Fisica Generale – Modulo A

Classe B

DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

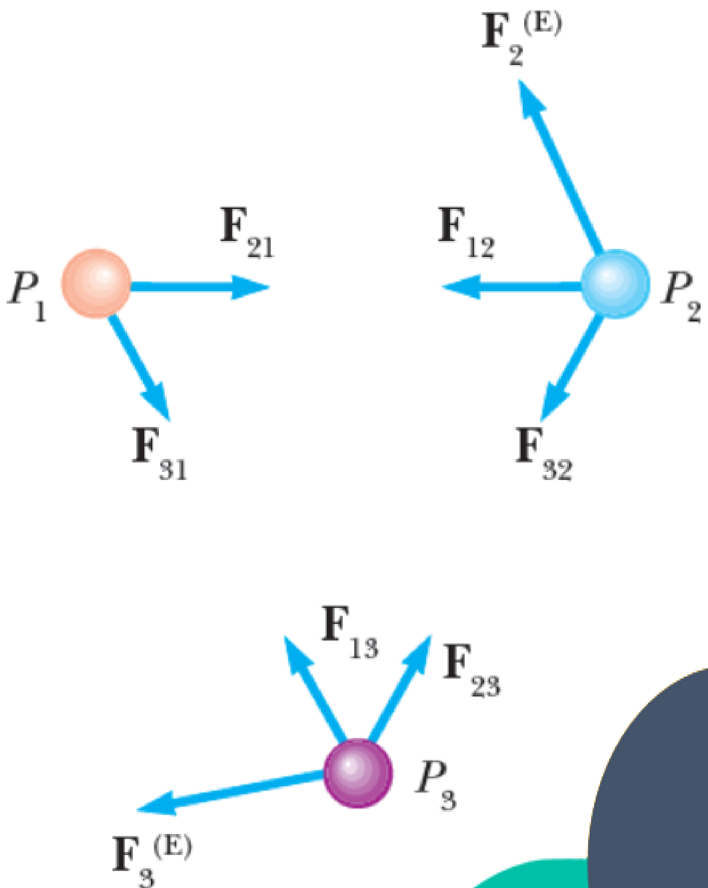
Dott.ssa **Marilena Giglio**

marilena.giglio@poliba.it

Sistemi di punti, forze interne ed esterne

Consideriamo n punti materiali che interagiscono tra loro e con il resto dell'universo.
Possiamo pensare alla forza $\overrightarrow{F_i}$ agente sull'i-esimo punto come alla **risultante** delle **forze esterne** agenti sul punto e di quelle **interne** (esercitate dagli altri $n-1$ punti) al sistema:

$$\overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{F_i}^{(E)} + \overrightarrow{F_i}^{(I)}$$



Osserviamo che se l'i-esimo punto esercita una forza $\overrightarrow{F_{ij}}$ sul j-esimo, il j-esimo punto reagirà esercitando sull'i-esimo una forza $\overrightarrow{F_{ji}} = -\overrightarrow{F_{ij}}$, per principio di azione e reazione. Pertanto possiamo affermare che le forze interne sono dirette lungo le congiungenti le coppie di punti (attrattive o repulsive) e sono a 2 a 2 uguali e opposte. Per cui la risultante delle forze interne al sistema è nulla:

$$\vec{R}^{int} = \sum_i \overrightarrow{F_i}^{(I)} = 0$$

Sistemi di punti, forze interne ed esterne

Per ciascun punto P_i avente massa m_i e sottoposto alla forza $\overrightarrow{F_i}$, indichiamo:

Posizione $\overrightarrow{r_i}$
Velocità $\overrightarrow{v_i}$
Accelerazione $\overrightarrow{a_i}$

Quantità di moto $\overrightarrow{p_i}$
Momento angolare (rispetto ad un polo O) $\overrightarrow{L_i}$
Energia cinetica $E_{k,i} = \frac{1}{2} m_i \overrightarrow{v_i}$

Per il sistema di punti allora definiamo le **grandezze meccaniche totali del sistema**

Quantità si moto totale $\overrightarrow{P} = \sum_i \overrightarrow{p_i} = \sum_i m_i \overrightarrow{v_i}$

Momento angolare totale (rispetto al polo O)

$$\overrightarrow{L} = \sum_i \overrightarrow{L_i} = \sum_i \overrightarrow{r_i} \times m_i \overrightarrow{v_i}$$

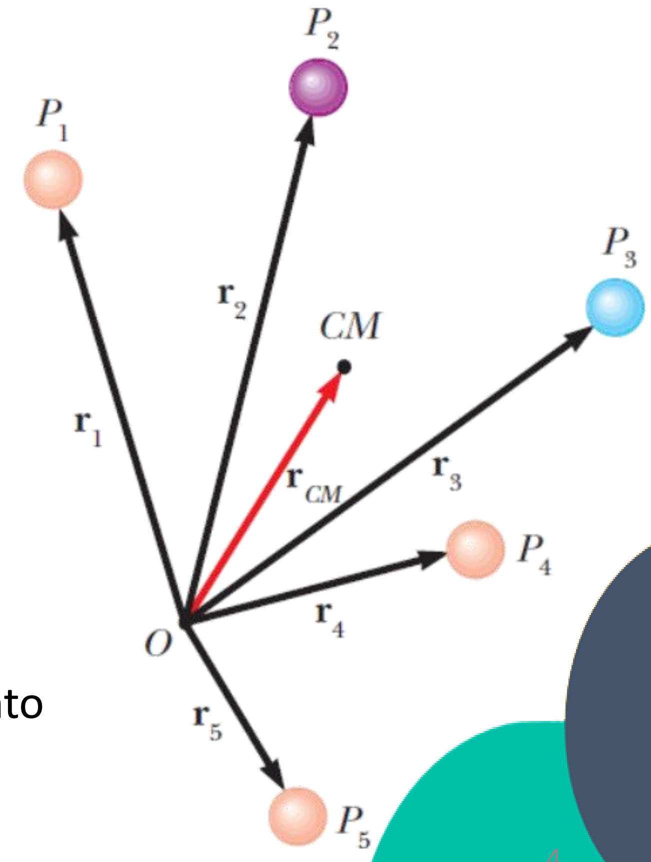
Energia cinetica totale

$$E_k = \sum_i E_{k,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \, {v_i}^2$$

Centro di Massa di un sistema di punti

Definiamo il **Centro di Massa** (CM) di un sistema di N punti quel punto geometrico la cui posizione è definita da una media pesata delle posizioni di ciascun punto materiale del sistema.

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r_i}}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2} + \cdots + m_N \vec{r_N}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}$$



Che proiettando sugli assi diventano le coordinate del CM:

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$
$$y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$$
$$z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

La posizione del CM non dipende dal sistema di riferimento (mentre le sue coordinate sì).

Centro di Massa di un sistema di punti

Come si interpreta il C.M.?

Consideriamo un sistema di 2 punti materiali e scegliamo un riferimento coincidente con una delle due masse (ad es. $m_1 \Rightarrow x_1 = 0$).

In questo caso $x_{CM} = \frac{m_2}{m_1+m_2} x_2 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq x_{CM} \leq x_2$

Pertanto si possono avere i seguenti casi:

se $m_1 \gg m_2 \quad \Rightarrow$ (oppure $m_1 \longrightarrow \infty$) $\Rightarrow x_{CM} \longrightarrow x_1 = 0$

se $m_1 \ll m_2 \quad \Rightarrow$ (oppure $m_2 \rightarrow 0$) $\Rightarrow x_{CM} \longrightarrow x_2$

se $m_1 = m_2 \quad \Rightarrow x_{CM} \longrightarrow \frac{x_2}{2}$

In definitiva, il centro di massa tende a disporsi dove vi è più concentrazione di massa nel sistema di punti materiali.

Velocità ed accelerazione per i sistemi di punti materiali

Se i punti del sistema sono in movimento, la velocità del CM è:

$$\overrightarrow{v_{CM}} = \frac{d\overrightarrow{r_{CM}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i \ m_i\overrightarrow{r_i}}{\sum_i \ m_i}\right) = \frac{\sum_i \ m_i \frac{d\overrightarrow{r_i}}{dt}}{\sum_i \ m_i} = \frac{\sum_i \ m_i\overrightarrow{v_i}}{\sum_i \ m_i} = \frac{\sum_i \overrightarrow{p_i}}{\sum_i m_i} = \frac{\overrightarrow{P}}{m}$$

Con $\overrightarrow{P}$ la quantità di moto totale del sistema e *m* la massa totale del sistema.

Quindi, **la quantità di moto totale del sistema è data dalla quantità di moto del CM** (equivalente ad un punto materiale di massa *m* , velocità $\overrightarrow{v_{CM}}$ e posizione $\overrightarrow{r_{CM}}$):

$$\overrightarrow{P} = m\,\overrightarrow{v_{CM}}$$

Analogamente per l'accelerazione del CM, si ha:

$$\overrightarrow{a_{CM}} = \frac{d\overrightarrow{v_{CM}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i \ m_i\overrightarrow{v_i}}{\sum_i \ m_i}\right) = \frac{\sum_i \ m_i \frac{d\overrightarrow{v_i}}{dt}}{\sum_i \ m_i} = \frac{\sum_i \ m_i\overrightarrow{a_i}}{\sum_i \ m_i} = \frac{\sum_i \ m_i\overrightarrow{a_i}}{m}$$

$$\Rightarrow m\,\overrightarrow{a_{CM}} = \sum_i m_i\overrightarrow{a_i}$$

Teorema del moto del centro di massa

Se il sistemi di riferimento è inerziale, $m_i\vec{a_i} = \vec{F_i} = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}$

$$\Rightarrow m\,\overrightarrow{a_{CM}} = \sum_i m_i\vec{a_i} = \sum_i \left(\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}\right) = \sum_i \vec{F}_i^{(E)} + \sum_i \vec{F}_i^{(I)} = \vec{R}^{(E)} + \vec{R}^{(I)}$$

Dal momento che la risultante delle forze interne è nulla $\vec{R}^{(I)} = 0$, si ottiene

$$\vec{R}^{(E)} = m\,\overrightarrow{a_{CM}}$$

ossia il **teorema del moto del centro di massa: il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata una forza pari alla risultante delle forze esterne.**

Poiché $m\,\overrightarrow{v_{CM}} = \vec{P} \Rightarrow \vec{R}^{(E)} = m\,\overrightarrow{a_{CM}} = m\frac{d\overrightarrow{v_{CM}}}{dt} = \frac{d(\,m\,\overrightarrow{v_{CM}}\,)}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

$$\vec{R}^{(E)} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

è nota come la **prima equazione cardinale della dinamica** dei sistemi di punti: **la risultante delle forze esterne è uguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema.**

Conservazione della quantità di moto

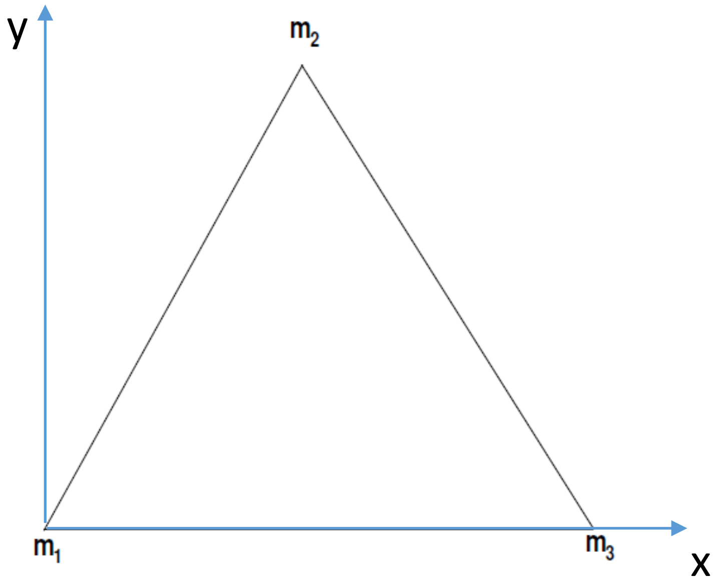
Se il sistema di punti è isolato, ovvero se la risultante delle forze esterne $\overrightarrow{R}^{(E)}$ è nulla, si ha:

$$\overrightarrow{R}^{(E)} = 0 \implies \frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = 0 \implies \overrightarrow{P} = \overrightarrow{cost}$$

Quindi se un sistema chiuso (i punti non possono uscire o entrare dal sistema) è isolato (non soggetto a forze esterne), oppure se la risulte $\overrightarrow{R}^{(E)} = 0$, allora **la quantità di moto totale del sistema si conserva**. In altre parole, la quantità di moto iniziale e finale sono le stesse $\overrightarrow{P_i} = \overrightarrow{P_f}$ e di conseguenza il CM si muove di moto rettilineo uniforme o rimane in quiete.

Problema 6.1

Tre particelle sono collegate ai vertici di un triangolo equilatero ed hanno masse m_1=1,2 kg, m_2=2,5 kg e m_3=3,4 kg. Se il lato del triangolo è $a = 1{,}4\ m$ dove si trova il C.M.?



Soluzione:
$x_{CM} = 0.92\ m$
$y_{CM} = 0.43\ m$

Problema 6.2

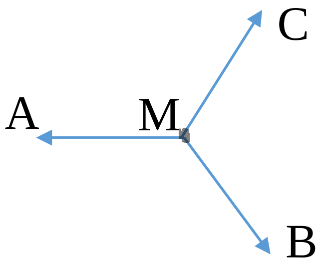
Una scatola di massa m=6 kg scivola lungo un pavimento orizzontale e privo di attrito alla velocità v =4 m/s lungo il verso positivo dell'asse x.
Improvvisamente la scatola si rompe in 2 pezzi, uno dei due di massa m_1 = 2 kg si muove lungo x e nel verso positivo, con velocità v_1 =8 m/s.
Qual è la velocità del secondo frammento?

Soluzione

$$\overrightarrow{v_2} = 2\frac{m}{s}\ \widehat{u_x}$$

Problema 6.3

Un fuoco artificiale di massa M posto sul pavimento liscio, si rompe in 3 pezzi A, B, C.
Il frammento A forma una angolo di 100° con il frammento C.
Il frammento C forma una angolo di 130° con il frammento B.
Sapendo che m_c=0.3 M ha v_c =5 m/s, qual è la velocità del frammento B, di massa m_B =0.2 M ?



Soluzione

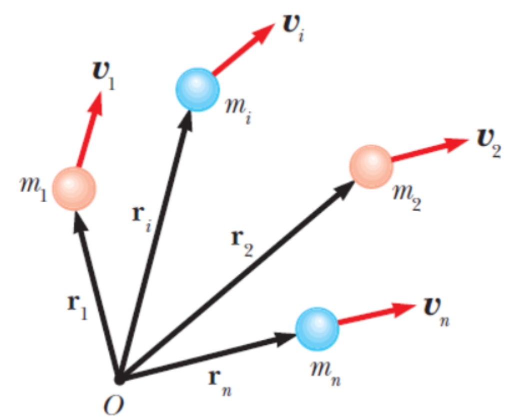
$$v_B = 9{,}64 \frac{m}{s}$$

Teorema del momento angolare

Deriviamo rispetto al tempo del momento angolare totale rispetto ad un polo O:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L_i} = \sum_i \vec{r_i} \times m_i\, \vec{v_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L_i}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{r_i}}{dt} \times m_i\, \vec{v_i} + \sum_i \vec{r_i} \times m_i \frac{d\vec{v_i}}{dt}$$

- $\frac{d\vec{r_i}}{dt} = \vec{v_i} - \vec{v_O}$ (moti relativi)
- $m_i \frac{d\vec{v_i}}{dt} = m_i \vec{a_i} = \vec{F_i} = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}$



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i (\vec{v_i} - \vec{v_O}) \times m_i\, \vec{v_i} + \sum_i \vec{r_i} \times m_i (\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)})$$

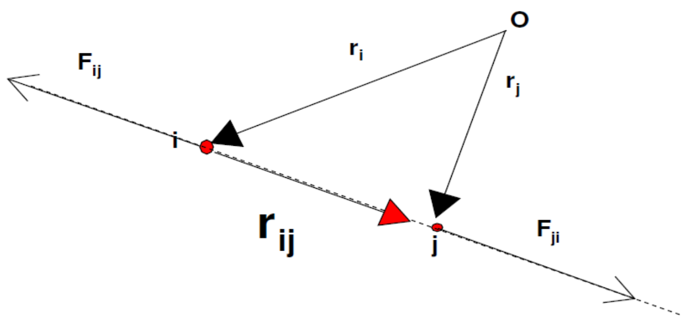
$$= \sum_i \vec{v_i} \times m_i\, \vec{v_i} + \sum_i \vec{v_O} \times m_i\, \vec{v_i} + \sum_i \vec{r_i} \times \vec{F}_i^{(E)} + \sum_i \vec{r_i} + \vec{F}_i^{(I)} =$$

$$= -\vec{v_O} \times \sum_i m_i\, \vec{v_i} + \sum_i \vec{r_i} \times \vec{F}_i^{(E)} + \sum_i \vec{r_i} + \vec{F}_i^{(I)} =$$

$$= -\vec{v_O} \times m\, \vec{v_{CM}} + \vec{M}^{(E)} + \vec{M}^{(I)}$$

Teorema del momento angolare

Consideriamo due generici punti i e j:



Le forze interne sono di azione-reazione e dirette lungo la congiungente: $\vec{F}_{j,i} = -\vec{F}_{i,j}$
Pertanto la somma dei momenti delle due forze interne è

$$\vec{M}_{i,j} = \vec{r_i} \times \vec{F}_{i,j} + \vec{r_j} \times \vec{F}_{j,i} = \vec{r_i} \times \vec{F}_{i,j} - \vec{r_j} \times \vec{F}_{i,j} = \left(\vec{r_i} - \vec{r_j} \right) \times \vec{F}_{i,j} = \overrightarrow{r_{i,j}} \times \vec{F}_{i,j}$$

Osserviamo che $\overrightarrow{r_{i,j}}$ è lungo la congiungente, quindi parallelo $\vec{F}_{i,j}$ è nullo, per cui si ottiene che ogni momento delle forze interne è a coppie di punti nullo.
Concludiamo che, **indipendentemente dal polo scelto**, quel prodotto vettoriale è nullo e

$$\vec{M}^{(I)} = \sum_{i,j} \vec{M}_{i,j} = 0$$

Teorema del momento angolare

Di conseguenza

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)} - \vec{v_0} \times m\,\overrightarrow{v_{CM}}$$

Se il termine $\vec{v_0} \times m\,\overrightarrow{v_{CM}} = 0$ allora si ottiene la **seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi**, che costituisce il **Teorema del Momento angolare**

$$\vec{M}^{(E)} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Il termine $\vec{v_0} \times M\,\overrightarrow{v_{CM}} = 0$ quando:

- il polo è fisso nel sistema di riferimento inerziale, $v_0 = 0$
- il CM è in quiete nel sistema di riferimento inerziale, $v_{CM} = 0$
- Il polo coincide con il centro di massa, $O \equiv CM$ ($v_{CM} = v_0$, quindi paralleli)
- $\overrightarrow{v_{CM}}$ parallelo a $\vec{v_0}$

Per cui possiamo dire che se il polo O è fisso nel sistema di riferimento inerziale, oppure coincide con il CM, anche se quest'ultimo è in generale un punto mobile e accelerato, il cambiamento del momento angolare nel tempo dipende solo dal momento delle forze esterne rispetto al polo O (le forze interne non influenzano L)

Principio di conservazione del momento angolare

In una situazione in cui valga il Teorema del momento angolare $\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \overrightarrow{M}^{(E)}$ $(\overrightarrow{v_0} \times m\overrightarrow{v_{CM}} = 0)$, se

$$\overrightarrow{M}^{(E)} = 0 \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{L} = costante$$

che costituisce il **Principio di conservazione del momento angolare**: **se è nullo il momento delle forze esterne che agiscono sul sistema di punti, allora il momento angolare totale si conserva.**

La condizione $\overrightarrow{M}^{(E)} = 0$ si verifica:

- quando il sistema è isolato (risultante delle forze esterne e momenti delle forze nulli); in questo caso qualunque polo si scelga, si ha $\vec{R}^{(E)} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{CM} = cost$ e $\vec{L}_{CM} = cost$ (conservazione della quantità di moto e del momento angolare)

- quando il momento è nullo rispetto ad un **determinato polo O.** In tal caso

la conservazione del momento angolare vale **solo** rispetto a quel polo.

Sistema di riferimento del CM

Nello studio della dinamica dei sistemi di punti materiali è molto utile riferirsi al sistema di riferimento del centro di massa, avente le seguenti caratteristiche:

- origine nel CM;
- assi paralleli a quelli del un sistema inerziale;
- sistema di riferimento in generale non inerziale in moto traslatorio, ma non necessariamente rettilineo ed uniforme.

Il punto i-esimo del sistema è individuato dal raggio vettore $\vec{r_i} = \overrightarrow{r'_i} + \overrightarrow{r_{CM}}$.
Dal teorema delle velocità relative ($\vec{\omega} = 0$): $\vec{v_i} = \overrightarrow{v'_i} + \overrightarrow{v_{CM}}$

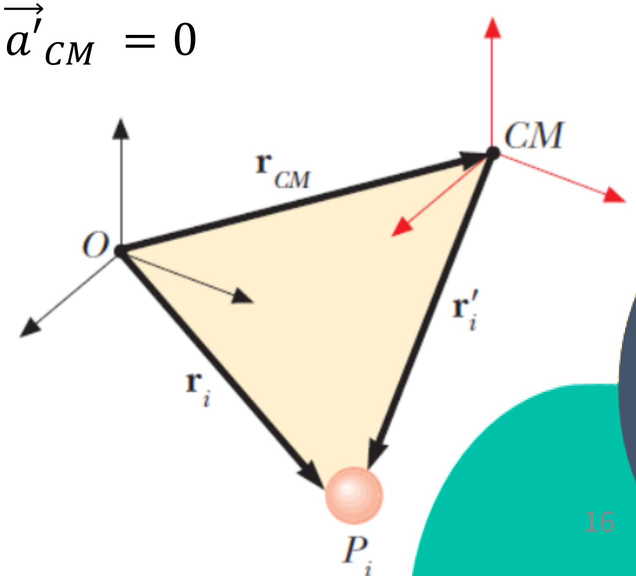
Nel sistema di riferimento del CM $\overrightarrow{r'}_{CM} = 0, \overrightarrow{v'}_{CM} = 0, \overrightarrow{a'}_{CM} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{r'_i}}{\sum_i m_i} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{v'_i}}{\sum_i m_i} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_i m_i \overrightarrow{r'_i} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_i m_i \overrightarrow{v'_i} = 0$$

Pertanto la **quantità di moto totale** del sistema calcolata nel **sistema di riferimento del CM** è nulla

$$\overrightarrow{P'} = \sum_i m_i \overrightarrow{v'_i} = 0$$



Sistema di riferimento del CM

Poiché il sistema di riferimento del CM è **non inerziale** perché accelerato, alle forze interne ed esterne dobbiamo aggiungere le forze apparenti di trascinamento

$$\vec{F}_{trascinamento} = -m_i\,\vec{a_t} = -m_i\,\overrightarrow{a_{CM}}$$

Quindi per ognuno dei punti del sistema avremo che:

$$\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)} - m_i\,\overrightarrow{a_{CM}} = m_i\,\overrightarrow{a'_i}$$

e sommando su tutti i punti si ha ($\vec{R}^{(I)} = 0$):

$$\sum_i \vec{F}_i^{(E)} + \sum_i \vec{F}_i^{(I)} - \sum_i m_i\,\overrightarrow{a_{CM}} = \sum_i m_i\,\overrightarrow{a'_i} \Rightarrow \vec{R}^{(E)} - \sum_i m_i\,\overrightarrow{a_{CM}} = \sum_i m_i\,\overrightarrow{a'_i}$$

Poiché $\vec{R}^{(E)} = m\,\overrightarrow{a_{CM}}$, segue che $\sum_i m_i\,\overrightarrow{a'_i} = 0$

Infine si dimostra che:

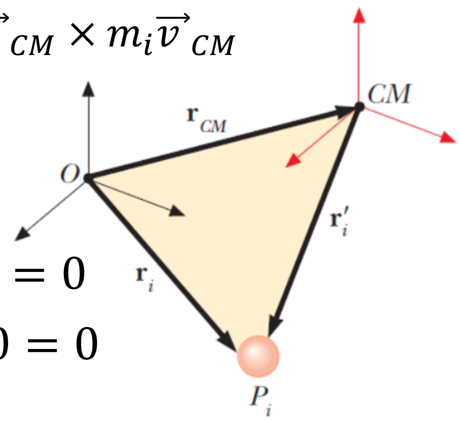
- $\overrightarrow{M'}^{(E)} = \sum_i \overrightarrow{r'_i} \times \left(\vec{F}_i^{(E)} - m_i\,\overrightarrow{a_{CM}}\right) = \sum_i \overrightarrow{r'_i} \times \vec{F}_i^{(E)}$ senza contributi di forze apparenti;
- $\frac{d\overrightarrow{L'}}{dt} = \overrightarrow{M'}^{(E)}$, ovvero **il teorema del momento angolare vale anche nel caso in cui si scelga come polo il CM.**

Primo teorema di KÖNIG

Calcoliamo il momento angolare del sistema scegliendo come polo l'origine O del sistema di riferimento inerziale

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r_i} \times m_i \vec{v_i} = \sum_i (\vec{r'}_i + \vec{r}_{CM}) \times m_i \left(\vec{v'}_i + \vec{v}_{CM}\right) =$$

$$\sum_i \vec{r'}_i \times m_i \vec{v'}_i + \sum_i \vec{r'}_i \times m_i \vec{v}_{CM} + \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v'}_i + \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM}$$



- $\sum_i \overrightarrow{r'_i} \times m_i \overrightarrow{v'_i} = \sum_i \overrightarrow{L'_i} = \overrightarrow{L'}$
- $\sum_i \overrightarrow{r'_i} \times m_i \vec{v}_{CM} = \sum_i m_i \overrightarrow{r'_i} \times \vec{v}_{CM} = m\overrightarrow{r'_{CM}} \times \vec{v}_{CM} = 0 \times \vec{v}_{CM} = 0$
- $\sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \overrightarrow{v'_i} = \vec{r}_{CM} \times \sum_i m_i \overrightarrow{v'_i} = \vec{r}_{CM} \times m\overrightarrow{v'_{CM}} = \vec{r}_{CM} \times 0 = 0$
- $\sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times \sum_i m_i \vec{v}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times m\vec{v}_{CM} = \vec{L}_{CM}$

Primo teorema di König: Il momento angolare del sistema di punti rispetto al sistema di riferimento inerziale è dato dalla somma del momento angolare dovuto al moto del CM e del momento angolare del sistema rispetto al centro di massa.

$$\vec{L} = \overrightarrow{L'} + \overrightarrow{L_{CM}}$$

Secondo teorema di KÖNIG

Calcoliamo l'energia cinetica rispetto al sistema inerziale:
($\vec{r_i} = \overrightarrow{r'}_i + \overrightarrow{r_{CM}}$; dal Teorema delle velocità relative: $\vec{v_i} = \overrightarrow{v'}_i + \overrightarrow{v_{CM}}$)

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_i m_i|\vec{v}_i|^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\overrightarrow{v'_i} + \vec{v}_{CM})^2$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i(\overrightarrow{v'}_i)^2 + \sum_i (m_i\overrightarrow{v'_i} \cdot \vec{v}_{CM}) + \frac{1}{2}\sum_i m_i\vec{v}_{CM}{}^2$$

- $\frac{1}{2}\sum_i m_i(\overrightarrow{v'}_i)^2 = E'_k$
- $\sum_i (m_i\overrightarrow{v'_i} \cdot \overrightarrow{v_{CM}}) = \left(\sum_i m_i\overrightarrow{v'_i}\right) \cdot \overrightarrow{v_{CM}} = \left(\sum_i \overrightarrow{p'_i}\right) \cdot \overrightarrow{v_{CM}} = 0 \cdot \overrightarrow{v_{CM}} = 0$
- $\frac{1}{2}\sum_i m_i\vec{v}_{CM}{}^2 = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = E_{k,CM}$

Secondo teorema di König: L'energia cinetica del sistema di punti rispetto al sistema di riferimento inerziale è data dalla somma dell'energia cinetica dovuta al moto del CM e dell'energia cinetica del sistema rispetto al centro di massa.

$$E_k = E'_k + E_{k,CM}$$

Commento sui teoremi di KÖNIG

Dal punto di vista delle velocità e delle forze agenti sul sistema di punti, le relazioni fondamentali sono:

$$\overrightarrow{F}^{(E)} = m\,\overrightarrow{a_{CM}}$$
$$\overrightarrow{P} = m\,\overrightarrow{v_{CM}}$$
$$\overrightarrow{P'} = 0$$

Quindi il moto del sistema di punti è riassunto dal solo moto del CM ($\overrightarrow{a_{CM}}$ e $\overrightarrow{v_{CM}}$).

Per quanto riguarda il momento angolare e l'energia cinetica questo non è sufficiente. Infatti, i due teoremi di König stabiliscono che al moto del CM bisogna aggiungere la descrizione del sistema rispetto al CM stesso (un moto interno al sistema di punti).

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{L'} + \overrightarrow{r_{CM}} \times M\,\overrightarrow{v_{CM}} = \overrightarrow{L'} + \overrightarrow{L_{CM}}$$
$$E_k = E_k' + \frac{1}{2}\,M v_{CM}^2 = E_k' + E_{k,CM}$$

(Se in media $\overrightarrow{v_{CM}} = 0$, i singoli punti possono in generale essere in moto internamente al sistema di punti, quindi in generale $\overrightarrow{L} \neq 0$, $E_k \neq 0$).

Teorema dell'energia cinetica (per un sistema di punti)

Per l'i-esimo punto del sistema, il lavoro associato allo spostamento infinitesimo $\overrightarrow{ds_i}$ è:

$$dW_i = \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{ds_i} = \left(\overrightarrow{F_i}^{(E)} + \overrightarrow{F_i}^{(I)}\right) \cdot \overrightarrow{ds_i} = \overrightarrow{F_i}^{(E)} \cdot \overrightarrow{ds_i} + \overrightarrow{F_i}^{(I)} \cdot \overrightarrow{ds_i} = dW_i^{(E)} + dW_i^{(I)}$$

Il lavoro totale si ottiene integrando dW_i su tutto il percorso e sommando i lavori compiuti su tutti i punti che costituiscono il sistema: $W = W^{(E)} + W^{(I)}$. Si dimostra che

$$\mathrm{W} = \Delta E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,B}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,A}^2$$

ossia il **Teorema dell'energia cinetica** (A e B sono le configurazioni iniziale e finale del sistema di punti): **il lavoro complessivo fatto dalle forze esterne ed interne per un sistema di punti materiali è uguale alla variazione dell'energia cinetica tra configurazione finale ed iniziale.**

Il lavoro delle forze interne non è generalmente nullo. Consideriamo la coppia di punti i-j:

$$\overrightarrow{F_{i,j}} \cdot \overrightarrow{ds_j} + \overrightarrow{F_{j,i}} \cdot \overrightarrow{ds_i} = \overrightarrow{F_{i,j}} \cdot \overrightarrow{ds_j} - \overrightarrow{F_{i,j}} \cdot \overrightarrow{ds_i} = \overrightarrow{F_{i,j}} \cdot \left(\overrightarrow{ds_j} - \overrightarrow{ds_i}\right) = \overrightarrow{F_{i,j}} \cdot \overrightarrow{ds_{ij}}$$

Quindi, il lavoro delle forze interne è legato all'eventuale cambiamento delle **distanze relative** tra i punti del sistema. Se queste non cambiano (come nei corpi rigidi) allora $W^{(I)} = 0$

Teorema di conservazione dell'energia meccanica

Se le forze interne sono **conservative**, il lavoro delle forze interne può essere scritto come l'opposto della variazione dell'energia potenziale legata alla forza:

$$W^{(I)} = -\Delta E_p^{(I)}$$

Se le forze esterne sono conservative :

$$W^{(E)} = -\Delta E_p^{(E)}$$

Se **tutte** le forze (esterne ed interne) sono **conservative** allora:

$$W^{(E)} + W^{(I)} = -\Delta E_p \qquad W^{(E)} + W^{(I)} = \Delta E_k$$

$$-\Delta E_p = \Delta E_k \Longrightarrow \Delta E_p + \Delta E_k = 0 \Longrightarrow \Delta\left(E_p + E_k\right) = 0 \Longrightarrow \Delta E_m = 0$$

avremo la il **teorema di conservazione dell'energia meccanica**

$$E_m = costante$$

$$E_{m,A} = E_{m,B}$$

$$\left(E_p + E_k\right)_A = \left(E_p + E_k\right)_B$$

(A e B sono le configurazioni iniziale e finale del sistema di punti)

Infine, se **non tutte le forze sono conservative** si potrà dire che

$$W_{nc} = \Delta E_m$$

Sommario

Le equazioni che descrivono la dinamica dei sistemi di punti materiali sono le due equazioni cardinali della dinamica dei sistemi di punti materiali:

$$\overrightarrow{R}^{(E)} = m\,\overrightarrow{a_{CM}} = \frac{d\overrightarrow{P}}{dt}$$

Se $\overrightarrow{R}^{(E)} = 0$ si conserva la quantità di moto $\overrightarrow{P}$

$$\overrightarrow{M}^{(E)} = \frac{d\overrightarrow{L}}{dt}$$

Se $\overrightarrow{M}^{(E)} = 0$ si conserva il momento angolare $\overrightarrow{L}$

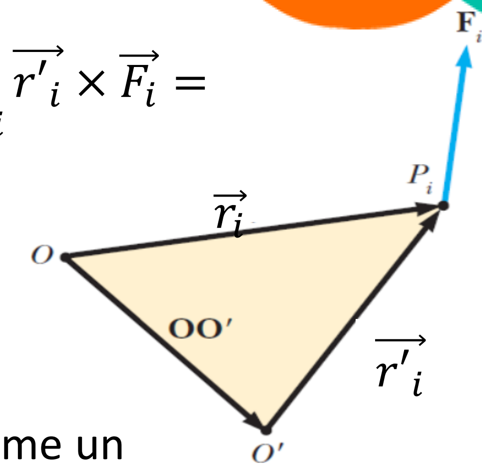
$$\Delta E_k = W\ (compiuto\ da\ tutte\ e\ forze\ agenti)$$

$$\Delta E_m = W_{nc}$$

Se tutte le forze agenti sono conservative si conserva l'energia meccanica E_m

Sistemi di forze applicate in punti differenti

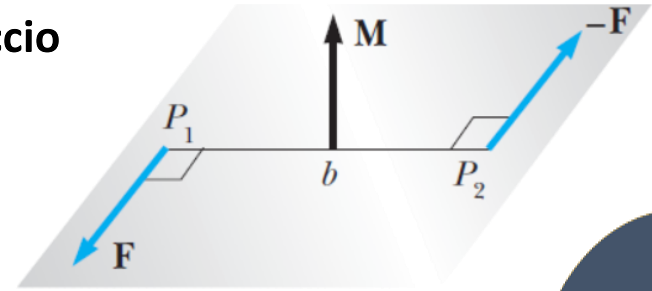
$$\overrightarrow{M_o} = \sum_i \vec{r_i} \times \vec{F_i} = \sum_i \left(\overrightarrow{OO'} + \vec{r'}_i\right) \times \vec{F_i} = \overrightarrow{OO'} \times \sum_i \vec{F_i} + \sum_i \vec{r'}_i \times \vec{F_i} =$$
$$= \overrightarrow{OO'} \times \vec{R} + \overrightarrow{M_{O'}}$$



essendo $\vec{R}$ la risultante delle forze rispetto ad O.

Il momento dipende dalla scelta del polo a meno che non risulti $\vec{R} = 0$!

Un'importante applicazione riguarda la **coppia di forze**, definita come un insieme di due forze uguali e opposte ma con diversa retta di azione.
La distanza tra le due rette d'azione delle forze è detta **braccio della coppia**, b.



In questa situazione $\vec{R} = \vec{F} - \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{M}$

- Non dipende da O
- $|\vec{M}| = b\ F$
- direzione perpendicolare al piano individuato dalle due rette d'azione
- verso dato dalla regola della mano destra.

Le forze interne costituiscono coppie di forze a braccio nullo: hanno momento risultante nullo rispetto a qualunque polo.

Sistemi di forze equivalenti

Due o più sistemi di forze si dicono equivalenti rispetto ad un sistema di punti materiali o per un corpo rigido se, applicati al sistema, causano la stessa dinamica.

Questo implica che i due sistemi di forze devono avere la stessa risultante $\overrightarrow{R}^{(E)}$ e lo stesso momento di forze $\overrightarrow{M}^{(E)}$

Sistema di forze parallele

Per un sistema di n forze parallele, $\vec{F_i} = F_i\,\hat{u}$, il momento risultante rispetto al polo O è

$$\vec{M_o} = \sum_i \vec{r_i} \times \vec{F_i} = \sum_i \vec{r_i} \times (F_i\,\hat{u}) = \left(\sum_i \vec{r_i}\;F_i\right) \times \hat{u}$$

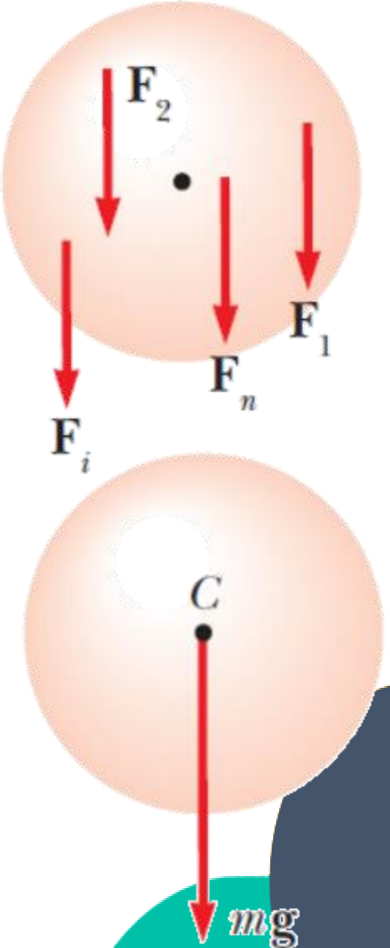
e risulta ortogonale ad $\hat{u}$ e alla risultante $\vec{R}$.

È possibile trovare un punto C nel quale applicare la risultante $\vec{R}$ affinché il momento complessivo sia lo stesso, cioè

$$\vec{M_o} = \vec{OC} \times \vec{R} = \vec{r_C} \times \vec{R} = \vec{r_C} \times \left(\sum_i F_i\right)\hat{u} = \left(\sum_i F_i\right)\vec{r_C} \times \hat{u}$$

$$\Rightarrow\ \vec{r_C} = \frac{\sum_i \vec{r_i}\;F_i}{\sum_i F_i}$$

non dipende dalla scelta di O!



C è detto **centro delle forze parallele**. Un sistema di forze parallele può essere sempre ridotto alla risultante $\vec{R}$ applicata nel punto C.

La forza peso è un esempio di sistema di forze parallele con $\vec{R} = \sum_i\ m_i\vec{g}$

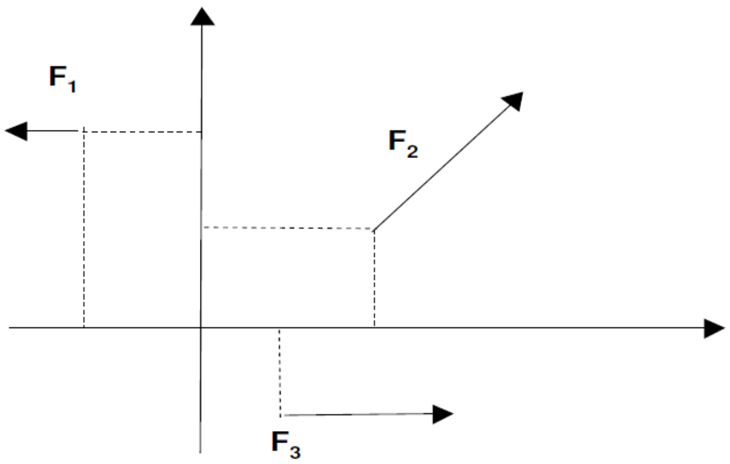
$$\vec{r_C} = \frac{\sum_i \vec{r_i}\;F_i}{\sum_i F_i} = \frac{\sum_i\ m_i g\,\vec{r_i}}{\sum_i\ m_i\,g} = \frac{\sum_i\ m_i\vec{r_i}}{\sum_i\ m_i} = \frac{\sum_i\ m_i\vec{r_i}}{m} = \vec{r_{CM}}$$

il punto C trovato viene chiamato **baricentro** o **centro di gravità** e coincide con il centro di massa. Il momento risultante della forza peso è:

$$\vec{M_o} = \vec{r_C} \times m\vec{g} = \vec{r_{CM}} \times m\vec{g}$$

Problema 6.4

In figura sono mostrate le forze esterne agenti su un sistema di 3 punti, con F_1=6 N, F_2= 12 N (45°), F_3= 14 N, m_1= 4 Kg, m_2= 8 Kg, m_3= 4 Kg.
Qual è l'accelerazione del centro di massa?



Soluzione:

$$a_{CM} = 1{,}16\ m/s^2$$

Problema 6.5

Una barca di massa M lunga L con due persone a bordo, m1 ed m2 si trova a distanza d dalla riva. Le due persone di alzano e cominciano a camminare e si scambiano i posti agli estremi della barca. La barca si è allontanata dalla riva. Trascurando tutti gli attriti, di quanto si è allontanata?

Soluzione:

$$h = \frac{L(m_2 - m_1)}{M + m_1 + m_2}$$

Problema 6.6

Un uomo di massa 75 kg sta su un carrello di massa 39 kg che viaggia a 2,3 m/s. Ad un tratto salta giù con velocità orizzontale zero rispetto al terreno. Di quanto fa variare la velocità del carrello?

Soluzione:

$$\Delta v_c = 4{,}42\,\frac{m}{s}$$