Fisica Generale – Modulo A

Classe B

DINAMICA DEL PUNTO – LAVORO, ENERGIA, MOMENTI

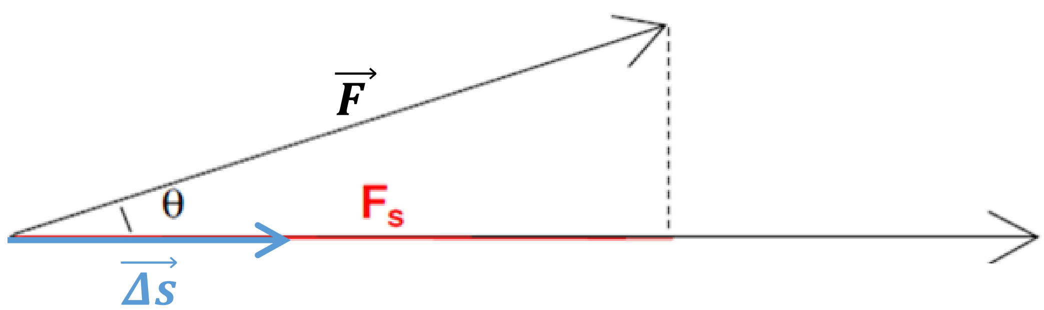
Dott.ssa **Marilena Giglio**

marilena.giglio@poliba.it

Lavoro della forza

Consideriamo un punto materiale soggetto ad una forza $\overrightarrow{F}$ e che subisca, per azione di tale forza, uno spostamento $\overrightarrow{\Delta s}$. Si definisce lavoro compiuto dalla forza $\overrightarrow{F}$ il **prodotto scalare tra forza e spostamento**, ovvero il prodotto tra la componente della forza nella direzione dello spostamento e lo spostamento stesso

$$W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\Delta s} = F\,\Delta s\ \cos\Theta = (F\cos\Theta)\,\Delta s = F_s\,\Delta s = F_T\,\Delta s$$



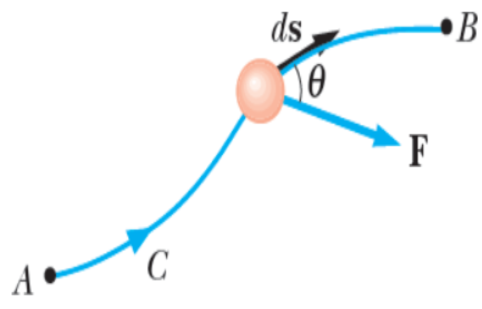
Deduciamo che se la forza è perpendicolare allo spostamento ($\Theta = \pi/2$) il lavoro risulta nullo, $W = 0$. Inoltre, se l'angolo tra forza e spostamento è $\Theta < \pi/2$ il lavoro è positivo e sarà detto **lavoro motore**, altrimenti per $\Theta > \pi/2$ il lavoro sarà negativo ed è chiamato **lavoro resistente**.

Unità di misura: **il lavoro si misura in Joule (*J*),** dove $1\,J = 1\,N \cdot 1m$

Lavoro della forza

Osserviamo che se un punto materiale viene spostato dalla forza $\vec{F}$ dalla posizione A alla posizione B lungo un percorso C, possiamo determinare il lavoro infinitesimo compiuto su ogni spostamento infinitesimo $d\vec{s}$ tangente alla curva C:

$$dW = \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds}$$



Il lavoro complessivo compiuto dalla forza $\vec{F}$ sarà allora

$$W = \int_{A \atop C}^{B} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{A \atop C}^{B} F \cos\vartheta \, ds = \int_{A \atop C}^{B} F_T ds$$

Concludiamo, allora, **che il lavoro è l'integrale di linea della forza lungo la traiettoria**.

Quando sul punto materiale agisce una forza $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \cdots + \vec{F_n}$

$$\mathrm{W} = \int_{A \atop C}^{B} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{A \atop C}^{B} (\vec{F_1} + \cdots + \vec{F_n}) \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{A \atop C}^{B} \vec{F_1} \cdot \overrightarrow{ds} + \cdots + \int_{A \atop C}^{B} \vec{F_n} \cdot \overrightarrow{ds} = W_1 + \cdots + W_n$$

Il lavoro della risultante delle forze è pari alla somma dei lavori delle singole forze agenti, ciascuno dei quali può essere positivo, negativo o nullo.

Segue che il lavoro totale può essere nullo se: non agiscono forze, la risultante delle forze è nulla, o la forza è sempre ortogonale alla traiettoria.

Teorema dell’energia cinetica

Possiamo riscrivere il lavoro infinitesimo

$$dW = \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = F_T\, ds = m\, a_T ds = m \frac{dv}{dt} ds = \mathrm{m} \frac{ds}{dt} dv = m\, v\, dv$$

Perciò il lavoro compiuto per un percorso finito dalla posizione A alla posizione B

$$\mathrm{W} = \int_A^B dW = \int_{v_A}^{v_B} m\, v\, dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

Quindi il lavoro è legato alla variazione della velocità posseduta dal punto materiale nelle posizioni iniziale e finale. Introduciamo l’**energia cinetica $\boldsymbol{E_K}$**, definita come la funzione di stato (cioè una grandezza fisica la cui **variazione** dipende solo dalle condizioni del sistema nello stato iniziale e finale) la cui variazione tra la condizione iniziale del sistema (punto materiale che si trova nel punto A) e quella finale (punto materiale che si trova nel punto B) sia proprio

$$\Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A} = \frac{1}{2}\, m\, v_B^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_A^2$$

Pertanto vale il **teorema dell’energia cinetica:** il lavoro compiuto dalla risultante delle forze nello spostamento di un punto materiale comporta una variazione dell’energia cinetica

$$\mathrm{W} = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k$$

Teorema dell'energia cinetica

Il teorema dell'energia cinetica stabilisce che l'energia cinetica aumenta se il lavoro è positivo, diminuisce se il lavoro è negativo, è costante se il lavoro è nullo (ad esempio nel moto circolare uniforme).

Osserviamo che <u>una forza compie lavoro solo se c'è uno spostamento </u>(quindi la forza di attrito statico non compie lavoro!). D'altra parte, è possibile che, nonostante sotto l'azione di una forza un punto materiale compia uno spostamento, il lavoro sia nullo.

Ricordando la definizione di quantità di moto: $p = m\, v$, possiamo riscrivere

$$E_k = \frac{1}{2}\, m\, v^2 \; = \frac{1}{2}\, \frac{p^2}{m}$$

Il lavoro è la manifestazione dell'azione di una forza, ovvero dell'interazione di un punto materiale con l'ambiente circostante. Per tale ragione, si parla di lavoro scambiato, non posseduto. Si parla, invece, di energia posseduta dal sistema e che non viene modificata dall'interazione con l'ambiente esterno.

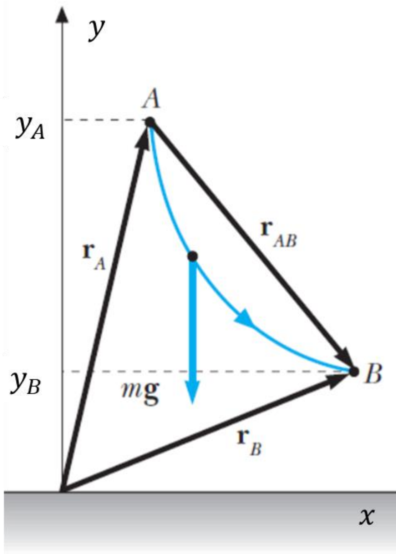
Unità di misura: come il lavoro, **anche l'energia si misura in Joule** (J).

Lavoro della forza peso ed Energia Potenziale

Il lavoro della forza peso per uno spostamento generico dalla posizione A a quella B è:

$$\mathrm{W} = \underset{C}{\int_{A}^{B}} \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{ds} = \underset{C}{\int_{A}^{B}} \left(-m\, g\, \hat{j}\right) \cdot \overrightarrow{ds} = -m\, g \int_{y_A}^{y_B} dy = -m\, g\, (y_B - y_A) = -\, m\, g\, \Delta y$$

Osserviamo che **il lavoro non dipende dalla particolare traiettoria che collega le posizioni A e B.** Introduciamo pertanto l'**energia potenziale della forza peso $\boldsymbol{E_P}$**, definita come la funzione di stato (cioè una grandezza fisica la cui **variazione** dipende solo dalle condizioni del sistema nello stato iniziale e finale) la cui variazione tra la condizione iniziale del sistema (punto materiale che si trova nel punto A) e quella finale (punto materiale che si trova nel punto B) sia uguale all'opposto di quell'integrale.



$$\mathrm{W} = -m\, g\, (y_B - y_A) = -\left(E_{P_B} - E_{P_A}\right) = -\Delta E_P$$

Il lavoro della forza peso è uguale all'opposto della variazione dell'energia potenziale della forza peso posseduta dal punto materiale tra la posizione iniziale e quella finale e non dipende dalla particolare traiettoria che collega tali posizioni.

Lavoro della forza elastica ed Energia Potenziale

Il lavoro compiuto dalla forza elastica $\overrightarrow{F_{el}} = -k\ x\ \hat{u}_x$ necessario a spostare l'estremo di una molla dalla sua posizione di riposo (che assumiamo essere $x = 0$) è

$$\mathrm{W} = \underset{C}{\int_{A}^{B}} \overrightarrow{F_{el}} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{x_A}^{x_B} (-k\ x\ \hat{u}_x) \cdot \overrightarrow{dx} = \int_{x_A}^{x_B} (-k\ x)\ dx =$$

$$= -k \int_{x_A}^{x_B} x\ dx = -k \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_A}^{x_B} = -\frac{1}{2}\ k\ (x_B^2 - x_A^2)$$

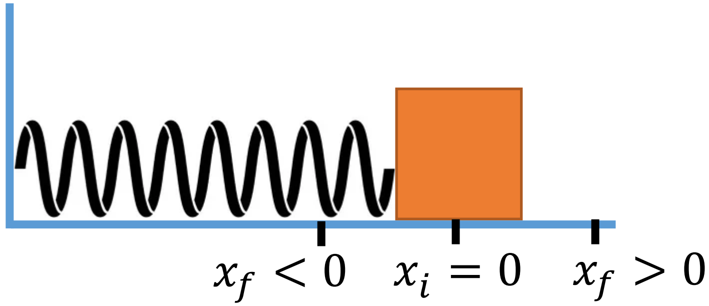
Analogamente al caso della forza peso, osserviamo che il lavoro della forza elastica dipende solo dalle posizioni iniziale e da finale. Possiamo perciò introdurre una **energia potenziale della forza elastica $\boldsymbol{E_P}$**, tale che il lavoro sia pari all'opposto della variazione dell'energia potenziale elastica nei punti iniziale e finale.

$$\mathrm{W} = -\frac{1}{2}\ k\ (x_B^2 - x_A^2) = -\left(E_{P_B} - E_{P_A}\right) = -\Delta E_P$$

Osservazioni sul lavoro della forza elastica

- Se cosideriamo il caso di una molla inizialmente a riposo, quanto vale il lavoro della forza elastica per raggiungere la posizione x_f?

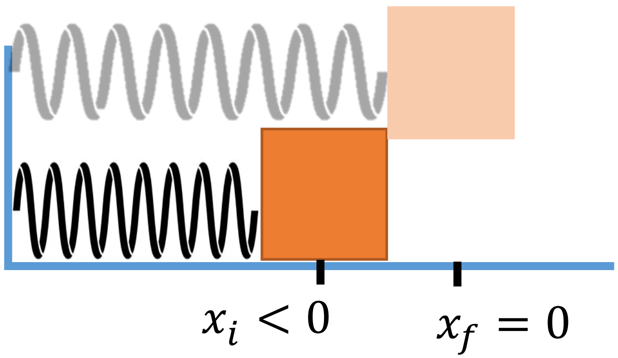
$$W = -\left(\frac{1}{2}\,k\,x_f^2 - \frac{1}{2}\,k\,x_i^2\right) = -\frac{1}{2}kx_f^2 < 0\ \ per\ x_f < 0\ e\ x_f > 0$$



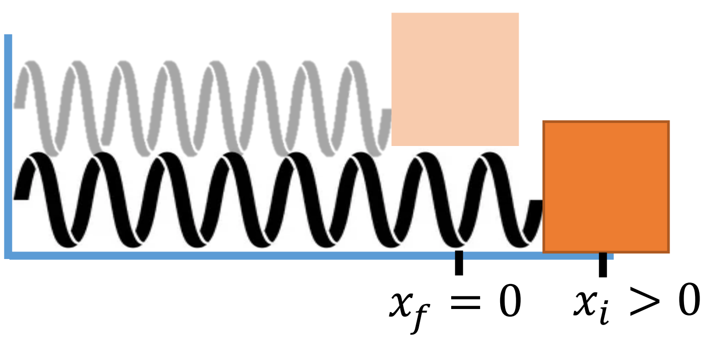
Indipendentemente che la molla venga compressa o allungata, il lavoro sarà sempre negativo (lavoro resistente). Ciò è in perfetto accordo con il modello fisico, perchè la forza elastica tende sempre ad opporsi all’elongazione della molla, in modo da ripotarla alla sua lunghezza a riposo.

Osservazioni sul lavoro della forza elastica

- Se cosideriamo il caso di una molla elongata, quanto vale il lavoro della forza elastica per riportarla nella posizione di equilibrio?



$$W = -\left(\frac{1}{2}\,k\,x_f^2 - \frac{1}{2}\,k\,x_i^2\right) = -\left(0 - \frac{1}{2}\,kx_i^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\,k\,x_i^2$$



$$W = -\left(\frac{1}{2}\,k\,x_f^2 - \frac{1}{2}\,k\,x_i^2\right) = -\left(0 - \frac{1}{2}\,k\,x_i^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\,k\,x_i^2$$

Il lavoro della forza elastica, dunque, dipende da posizione iniziale e finale e può essere negativo o positive, a seconda della condizione iniziale

Lavoro della forza di attrito radente

La forza di attrito radente (dinamico) è diretta in modo da opporsi al moto che avviene lungo il versore $\hat{u}_s$ parallelo allo spostamento $\overrightarrow{ds}$:

$$\overrightarrow{f_d} = -\mu_d N\, \hat{u}_s$$

Il lavoro compiuto dalla forza di attrito sarà:

$$\mathrm{W} = \int_{A \atop C}^{B} \overrightarrow{f_d} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{A \atop C}^{B} (-\mu_d N\, \hat{u}_s) \cdot \overrightarrow{ds} = -\mu_d \int_{A \atop C}^{B} N\, ds$$

$$per\ N\ costante$$

$$\mathrm{W} = -\mu_d\, N \int_{A \atop C}^{B} ds$$

$\int_A^B\ ds$ è la lunghezza del **percorso** da A a B, misurata lungo la traiettoria effettiva del punto materiale. **A parità di μ_d ed N, la forza di attrito compirà un lavoro diverso lungo traiettorie diverse che congiungono le posizioni iniziale e finale.**

Il lavoro della forza di attrito è sempre negativo, cioè è un **lavoro resistente.**

Potenza

Definiamo **potenza** la rapidità con la quale viene sviluppato (variazione del) lavoro nel tempo. Definiamo **potenza media**

$$\overline{P} = < P > = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Mentre definiamo **potenza istantanea**

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{ds}\right)$$

Per $\overrightarrow{F}$ costante:

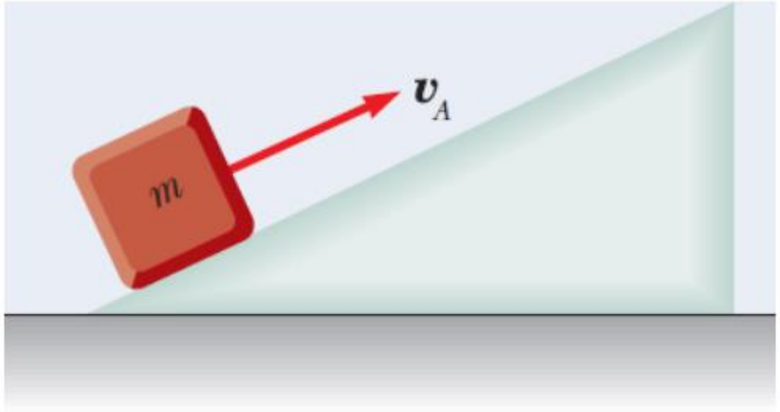
$$P = \overrightarrow{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}$$

Tale grandezza risulta importante per valutare le prestazioni di un dispositivo o macchina che fornisce lavoro.

La potenza si misura in Watt (W): $1W = \frac{1J}{1s}$

Problema 4.1

Una cassa di m=15 kg è trascinata in salita con una fune su una rampa liscia a velocità costante, per una distanza d= 5.7 m, fino ad una altezza h=2.5 m rispetto al punto di partenza, ed infine si arresta. Calcolare il lavoro svolto dalla forza peso.



Soluzione:

$$W_P = -367.5\ J$$

Problema 4.2

Un blocco di massa m=0,4 kg scivola, con velocità costante v=0,5 m/s, su un piano orizzontale privo di attrito. Il blocco si arresta comprimendo una molla collocata sul suo percorso. Se la costante elastica è k=750 N/m di quanto viene compressa la molla?

Soluzione:

$$\Delta x = 1.15\ 10^{-2}\ m$$

Problema 4.3

Un blocco di massa m=6 kg è tirato da fermo da una forza F=12 N. Calcolare la velocità del blocco dopo aver percorso un tratto di s=3 m, nel caso di:

a) piano liscio

b) piano scabro, con $\mu_d = 0.15$.

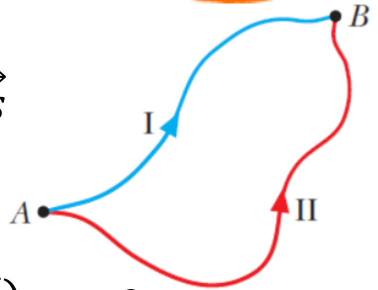
Soluzione:

a) $v_f = 3.46 \frac{m}{s}$

b) $v_f = 1.78 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Forze conservative e non conservative

Definiamo **forze conservative** le **forze il cui lavoro compiuto per spostare un punto materiale da una posizione A ad una posizione B non dipende dal percorso seguito** (ad esempio, la forza peso e la forza elastica):



$$\int_A^B \left(\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{ds}\right)_I = \int_A^B \left(\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{ds}\right)_{II} = \int_A^B \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{ds} = -\int_B^A \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{ds}$$

$$\Rightarrow \int_A^B \left(\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{ds}\right)_I + \int_B^A \left(\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{ds}\right)_{II} = \int_A^B \left(\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{ds}\right)_I - \int_A^B \left(\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{ds}\right)_{II} = 0$$

Se il percorso è chiuso, ovvero se le posizioni iniziale e finale coincidono, **il lavoro sarà nullo**:

$$\mathrm{W} = 0 \iff \oint \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{ds} = 0$$

Riassumendo, se una forza è conservativa:

- W non dipende dal percorso
- $\mathrm{W} = -\Delta E_P$ (l'espressione dell'energia potenziale dipende dalla particolare forza)
- $\mathrm{W} = 0$ su un percorso chiuso

Le forze per cui il lavoro dipende dal percorso sono **forze non conservative.** Una classe di forze non conservative sono le **forze di attrito**, dette **forze dissipative**.

Conservazione dell'energia meccanica

Definiamo **Energia meccanica** $\boldsymbol{E_m}$ di un sistema la somma della sua energia cinetica e dell'energia potenziale eventualmente posseduta da tutti i suoi componenti.

$$E_m = E_p + E_k$$

Vediamo cosa accade ad un punto materiale soggetto solo a forze conservative:

1) dal teorema dell'energia cinetica abbiamo che $W = \Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i}$

2) dalla definizione di forze conservative abbiamo che $W = -\Delta E_p = E_{p,i} - E_{p,f}$

Eguagliando le due relazioni per forze conservative:

$$\Delta E_k = -\Delta E_p \quad \Longrightarrow \quad \Delta\left(E_p + E_k\right) = 0$$

Ovvero, **la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un punto materiale che si muove sotto l'azione di forze conservative resta costante**:

$$E_{p,i} - E_{p,f} = E_{k,f} - E_{k,i} \Longrightarrow \boldsymbol{E_{p,f} + E_{k,f} = E_{p,i} + E_{k,i}} \Longrightarrow$$

$$E_{mf} = E_{mi} = costante$$

L'energia meccanica si conserva in presenza di forze conservative (principio di conservazione dell'energia meccanica)!

Conservazione dell'energia meccanica

Pertanto, in presenza di forze conservative, il lavoro ottenuto a spese della diminuzione di energia potenziale causa un aumento dell'energia cinetica e viceversa. Ovvero, durante il moto si ha una trasformazione da una forma di energia all'altra, tramite il lavoro compiuto o assorbito, ma l'energia meccanica totale non varia.

Nel caso più generale, tuttavia, vi è l'azione sia di forze conservative, sia di forze non conservative. Possiamo dire che il lavoro complessivo è dato dalla somma dei lavori compiuti dai due tipi di forze:

$$W_{tot} = W_c + W_{nc}$$

Per il teorema dell'energia cinetica: $W_{tot} = \Delta E_k$

$$\Longrightarrow W_{nc} = \Delta E_k - W_c = \Delta E_k - \left(-\Delta E_p\right) = \Delta\left(E_k + E_p\right) = \Delta E_m$$

In presenza di forze non conservative, l'energia meccanica NON si conserva e la sua variazione è pari al lavoro delle forze non conservative.

Conservazione dell'energia

Nel caso di forze di attrito, $W_{diss} < 0$, ovvero l'energia meccanica diminuisce e viene convertita in energia interna (calore) del sistema.

In questo caso l'energia meccanica viene parzialmente convertita in calore dovuto, ad esempio, allo strofinamento con la superficie di contatto e l'energia meccanica diminuisce durante il processo.

Se consideriamo tutte le forme di energia possibili e consideriamo l'energia totale E di un sistema, essa può variare solo se viene trasferita da o verso l'esterno del sistema stesso. In sostanza, dato un sistema, il lavoro compiuto da una forza esterna è

$$W = \Delta E_{mecc} + \Delta E_{int} + \Delta E_{cal}$$

e se il sistema è isolato l'energia totale del sistema si conserva:

$$\Delta E_{mecc} + \Delta E_{int} + \Delta E_{cal} = 0$$

avendo chiamato con ΔE_{int} l'energia dovuta alle forze interne al sistema, ΔE_{cal} l'energia termica prodotta dagli attriti (termodinamica).

Problema 4.4

Un oggetto di massa m= 2 kg, partendo da fermo, scivola su un piano inclinato privo di attrito da una altezza h = 8.5 m. Calcolare la velocità che possiede l'oggetto quando tocca terra.

Soluzione:

$$v = 12{,}9 \text{ m/s}$$

Problema 4.5

Un corpo di massa m = 200 kg entra con velocità $v_A = 20\ m/s$ in una guida circolare liscia di raggio R= 5 m. Calcolare:

a) La velocità nei punti B, C

b) La reazione della guida nei punti A, B, C

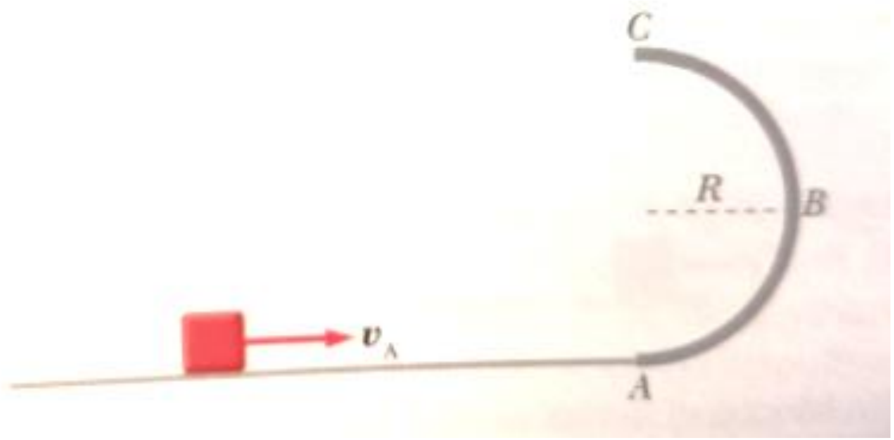
c) Il valore minimo di v_A affinchè il corpo arrivi nel punto C mantenendo contatto con la guida

Soluzione:

a) $v_B = 17{,}4 \frac{m}{s} \uparrow; v_C = 14{,}3 \frac{m}{s} \leftarrow$

b) $N_A = 18 \cdot 10^3\ N \uparrow; N_B = 12{,}1 \cdot 10^3\ N \leftarrow; N_C = 6{,}2 \cdot 10^3\ N \downarrow$

c) $v_{Amin} = 17{,}5 \frac{m}{s}$



Problema 4.6

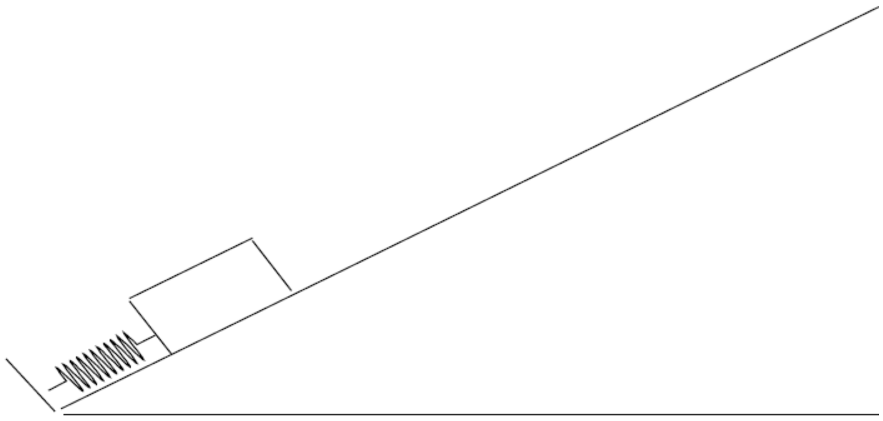
Una massa m = 2 kg scivola su una superficie orizzontale liscia con v_1 = 4 m/s.
Essa va a finire contro una molla comprimendola fino a fermarsi completamente. Dal punto in cui comincia a comprimere la molla in poi, vi è un attrito di modulo 15 N e la costante elastica della molla è k=10000 N/m.
Di quanto si è compressa la molla?

Soluzione:

$$\Delta x = 0.055\, m = 5.5\, cm$$

Problema 4.7

Un blocco di massa m=2 kg è poggiato contro una molla sul piano inclinato in figura, con pendenza 30° e privo di attrito. La molla, avente costante elastica k=19.6 N/cm è dapprima compressa di 20 cm. Quando la molla viene lasciata libera, il blocco si allontana di una distanza l sino a fermarsi. Determinare il valore di l.



Soluzione:

$$l = 4\ m$$

Problema 4.8

Una bambina che pesa 267 N scende per uno scivolo lungo 6.1 m che forma un angolo di 20° con il piano orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico è 0.1.

(a) Trovare quanta energia è dissipata in energia termica dalla forza di attrito.

(b) Quale sarà la sua velocità all'arrivo se parte dall'alto con una velocità di 0.457 m/s?

Soluzione:

a) $W_{diss} = -153\ J$

b) $v_f \ = 5.47 \frac{m}{s}$

Problema 4.9

Un punto materiale di massa m è sospeso tramite un filo verticale ed è collegato al suolo da una molla di costante elastica k=70 N/m, che è in condizioni di riposo. La tensione del filo è 4.9 N. Si taglia il filo. Calcolare:

a) la massima distanza percorsa dal punto

b) la posizione in cui si raggiunge la massima velocità

c) la massima velocità raggiunta

Soluzione:

a) $x = 0.14\ m$

b) $x = 7\ cm$

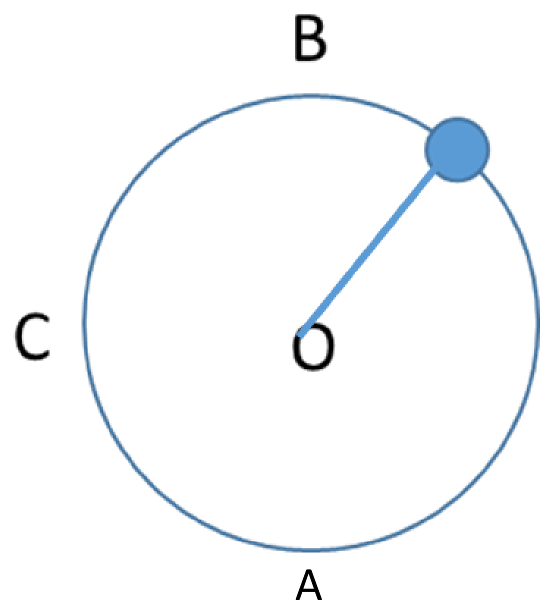
c) $v = 0.83\,\frac{m}{s}$

Problema 4.10

Un punto materiale di massa m = 2 kg collegato ad un punto O da un filo, descrive una circonferenza di raggio R posta in un piano verticale.

La tensione del filo nel punto A è $T_A = 137{,}2\ N$ e la velocità nel punto B è $v_B = 4{,}73\,\frac{m}{s}$.

Calcolare: a) il valore di R, b) la tensione del filo nel punto C.



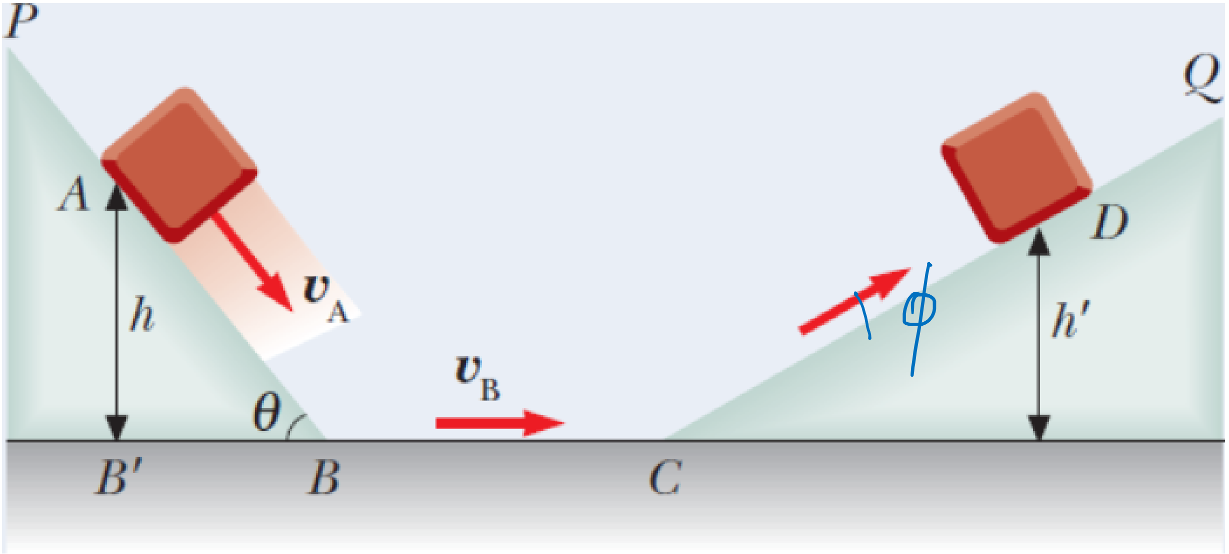
Soluzione:
a) $\mathrm{R} = 1.14\ m$
b) $\mathrm{T} = 78{,}4\ N\ \longrightarrow$

Problema 4.11

Consideriamo un punto materiale che può muoversi lungo il piano inclinato PB, il piano orizzontale BC e il piano inclinato CQ; tutti i piani sono lisci.

a) Se si abbandona il punto in A (ad una altezza h) con velocità iniziale nulla, determinare la quota del punto D in cui si ferma il punto materiale.

b) Cosa cambia se il punto materiale possiede una velocità iniziale in A non nulla?



Momento di un vettore - Appendice C

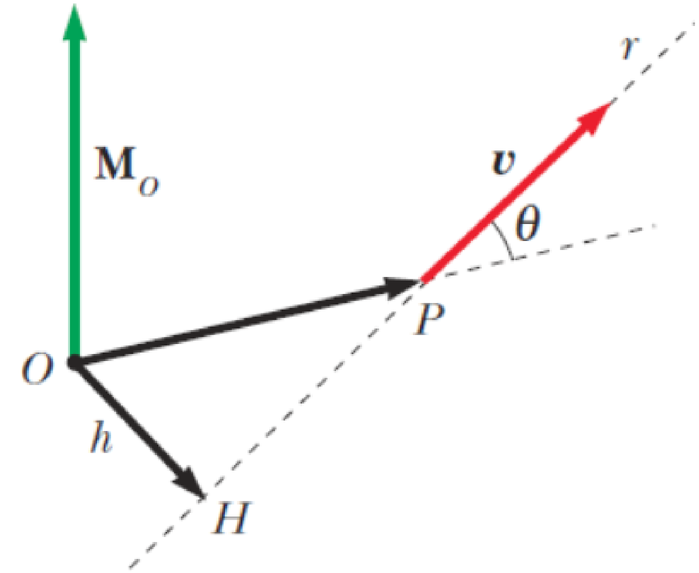
Se $\vec{v}$ è un vettore applicato nel punto P, si definisce **momento del vettore $\vec{v}$ rispetto ad un punto O** (detto polo) il vettore

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{v}$$

che risulta ortogonale al piano definito dai vettori $\overrightarrow{OP}$ e $\vec{v}$ e ha modulo

$$|\vec{M}_O| = |\overrightarrow{OP}|\, v \,\sin\Theta = \left(|\overrightarrow{OP}| \,\sin\Theta\right) v = |OH|\, v = h\, v$$

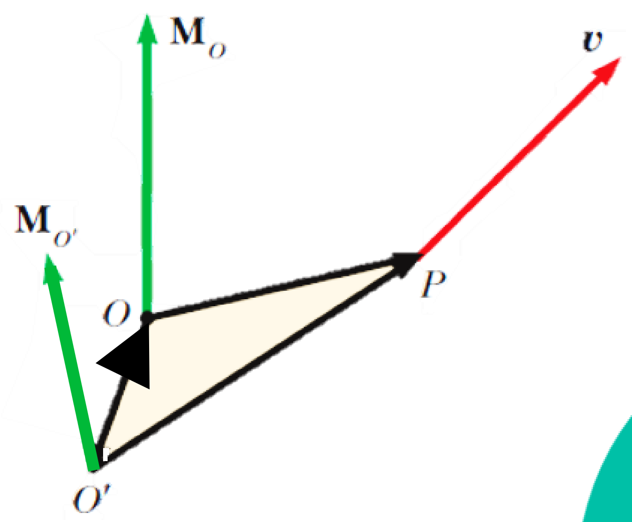
$|OH| = h$ è la distanza di O dalla **retta d'azione** (di applicazione) di $\vec{v}$ ed è detto **braccio** di $\vec{v}$ rispetto ad O.



Momento di un vettore - Appendice C

Comunque si muova il vettore $\vec{v}$ lungo la retta d'azione HP, il vettore $\vec{M}_O$ non cambia. Se, invece, si cambia il **polo** cambia anche il momento.
Infatti se scegliamo un nuovo polo O' si avrà:
($\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}$)

$$\vec{M}_{O'} = \overrightarrow{O'P} \times \vec{v} = \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}\right) \times \vec{v} = \overrightarrow{O'O} \times \vec{v} + \overrightarrow{OP} \times \vec{v}$$
$$= \overrightarrow{O'O} \times \vec{v} + \vec{M}_O$$

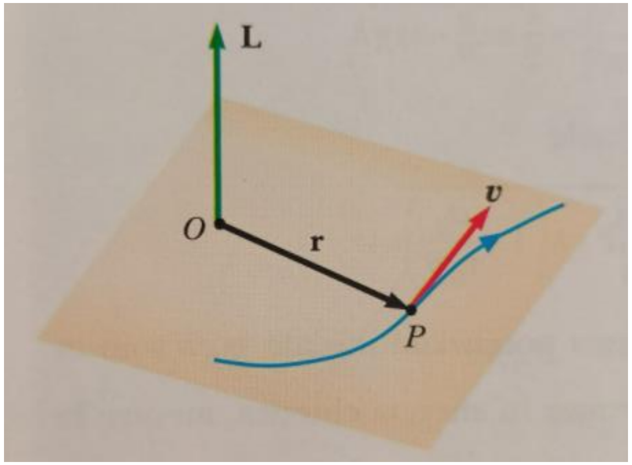


Momento angolare e Momento della Forza

Momento angolare

Definiamo come **momento angolare rispetto al polo O** il **momento del vettore quantità di moto**:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\,\vec{v}$$



dove $\vec{r}$ è il vettore che congiunge il polo O a P.
Se si cambia polo si avrà:

$$\vec{L}_{O'} = \vec{L}_{O} + \overrightarrow{O'O} \times m\,\vec{v}$$

Momento della Forza

Analogamente, il **momento della Forza** è definito come

$$\vec{M}_{O} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Se si cambia polo si avrà:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_{O} + \overrightarrow{O'O} \times \vec{F}$$

Osserviamo che, nel caso di più forze, la somma dei momenti risulta pari al momento della risultante delle forze $\vec{R}$:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r} \times \vec{F}_i = \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{r} \times \vec{R}$$

Teorema del momento angolare

Deriviamo rispetto al tempo il momento angolare $\vec{L}$ di un punto materiale P:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\,\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\,\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

dove $\vec{r}$ è il vettore che congiunge il polo O a P.

Se il polo è fermo nel sistema di riferimento in cui avviene il moto, allora $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times m\,\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

=0 perché $\vec{v} // \vec{v}$

= $\vec{a}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times m\,\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

Ovvero vale il **teorema del Momento angolare** per un punto materiale: la derivata del momento angolare rispetto al tempo è pari al momento della forza, entrambi calcolati rispetto al medesimo polo fisso in un sistema di riferimento inerziale: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

Se $\vec{M} = 0$ ($\Leftrightarrow \vec{F} = 0 \vee \vec{r} // \vec{F}$) $\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{L} = costante$

Il momento angolare di un punto materiale rimane costante nel tempo se il momento delle forze è nullo.

Teorema del momento dell'impulso

Osserviamo che il teorema del momento angolare può essere riformulato asserendo che l'azione di una forza per un determinato intervallo di tempo determina una variazione del momento angolare

$$\int_0^t \overrightarrow{M}\, dt = \int_{L_{in}}^{L_{fin}} d\overrightarrow{L} = L_{fin} - L_{in} = \overrightarrow{\Delta L}$$

Quando la forza $\overrightarrow{F}$ è applicata per un tempo molto breve, $\overrightarrow{r}$ può essere considerato costante, pertanto

$$\int_0^t \overrightarrow{M}\, dt = \int_0^t \left(\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}\right) dt = \overrightarrow{r} \times \int_0^t \overrightarrow{F}\, dt = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{J} = \overrightarrow{\Delta L}$$

Quest'ultimo risultato è detto **teorema del momento dell'impulso**: l<u>a variazione del momento angolare è uguale al momento dell'impulso applicato al punto.</u>

Lavoro in un moto circolare

Nel caso del moto circolare, possiamo esprimere il lavoro in termini di integrale del momento della forza lungo uno spostamento angolare:
(noto $ds = r\,d\theta$)

$$W = \int_A^B F_T\,ds = \int_{\theta_A}^{\theta_B} F_T\,r\,d\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} M\,d\theta$$

(la componente $\overrightarrow{F_C}$ ha momento nullo rispetto al centro della circonferenza perché parallela al raggio vettore $\vec{r}$)

Unità di misura dei momenti:
- Momento angolare: $kg \cdot m^2\ s^{-1} = N\,m\,s$
- Momento della forza: $N\,m$ (nonostante dimensionalmente sia identica al Joule, fisicamente lavoro e momento hanno significato fisico diverso, pertanto le unità di misura restano espresse diversamente)