Fisica Generale – Modulo A
Classe B

OSCILLAZIONI

Dott.ssa **Marilena Giglio**

marilena.giglio@poliba.it

Oscillatore armonico

Abbiamo visto che una situazione fisica che si riconduce a soddisfare l'equazione differenziale

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 \tag{1}$$

rappresenta un **oscillatore armonico** (pendolo semplice, pendolo composto, molle).
Si tratta di una equazione differenziale:

- del secondo ordine: compare la derivata seconda della funzione
- lineare: la funzione compare ovunque solo alla prima potenza e anche la derivata è alla prima potenza
- a coefficienti costanti (1 e ω^2)
- omogenea: termine noto nullo

Per questa classe di equazioni si può verificare che se $x(t)$ è una soluzione dell'eq. (1), lo è anche la funzione $a\,x(t)$ con a costante e, inoltre, se si trova un'altra soluzione $y(t)$ che soddisfa la (1) allora anche la combinazione lineare delle soluzioni

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

soddisferà la (1), proprio per il fatto che l'equazione è lineare.

Oscillatore armonico

Infatti

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = \frac{d^2\big(x(t)+y(t)\big)}{dt^2} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t) - \omega^2 y(t)$$
$$= -\omega^2 z(t)$$

Si dimostra inoltre che la (1) ammette due sole soluzioni indipendenti ($\sin\omega t$ e $\cos\omega t$) per cui la soluzione generica si può scrivere come combinazione lineare di tali due soluzioni

$$x(t) = a\sin\omega t + b\cos\omega t$$

che può anche riscriversi nel modo solito

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

con $A = \sqrt{a^2+b^2}$ e $\operatorname{tg}\phi = \frac{b}{a}$

Oscillatore armonico

L'equazione non omogenea è:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = f(t) \qquad (2)$$

dove $f(t)$ è una generica funzione del tempo (anche costante). La sua soluzione è del tipo

$$x(t) = a\sin\omega t + b\cos\omega t + x_p(t)$$

con $x_p(t)$ soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Infine, se l'eq. (2) è ha come termine noto $f_1(t)$ e come soluzione $x_1(t)$ e se, con un termine noto $f_2(t)$ si ottiene una soluzione $x_2(t)$, allora se il termine noto è
$f_1(t) + f_2(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ è la soluzione dell'equazione.
Questo risultato è il **principio di sovrapposizione:** se in una situazione si ha una certa soluzione e, in un'altra situazione, un'altra soluzione, quando si dovessero verificare entrambe le situazioni, l'effetto è dato dalla **somma delle sue soluzioni**. Considerazioni analoghe valgono per l'equazione differenziale.

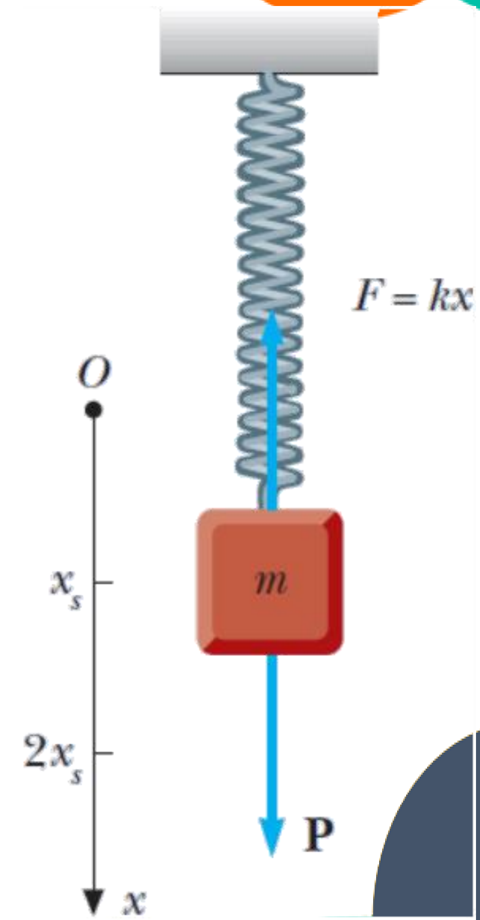
Applicazioni:

• Sono collegate due o più molle allo stesso punto materiale $\Longrightarrow$ La soluzione è una combinazione delle due soluzioni con le molle singolarmente applicate

• Sul punto materiale è esercitata una forza costante insieme a quella elastica $\Longrightarrow$ la soluzione è una combinazione di una costante e di una soluzione oscillante

Oscillazioni di una massa appesa ad una molla

Una massa m è appesa verticalmente ad una molla di costante elastica k. Se $x = 0$ è la posizione con la molla non allungata (a riposo), la posizione di equilibrio statico quando viene collegata la massa m è $x_s = \frac{mg}{k}$ (porre l'orientazione della x verso il basso).
Supponiamo ora ti tirare la molla fino alla posizione $x = 2x_s$ al tempo $t = 0$. Determinare la legge oraria da $t = 0$ in poi.



Energia dell'oscillatore armonico

Abbiamo visto che una forza elastica soddisfa l'equazione dell'oscillatore armonico, e che la forza è **conservativa**. Calcoliamo **l'energia meccanica** in questa situazione.

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \qquad E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

non $\omega^2 = k/m$.

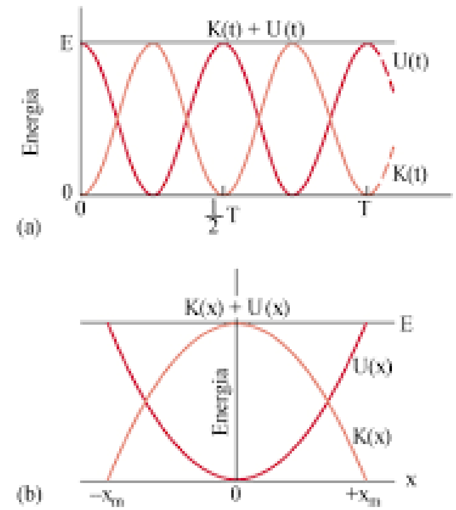
$$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi) \qquad E_k = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E_m = E_p + E_k =$$

$$\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \phi) =$$

$$\frac{1}{2}A^2[\omega^2 m\sin^2(\omega t + \phi) + m\omega^2\cos^2(\omega t + \phi)] =$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2A^2 = cost$$



Il moto quindi continua mantenendo l'energia totale costante: quando l'energia potenziale è massima, la cinetica è minima e viceversa. Si verifica inoltre che i valori medi di energia cinetica e potenziale sono uguali e pari a

$$< E_k >=< E_p >= \frac{1}{2}E_m$$

Somma di moti armonici sullo stesso asse

Supponiamo di avere moti armonici sullo stesso asse x e valutiamo il moto complessivo.

Nel caso di forze uguali

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) \qquad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

Essendo l'equazione differenziale del moto armonico lineare, anche $x = x_1 + x_2$ è una soluzione e quindi sarà del tipo

$$x = A \sin(\omega t + \psi)$$

$$x = A \sin(\omega t + \psi) = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

$$\Rightarrow A \sin \omega t \; cos\psi + A \cos \omega t \; sin\psi$$
$$= A_1 \sin \omega t \; cos\phi_1 + A_1 \cos \omega t \; sin\phi_1 + A_2 \sin \omega t \; cos\phi_2 + A_1 \cos \omega t \; sin\phi_2$$
$$= (A_1 cos\phi_1 + A_2 \, cos\phi_2) \; sin \; \omega t \; + (A_1 sin \; \phi_1 + A_2 \, sin \; \phi_2) \; cos \; \omega t$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} A \cos \psi = A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 \\ A \sin \psi = A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_1 \cos(\phi_1 - \phi_2)} \\ \tan \psi = \dfrac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2} \end{cases}$$

Oscillatore armonico smorzato da una forza viscosa

Quando c'è un attrito viscoso si introduce una dipendenza dalla velocità e l'equazione della dinamica diventa del tipo:

$$ma = -kx - \lambda v$$

che porta ad un'equazione differenziale:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Se introduciamo i due coefficienti:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ **pulsazione propria**

$$\gamma = \frac{\lambda}{2m}$$ **coefficiente di smorzamento**

l'equazione si riscrive come

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

che rappresenta l'equazione differenziale dell'**oscillatore armonico smorzato**.

Oscillatore armonico smorzato da una forza viscosa

Verifichiamo se l'equazione precedente ammette una soluzione del tipo

$$x(t) = e^{+\alpha t}$$

$$\frac{d^2(e^{+\alpha t})}{dt^2} + 2\gamma \frac{d(e^{+\alpha t})}{dt} + \omega_0^2(e^{+\alpha t}) = 0$$

$$\alpha^2 e^{+\alpha t} + 2\gamma e^{+\alpha t} + \omega_0^2 e^{+\alpha t} = 0$$

$$\alpha^2 + 2\gamma + \omega_0^2 = 0$$

che viene detta **equazione caratteristica** e ha soluzioni

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Quindi $x(t) = e^{+\alpha t}$ è soluzione dell' oscillatore armonico smorzato se α soddisfa l'equazione precedente.

Discussione dei casi di oscillazione smorzata

- Se $\gamma^2 > \omega_0^2$ (ovvero $\lambda^2 > 4mk$) le soluzioni sono reali, negative e distinte.

La soluzione generale è

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}$$

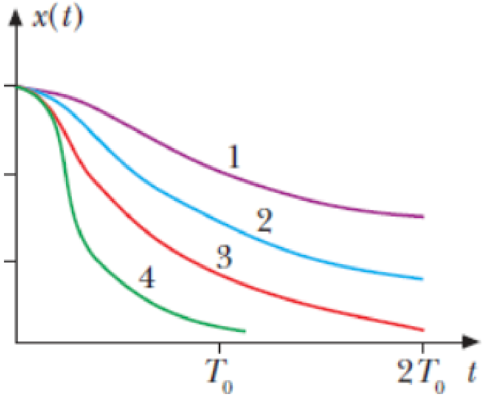
$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(Ae^{+t\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}} + Be^{-t\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\right)$$

Questo caso corrisponde allo **smorzamento forte** e non avviene oscillazione.

- Se $\gamma^2 = \omega_0^2$ (ovvero $\lambda^2 = 4mk$) le due soluzioni sono coincidenti e $\alpha = -\gamma$ per cui la soluzione generale è

$$x(t) = e^{-\gamma t}(At + B)$$

Questo caso è detto **smorzamento critico**. Il punto raggiunge più velocemente la posizione di equilibrio (curva 4). Come nello smorzamento forte, non avviene oscillazione.



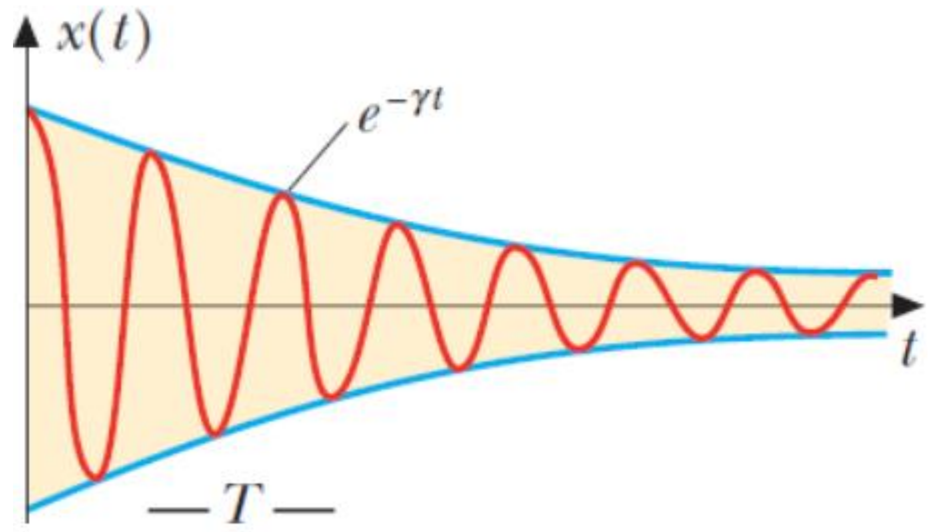
Discussione dei casi di oscillazione smorzata

- Se $\gamma^2 < \omega_0^2$ (ovvero $\lambda^2 < 4mk$) parliamo di **smorzamento debole**.

In questo caso che la soluzione è del tipo

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)$$

con pulsazione $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$ ovvero si ha una oscillazione con ampiezza smorzata esponenzialmente $A_0 e^{-\gamma t}$ e pseudoperiodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$



Oscillatore armonico forzato

Nella realtà ogni oscillazione è smorzata dagli attriti. Se vogliamo mantenere l'oscillazione dobbiamo sostenerla con una forza oscillante (forza sinusoidale). In tal caso l'equazione della dinamica diventa del tipo

$$ma = -kx - \lambda v + F_0 \sin \omega t$$

Che come equazione differenziale diventa:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

L'equazione differenziale non è più omogenea e il termine pulsante può avere una ω diversa da quella propria ω_0.

La generica soluzione è del tipo

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) + a\, e^{\alpha_1 t} + b\, e^{\alpha_2 t}$$

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \qquad tg\phi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Oscillatore armonico forzato

In conclusione:

- sollecitando un oscillatore armonico semplice con una sollecitazione esterna sinusoidale, l'oscillatore armonico semplice risponde con una sollecitazione sinusoidale, la cui pulsazione coincide con quella impressa dall'esterno (e non con quella propria)

- si ha uno sfasamento ϕ tra la sollecitazione esterna e quella dell'oscillatore armonico

- la risposta dell'oscillatore armonico dipende dal valore di ω

- ampiezza A e sfasamento ϕ non dipendono dalle condizioni iniziali

Oscillatore armonico forzato: risonanza

L'ampiezza

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

è massima ($\frac{dA}{d\omega} = 0$) alla pulsazione

$$\omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}(< \omega_0)$$

e risulta

$$A_m = A(\omega_m) = \frac{F_0}{2m\gamma\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}$$

condizione verificata solo quando $\omega_0^2 > 2\gamma^2$

Quando $\gamma \longrightarrow 0$ si ha che $\omega_m \longrightarrow \omega_0$ e l'ampiezza tende ad infinito.

Questa situazione si definisce **condizione di risonanza**.