Fisica Generale – Modulo A
Classe B

MOTI RELATIVI

Dott.ssa **Marilena Giglio**

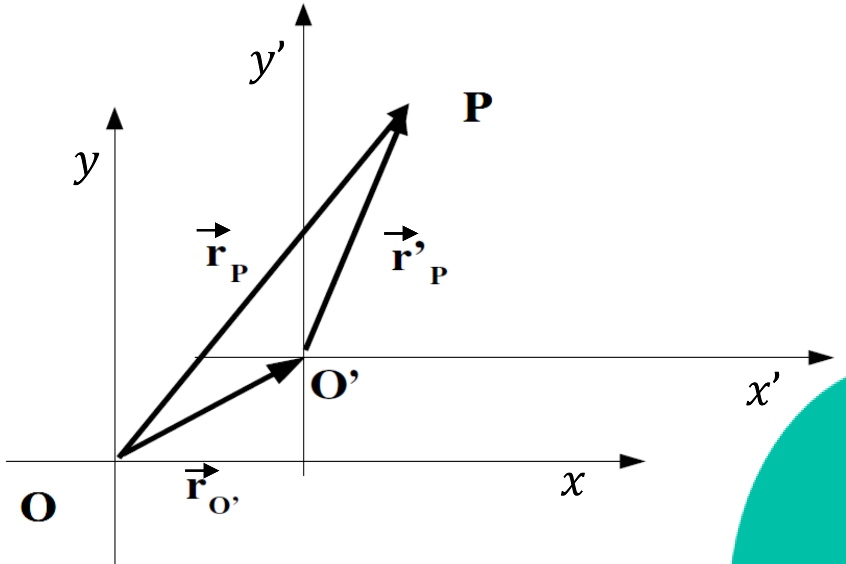
marilena.giglio@poliba.it

Moti relativi

Consideriamo un punto P nello spazio e indichiamo con:

- O l'origine di un **sistema di riferimento fisso** xyz. In questo sistema di riferimento P avrà coordinate $P(x, y, z)$
- O' l'origine di un **sistema di riferimento mobile**x'y'z'. In questo sistema di riferimento P avrà coordinate $P(x', y', z')$
- $\overrightarrow{OP} = \vec{r}_P =$ il raggio vettore che individua P rispetto ad O (nel s.d.r. fisso)
- $\overrightarrow{OO'} = \vec{r}_{O'} = x_{O'}\,\hat{i} + y_{O'}\hat{j} + z_{O'}\hat{k}$ il vettore che individua O' rispetto ad O (nel s.d.r. fisso)
- $\overrightarrow{O'P} = \vec{r}\,'_P = x'\,\hat{i}' + y'\,\hat{j}' + z'\,\hat{k}'$ il vettore che individua P rispetto ad O' (nel s.d.r. mobile)

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$
$$\vec{r}_P = \vec{r}_{O'} + \vec{r}\,'_P$$



Teorema delle velocità relative

Supponiamo che il sistema mobile sia in moto roto-traslatorio rispetto al sistema fisso:

- l'origine del sistema di riferimento mobile si muove con velocità $\vec{v}_{O'}$ rispetto al sistema di riferimento fisso.
- gli assi cartesiani del sistema mobile ruotano rispetto al sistema fisso con velocità angolare ω.

Si dimostra il **teorema delle velocità relative**: $\vec{v} = \overrightarrow{v_{O'}} + \overrightarrow{v'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r'}$

Dove il termine correttivo che permette di passare da $\vec{v}$ a $\overrightarrow{v'}$ è detto **velocità di trascinamento**: $\overrightarrow{v_t} = \vec{v} - \overrightarrow{v'} = \overrightarrow{v_{O'}} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r'} \implies \vec{v} = \overrightarrow{v'} + \overrightarrow{v_t}$

• Se il sistema mobile non ruota rispetto a quello fisso ($\omega = 0$), si parla di moto di **trascinamento traslatorio** e

$$\overrightarrow{v_t} = \overrightarrow{v_{O'}} \quad \text{e} \quad \vec{v} = \overrightarrow{v_{O'}} + \overrightarrow{v'}$$

• Se il sistema mobile ruota ma non trasla ($\overrightarrow{v_{O'}} = 0$), si parla di moto di **trascinamento rotatorio** e

$$\overrightarrow{v_t} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{r'} \quad \text{e} \quad \vec{v} = \overrightarrow{v'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r'}$$

Il caso generale si può pensare come una sovrapposizione (somma) di questi due.

Teorema delle accelerazione relative

Indichiamo con

- $\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}$ l'accelerazione del punto P rispetto al sistema fisso
- $\overrightarrow{a'}$ l'accelerazione del punto P rispetto al sistema mobile O'
- $\overrightarrow{a_{O'}} = \frac{d\overrightarrow{v_{O'}}}{dt}$ l'accelerazione del sistema mobile rispetto ad O

Si dimostra il **teorema delle accelerazioni relative**:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a'} + \overrightarrow{a_{O'}} + \overrightarrow{\omega} \times \left(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'}\right) + \frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{r'} + 2\,\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v'}$$

Dove chiamiamo **accelerazione di trascinamento** il termine

$$\overrightarrow{a_t} = \overrightarrow{a_{O'}} + \overrightarrow{\omega} \times \left(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'}\right) + \frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{r'}$$

E **accelerazione di Coriolis** il termine che dipende dal moto del punto P rispetto al sistema mobile (espresso da $\overrightarrow{v'}$)

$$\overrightarrow{a_c} = 2\,\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v'}$$

Quindi in generale

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a'} + \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_c}$$

Teorema delle accelerazione relative

$$\vec{a} = \vec{a'} + \overrightarrow{a_{O'}} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r'}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v'}$$

- Se il sistema mobile non ruota rispetto a quello fisso ($\omega = 0$) si parla di moto di **trascinamento traslatorio** e

$$\vec{a} = \vec{a'} + \overrightarrow{a_{O'}}$$

- Se il sistema mobile ruota ma non trasla ($\overrightarrow{v_{O'}} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{a_{O'}} = 0$) si parla di moto di **trascinamento rotatorio** e avremo che

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r'}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v'}$$

Concludiamo che la descrizione del moto di uno stesso punto può essere diversa se visto da due sistemi di riferimento diversi.
Saranno quindi diverse anche le forze che vengono ipotizzate per spiegare il moto.

Sistemi di riferimento inerziali – Relatività galileiana

I sistemi di riferimento inerziali sono quelli per i quali vale rigorosamente la **legge d'inerzia**.

Se consideriamo un altro sistema di riferimento che si muove rispetto ad uno inerziale con moto rettilineo uniforme $\overrightarrow{v_{O'}} = costante$ si ha

$$\vec{\omega} = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{a_{O'}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a} = \overrightarrow{a'}$$

Segue che, **definito un sistema inerziale, tutti i sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto al primo sono anch'essi inerziali**. Pertanto, se nel sistema di riferimento inerziale con origine O un punto materiale possiede un'accelerazione $\vec{a}$ per effetto dell'azione della forza $\vec{F} = m\vec{a}$, nel sistema di riferimento inerziale con origine O' il punto si muove con la stessa accelerazione $\vec{a}$ per azione della medesima forza $\vec{F}$.

Relatività galileiana

Poiché la seconda legge della dinamica si esprime nella stessa maniera in tutti i sistemi di riferimento inerziali, non è possibile stabilire se un sistema è in moto o in quiete (non ha senso cioè il concetto di moto assoluto). Tale situazione fisica viene descritta con il termine di relatività galileiana.

Sistemi di riferimento NON inerziali

Definiamo sistema di riferimento non inerziale, un sistema in moto accelerato $\overrightarrow{a_{O'}} \neq 0$ oppure in rotazione $\overrightarrow{\omega} \neq 0$, o entrambi, rispetto ad un sistema di riferimento inerziale.

In tale sistema non vale il principio di inerzia e neanche la legge di Newton. Infatti, se nel sistema di riferimento inerziale è esercitata una forza vera $\overrightarrow{F} = m\,\overrightarrow{a}$, nel sistema non inerziale sarà esercitata una forza

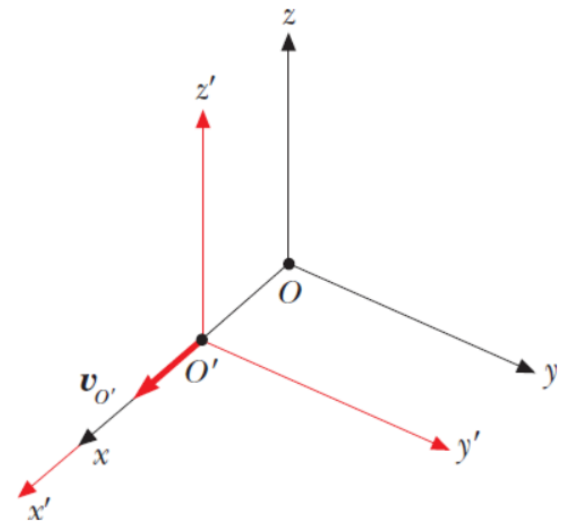
$$\overrightarrow{F'} = m\,\overrightarrow{a'} = m\,\overrightarrow{a} - m\,\overrightarrow{a_t} - m\,\overrightarrow{a_c}$$

data dalla somma (vettoriale) della forza vera e delle **forze apparenti.** Tali forze sono proporzionali alla massa (ragione per cui vengono anche dette **forze inerziali**), non derivano da interazioni fondamentali e NON esistono nei sistemi di rferimento inerziali.

$$\overrightarrow{F}' = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}_{trascinamento} + \overrightarrow{F}_{Coriolis} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}_{apparenti}$$

Moto di trascinamento traslatorio rettilineo

Supponiamo, ad esempio, che O' sia in moto rettilineo rispetto ad O ($\vec{\omega} = 0$) lungo l'asse x (che coincide con l'asse x').



- Se il moto è rettilineo uniforme ($\overrightarrow{a_{O'}} = 0$), i due sistemi sono entrambi inerziali e

$$\vec{a} = \vec{a'}$$
$$\vec{v} = \vec{v'} + \overrightarrow{v_{O'}}$$
$$\vec{r} = \vec{r'} + \overrightarrow{v_{O'}}\, t$$

Queste relazioni si chiamano **trasformazioni galileiane**.

- Se il moto è rettilineo uniformemente accelerato ($\overrightarrow{a_{O'}} \neq 0$), O' diventa un sistema di riferimento non inerziale, le cui trasformazioni sono:

$$\vec{a} = \vec{a'} + \overrightarrow{a_{O'}} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \vec{a'} &= \vec{a} - \overrightarrow{a_{O'}} \\ \vec{v'} &= \vec{v} - \overrightarrow{v_{O'}} \\ \vec{r'} &= \vec{r} - \overrightarrow{r_{O'}} \end{aligned}$$

Moto di trascinamento rotatorio uniforme (cenni)

Nel caso in cui O' ruoti rispetto ad O con moto circolare uniforme, supponendo per semplicità che i due sistemi abbiano origine coincidente ($\vec{r} = \vec{r'}$)

$$\overrightarrow{v_{O'}} = 0 \qquad \overrightarrow{a_{O'}} = 0 \qquad \vec{\omega} = costante$$

per cui si ottengono:

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$
$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v'}$$

Poiché

$$m\,\vec{a'} = m\,\vec{a} - m\,\vec{a_t} - m\,\vec{a_c} = \vec{F} - m\,\vec{a_t} - m\,\vec{a_c}$$

Segue che

$$\vec{F'} = \vec{F} + \vec{F}_{centrifuga} + \vec{F}_{Coriolis}$$

con

$$\vec{F}_{centrifuga} = -m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$
$$\vec{F}_{Coriolis} = -2\,m\,\vec{\omega} \times \vec{v'}$$

Moto rispetto alla Terra

Un sistema di riferimento inerziale è quello con origine nel centro di massa del sistema solare e con assi orientati verso le stelle lontane che si possono ragionevolmente ritenere fisse.
Generalmente, però, le descrizioni dei moti vengono fatte rispetto alla Terra, che non è un riferimento inerziale in quanto ruota intorno al proprio asse con T=24h=86400s

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7.29 \cdot 10^{-5}\, rad/s$$

Trascuriamo il moto della Terra intorno al Sole che ha una ω più piccola.
L'accelerazione di un corpo vicino la Terra utilizzando le trasformazioni relative diventa

$$\overrightarrow{g_O} = \overrightarrow{g'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\,\vec{\omega} \times \overrightarrow{v'}$$

con $\overrightarrow{g_O}$ l'accelerazione di gravità nel sistema inerziale. Per cui l'accelerazione riscontrata sulla Terra è

$$\overrightarrow{g'} = \overrightarrow{g_O} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\,\vec{\omega} \times \overrightarrow{v'}$$

il cui effetto è una diminuzione di $\overrightarrow{g_O}$ con la latitudine e uno scostamento dalla verticale (dell'ordine di 0.1°) dovuto al termine centrifugo. La seconda correzione è dovuta al termine di Coriolis e dipende dalla velocità del corpo relativa alla Terra.