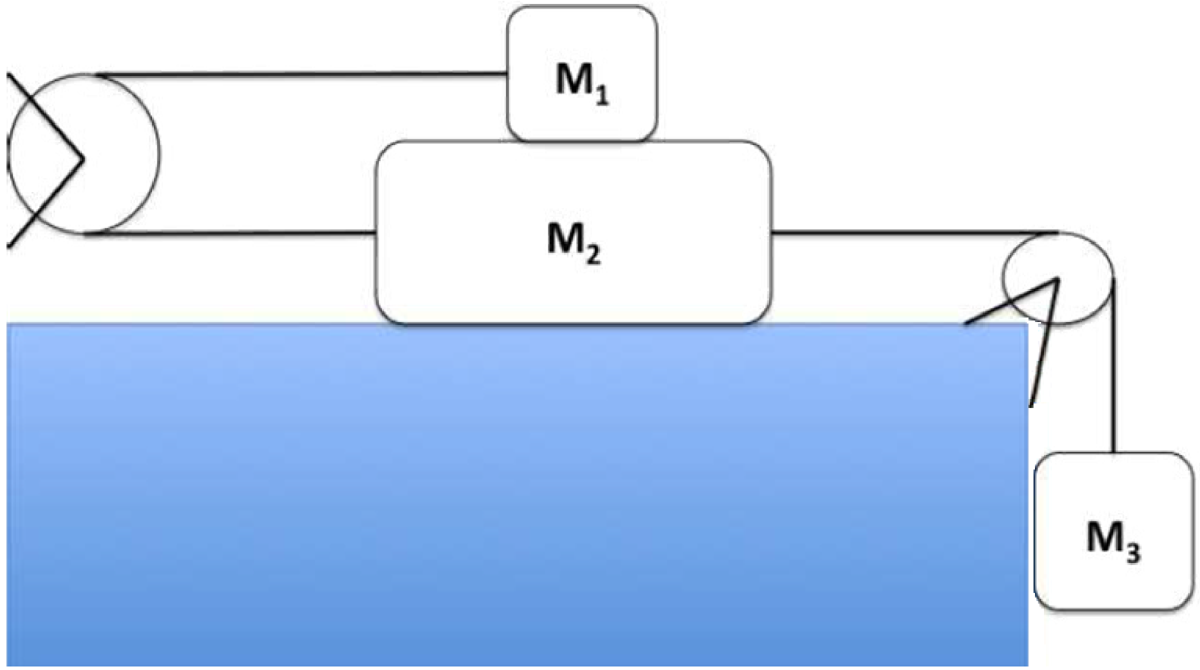
Due blocchi sono come in figura con m=16 kg, M=88 kg e con coeff. d'attrito statico tra i due blocchi pari a μ_s = 0.38. La superficie su cui poggia M è priva d'attrito.
Qual è la minima intensità di F necessaria a tenere m contro M?



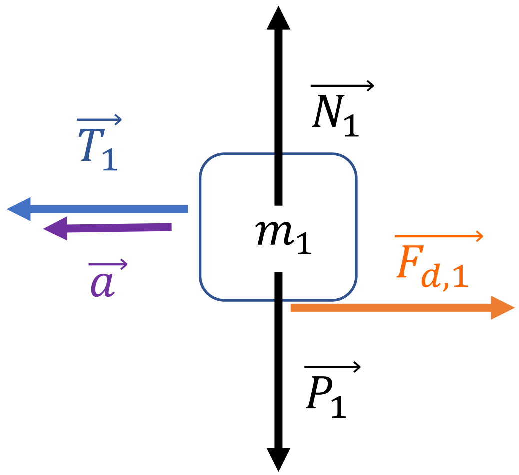
Soluzione:
$F_{min} = 486{,}9\ \mathrm{N}$

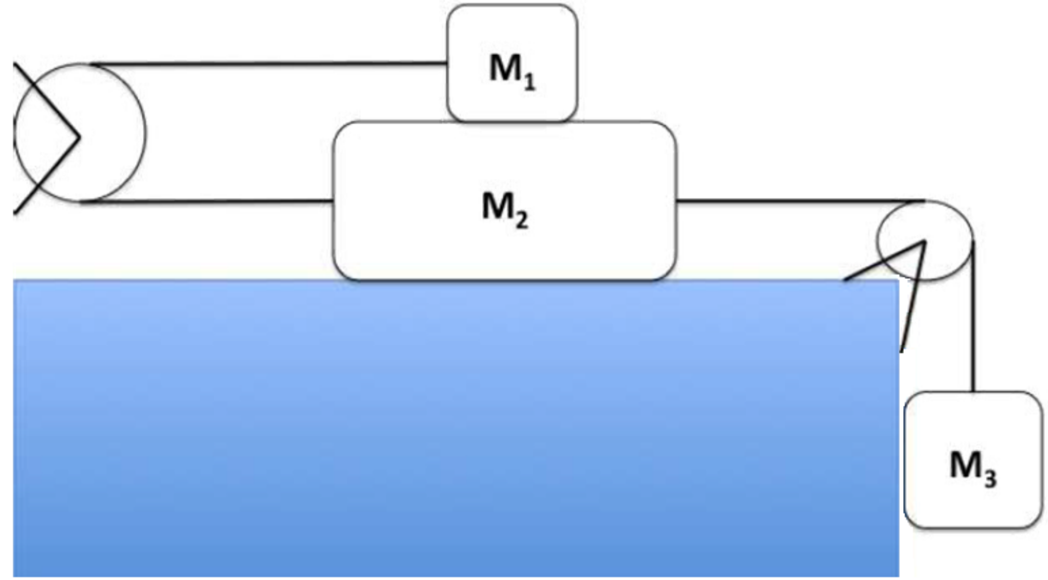
Problema 3.13

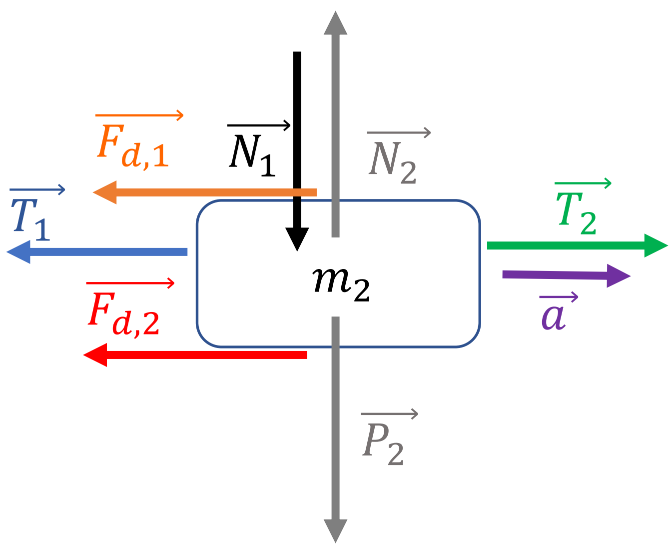
Una massa $m_1 = 1\,kg$ è posta sopra una massa $m_2 = 2.5\,kg$. Le due masse sono collegate da una fune inestensibile. Una terza massa $m_3 = 5\,kg$ è collegata come in figura a m_2. Il coefficiente d'attrito dinamico è 0.3 per tutte le superfici in contatto (N.B.: m_3 NON è in contatto con il blocco azzurro!).
Calcolare l'accelerazione e le tensioni delle funi.

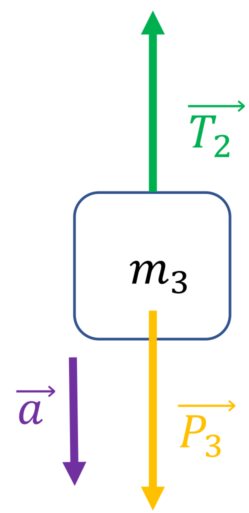


Soluzione:
$a = 3{,}86\ \mathrm{m}/s^2$
$T_1 = 6{,}8\ \mathrm{N}$
$T_2 = 29{,}7\ \mathrm{N}$


$\overrightarrow{N_1}$
$\overrightarrow{T_1}$
m_1
$\overrightarrow{a}$
$\overrightarrow{F_{d,1}}$
$\overrightarrow{P_1}$


M_1
M_2
M_3


$\overrightarrow{F_{d,1}}$
$\overrightarrow{N_1}$
$\overrightarrow{N_2}$
$\overrightarrow{T_1}$
$\overrightarrow{T_2}$
m_2
$\overrightarrow{F_{d,2}}$
$\overrightarrow{a}$
$\overrightarrow{P_2}$

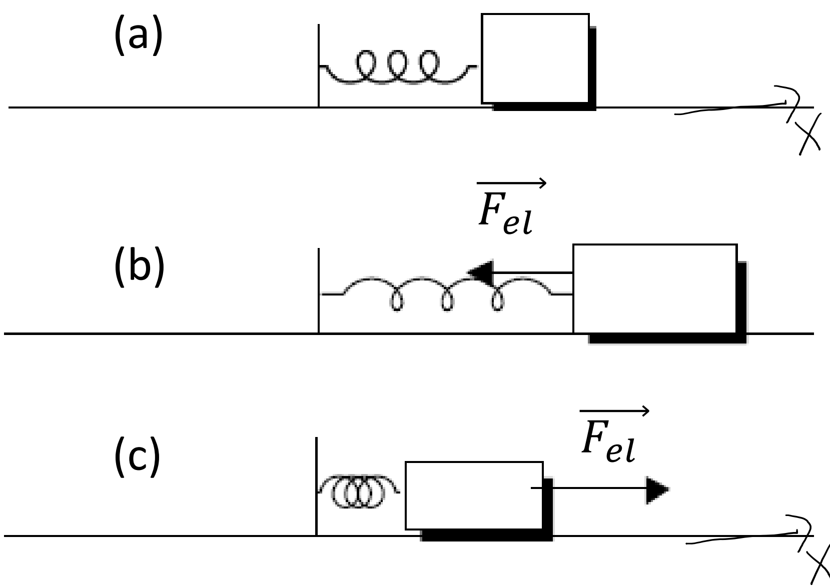

$\overrightarrow{T_2}$
m_3
$\overrightarrow{a}$
$\overrightarrow{P_3}$

Forza elastica

In figura (a) è mostrata una **molla a riposo, vincolata ad un estremo e con un blocchetto fissato all'estremo libero**.

Se tiriamo il blocchetto verso destra, ovvero se allunghiamo la molla (figura (b)), essa esercita una forza che tende a riportare la molla verso la sua posizione a riposo.

Analogamente, se comprimiamo la molla spingendo il blocchetto verso sinistra (figura (c)) essa reagisce esercitando una forza repulsiva.



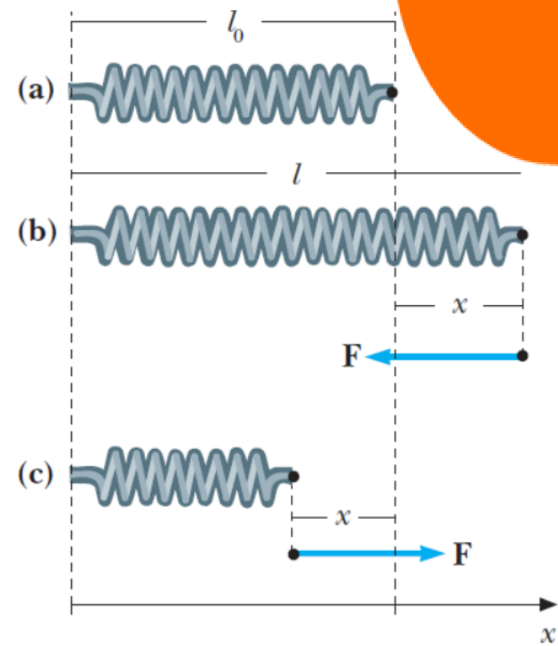
La forza esercitata dalla molla, detta forza elastica, dipende dalla posizione del suo estremo rispetto alla posizione a riposo e sperimentalmente si trova che:

$$\overrightarrow{F_{el}} = -k\ x\ \hat{u}_x$$

detta **Legge di Hooke**. Il **segno negativo** evidenzia che la forza ha sempre verso opposto allo spostamento, ovvero si tratta di una **forza di richiamo**. La costante $\boldsymbol{k}$ positiva è detta **costante elastica** della molla.

Forza elastica

Supponiamo che la lunghezza della molla a riposo sia l_0. Se spostiamo di un tratto x il blocchetto di massa m collegato all'estremo libero della molla, rispetto alla posizione di equilibrio, la molla avrà lu ghezza $l = l_0 + x$. Per effetto della forza elastica, il blocchetto sarà soggetto ad una forza di richiamo $F = -k(l - l_0) = -kx$. Per la 2ª Legge della Dinamica si ha che



$$F = -k\,x = m\,a \Rightarrow a = -\frac{k}{m}\,x$$

Poniamo $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Segue che il blocchetto si muove con una accelerazione $a = -\omega^2 x$.

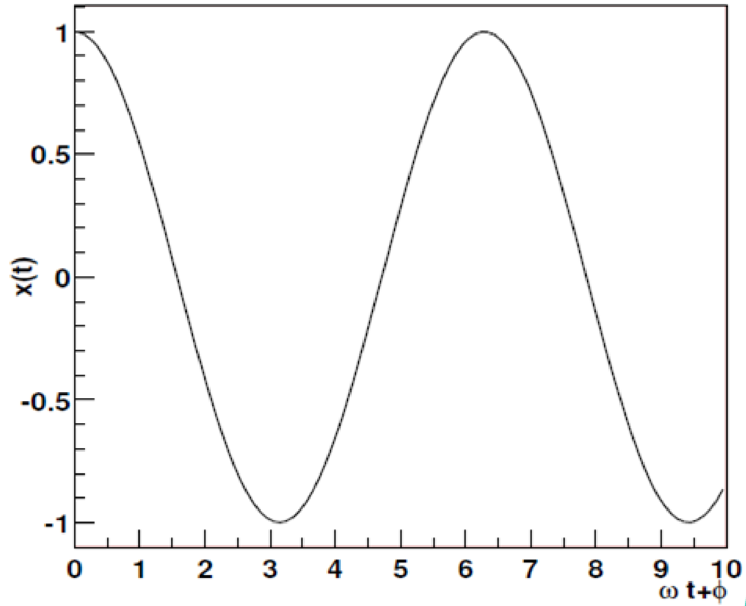
Il moto del blocchetto sarà quindi un **armonico semplice** con

$$x(t) = A\sin(\omega t + \Phi),$$

e **pulsazione** $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

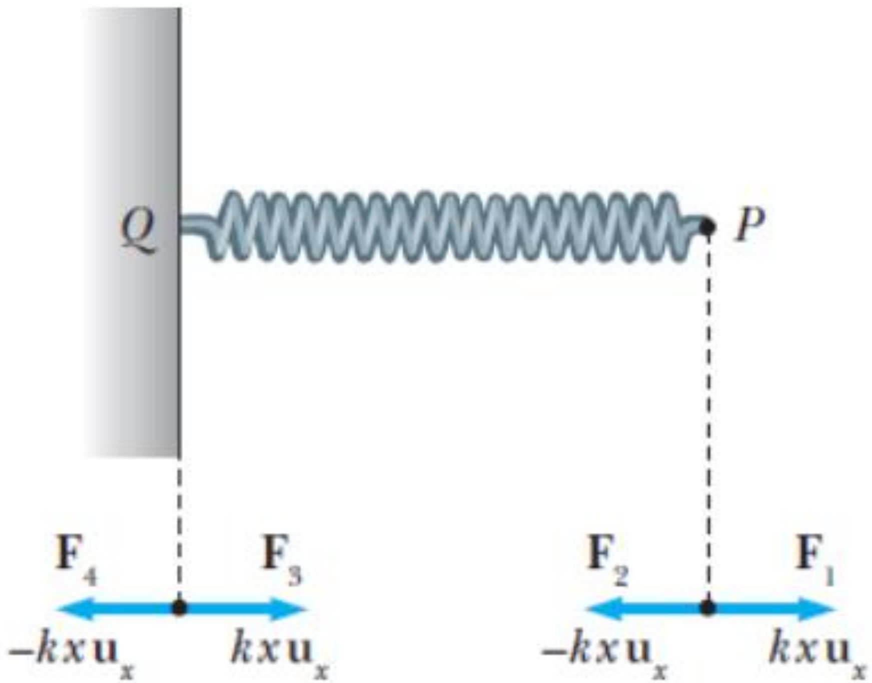
Il **periodo** di oscillazione sarà

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



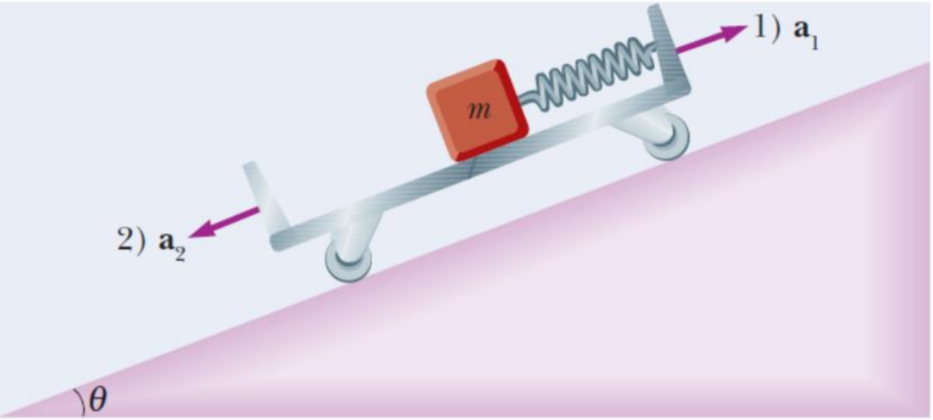
Forza elastica

Se vogliamo mantenere la molla deformata con una determinata lunghezza l dobbiamo applicare alla molla una forza eguale ed opposta alla forza elastica.



Problema 3.14

Un carrello sale lungo un piano inclinato di 20° con accelerazione costante $a_1 = 2\ \frac{m}{s^2}$. Sul carrello si trova un corpo di massa $m = 0.25\ kg$, fissato ad una parete del carrello tramite una molla di costante elastica $k = 12\ \frac{N}{m}$.
Non ci sono attriti e oscillazioni. Calcolare di quanto si allunga la molla e in che verso, e verificare cosa cambia se l'accelerazione $a_2 = 5\ \frac{m}{s^2}$ verso il basso.



Soluzione:
1) $x = 0{,}111$ m (la molla si allunga)
2) $x = 0{,}034$ m (la molla si comprime)

Dinamica e Moto circolare uniforme

Abbiamo visto nella cinematica che un corpo che percorre una circonferenza di raggio R a **velocità costante** è soggetto ad una accelerazione centripeta $a_c = \frac{v^2}{R}$.

Esempio 1: Un'automobile percorre una curva a velocità costante.

$a = a_c$ $\Rightarrow$ Per il 2° principio l'accelerazione è causata da una forza

$$F = m\,a = ma_c = m\frac{v^2}{R}$$

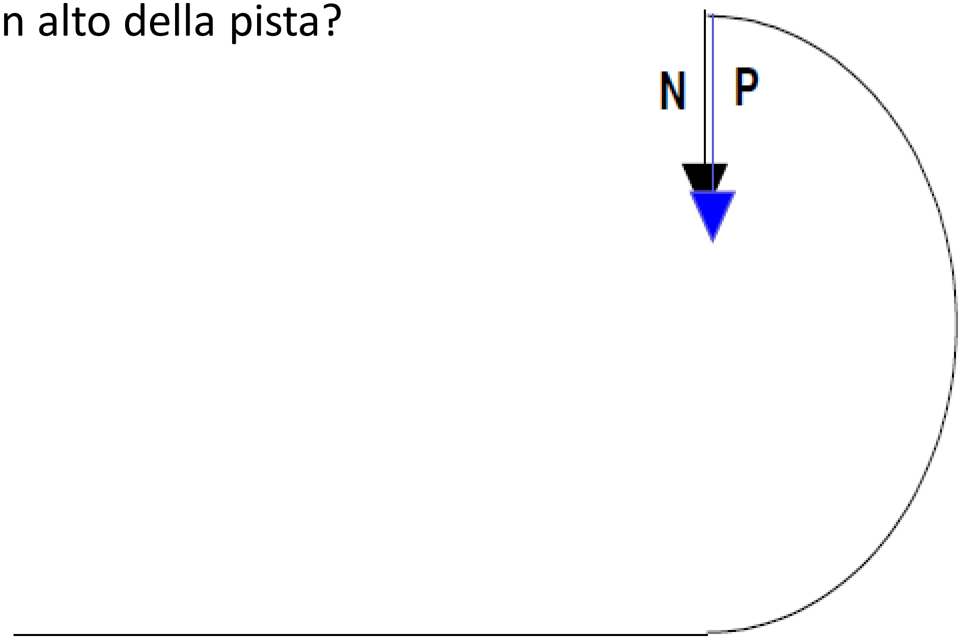
Tale **forza**, diretta come l'accelerazione, è detta **centripeta**. (Nell'esempio è dovuta all'attrito tra la strada ed gli pneumatici)

Esempio 2: Una pallina è legata ad un filo ed è messa in rotazione. La pallina segue ancora un moto rotatorio. In questo esempio è il filo ad esercitare una forza (tensione) che mantiene il moto circolare uniforme: $\mathrm{T} = ma_c = m\frac{v^2}{R}$

Questi 2 esempi evidenziano che **le forze centripete accelerano i corpi variando solo la direzione della velocità e non il modulo**.

Problema 3.15

Nel 1901 un acrobata di un circo si lanciò nel numero del giro della morte in bicicletta su una pista circolare verticale. Supposto che il raggio della sia $R = 2.7\ m$, qual è il minimo valore che deve raggiungere la velocità v della bicicletta per rimanere in contatto nel punto più in alto della pista?



Soluzione:

$$v = 5{,}1 \text{ m}$$

Problema 3.16

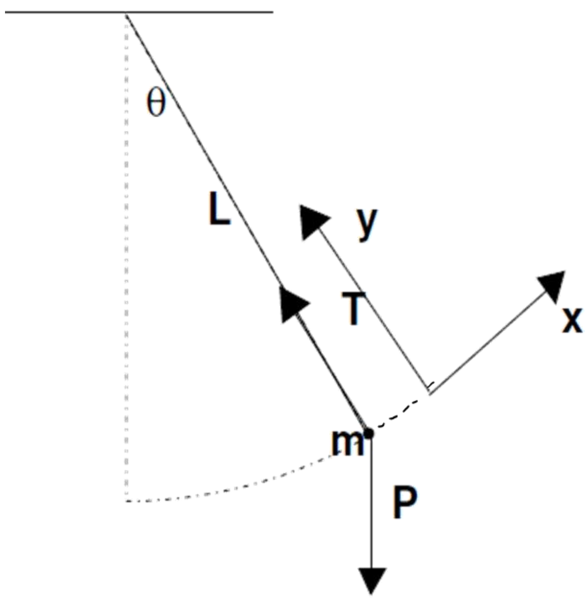
Un'auto di massa $\mathrm{m} = 1600\ kg$ viaggia con velocità costante $v = 20\ m/s$ su una pista circolare di raggio $R = 190\ m$. Qual è il minimo valore di coefficiente di attrito statico µs tra pneumatici e strada che impedisce all'auto di slittare?

Soluzione:

$$\mu_s = 0{,}21$$

Pendolo semplice

Un oggetto di massa m è fissato all'estremo libero di una fune ideale di lunghezza L. L'altro estremo della fune è vincolato ad una trave.



Supponiamo di spostare il punto materiale dalla posizione di equilibrio in modo che la corda formi un piccolo angolo Θ rispetto alla verticale, come in figura.

Le forze agenti sono la tensione del filo $\overrightarrow{T}$ e la forza peso $\overrightarrow{P}$.

Scegliamo un sistema di riferimento con l'asse x tangente all'arco descritto dall'oggetto e y diretto lungo la fune.

Per la 2ª Legge della dinamica: $\overrightarrow{T} + \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{a} \Rightarrow$

$$\begin{array}{ll} \text{x:} & \\ \text{y:} & \end{array} \begin{cases} -m\ g\ \sin\Theta = m\, a_T & \text{Acc. tangenziale} \\ T - m\ g\ \cos\Theta = m\, a_c & \text{Acc. centripeta} \end{cases}$$

$$a_c = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad T = m\ g\ \cos\Theta + m\frac{v^2}{R}$$

$$a_T = \alpha\ L = L\frac{d\omega}{dt} = L\frac{d^2\Theta}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad -\cancel{m}g\ \sin\Theta = \cancel{m}\ L\frac{d^2\Theta}{dt^2}$$

Per piccoli angoli vale l'approssiazione $\sin\Theta \approx \Theta \Rightarrow L\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -g\ \Theta \quad \Rightarrow$

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\ \Theta = 0$$

che è l'equazione differenziale del moto armonico.

Pendolo semplice

In definitiva otteniamo l'equazione di un moto armonico nel quale la pulsazione vale

$$\omega^2 = \frac{g}{L} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

E la posizione angolare varia nel tempo secondo la legge

$$\Theta(t) = \Theta_0 \ \sin(\omega\, t + \Phi)$$

Il periodo di oscillazione quindi è

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = 2\,\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Il periodo di oscillazione del pendolo non dipende dalla massa dell'oggetto appeso alla fune ma solo dalla lunghezza della fune (e da g).

Verifica

Quale affermazione delle seguenti è l'unica corretta?

1. Il periodo di oscillazione del pendolo è proporzionale alla massa
2. Il periodo di oscillazione del pendolo è linearmente dipendente dalla lunghezza del filo
3. Il periodo di oscillazione del pendolo dipende dalla lunghezza del filo
4. Il periodo di oscillazione del pendolo dipende da $\frac{k}{m}$