Fisica Generale – Modulo A

Classe B

FENOMENI D'URTO

Dott.ssa **Marilena Giglio**

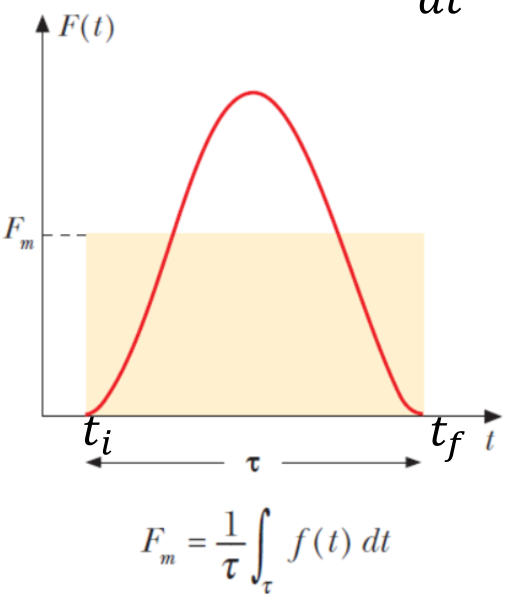
marilena.giglio@poliba.it

Urti tra due punti materiali

Un urto è un evento isolato durante il quale una forza intensa agisce per un tempo breve rispetto ai tempi di osservazione del moto, sui corpi che entrano in contatto tra loro, detta **forza impulsiva.** Tali forze modificano la quantità di moto di ciascun punto.

Consideriamo l'urto tra due punti materiali: le forze che si sprigionano nel contatto tra i due punti saranno $\overrightarrow{F}(t)$ e $-\overrightarrow{F}(t)$ per il 3° principio della dinamica (sono forze interne rispetto al sistema costituito dai due punti materiali).

$$\frac{\overrightarrow{dP}}{dt} = \overrightarrow{F}(t) \Longrightarrow \overrightarrow{dP} = \overrightarrow{F}(t)dt \Rightarrow \int_{\vec{P}_i}^{\vec{P}_i} \overrightarrow{dP} = \int_{t_i}^{t_f} \overrightarrow{F}(t)\, dt$$



Definiamo $\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \overrightarrow{F}(t)\, dt$ **impulso** dell'urto. Graficamente l'impulso è l'area sotto la curva $F(t)$ tra t_i e t_f.

Troviamo allora che vale il **Teorema dell'impulso**

$$\Delta\overrightarrow{P} = \vec{J}$$

Urti tra due punti materiali

Poiché le forze impulsive sono **interne al sistema** ed il tempo di interazione è molto piccolo, il sistema di oggetti che urtano è praticamente **chiuso ed isolato**.
Per tali sistemi abbiamo visto che

$$\overrightarrow{F}^{(E)} = 0 \;\Rightarrow \frac{\overrightarrow{dP}}{dt} = 0 \;\Rightarrow \overrightarrow{P}_{tot} = cost$$

Questo significa che, in assenza di forze esterne, si verifica la **conservazione della quantità di moto totale**.

Considerati due punti materiali di masse m_1 e m_2 che urtano tra loro, le quantità di moto totali del sistema nell'istante precedente e successivo all'urto sono:

$$\overrightarrow{P}_{in} = m_1\overrightarrow{v}_{1,in} + m_2\overrightarrow{v}_{2,in}$$
$$\overrightarrow{P}_{fin} = m_1\overrightarrow{v}_{1,fin} + m_2\overrightarrow{v}_{2,fin}$$

Con $\overrightarrow{P}_{in} = \overrightarrow{P}_{fin}$.

La quantità di moto del CM rimane invariata nell'urto:

$$\overrightarrow{P} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{v}_{CM} = \overrightarrow{P}_{in} = \overrightarrow{P}_{fin} = cost$$

Urti tra due punti materiali

Quindi in un processo di urto tra punti materiali:

- L’urto comporta uno **scambio di quantità di moto** tra due punti **sotto forma di impulsi dovuti alle forze interne** tra gli stessi punti materiali.

- La quantità di moto totale prima dell’urto è uguale alla quantità di moto totale dopo l’urto**: la quantità di moto del sistema si conserva.**

Poiché non è noto a priori se le forze interne impulsive sono conservative, non si può assumere la conservazione dell’energia meccanica del sistema durante l’urto.

Poiché durante l’urto la posizione dei punti non varia, allora la variazione dell’energia meccanica sarà solo dovuta alla variazione dell’energia cinetica. E dal momento che non sappiamo se l’energia meccanica si conservi, **non si può assumere che l’energia cinetica si conservi durante l’urto.**

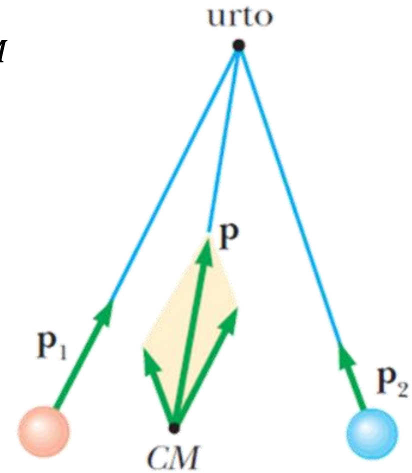
Sistema del laboratorio e sistema del CM

Nel sistema di riferimento inerziale, o **sistema del laboratorio** (chiuso e isolato)

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} = \frac{\vec{P}_{tot}}{m}$$

Essendo $\vec{P}_{tot} = cost$ e m= $cost \implies \vec{v}_{CM} = cost$

Se i due punti materiali si muovono con velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ nel sistema del laboratorio e $\vec{v'}_1$ e $\vec{v'}_2$ nel **sistema del CM** , $\quad \vec{v}_1 = \vec{v'}_1 + \vec{v}_{CM} \quad , \vec{v}_2 = \vec{v'}_2 + \vec{v}_{CM}$



$$\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM}$$

D'altra parte, $\vec{P} = m_1\left(\vec{v'}_1 + \vec{v}_{CM}\right) + m_2\left(\vec{v'}_2 + \vec{v}_{CM}\right) =$

$$= (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM} + \left(m_1 \vec{v'}_1 + m_2 \vec{v'}_2\right)$$

$$\implies m_1 \vec{v'}_1 + m_2 \vec{v'}_2 = 0$$

$$\vec{P'} = 0 \implies m_1\vec{v'}_{1,in} + m_2\vec{v'}_{2,in} = 0 = m_1\vec{v'}_{1,fin} + m_2\vec{v'}_{2,fin} \implies$$

$$\vec{p'}_{1,in} = -\vec{p'}_{2,in} \qquad \vec{p'}_{1,fin} = -\vec{p'}_{2,fin}$$

Quindi dal CM, le particelle appaiono muoversi una contro l'altra verso il CM, con quantità di moto eguali in modulo ed opposte. I punti si urtano proprio nel CM.

Urti elastici ed anelastici

- Gli urti nei quali oltre alla quantità di moto si conserva anche l'energia cinetica si dicono **urti elastici**. In questi urti si potrà applicare la conservazione della quantità di moto e la conservazione dell'energia meccanica.

- Tutti gli altri tipi di urto sono invece **urti anelastici** nei quali l'energia cinetica non è conservata e viene dissipata (totalmente o in parte) in energia termica, acustica o in deformazioni dei corpi che si urtano.

- Nel caso in cui dopo l'urto i corpi restano attaccati per formare un unico corpo puntiforme si parla di **urto completamente anelastico**.

Urto elastico

In un urto elastico le forze interne sono conservative.
In questo tipo di urti abbiamo che:

$$\vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin}$$

$$m_1\,\vec{v}_{1,i} + m_2\vec{v}_{2,i} = m_1\,\vec{v}_{1,f} + m_2\vec{v}_{2,f}$$

ed inoltre

$$E_{k,in} = E_{k,fin}$$

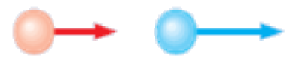
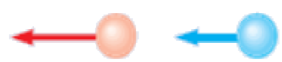
$$\frac{1}{2}m_1v_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,f}^2$$

In un urto centrale i punti materiali si muovono prima e dopo l'urto lungo la stessa direzione:

$$\begin{cases} m_1v_{1,i} + m_2v_{2,i} = m_1v_{1,f} + m_2v_{2,f} = (m_1 + m_2)\,\vec{v}_{CM} \\ \frac{1}{2}m_1v_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,f}^2 \end{cases}$$

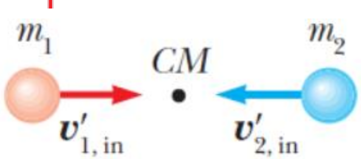
$$\Longrightarrow \qquad \begin{cases} v_{1,f} = \dfrac{(m_1 - m_2)v_{1,i} + 2m_2v_{2,i}}{m_1 + m_2} \\ v_{2,f} = \dfrac{(m_2 - m_1)v_{2,i} + 2m_1v_{1,i}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

Urto centrale

Stato iniziale	Stato finale	$v_{1,fin}$	$v_{2,fin}$
		>0	>0
		<0	>0
		>0	>0
		<0	<0
		<0	>0

prima dell'urto

dopo l'urto nel laboratorio



prima dell'urto

dopo l'urto nel CM

Urto completamente anelastico

Poiché a seguito dell'urto i due punti rimangono attaccati, si avrà

$$\vec{P}_{in} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$
$$\vec{P}_{tot,f} = (m_1 + m_2) \vec{v}_f$$

quindi si ottiene

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_f = (m_1 + m_2) \vec{v}_{CM}$$

L'energia cinetica invece prima e dopo l'urto cambia:

$$E_{k,i} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 + E'_k$$

(avendo applicato il teorema di Konig). Dopo l'urto invece:

$$E_{k,f} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 < E_{k,i}$$

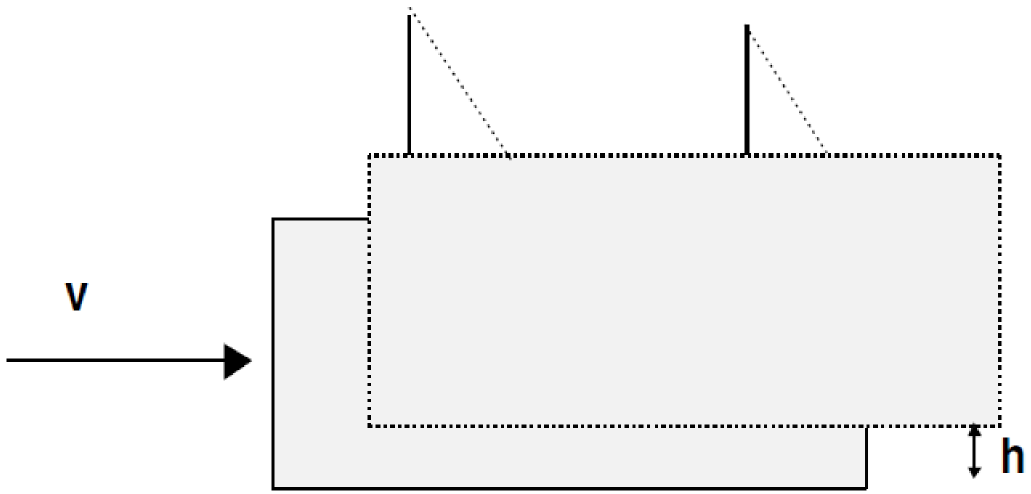
L'energia cinetica assorbita è:

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = -E'_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Quindi durante l'urto le <u>forze interne</u> hanno compiuto un lavoro per deformare il corpo e per questa <u>non sono conservative</u>.

Pendolo balistico

Il pendolo balistico è un dispositivo che veniva usato per misurare la velocità di un proiettile, costituito da un blocco di legno, sospeso verticalmente.
Supponiamo che il pendolo di massa M= $5.4\ kg$ sia tenuto sospeso da due funi. Un proiettile di massa $m = 9.5\ g$ è sparato orizzontalmente contro il blocco rimanendovi conficcato. Il sistema blocco + proiettile si sposta verso destra sollevandosi di $h = 6.3\ cm$. Qual era la velocità del proiettile al momento dell'urto?



La soluzione del problema avviene distinguendo l'evento in due fasi:
a) Urto (1D)
b) Moto del sistema urtato (immediatamente dopo l'urto)

Pendolo balistico

(a) **urto totalmente anelastico**.
Applichiamo la conservazione della quantità di moto:

$$m v_m + M v_M = (m + M) v_f$$

$v_M = 0$ in quanto inizialmente fermo $\Rightarrow \quad m\, v_m = (m + M)\, v_f$ (1)

(b) Il sistema blocco+proiettile ha adesso una certa velocità v_f ed è soggetto alla sola forza peso, conservativa. Quindi **l'energia meccanica dopo l'urto si conserva**:

$$E_{p,in} + E_{k,in} = E_{p,fin} + E_{k,fin}$$

con $E_{p,in} = 0$ e $E_{k,fin} = 0$

$$E_{k,in} = \frac{1}{2}(m + M)\, v_f^2$$
$$E_{p,fin} = (m + M)\, g\, h$$

$$\frac{1}{2}(m + M)\, v_f^2 = (m + M)\, g\, h \qquad (2)$$

$\Longrightarrow \quad v_f^2 = 2\, g\, h$

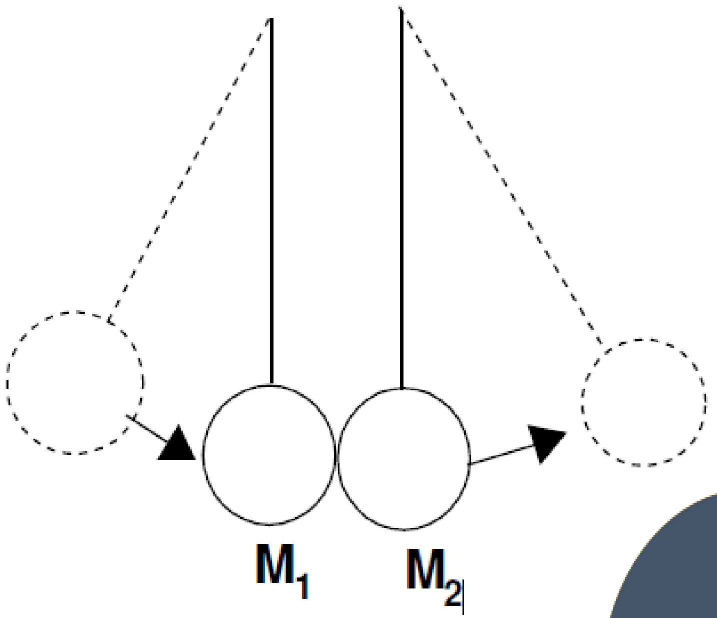
Mettendo ora a sistema la (1) con la (2) otteniamo:

$$v_p = \frac{m + M}{m} v_f = \frac{m + M}{m} \sqrt{2\, g\, h} = 630 \frac{m}{s}$$

Problema 8.1

Due sfere metalliche, come in figura, sono inizialmente in contatto. La sfera 1 ha massa $M_1 = 30\ g$ viene lasciata dopo essere sollevata verso sinistra sino ad una altezza $h_1 = 8.0$ cm. Nella caduta urta elasticamente la massa $M_2 = 75\ g$. Qual è la velocità $v_{1,f}$ della sfera 1 dopo l'urto?

Il processo è a due fasi:
a) caduta sfera;
b) urto tra due sfere (considerate come punti materiali)

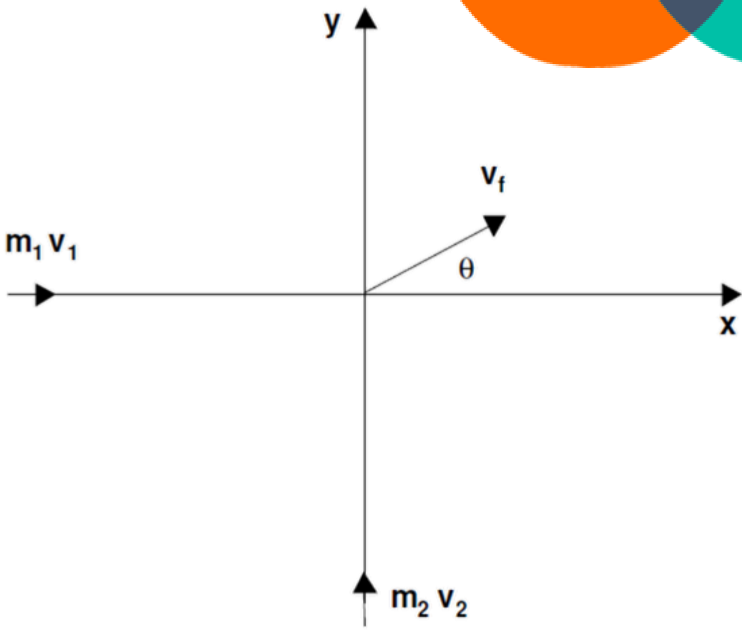


Soluzione:

$$v_{1,f} = -0{,}54\ m/s$$

Problema 8.2: urto 2D

Due punti si urtano in modo totalmente anelastico con velocità v_1 diretta nel verso positivo dell'asse x e v_2 nel verso positivo dell'asse y. Supponendo che l'urto avvenga nell'origine, che $m_1 = 83$ kg, $m_2 = 55$ kg, v_1 =6.2 km/h e v_2 =7.8 km/h, determinare $\overrightarrow{v}_f$.



Soluzione:
$v_f = 4{,}86\ km/$h=1,35 m/s
$\vartheta = 39{,}8°$

Problema 8.3

Un punto materiale di massa m=1 kg urta anelasticamente un oggetto di massa M=3 kg fermo inizialmente. A seguito proseguono insieme su un piano orizzontale scabro (μ_d = 0.3) per 2 m prima di fermarsi.
Qual era la velocità iniziale?

Soluzione:

$$v_i = 13,71\ m/s$$

Urti tra corpi rigidi

Per un sistemi di punti e, in particolare, per i corpi rigidi **(liberi, non vincolati),** va considerata anche l'altra equazione della dinamica $\overrightarrow{M}^{(E)} = 0 \ \Rightarrow$

$$\overrightarrow{M}^{(E)} = \frac{\overrightarrow{dL}}{dt} = 0 \ \Rightarrow \overrightarrow{L} = cost$$

si avrà la conservazione del momento angolare (per qualunque scelta di polo).

In ogni caso, poiché a priori non è nota la natura delle forze interne non si può assumere a priori la conservazione dell'energia meccanica e quindi, in generale, negli urti non si può a priori assumere che si conservi l'energia cinetica.

Urti tra punti materiali e corpi rigidi e urti tra corpi rigidi

Nell'urto tra punti materiali e corpi rigidi o tra corpi rigidi, bisogna tenere conto che le forze sviluppate nell'urto sono impulsive e si possono trascurare i contributi delle forze esterne.

Se l'urto è **elastico** si ha la **conservazione dell'energia cinetica**.

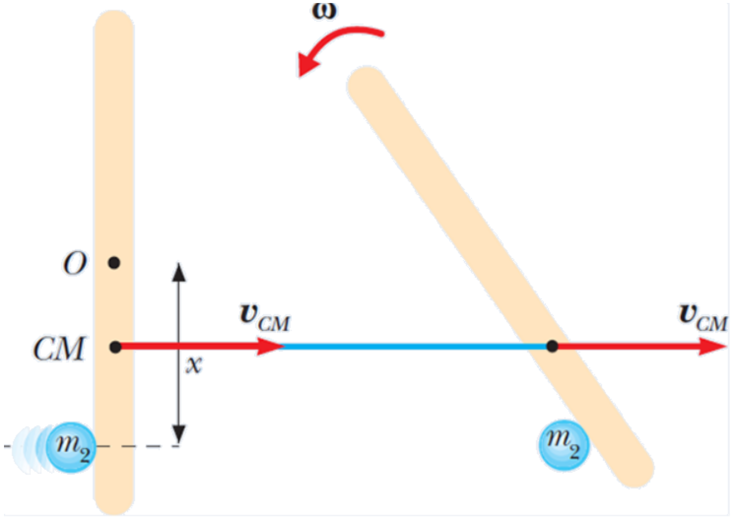
Se i corpi che urtano sono **senza vincoli**, si avrà comunque la **conservazione della quantità di moto.**

Se i corpi urtano mentre ci sono **vincoli**, la quantità di moto non si conserva (a causa della reazione vincolare). <u>Si avrà la conservazione del momento angolare se si sceglie un polo tale che il momento delle reazioni vincolari incognite sia nullo</u>.

Quando il corpo vincolato è urtato, l'effetto del vincolo è di comunicare un impulso che sarà del tipo $\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{R}(t)$ con $\vec{R}$ la reazione vincolare.

Urto completamente anelastico tra punto materiale e asta libera

Un'asta di massa m_1, lunghezza l, è ferma in un piano orizzontale liscio.
Un punto materiale di massa m_2 e velocità v perpendicolare all'asta colpisce l'asta ad una distanza x dal suo centro O e vi resta attaccato. Determinare la velocità lineare ed angolare del sistema dopo l'urto.

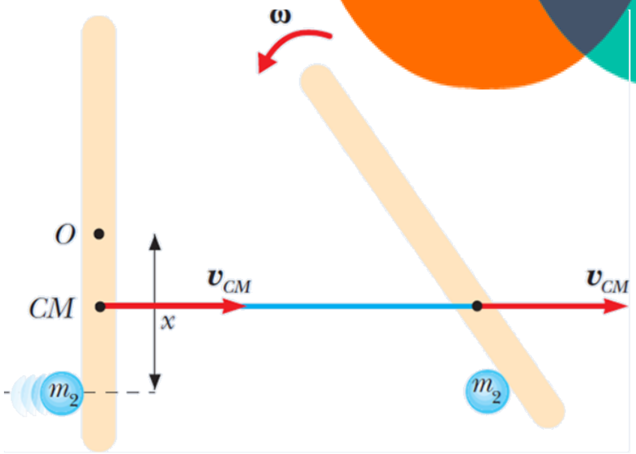


Durante l'urto completamente anelastico, agiscono solo forze interne, quindi si conservano la quantità di moto e il momento angolare.

Scegliamo il sistema di riferimento con origine in O. La posizione del CM rispetto ad O nell'istante in cui avviene l'urto è:

$$x_{CM} = \frac{m_2\, x}{m_1 + m_2}$$

Urto completamente anelastico tra punto materiale e asta libera



Per la conservazione della q.d.m.:

$$m_2\vec{v} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM} \Rightarrow \vec{v}_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}$$

Per la conservazione del momento angolare:

$$L = (x - x_{CM})m_2 v = I\,\omega \quad ; \qquad I = m_1\frac{l^2}{12} + m_1 {x_{CM}}^2 + m_2(x - x_{CM})^2$$

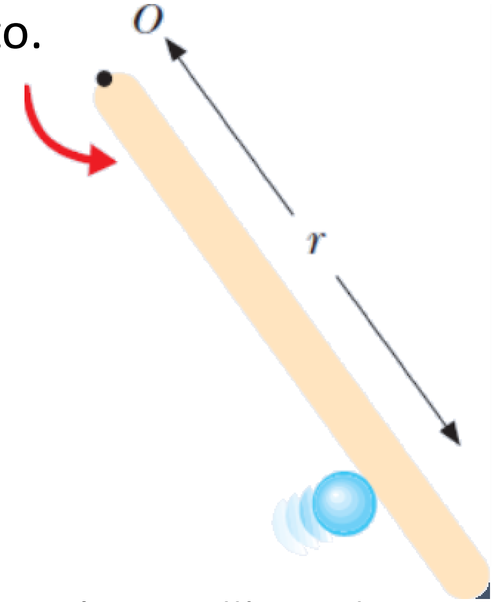
$$\Rightarrow \omega = \frac{(x - x_{CM})m_2 v}{m_1\frac{l^2}{12} + m_1 {x_{CM}}^2 + m_2(x - x_{CM})^2}$$

$$x_{CM} = \frac{m_2\, x}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad x - x_{CM} = \frac{m_1\, x}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{x m_2 v}{(m_1 + m_2)\frac{l^2}{12} + m_2 x^2}$$

Urto completamente anelastico tra punto materiale e asta vincolata

Supponiamo ora che l'asta sia vincolata nell'estremo O e sia lunga l. Per semplicità supponiamo anche che $m_1 = m_2 = m$. Il punto m_2 urta ad una distanza $\mathrm{r} \leq l$ da O l'asta e rimane incastrato sull'asta. Calcoliamo la velocità angolare e l'impulso della reazione vincolare durante l'urto.



In questo caso ciò che si conserva è il momento angolare rispetto ad un polo, che scegliamo essere O.

$$L_o = r\,m\,v = I\,\omega \quad ; \qquad I = m\frac{l^2}{3} + m\,r^2$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{r\,m\,v}{m\frac{l^2}{3} + m\,r^2} = \frac{r\,v}{\frac{l^2}{3} + r^2}$$

La quantità di moto totale, invece, non si conserva e la sua variazione è pari all'impulso:

$$\vec{J} = \Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = \left(r\,m\,\omega\,\hat{u}_v + m\,\omega\frac{l}{2}\hat{u}_v\right) - m\,v\,\hat{u}_v = m\,l\,v\,\frac{\frac{r}{2} - \frac{l}{3}}{\frac{l^2}{3} + r^2}\,\hat{u}_v$$