

Fisica Generale – Modulo A

Classe B

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

Dott.ssa Marilena Giglio

marilena.giglio@poliba.it

Il corpo rigido

Un sistema di punti materiali, continuo, in cui le distanze tra tutte le possibili coppie di punti non variano nel tempo viene chiamato corpo rigido.

Il corpo rigido in fisica è una idealizzazione, un corpo indeformabile ma esteso, soggetto a forze esterne applicate in punti diversi del corpo.

Poiché le mutue distanze tra i punti non variano, allora anche il lavoro delle forze interne risulta nullo (le forze interne non hanno alcun ruolo nella dinamica dei corpi rigidi), per cui le leggi fondamentali della dinamica dei corpi rigidi diventano:

$$\vec{R}^{(E)} = m \vec{a}_{CM} \quad \text{I eq. cardinale}$$

$$\vec{M}^{(E)} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{II eq. cardinale}$$

$$W^{(E)} = \Delta E_k \quad \text{Teorema dell'energia cinetica}$$

Quindi, per i corpi rigidi trascureremo l'apice (E) .

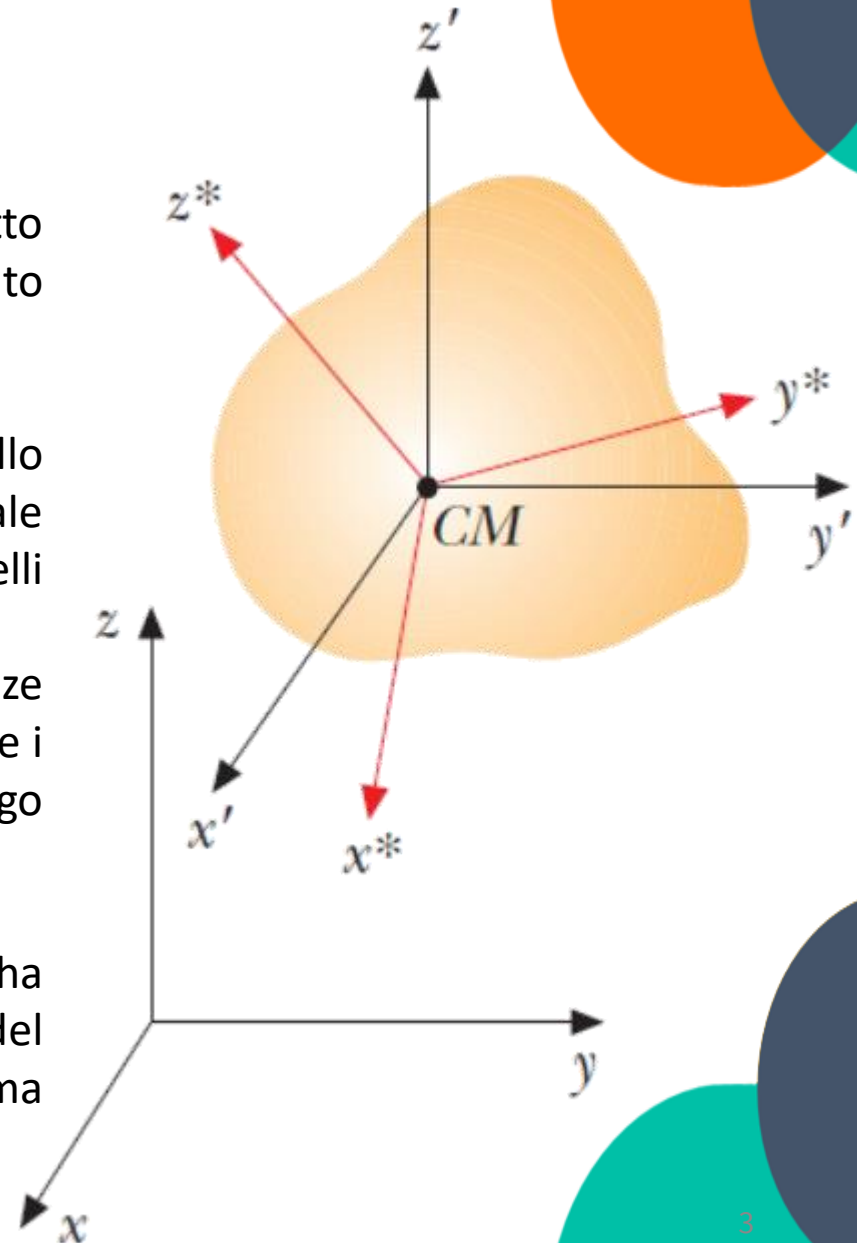
Il corpo rigido

Lo studio del moto del corpo rigido viene fatto generalmente in un sistema di riferimento inerziale (xyz).

Un altro sistema di riferimento utilizzato è quello del centro di massa del corpo rigido, in generale non inerziale, con gli assi ($x'y'z'$) paralleli a quelli del sistema inerziale.

In tale sistema di riferimento, poiché le distanze dei punti non variano rispetto al CM, il CM vede i punti del corpo rigido fermi o in moto lungo archi di circonferenza.

Infine, indichiamo con ($x^*y^*z^*$) il sistema che ha gli assi solidali al corpo rigido; tutti i punti del corpo rigido risulteranno fermi in questo sistema di riferimento.



Posizione del Centro di Massa

Consideriamo un elemento infinitesimo di volume dV in cui è racchiusa una massa dm . Si definisce **densità di massa** volumetrica una quantità che fornisce indicazione su come la massa è distribuita all'interno del corpo rigido, data dal rapporto tra la massa infinitesima ed il volume da essa occupato:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad [\text{kg/m}^3]$$

Quando ρ non cambia punto per punto, il corpo si dice **omogeneo** $\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{m}{V}$

Nel caso di corpi bi- o uni-dimensionali, definiamo **densità superficiale e densità lineare**

$$\rho_S = \frac{dm}{dS} [\text{kg/m}^2] \Rightarrow m = \int_S \rho_S dS$$

$$\rho_l = \frac{dm}{dl} [\text{kg/m}] \Rightarrow m = \int_L \rho_l dl$$

Il C.M. è calcolato risolvendo i seguenti integrali (di volume) di tutti gli elementini di massa dm la cui posizione è individuata dal raggio vettore \vec{r} rispetto ad un S.d.R.:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_V \vec{r} dm}{\int_V dm} = \frac{\int_V \vec{r} dm}{m} = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} dm$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x_{CM} = \frac{1}{m} \int_V x dm \\ y_{CM} = \frac{1}{m} \int_V y dm \\ z_{CM} = \frac{1}{m} \int_V z dm \end{array} \right.$$

Posizione del Centro di Massa

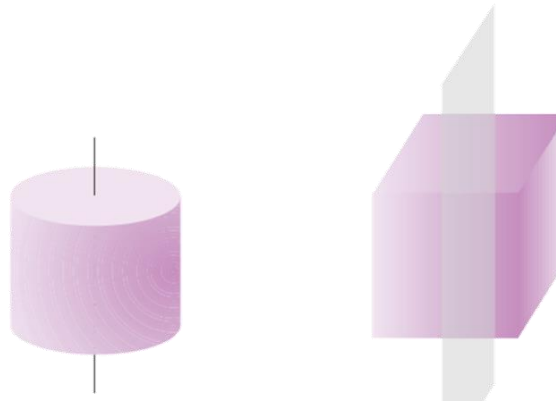
Sostituendo $dm = \rho dV$ negli integrali si ottiene, per un corpo omogeneo di densità $\rho = \frac{m}{V}$:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_V \vec{r} dm}{m} = \frac{\int_V \rho \vec{r} dV}{m} = \frac{\rho}{m} \int_V \vec{r} dV = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV$$

Che proiettata sugli assi diventa:

$$x_{CM} = \frac{1}{V} \int_V x dV \quad y_{CM} = \frac{1}{V} \int_V y dV \quad z_{CM} = \frac{1}{V} \int_V z dV$$

Ovvero, quando un corpo è omogeneo il centro di massa dipende solo dal volume, ossia dalla sua forma geometrica. Il CM coincide con il centro di simmetria del corpo oppure è un punto dell'asse o del piano di simmetria del corpo rigido. Ad esempio per la sfera il CM è il suo centro, per un cilindro il CM si troverà sull'asse del cilindro e a metà di esso ecc.



Centro di massa e forza peso

Ricordiamo che la forza peso agisce come un sistema di forze parallele:

$$d\vec{P} = dm \vec{g} \Rightarrow \vec{P} = \int_V \vec{g} dm = \vec{g} \int_V dm = m \vec{g}$$

$$\vec{P} \text{ è applicata nel } \mathbf{\text{baricentro}} \vec{r}_C = \vec{r}_{CM} = \frac{\int_V \vec{r} dm}{\int_V dm} = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} dm$$

Il momento risultante della forza peso rispetto ad un polo O (origine del sistema di riferimento) sarà:

$$\vec{M} = \int_V \vec{r} \times \vec{g} dm = \left(\int_V \vec{r} dm \right) \times \vec{g} = m \vec{r}_{CM} \times \vec{g} = \vec{r}_{CM} \times m \vec{g} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$$

Per la forza peso, l'energia potenziale vale (assumendo $\vec{g} = -g \hat{u}_z$ diretta lungo l'asse z):

$$E_p = \int_V g z dm = g \int_V z dm = m g z_{CM}$$

l'energia potenziale del corpo rigido dipende dalla coordinata z (verticale) del CM.

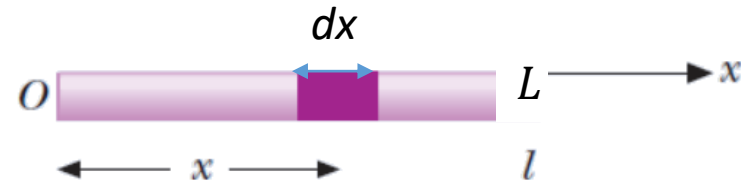
Calcolo del CM per un'asta rigida

Se l'oggetto è omogeneo (la densità non cambia punto per punto), il CM coincide con il centro geometrico (di simmetria) dell'oggetto. Se l'oggetto ha una forma geometrica semplice, quindi, si può evitare qualunque calcolo.

A titolo di esempio, è mostrato di seguito il calcolo per un'asta rigida omogenea. Supponiamo che l'asta sia orientata secondo l'asse x e che si possano trascurare le altre dimensioni. Per simmetria ci aspettiamo che il CM debba trovarsi al centro.

Verifichiamo:

$$x_{CM} = \frac{1}{V} \int_V x dV$$



Inoltre abbiamo che

$$dV = dx \cdot S$$

con S la sezione della barretta allora

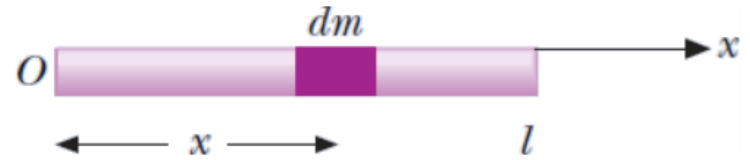
$$x_{CM} = \frac{S}{V} \int_0^L x dx = \frac{S}{V} \frac{L^2}{2}$$

e poiché $V = S \cdot L$, si ottiene

$$x_{CM} = \frac{S}{S L} \frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

Calcolo del CM per un'asta rigida

Oppure



$$x_{CM} = \frac{1}{m} \int_V x dm$$

Inoltre abbiamo che

$$dm = \rho_l dx$$

con ρ_l la densità lineare della barretta, allora

$$x_{CM} = \frac{1}{m} \int_0^L x \rho_l dx = \frac{\rho_l L^2}{m 2}$$

e poiché

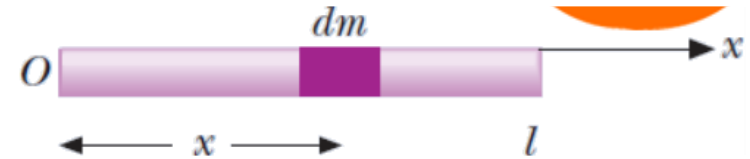
$$m = \rho_l \cdot L$$

si ottiene

$$x_{CM} = \frac{\rho_l}{\rho_l \cdot L} \frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

Calcolo del CM per un'asta rigida non omogenea

$$\varrho_l(x) = \varrho_0 \left(\frac{x}{L} + 1 \right)$$



$$x_{CM} = \frac{1}{m} \int_V x dm$$

$$\begin{aligned} dm = \varrho_l(x) dx \Rightarrow m = \int dm &= \int_0^L \varrho_l(x) dx = \int_0^L \varrho_0 \left(\frac{x}{L} + 1 \right) dx = \int_0^L \varrho_0 \frac{x}{L} dx + \int_0^L \varrho_0 dx \\ &= \frac{\varrho_0}{L} \int_0^L x dx + \varrho_0 \int_0^L dx = \frac{\varrho_0}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L + \varrho_0 [x]_0^L = \frac{\varrho_0 L^2}{2} + \varrho_0 L = \frac{3}{2} \varrho_0 L \end{aligned}$$

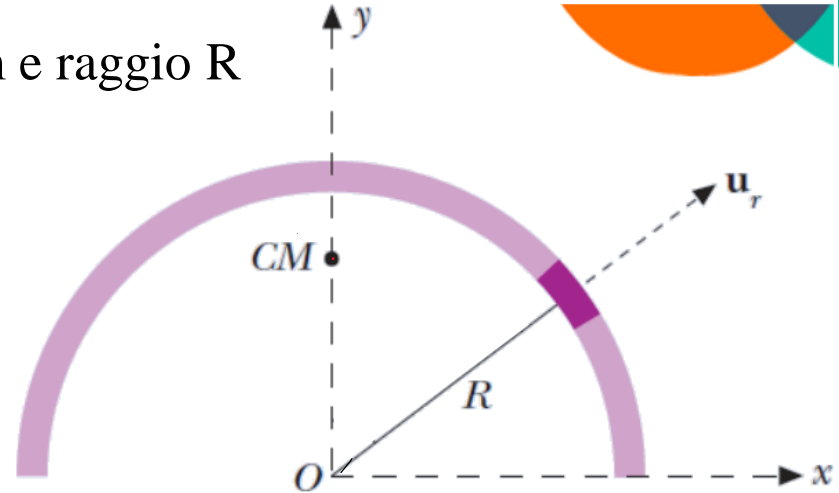
$$\begin{aligned} \int_V x dm &= \int_0^L \varrho_l(x) x dx = \int_0^L \varrho_0 \left(\frac{x}{L} + 1 \right) x dx = \int_0^L \varrho_0 \frac{x^2}{L} dx + \int_0^L \varrho_0 x dx \\ &= \frac{\varrho_0}{L} \int_0^L x^2 dx + \varrho_0 \int_0^L x dx = \frac{\varrho_0}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L + \varrho_0 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L = \frac{\varrho_0 L^3}{3} + \varrho_0 \frac{L^2}{2} = \frac{5}{6} \varrho_0 L^2 \end{aligned}$$

$$x_{CM} = \frac{1}{m} \int_V x dm = \frac{1}{\frac{3}{2} \varrho_0 L} \frac{5}{6} \varrho_0 L^2 = \frac{5}{9} L \quad \left(> \frac{L}{2} \right)$$

Calcolo del CM per un semianello

Semianello rigido e omogeneo di massa m e raggio R

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} dm$$

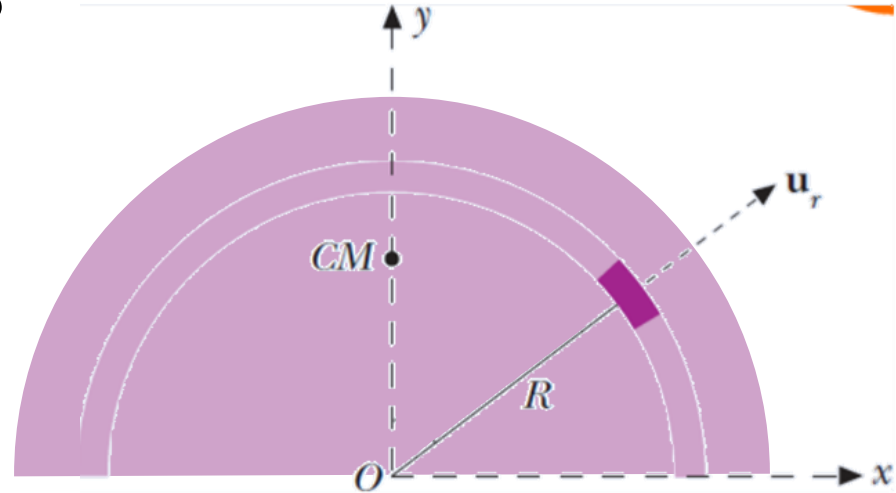


Soluzione

CM $(0; \frac{2}{\pi} R)$

Calcolo del CM per un semidisco

Semidisco rigido e omogeneo
di massa m e raggio R

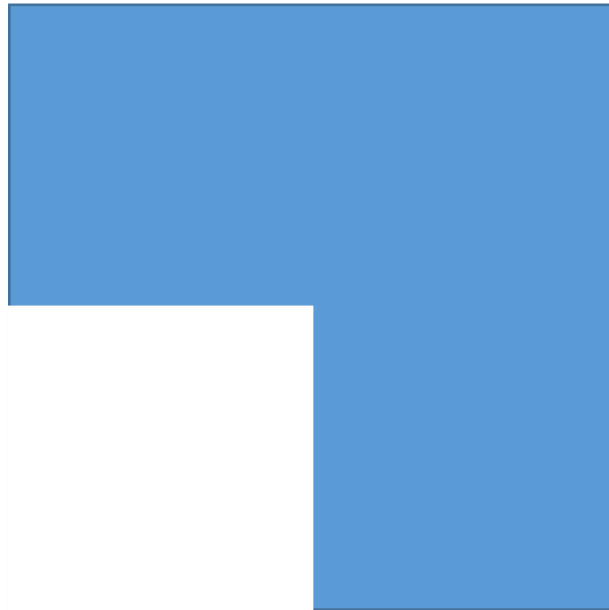


Soluzione

$$CM \left(0; \frac{4}{3\pi} R \right)$$

Calcolo del CM per un quadrato senza quarto

Quadrato rigido e omogeneo di massa m e lato L



Soluzione

$$\text{CM} \left(\frac{7}{12}L; \frac{7}{12}L \right)$$

Traslazione di un corpo rigido

Tutti i punti descrivono traiettorie uguali con velocità $= \overrightarrow{v_{CM}}$. Inoltre, $\overrightarrow{L}' = 0$ e $E'_k = 0$ rispetto al CM. La dinamica traslazionale del corpo rigido diventa quella del CM.

quantità di moto $\overrightarrow{P} = m \overrightarrow{v_{CM}}$

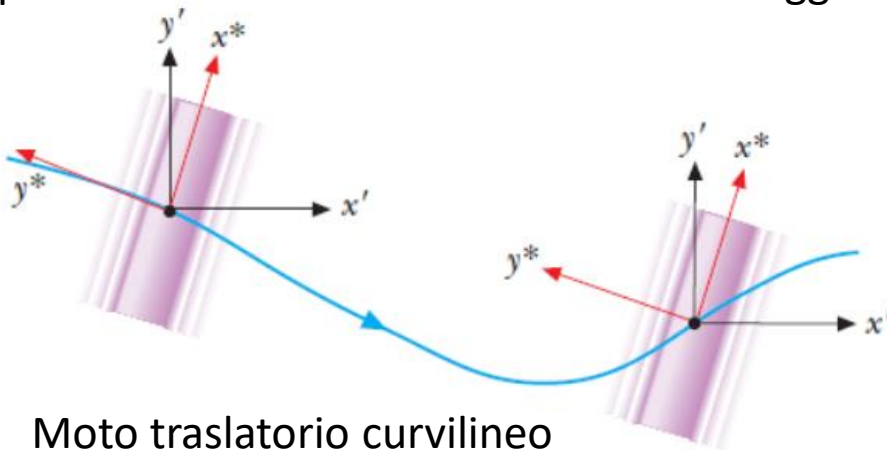
dinamica del CM $\overrightarrow{R}^{(E)} = m \overrightarrow{a_{CM}} = \frac{d\overrightarrow{P}}{dt}$

I teorema di König $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{L}' + \overrightarrow{L}_{CM} = \overrightarrow{r_{CM}} \times \overrightarrow{P}$

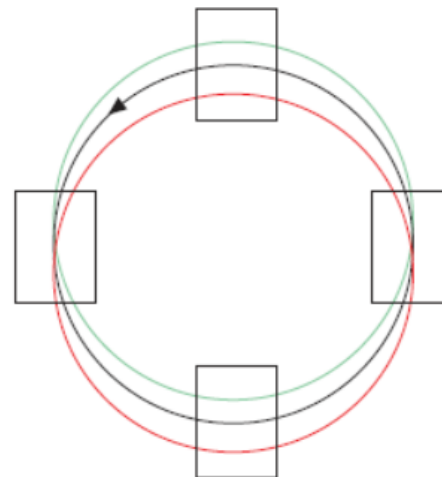
Il teorema di König $E_k = E'_k + E_{k,CM} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$

$$\overrightarrow{M} = \frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{r_{CM}} \times \overrightarrow{P}) = \overrightarrow{r_{CM}} \times \overrightarrow{R}$$

pertanto nelle traslazioni si usa solo la legge della dinamica del CM.



Moto traslatorio curvilineo



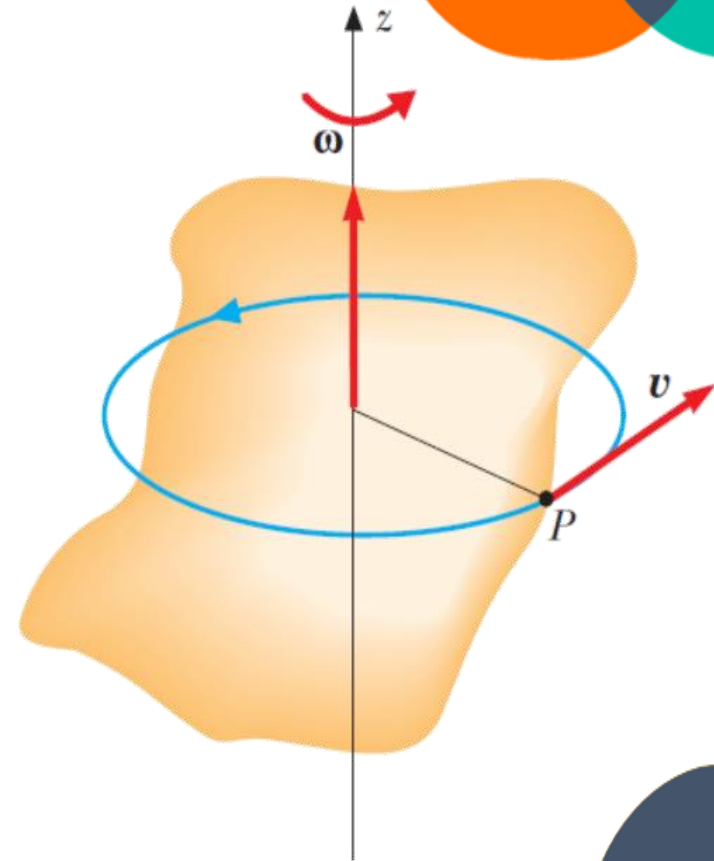
Moto traslatorio circolare

Rotazione di un corpo rigido

Nel caso delle rotazioni, tutti i punti descrivono un moto circolare (archi di circonferenza rispetto all'asse di rotazione), e tutti con la stessa velocità angolare $\vec{\omega}$ parallela all'asse di rotazione ($v_i = \omega R_i$). In generale, $\vec{\omega}$ può essere variabile nel tempo (modulo, verso e direzione/asse di rotazione variabile).

L'equazione dinamica di base che descrive il moto di rotazione è:

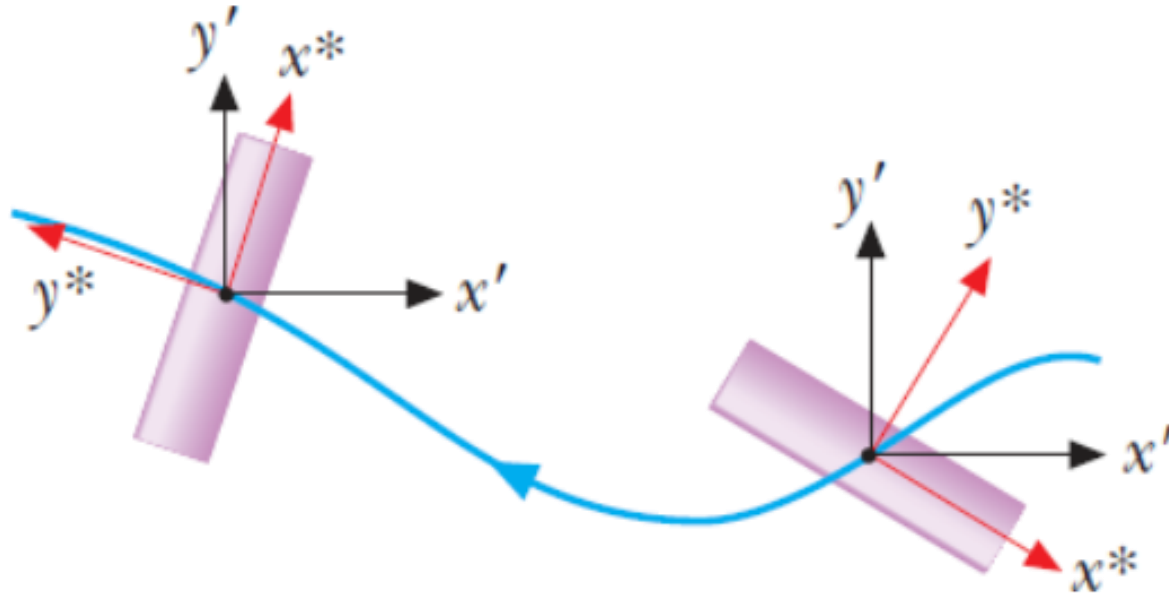
$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



Moto rototraslatorio di un corpo rigido

I due moti appena considerati sono gli unici da studiare in dettaglio, in quanto si dimostra che:

ogni spostamento infinitesimo può considerarsi come una sovrapposizione (ovvero una somma vettoriale) di una traslazione ed una rotazione, individuate da \vec{v} e $\vec{\omega}$ variabili nel tempo.



Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso in un S.d.R. inerziale

Consideriamo il caso in cui l'asse di rotazione sia fisso e coincida con l'asse z. Il vettore $\vec{\omega}$ è quindi parallelo all'asse z.

Il generico elemento di massa dm_i , ruotando, descrive una circonferenza di raggio $R_i = r_i \sin \theta_i$.

Il momento angolare di dm_i in moto con velocità \vec{v}_i rispetto al polo O dell'asse z, sarà

$$\vec{dL}_i = \vec{r}_i \times dm_i \vec{v}_i$$

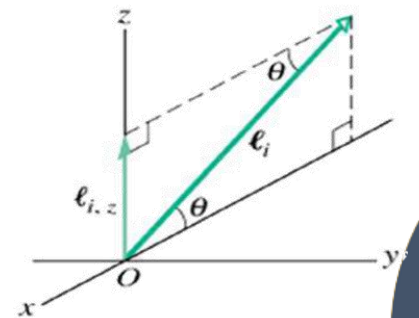
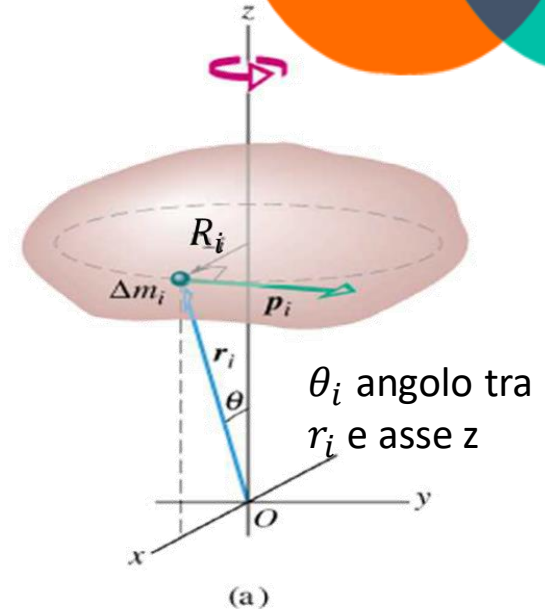
ed in modulo pari a (r_i forma un angolo di $\frac{\pi}{2}$ con \vec{v}_i)

$$dL_i = r_i dm_i v_i = r_i dm_i R_i \omega$$

Il vettore \vec{dL}_i è perpendicolare a \vec{r}_i e \vec{v}_i , quindi in generale \vec{L} non è parallelo all'asse z (\vec{dL}_i forma con z un angolo di $\frac{\pi}{2} - \theta_i$).

Consideriamo la componente z del vettore \vec{dL}_i :

$$\begin{aligned} dL_{i,z} &= dL_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = dL_i \sin \theta_i = r_i dm_i R_i \omega \sin \theta_i \\ &= dm_i R_i \omega (r_i \sin \theta_i) = dm_i R_i^2 \omega \end{aligned}$$



Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso in un S.d.R. inerziale

$$dL_{i,z} = dm_i R_i^2 \omega$$

Sommando il contributo di tutti gli elementi di massa dm_i si ottiene il **momento angolare assiale** L_z :

$$L_z = \int dL_z = \int dm R^2 \omega = I_z \omega$$

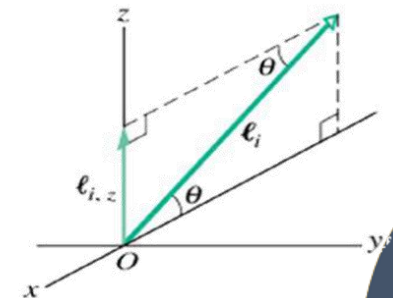
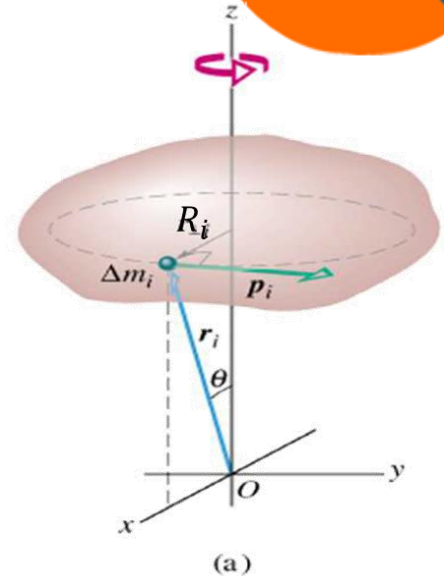
Il coefficiente I_z è detto **momento d'inerzia del corpo rispetto l'asse z** (di rotazione) e dipende da come le masse sono distribuite attorno l'asse di rotazione z e quindi dalla forma del corpo.

$$I_z = \int dm R^2$$

Il suo valore, diversamente da quello del CM, non è noto a priori, ma dipende dall'asse di rotazione.

L'altra componente del momento angolare L (perpendicolare a z che chiamiamo L_{\perp}) in generale varia in direzione e in modulo e dipende dalla scelta del polo

$$dL_{\perp,i} = dL_i \cos \theta_i = r_i dm_i R_i \omega \cos \theta_i$$



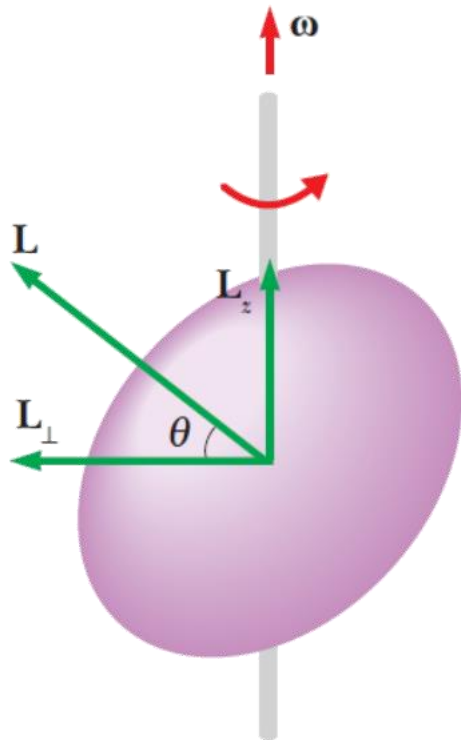
Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso in un S.d.R. inerziale

Sommando il contributo di tutti gli elementi di massa dm_i si ottiene L_{\perp} :

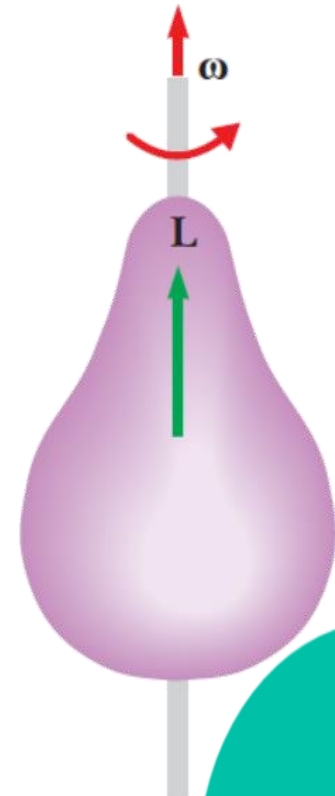
$$L_{\perp} = \int dL_{\perp} = \int r dm R \omega \cos \theta$$

Osserviamo che se l'asse di rotazione coincide con uno degli assi di simmetria del corpo rigido si avrà che

$$\begin{aligned}\vec{L} &= I_z \vec{\omega} = I_z \omega \hat{u}_z \\ L &= L_z \\ L_{\perp} &= 0\end{aligned}$$



Il momento angolare risulta parallelo all'asse di rotazione e quindi a $\vec{\omega}$ quando l'asse di rotazione è un'asse di simmetria per il corpo (per ogni $d\vec{L}_i$ c'è un $d\vec{L}_j$ simmetrico rispetto all'asse così che la loro somma vettoriale è parallela all'asse).



Equazione del moto di rotazione

Nel caso più semplice in cui $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I_z \vec{\omega})}{dt} = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha}$$

Per cui l'equazione della dinamica $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ diventa

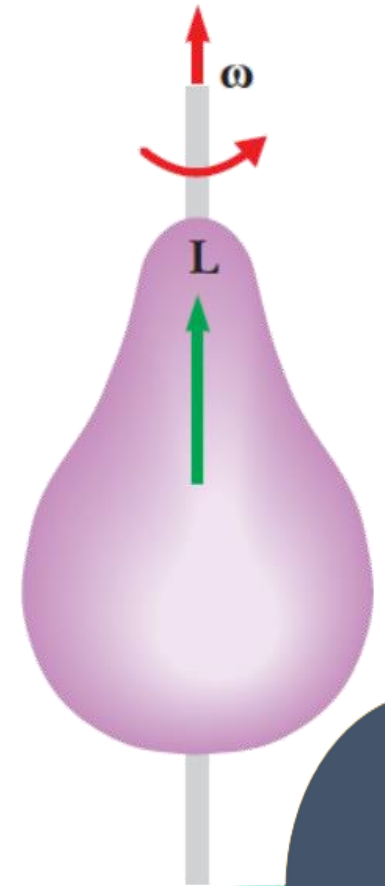
$$\vec{M} = I_z \vec{\alpha}$$

($\vec{M} \parallel \vec{\omega}$)

che rappresenta l'**equazione del moto di rotazione** (tutte le quantità sono calcolate per un punto generico O sull'asse di rotazione z).

Il momento delle forze (esterne) agenti rispetto all'asse fisso di rotazione permette di calcolare l'accelerazione angolare, noto il momento di inerzia I_z .

Dall'ultima relazione si possono ricavare le relazioni cinematiche tra θ , ω e α .



Energia cinetica e lavoro

Determiniamo l'energia cinetica del corpo rigido in rotazione integrando su tutti gli elementi di massa dm :

$$E_k = \int \frac{1}{2} dm v^2 = \int \frac{1}{2} dm \omega^2 R^2 = \frac{\omega^2}{2} \int dm R^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Quando $\vec{L} \parallel \vec{\omega} \Rightarrow L = I_z \omega \Rightarrow E_k = \frac{L^2}{2I_z}$

Il teorema dell'energia cinetica quindi diventa

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} I_z (\omega_f^2 - \omega_i^2)$$

Ricaviamo la relazione tra Momento e lavoro:

$$dW = d(\Delta E_k) = d\left(\frac{1}{2} I_z \omega^2\right) = I_z \omega d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} d\omega = I_z \alpha d\theta = M d\theta$$

Integrando si ottiene:

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M d\theta$$

Infine la potenza istantanea è:

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M \omega$$

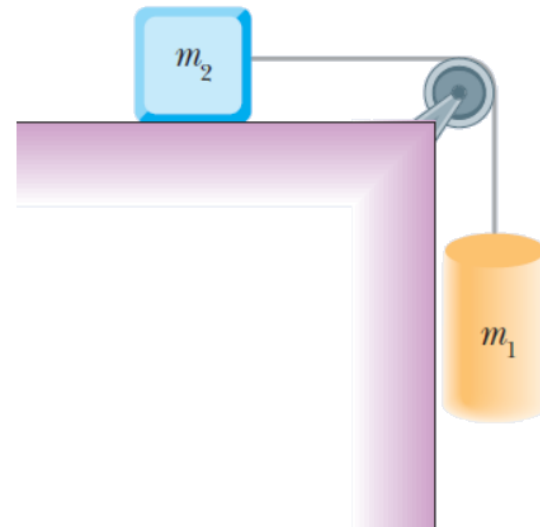
Riepilogo traslazione e rotazioni

La seguente tabella può essere utilizzata come uno schema per memorizzare più comodamente le relazioni della dinamica trovate finora:

Posizione	s	pos. ang.	θ
velocità	$v = \frac{ds}{dt}$	vel. ang.	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
acc.	$a = \frac{dv}{dt}$	acc. ang.	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Massa	m	Mom. d'inerzia	I
II Legge din.	$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$	II Legge din.	$\sum \vec{\tau}_{ext} = I\vec{\alpha}$
III Legge din.	$\sum \vec{F}_{int} = 0$	III Legge din.	$\sum \vec{\tau}_{int} = 0$
Lavoro	$\int \vec{F} \cdot d\vec{s}$	Lavoro	$\int \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$
En. Cinetica	$\frac{1}{2}Mv^2$	En. Cinetica	$\frac{1}{2}I\omega^2$
Lav-en.cin.	$\mathcal{L} = \Delta E_k$	Lav-en.cin.	$\mathcal{L} = \Delta E_k$
Potenza	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	Potenza	$P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$

Problema 7.1

Un blocco $m_1 = 0.4 \text{ kg}$ è appeso ed un blocco $m_2 = 0.2 \text{ kg}$ sul piano orizzontale; la carrucola ha momento d'inerzia rispetto all'asse $I = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$ e raggio $R = 2.5 \text{ cm}$. Vogliamo determinare l'accelerazione con cui si muovono i blocchi.



Soluzione:

$$a = 3.92 \text{ ms}^{-2}$$

Problema 7.2

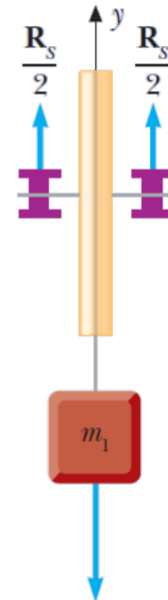
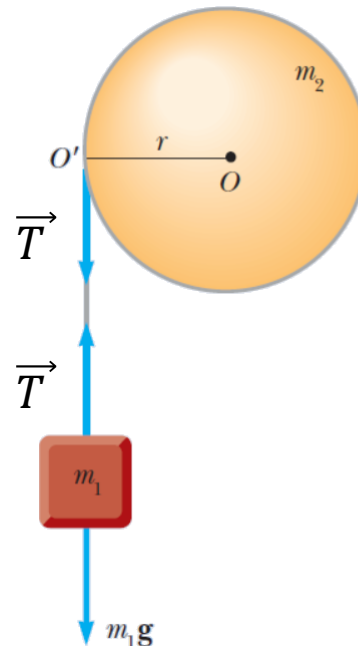
Si consideri un disco omogeneo, di raggio r e massa m_2 , che può ruotare senza attrito attorno ad un asse fisso orizzontale passante per il suo CM= O . Sul bordo del disco è avvolto un filo inestensibile che non slitta rispetto al disco e sostiene un punto materiale di massa m_1 . Si determini il moto del Sistema, la tensione del filo e la reazione dei supporti che sostengono l'asse di rotazione. Il momento di inerzia del disco vale $I = \frac{1}{2}m_2r^2$.

Soluzione:

$$a = \frac{2m_1}{2m_1 + m_2} g$$

$$T = \frac{m_1 m_2}{2m_1 + m_2} g$$

$$R_s = \frac{3m_1 + m_2}{2m_1 + m_2} m_2 g$$



Non parallelismo tra \vec{L} e $\vec{\omega}$: precessione del momento angolare

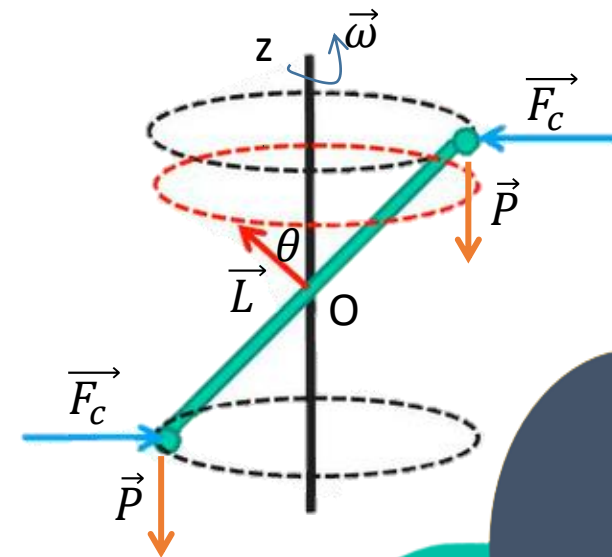
Quando \vec{L} e $\vec{\omega}$ non sono paralleli, \vec{L} ruota attorno all'asse di rotazione con un moto che è detto di **precessione del momento angolare**.

L'equazione della dinamica $\vec{M}^{(E)} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ avrà due componenti, parallela e perpendicolare rispetto all'asse di rotazione z:

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} \quad \text{e} \quad \vec{M}_\perp = \frac{d\vec{L}_\perp}{dt}$$

di cui solo la prima si può scrivere come $M_z = I_z \alpha$.

Consideriamo due masse uguali collegate da un'asta ideale in rotazione attorno ad un asse fisso (z) con velocità angolare $\vec{\omega}$. Supponiamo che l'asta formi un angolo θ con l'asse z. Le due masse descrivono un moto circolare, pertanto l'asta dovrà esercitare una forza centripeta \vec{F}_c su ciascuna massa. Queste due forze costituiscono una coppia di forze e il loro momento rispetto ad O è proprio $\frac{d\vec{L}_\perp}{dt}$. L'effetto di questo momento è quello di far cambiare direzione all'asse di rotazione. Il momento totale delle forze peso è, invece, nullo.



Non parallelismo tra \vec{L} e $\vec{\omega}$: precessione del momento angolare

Il legame tra energia cinetica e momento angolare diventa

$$E_k = \frac{L_z^2}{2 I_z}$$

E il lavoro può essere espresso tramite la conoscenza del momento delle forze esterne secondo la relazione

$$W = \int M_z d\vartheta$$

Teorema di Poinsot- assi d'inerzia

- Fissato un punto O di un corpo rigido è sempre possibile trovare 3 assi cartesiani tra loro perpendicolari, e centrati in O tali che scegliendo uno di essi come asse di rotazione, \vec{L} risulterà parallelo a $\vec{\omega}$, per cui $\vec{L} = I \vec{\omega}$.
- Questi assi si chiamano **assi principali d'inerzia** relativi al punto O .
- Se O coincide con il centro di massa si parla di assi centrali di inerzia.

Calcolo del momento d'inerzia

Se la massa di un corpo rigido è distribuito con continuità, il momento di inerzia si calcola come l'integrale esteso a tutto il corpo rigido degli elementi di massa dm ,

$$I = \int r^2 dm$$

con r la distanza dell'elemento dm dall'asse di rotazione.
Le unità di misura del momento di inerzia I sono $kg\ m^2$.

Esempio 1: calcolo di I per un'asta rigida **omogenea**.

Supponiamo che l'asse di rotazione sia **perpendicolare all'asta e passante per uno degli estremi**: $I = \int r^2 dm$

La densità lineare di massa sarà

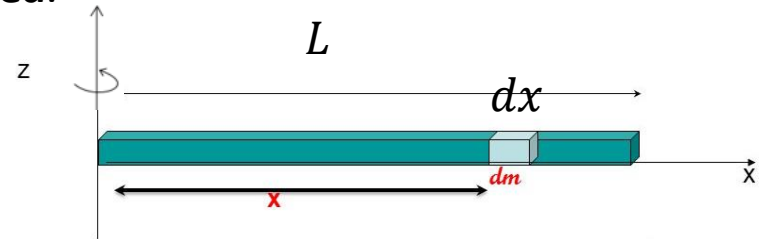
$$\rho = \frac{m}{L} \quad ; \quad \rho = \frac{dm}{dx}$$

Allora

$$dm = \rho dx$$

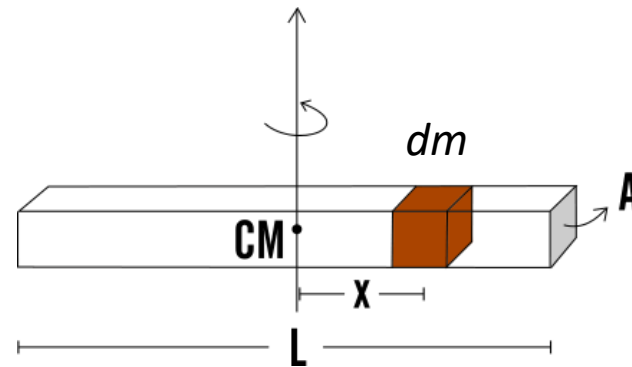
per cui l'integrale diventa:

$$I = \int_0^L x^2 \rho dx = \rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{m}{L} \frac{L^3}{3} = \frac{m L^2}{3}$$



Momento d'inerzia di un'asta

Calcoliamo il momento di inerzia di una asta omogenea di massa m e lunghezza L , **rispetto ad un asse ortogonale all'asta e passante per il CM**.



$$\rho = \frac{m}{L} \quad ; \quad \rho = \frac{dm}{dx}$$

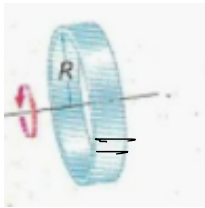
$$I_{CM} = \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \rho dx = \rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{m}{L} \frac{1}{3} \left(\left(\frac{L}{2} \right)^3 - \left(-\frac{L}{2} \right)^3 \right) =$$

$$\frac{m}{L} \frac{1}{3} \left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8} \right) = \frac{m}{L} \frac{1}{3} 2 \frac{L^3}{8} = \frac{1}{12} m L^2$$

Calcolo del momento d'inerzia

Esempio 2: anello omogeneo, I rispetto all'asse di simmetria passante per il centro di massa.

$I = \int r^2 dm$ nell'anello si ha che $r = \text{costante} = R$ per tutti gli elementi dell'anello quindi



$$I = R^2 \int dm = mR^2$$

Anello rispetto l'asse centrale	$I = MR^2$
Disco o cilindro rispetto l'asse centrale	$I = \frac{1}{2}MR^2$
Sfera	$I = \frac{2}{5}MR^2$
Asta sottile rispetto un'asse per il centro e perpendicolare all'asse	$I = \frac{1}{12}MR^2$

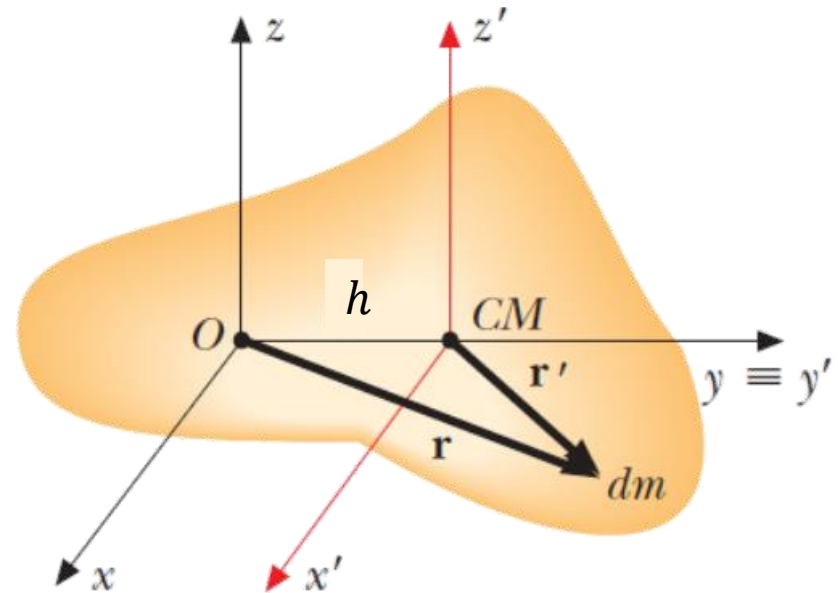
Teorema di Huygens-Steiner

Consideriamo un sistema di punti materiali (o un corpo rigido) di massa totale m . Sia z l'asse di rotazione e z' un altro asse, parallelo a z , ma passante per il CM.

Il teorema di Huygens-Steiner stabilisce che la relazione tra i momenti di inerzia rispetto ai due assi è la seguente:

$$I = I_{CM} + m h^2$$

con h la distanza tra i due assi.



Teorema di Huygens-Steiner

Dimostrazione: per un generico elemento dm del sistema, il cui vettore posizione è \vec{r}_i , si ha che:

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}$$

con \vec{r}'_i il vettore posizione riferita al CM, \vec{r}_{CM} il vettore posizione del CM rispetto ad O. In componenti abbiamo:

$$x_i = x'_i + x_{CM}$$

$$y_i = y'_i + y_{CM}$$

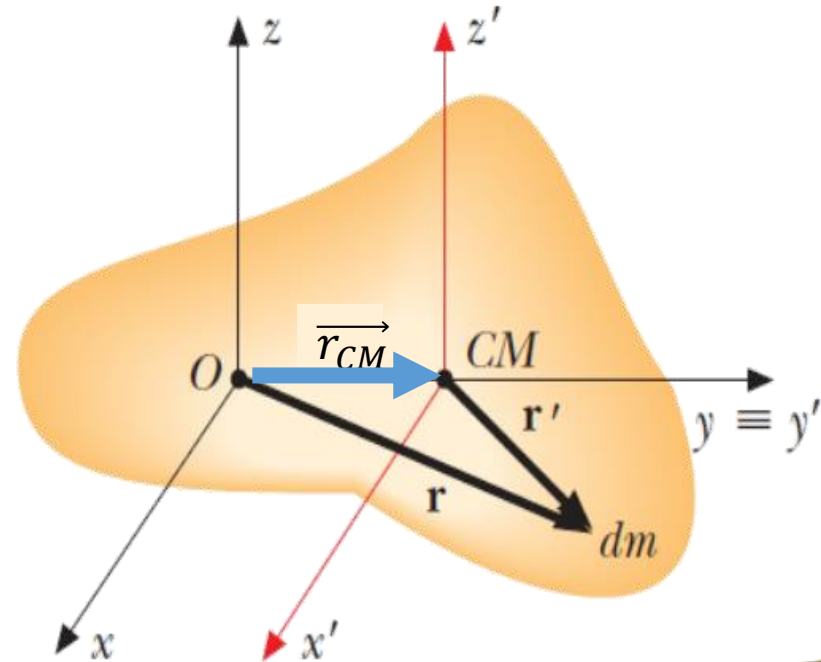
Per ciascun riferimento vale Pitagora:

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$$

$$r'^2_i = x'^2_i + y'^2_i$$

Analogamente per il raggio vettore del CM rispetto ad O:

$$r_{CM}^2 = x_{CM}^2 + y_{CM}^2 = h^2$$



Teorema di Huygens-Steiner

Ricordando che il momento d'inerzia è $I = \sum m_i r_i^2$
ed il CM è definito da: $x_{CM} = \frac{1}{m} \sum m_i x_i$, $y_{CM} = \frac{1}{m} \sum m_i y_i$
andando a sostituire nelle relazioni si ha:

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i [(x'_i + x_{CM})^2 + (y'_i + y_{CM})^2] \\ &= \sum m_i [x_i'^2 + 2x'_i x_{CM} + x_{CM}^2 + y_i'^2 + 2y'_i y_{CM} + y_{CM}^2] \\ &= \sum m_i [(x_i'^2 + y_i'^2) + (x_{CM}^2 + y_{CM}^2) + 2x'_i x_{CM} + 2y'_i y_{CM}] \\ &= \sum m_i r_i'^2 + \sum m_i h^2 + 2x_{CM} \sum m_i x'_i + 2y_{CM} \sum m_i y'_i \\ &= I_{CM} + m h^2 + 2x_{CM} \sum m_i x'_i + 2y_{CM} \sum m_i y'_i \end{aligned}$$

Ma $\sum m_i x'_i = m x'_{CM}$, ovvero la coordinata del CM nel suo sistema di riferimento (che è nulla) quindi $x'_{CM} = 0$ e analogamente $y'_{CM} = 0$ pertanto

$$I = I_{CM} + m h^2$$

Teorema H-S e teorema di König

Consideriamo l'energia cinetica di rotazione di un corpo rigido avente momento di inerzia I_z rispetto all'asse z di rotazione.

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Consideriamo un altro asse parallelo a z , distante h , ma passante per il CM (I'_z sarà il momento d'inerzia rispetto al CM):

$$E_k = \frac{1}{2} (I'_z + m h^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I'_z \omega^2 + \frac{1}{2} m h^2 \omega^2$$

Il CM, a sua volta, ruota rispetto a z e descrive un arco di raggio pari a $h \Rightarrow v_{CM} = h \omega \Rightarrow$

$$E_k = \frac{1}{2} I'_z \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

Il confronto con il teorema di König ci dice allora che quando il CM non è sull'asse di rotazione, l'energia cinetica è la somma di un termine che rappresenta una rotazione attorno al CM e di un termine che rappresenta la traslazione del CM.

Pendolo composto

Il **pendolo fisico** o **pendolo composto** è un corpo rigido di forma qualunque, che viene sospeso per un punto O distante h dal CM, e che possa oscillare per l'azione della forza peso in un piano verticale attorno ad un asse (orizzontale, passante per O) non passante per il CM.

Spostando l'oggetto dalla posizione di equilibrio esso oscillerà (per piccole oscillazioni) con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

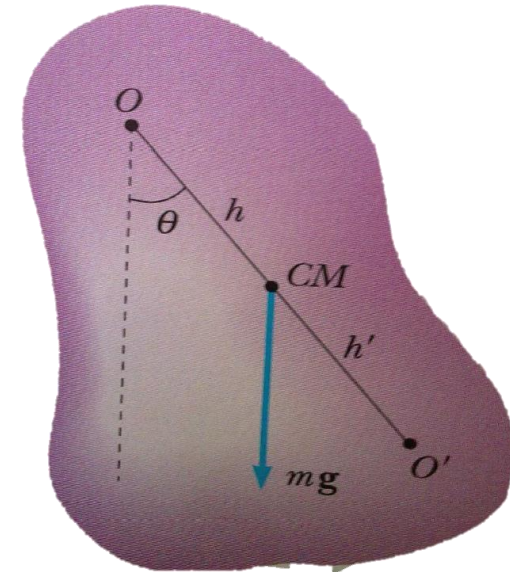
Il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione dell'oggetto è:

$$I_z = I_{CM} + m h^2$$

Il momento della forza peso è: $M^{(E)} = -mg h \sin \theta$

L'equazione del moto è: $M^{(E)} = \frac{dL_z}{dt} = I_z \alpha$

$$\Rightarrow -mg h \sin \theta = I_z \frac{d^2\theta}{dt^2}$$



Pendolo composto

$$I_z \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh \sin\theta$$

Che possiamo riscrivere come:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z} \sin\theta = 0$$

Per piccoli angoli: $\sin\theta \approx \theta$, per cui otteniamo l'equazione differenziale del moto armonico con

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

Con $\omega^2 = \frac{mgh}{I_z}$ la pulsazione al quadrato. Soluzione: $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$

e il periodo sarà $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

$l = \frac{I_z}{mh}$ è detta **lunghezza ridotta del pendolo composto** e corrisponde alla lunghezza del filo di un pendolo semplice che oscilla con lo stesso periodo.

Moto di puro rotolamento

Consideriamo il moto di un oggetto sferico o cilindrico (ad esempio una ruota) che rotola su un piano. Quando c'è una perfetta aderenza tra oggetto e piano, il punto di contatto C (che cambia istante per istante) ha velocità nulla ed il moto è chiamato **rotolamento senza strisciamento o di puro rotolamento**.

Nell'intervallo di tempo dt possiamo considerare il corpo come se ruotasse con velocità angolare ω attorno ad un asse (fisso nel tempo dt) passante per il punto di contatto C e ortogonale al piano.

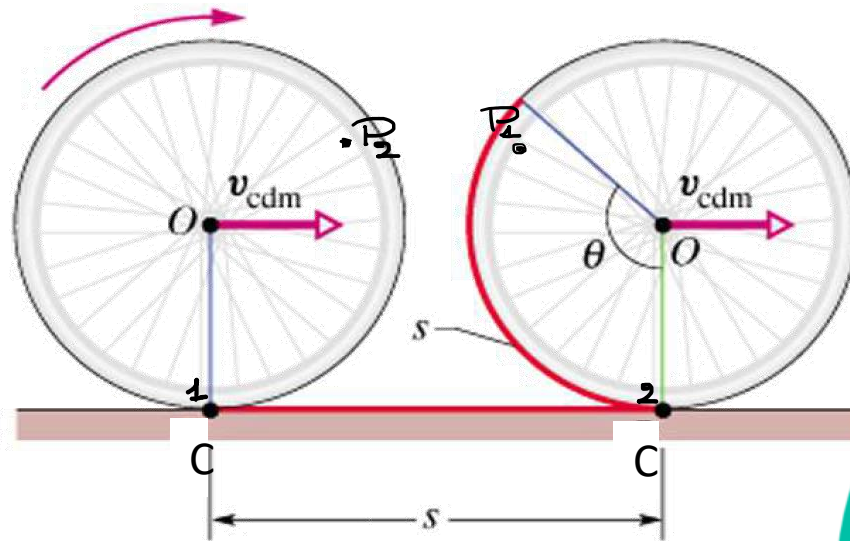
Nell'intervallo di tempo dt successivo il punto di contatto è un nuovo punto, C' , e si ripete la rotazione attorno al nuovo asse passante per C' e così via.

Inoltre $v_C = 0 \Rightarrow$ nell'intervallo di tempo dt agisce una forza che mantiene fermo il punto di contatto: si tratta di una forza di attrito (statico) con il piano.

La velocità dei punti della ruota si può scrivere come

$$\vec{v} = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

somma della velocità del CM e della velocità del punto rispetto al CM (\vec{r} è la distanza del punto dal CM).



Moto di puro rotolamento

Analizziamo le velocità per 3 punti caratteristici:

- centro di massa O: $v_O = v_{CM} = \omega R$
- punto opposto T: $v_T = |\vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{R}| = \omega R + \omega R = 2 \omega R$
- punto di contatto C: $v_C = |\vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{R}| = \omega R - \omega R = 0$

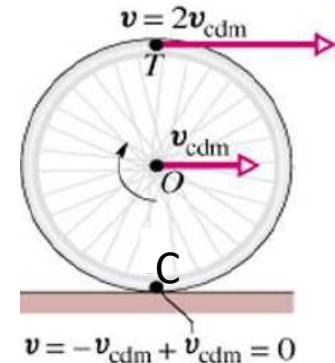
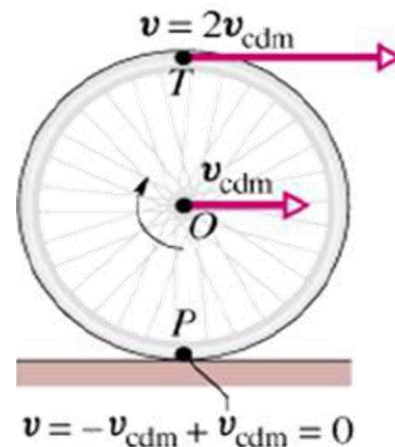
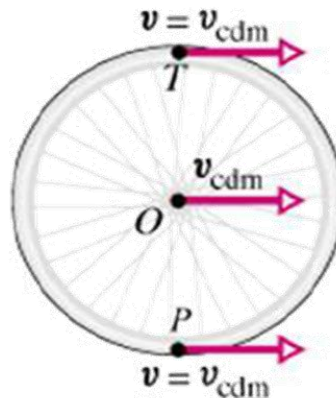
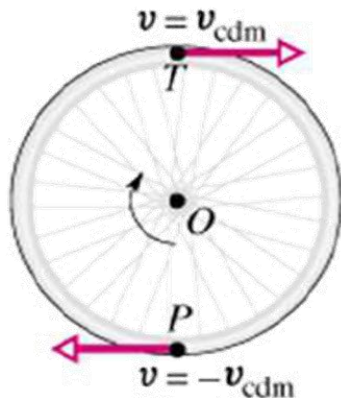
$$v_C = 0 \Rightarrow \vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \times \vec{R}$$

In modulo:

$$v_{CM} = \omega R \quad \text{e} \quad a_{CM} = \alpha R$$

Questo particolare moto di **roto-traslazione** è equivalente ad una **rotazione pura** attorno al CM con velocità $\omega = v_{cm}/R$ ed una **traslazione** del CM con velocità v_{CM} .

Rotazione pura + Traslazione pura = Moti di rotolamento



Corpo che rotola sul piano orizzontale - Esempio I (polo CM)

Analizziamo la dinamica del corpo di massa m e raggio r in puro rotolamento sul piano orizzontale sotto l'azione di una forza \vec{F} orizzontale. Per il CM si ha:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{f} + \vec{P} = m \vec{a}_{CM}$$

la reazione R del piano ha sia una componente normale che una tangenziale (che è l'attrito statico)

$$x : F - f = m a_{CM}$$

$$y : N - m g = 0$$

Inoltre, scegliendo il CM come polo:

$$\vec{M}_{CM} = \vec{r} \times \vec{f} = I_{CM} \vec{\alpha}$$

$$r f = I_{CM} \alpha = I_{CM} \frac{a_{CM}}{r}$$

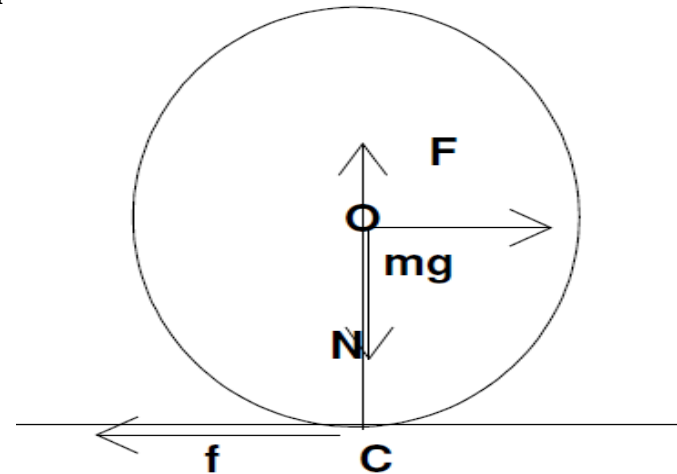
Ricaviamo f e sostituiamo nell'equazione della componente x:

$$a_{CM} = \frac{F}{m \left(1 + \frac{I_{CM}}{mr^2}\right)} \quad f = \frac{F}{1 + \frac{mr^2}{I_{CM}}}$$

Essendo f una forza di attrito statico, deve necessariamente verificarsi

$$f \leq \mu_s N = \mu_s m g \Rightarrow \frac{F}{1 + \frac{mr^2}{I_{CM}}} \leq \mu_s m g \Rightarrow F \leq \mu_s m g \left(1 + \frac{mr^2}{I_{CM}}\right)$$

Se F supera tale valore, il corpo rotola e striscia contemporaneamente.



Corpo che rotola sul piano orizzontale - Esempio I (polo C)

$$x : F - f = m a_{CM}$$

$$y : N - m g = 0$$

Scegliamo adesso il punto C come polo:

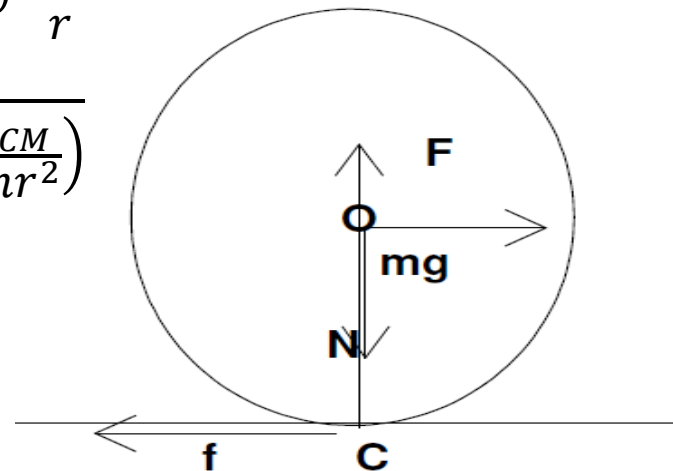
$$\vec{M}_C = \vec{r} \times \vec{F} = I_C \vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad r F = I_C \alpha$$

Dal Teorema di Huygens-Steiner ricaviamo: $I_C = I_{CM} + m r^2$

$$r F = (I_{CM} + m r^2) \alpha = (I_{CM} + m r^2) \frac{a_{CM}}{r}$$
$$F = \left(\frac{I_{CM}}{r^2} + m \right) a_{CM} \Rightarrow a_{CM} = \frac{F}{m \left(1 + \frac{I_{CM}}{m r^2} \right)}$$

Sostituendo nell'equazione della componente x:

$$f = \frac{F}{1 + \frac{m r^2}{I_{CM}}}$$



Abbiamo ottenuto lo stesso risultato di prima, ma scegliendo un polo diverso (in alcuni esercizi può rappresentare una comoda scorciatoia per i calcoli).

Corpo che rotola sul piano orizzontale - Esempio II

Possiamo far muovere una ruota anche mediante un motore che imprime una rotazione tramite un momento \vec{M} . Le equazioni del moto diventano:

Moto del CM: $\vec{R} + \vec{P} = m \vec{a}_{CM}$

T. Momento angolare (O): $\vec{M} + \vec{r} \times \vec{f} = I \vec{\alpha}$

da cui si ottengono le relazioni scalari:

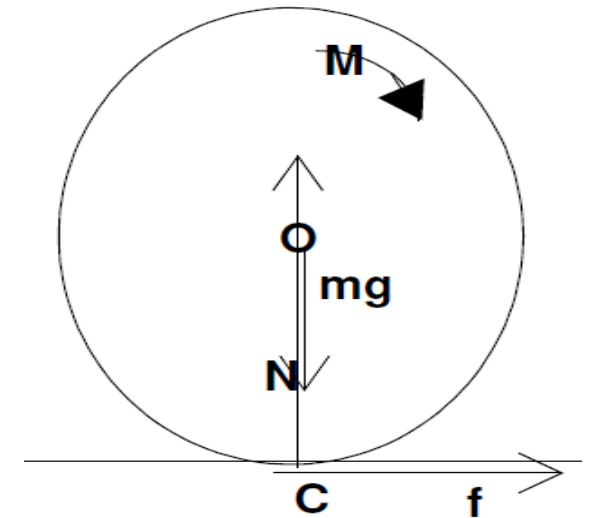
$$y : N - m g = 0$$

$$x : f = m a_{CM}$$

$$M - r f = I_{CM} \frac{a_{CM}}{r}$$

da cui si ottiene $a_{CM} = \frac{M}{mr(1 + \frac{I_{CM}}{mr^2})}$ $f = \frac{M}{r(1 + \frac{I_{CM}}{mr^2})}$

Osserviamo che mentre nell'esempio di prima \vec{f} si opponeva a \vec{F} , in questo esempio \vec{f} favorisce il moto, provocando l'accelerazione del CM. È, invece, il suo momento ad opporsi al momento \vec{M} del motore. Pertanto, nei casi generali di rotolamento non possiamo indicare a priori il verso della forza di attrito: è bene fissarlo arbitrariamente e confermare/negare l'ipotesi a seconda del segno della soluzione.



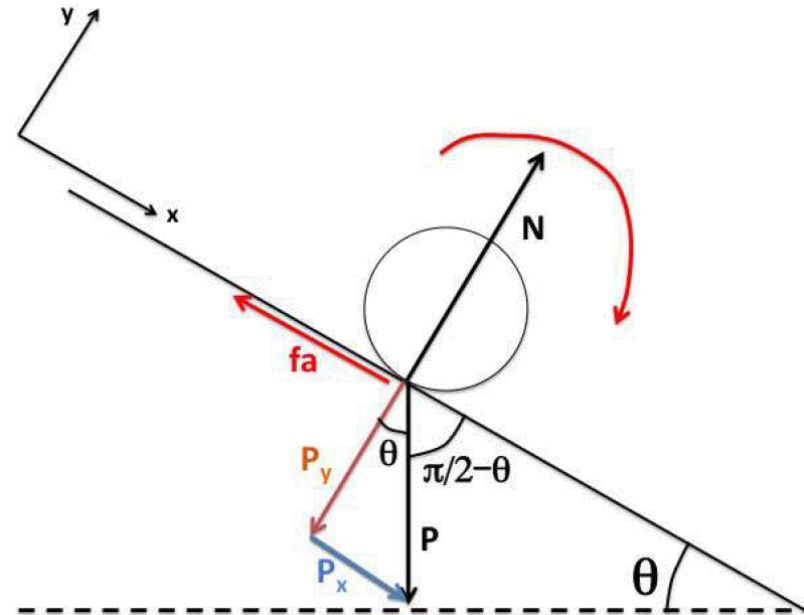
$$f \leq \mu_s N = \mu_s m g \Rightarrow \frac{M}{r(1 + \frac{I_{CM}}{mr^2})} \leq \mu_s m g \Rightarrow M \leq \mu_s m g r \left(1 + \frac{I_{CM}}{mr^2}\right)$$

Note

In tutti gli esercizi in cui si parla di rotolamento, si intende un puro rotolamento. Nel costruire il diagramma delle forze (diagramma di corpo libero) bisogna sempre aggiungere una **forza di attrito** perché è proprio la forza di attrito a realizzare la condizione di rotazione pura sul punto di contatto C ($a_C = 0$)! Il verso della forza di attrito si può ragionevolmente stabilire nei due casi fondamentali illustrati di seguito, ma in generale è determinato solo con la soluzione del problema.

Esempio 1 (piano inclinato)

Situazione in cui non ci sono momenti di forze esterne rispetto al CM: in questo caso è la forza di attrito a determinare il momento rotatorio; il verso è quindi indicato dalla rotazione del corpo.

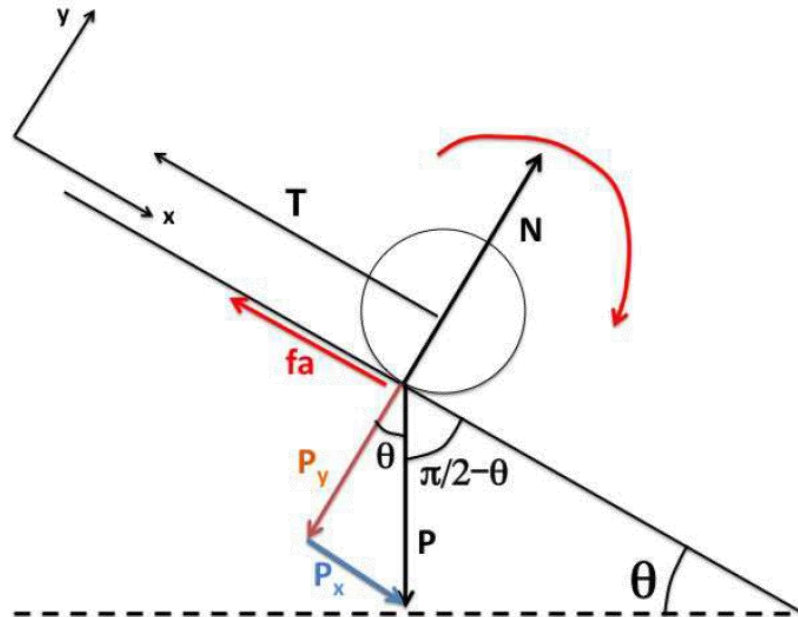


$$\left\{ \begin{array}{l} x : P_x - f_a = m a_{CM} \\ y : N - P_y = 0 \\ \vec{M}_{CM} = \vec{r} \times \vec{f}_a = I_{CM} \vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad r f_a = I_{CM} \alpha = I_{CM} \frac{a_{CM}}{r} \end{array} \right.$$

Note

Esempio 2 (piano inclinato)

Situazione con una tensione T (esercitata da una fune) applicata nel CM. Non vi sono momenti di forze rispetto al CM. Anche in questo caso è l'attrito a determinare la rotazione, il verso della rotazione è quello che determiniamo imponendo che sia fermo il punto di contatto C.

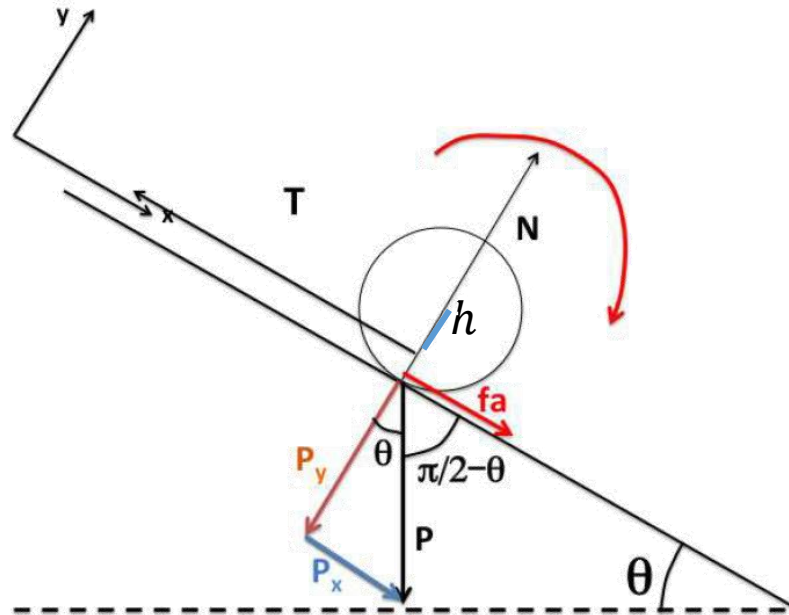


$$\left\{ \begin{array}{l} x : P_x - T - f_a = m a_{CM} \\ y : N - P_y = 0 \\ \overline{M}_{CM} = \vec{r} \times \vec{f}_a = I_{CM} \vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad r f_a = I_{CM} \alpha = I_{CM} \frac{a_{CM}}{r} \end{array} \right.$$

Note

Esempio 3 (piano inclinato)

Situazione in cui risultano a priori dei momenti di forze esterne rispetto al CM: la fune **non** è applicata nel CM, bensì in un punto distante h da esso, e pertanto produce un momento; in questo caso la forza di attrito produce un momento di verso opposto, il verso è quindi opposto agli altri momenti.



$$\left\{ \begin{array}{l} x : P_x - T + f_a = m a_{CM} \\ y : N - P_y = 0 \\ \overline{M}_{CM} = \vec{r} \times \vec{f}_a + \vec{h} \times \vec{T} = I_{CM} \vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad hT - r f_a = I_{CM} \alpha = I_{CM} \frac{a_{CM}}{r} \end{array} \right.$$

Riepilogo rotolamento

Dal diagramma delle forze si scrivono le equazioni della dinamica:

$$\vec{R}^{(E)} = m \vec{a}_{CM}$$

$$\vec{M}^{(E)} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I \vec{\alpha}$$

con l'aggiunta della condizione di puro rotolamento $|a_{CM}| = |\alpha R|$

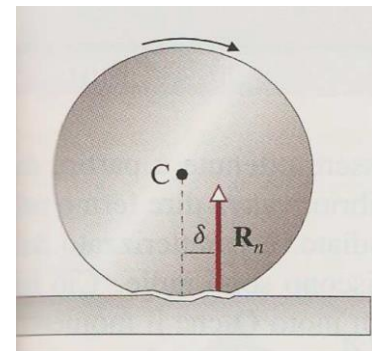
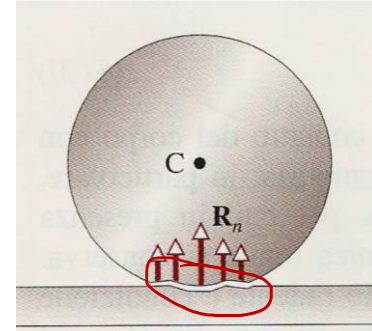
Questa condizione la risolviamo con la seguente regola pratica:

- si sceglie il verso di rotazione intuitivo secondo la direzione del moto e lo si considera positivo se a_{CM} è positivo nel verso del moto (o comunque concordi tra loro);
- se α e a_{CM} sono stati scelti concordi tra loro allora $a_{CM} = +\alpha R$;
- i momenti delle forze devono seguire la stessa convenzione;
- semplifichiamo subito il sistema scrivendolo come due equazioni in due incognite.
- Negli esercizi con i fili va poi considerato il collegamento tra gli oggetti usando l'inestensibilità del filo che li collega.
- In alternativa, se si scelgono gli assi x-y come più opportuni, si considera come verso positivo dei momenti (asse-z) quello corrispondente al verso antiorario

Conservazione energia – attrito volvente

Nel moto del puro rotolamento **l'energia meccanica si conserva** in quanto la forza di attrito, pur essendo non nulla, agisce su un punto fermo producendo lavoro nullo. Sperimentalmente, però, un corpo che rotola tende a rallentare, a causa dell'**attrito volvente** (che trascureremo negli esercizi). In realtà si hanno **deformazioni** sia del piano che dell'oggetto che rotola, tali che il contatto avvenga su una superficie più estesa causando la comparsa di un momento di forze delle reazioni vincolari, che sono negative quando l'oggetto rotola.

La schematizzazione che si può fare è quella mostrata in figura. Assumendo un campo di forze parallele: il momento risulterà del tipo $M = R\delta$ con δ coefficiente di attrito volvente che dipenderà dal materiale che costituisce le superfici di contatto.

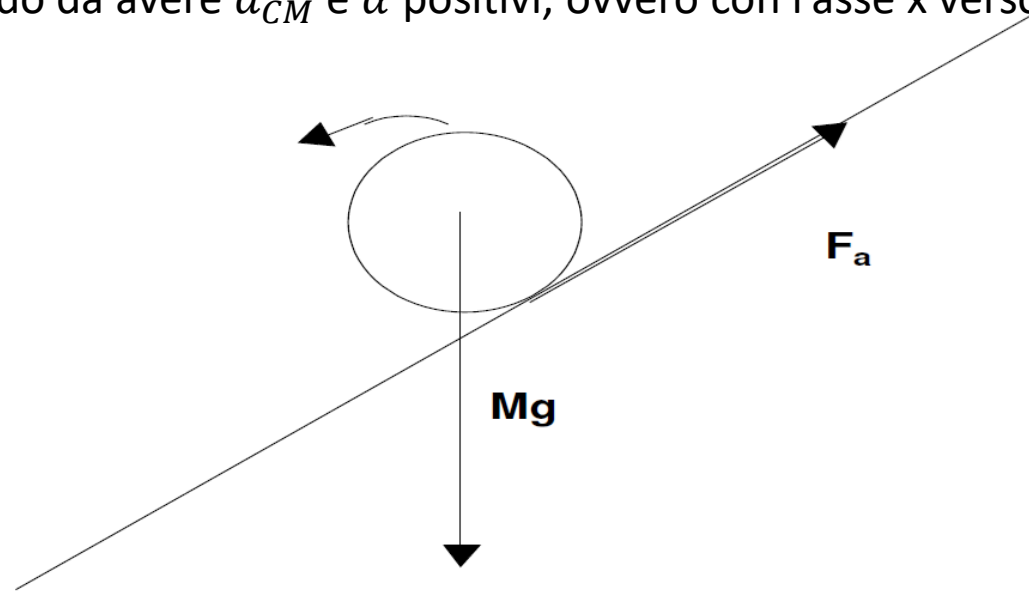


Rotolamento sul piano inclinato - esempio

Consideriamo che una sfera (o un cilindro) che rotoli senza strisciare su piano inclinato.

Determiniamo l'accelerazione del centro di massa.

Scegliamo gli assi in modo da avere a_{CM} e α positivi, ovvero con l'asse x verso il basso:



$$(x) : +Mg \sin \theta - F_a = Ma_{cm} \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (y) : -Mg \cos \theta + N = 0 \end{array} \right.$$

$$+\vec{r} \wedge \vec{F}_a = I\vec{\alpha} \Rightarrow \Rightarrow$$

$$+rF_a = I_{cm}\alpha$$

Rotolamento sul piano inclinato - esempio

A queste equazioni va aggiunta la condizione di rotolamento:

$$|\vec{a}_{CM}| = |\vec{\alpha} \times \vec{r}|$$

e tenendo conto che quando $\alpha > 0$ si ha $a_{CM} > 0$ (per nostra scelta di orientazione di assi), la condizione di rotolamento diventa $a_{CM} = +\alpha R$

Sostituendo questa relazione nella terza equazione, otteniamo:

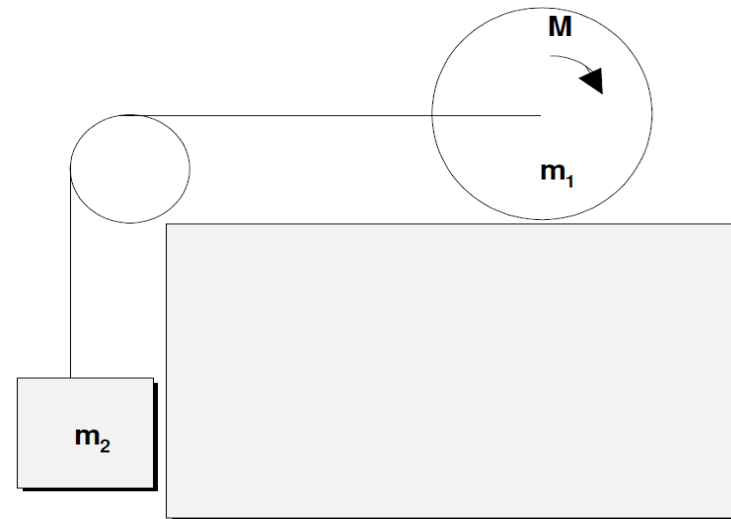
$$F_a = +I_{CM} \frac{\alpha}{r} = +I_{CM} \frac{a_{CM}}{r^2}$$

Sostituiamo l'espressione di F_a nella (1):

$$+ M g \sin \theta - I_{CM} \frac{a_{CM}}{r^2} = M a_{CM} \quad \Rightarrow \quad a_{CM} = \frac{M g \sin \theta}{M + \frac{I_{CM}}{r^2}}$$

Problema 7.3

Siano $m_2 = 10 \text{ kg}$, la carrucola di massa trascurabile, il cilindro di massa $m_1 = 20 \text{ kg}$ e di raggio $r = 0.25 \text{ m}$ che rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Sul cilindro è applicato un momento costante $M = 30 \text{ Nm}$. Calcolare a , T ed il minimo valore di coeff. di attrito statico.



Leggi di conservazione nel moto dei corpi rigidi

Nel caso particolare in cui $\vec{F}^{(E)} = 0$ e $\vec{M}^{(E)} = 0$, assumendo come polo un punto fisso in un sistema di riferimento inerziale o il centro di massa, le due leggi implicano:

$$\vec{F}^{(E)} = 0 \Rightarrow m \vec{v}_{CM} = cost$$

Ovvero si ha la conservazione quantità di moto e del momento angolare:

$$\vec{L} = cost$$

Se l'asse di rotazione scelto coincide con un'asse principale di inerzia $\vec{L} = I \vec{\omega}$.

Di conseguenza $\vec{L} = cost \Rightarrow \vec{\omega} = cost$

Il fatto che \vec{L} sia costante, negli altri casi, non implica automaticamente che lo sia $\vec{\omega}$.

La legge di conservazione dell'energia meccanica per il moto di un corpo rigido è valida quando non ci sono forze di attrito o quando esse non compiono lavoro (come nel moto di puro rotolamento). La presenza dei momenti delle forze di attrito che agiscono sull'asse di rotazione determinano un lavoro che provoca una riduzione dell'energia meccanica.

Impulso angolare. Momento dell'impulso

Possiamo scrivere una forma simile a quella già ricavata per il teorema dell'impulso

($\vec{J} = \int_0^t \vec{F} dt = \Delta\vec{p}$), utilizzando i momenti delle forze.

In questo caso abbiamo che:

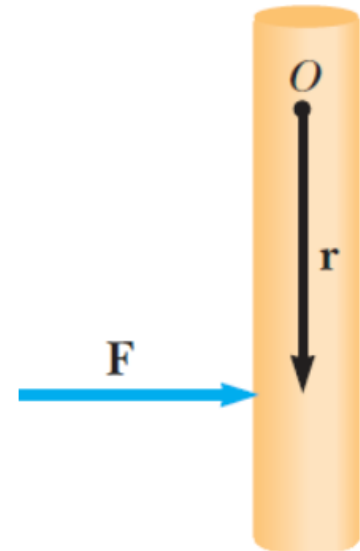
$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \Delta\vec{L}$$

che possiamo definire **teorema dell'impulso angolare**, mentre l'integrale del momento prende il nome di impulso angolare o impulso del momento.

Assumendo che una forza \vec{F} venga applicata per un intervallo di tempo piccolo (forza impulsiva) a distanza \vec{r} dal centro di sospensione del corpo (polo O)

$$\int \vec{M} dt = \int (\vec{r} \times \vec{F}) dt = \vec{r} \times \int \vec{F} dt = \vec{r} \times \vec{J} = \Delta\vec{L}$$

La grandezza $\vec{r} \times \vec{J}$ è il momento dell'impulso e questo teorema, **teorema del momento dell'impulso**, dimostra che un impulso porta non solo ad una variazione della quantità di moto, ma anche ad una variazione del momento angolare.



Impulso angolare su un'asta

Si consideri un pendolo composto costituito da un'asta di lunghezza l e massa m , libera di ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per un suo estremo O. Inizialmente l'asta è ferma in posizione verticale. Determinare l'impulso J da applicare ad una distanza $r \leq l$ da O in modo da far compiere all'asta una rotazione di 90° (e arrivare in orizzontale).

Il momento dell'impulso da applicare rispetto ad O è $\vec{r} \times \vec{J}$, quindi applicando il teorema dell'impulso angolare

$$\vec{r} \times \vec{J} = \Delta \vec{L}$$
$$r J = I_O \omega_f - I_O \omega_i$$

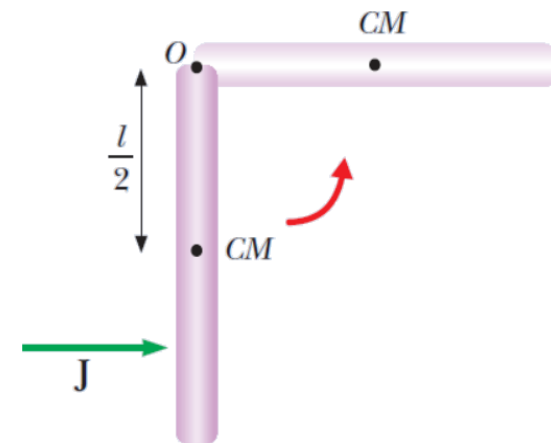
Ricordiamo che il momento d'inerzia per un'asta rispetto all'estremo è $I_O = \frac{1}{3} m l^2$.

Poiché inizialmente $\omega_i = 0$, posto $\omega_f = \omega$, otteniamo

$$r J = \frac{1}{3} m l^2 \omega \Rightarrow \omega = \frac{3 r J}{m l^2}$$

Per la conservazione dell'energia meccanica rispetto al CM, che in seguito alla rotazione si è sollevato di $\frac{l}{2}$

$$m g \frac{l}{2} = \frac{1}{2} I_O \omega^2$$



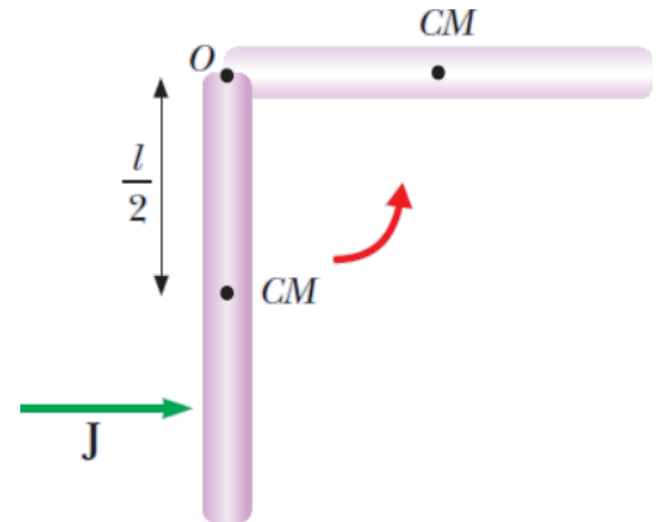
Impulso angolare su un'asta

$$m g \frac{l}{2} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 \Rightarrow m g l = I_O \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{m g l}{I_O}} \Rightarrow$$

$$\frac{3 r J}{m l^2} = \sqrt{\frac{m g l}{\frac{1}{3} m l^2}}$$

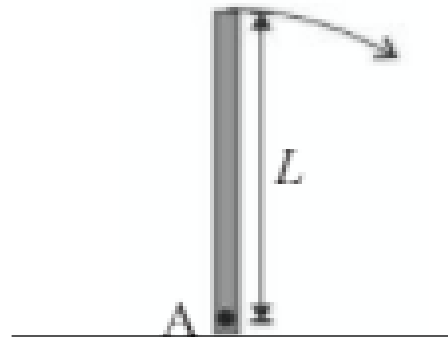
$$\frac{3 r J}{m l^2} = \sqrt{\frac{3 g}{l}} \Rightarrow$$

$$J = \frac{\sqrt{3 g} m l^2}{3 r \sqrt{l}} = \frac{m l}{r} \sqrt{\frac{g l}{3}}$$



Problema 7.4

Un'asta è posta dritta in verticale quando ad un certo momento cade ruotando attorno all'estremo A (che non si muove) in contatto con il pavimento. Sapendo che $m = 4.2 \text{ kg}$, $l = 0.8 \text{ m}$, calcolare la velocità e l'accelerazione dell'estremo P dell'asta al momento dell'urto.



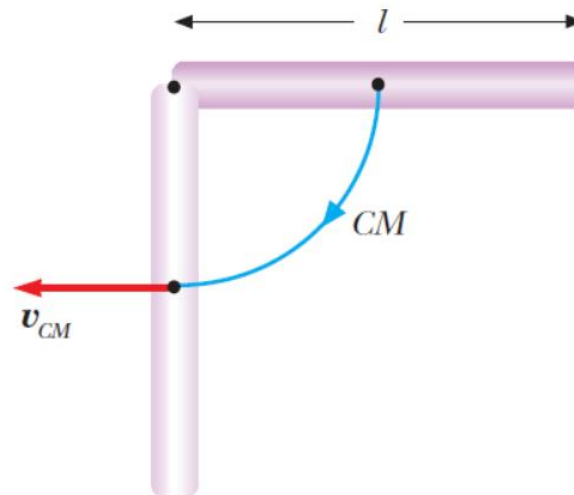
Soluzione:

$$v_P = 4,85 \text{ m/s}$$

$$a_T = 14,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, a_C = 29,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Problema 7.5

Un'asta di massa $m = 4.2 \text{ kg}$ e lunghezza $l = 0.8 \text{ m}$ può ruotare in un piano verticale attorno a un suo estremo. L'asta viene lasciata cadere con velocità iniziale nulla, dalla posizione orizzontale. Determinare velocità angolare ω e velocità del centro di massa v_{CM} quando l'asta raggiunge la posizione verticale.

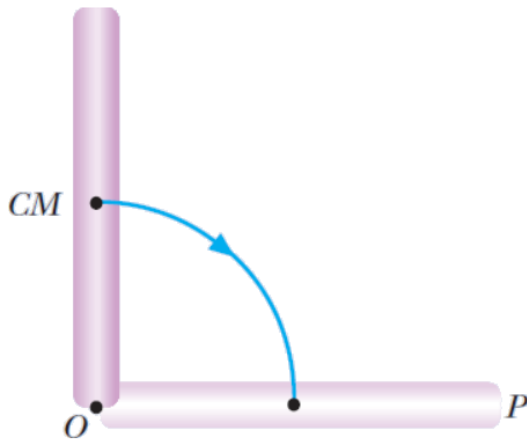


Soluzione:

$$\omega = 6,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$
$$v_{CM} = 2,4 \text{ m/s}$$

Problema 7.6

Un'asta è posta dritta in verticale quando ad un certo momento cade ruotando attorno all'estremo (che non si muove) in contatto con il pavimento. È presente un momento di attrito pari a $M_a = 4.5 \text{ Nm}$. Sapendo che $m = 4.2 \text{ kg}$, $l = 0.8 \text{ m}$, calcolare velocità e accelerazione dell'estremo P dell'asta al momento dell'urto.



Soluzione:

$$v_P = 3,67 \text{ m/s}$$

$$a_T = 10,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, a_C = 16,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Problema 7.7

Una piattaforma costituita da un disco di massa $m_d = 200 \text{ kg}$ e raggio $R = 2\text{m}$, ruota senza attrito attorno ad un asse verticale passante per il centro. Una persona di massa $m = 60 \text{ kg}$ si muove dal bordo verso il centro muovendosi in direzione radiale. Quando la persona è sul bordo la $\omega = 5 \text{ rad/s}$.
Calcolare ω quando la persona è a distanza $r = R/4 = 50 \text{ cm}$.

Soluzione:

$$\omega_f = 7.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Equilibrio statico del corpo rigido

Le condizioni di **equilibrio statico** per un corpo inizialmente in quiete sono:

- $\vec{P} = cost \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = 0$ I requisito equilibrio
- $\vec{L} = cost \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \sum \vec{M}_{ext} = 0$ Il requisito equilibrio

Ricordiamo che se è $\sum \vec{F}_{ext} = 0$, $\sum \vec{M}_{ext}$ è indipendente dal polo, quindi se è nullo rispetto ad un polo, lo sarà rispetto a qualunque altro polo.

L'equilibrio statico inoltre richiede che la quantità di moto

$$\vec{P}_{tot} = m\vec{v}_{cm} = 0$$

Consideriamo un corpo sospeso in un punto O. Se, dopo l'applicazione di una forza esterna, esso ritorna spontaneamente alla condizione di equilibrio statico, allora si dice che **l'equilibrio è stabile** (in tal caso il CM è più in basso rispetto ad O) viceversa si parlerà di **equilibrio instabile** (in tal caso il CM è più in alto rispetto ad O). Se, infine, O coincide con il CM, il corpo resta in quiete in qualsiasi posizione angolare e si dice che **l'equilibrio è indifferente**.

Problema 7.8

Una scala di lunghezza $L=12$ m e massa $m=45$ kg è appoggiata ad un muro liscio ad altezza $h=9.3$ m. Il CM della scala è ad $1/3$ della sua lunghezza (dal basso). Un vigile di massa $m=72$ kg si arrampica sulla scala sino a metà percorso.

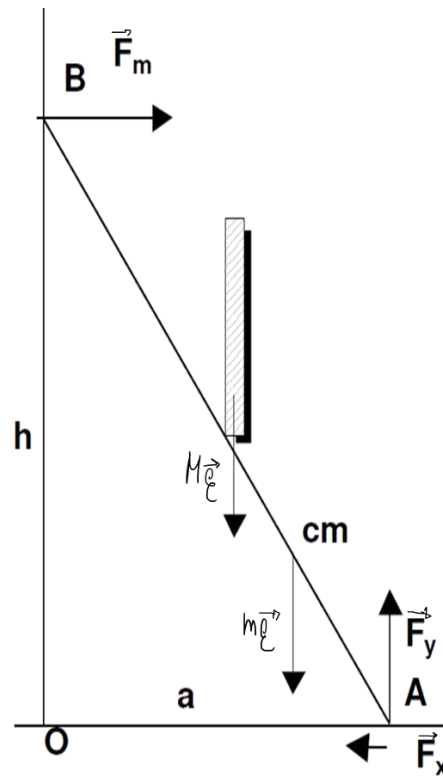
Determinare le forze che agiscono sul muro e sul pavimento se la scala non si muove.

Soluzione:

$$F_M \approx 410 \text{ N}$$

$$F_y = 1100 \text{ N}$$

$$F_x = F_M$$



Problema 7.9

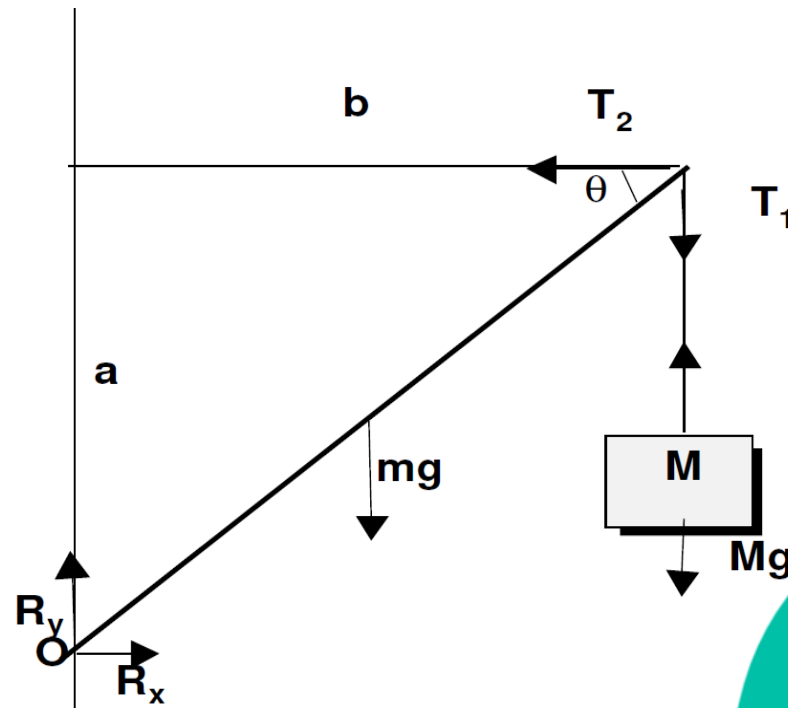
Una cassaforte di massa $M=430$ kg, è sospesa ad una fune fissata all'estremità della struttura in figura, avente dimensioni $a=1.9$ m, $b=2.5$ m, formata da una barra omogenea, di massa $m=85$ Kg, incernierata in O ad una parete verticale e tenuta inclinata da un cavo di acciaio di massa trascurabile.

- 1) Trovare la tensione del cavo T.
- 2) Trovare la forza complessiva agente sul vincolo

Soluzione:

$$T_2 = 6100 \text{ N}$$

$$R = 7900 \text{ N}$$

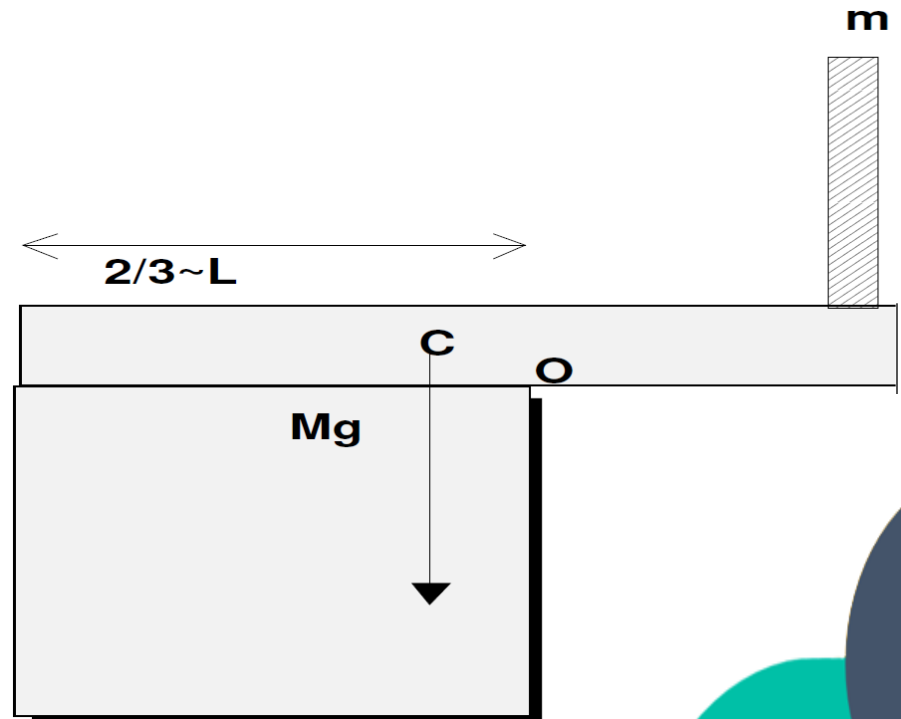


Problema 7.10

Un'asse di legno di lunghezza L e di massa $m=5$ kg è poggiata su un basamento per $2/3$ della sua lunghezza. Sopra l'asse si muove un uomo di massa $m=70$ kg. Determinare qual è la massima posizione dove può posizionarsi l'uomo senza che l'asse si ribalti.

Soluzione:

$$x = \frac{35}{42}L$$



Problema 7.11

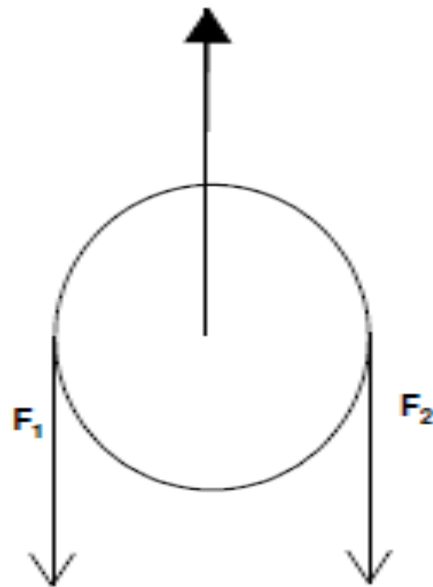
Una sbarra metallica incernierata in un muro ha lunghezza $L=3$ m e peso $P_s=200$ N. Su di essa vi è un cubo di peso $P_c=300$ N posto a distanza x dal muro. La sbarra è sostenuta da un filo di tensione massima 500 N ed inclinato di 30° rispetto l'orizzontale. Determinare il massimo valore \bar{x} affinché non si rompa il filo e la forza agente sul perno nel muro.

Soluzione:

$$x = 1,5 \text{ m}$$

Problema 7.12

Determinare la condizione d'equilibrio per una carrucola sospesa. Si trascurino massa della carrucola e dei fili.



Soluzione:

$$T = 2F$$