

CAPITOLO 4

DISPERSIONE DI INQUINANTI IN ATMOSFERA

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.1 Diffusività e avvezione

Qualsiasi metodo di conversione dell'energia causerà un certo inquinamento, o nel processo di conversione stesso (ad esempio direttamente dalla combustione di fossili), o nella produzione degli impianti di conversione (ad esempio le sostanze chimiche velenose utilizzate nella produzione di celle solari).

Sebbene molte sostanze chimiche possano essere riutilizzate o rese innocue, alcune entreranno nell'ambiente.

In questo capitolo studiamo le modalità con cui gli inquinanti possono essere dispersi nell'ambiente.

Gli inquinanti sono solitamente incorporati in un mezzo come aria, acqua o suolo. Le chiameremo **particelle ospiti**, anche quando si presentano come singole molecole, mentre chiameremo l'aria **mezzo**.

Il processo più semplice è la diffusione, di cui parleremo in questo capitolo. In questo caso, la differenza nella concentrazione delle particelle ospiti, o più precisamente nel loro gradiente di concentrazione, è la forza trainante della dispersione.

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.1 Diffusività e avvezione

Supponiamo una massa di una certa sostanza inquinante (ospite) che occupa una certa posizione nel mezzo (aria).

Questa si disperderà temporalmente lungo una certa estensione, anche quando macroscopicamente il mezzo è a riposo.

Questo processo ha origine dalle collisioni tra molecole in relazione alle dimensioni.

Se le dimensioni della molecola ospite sono paragonabili alle dimensioni delle molecole del mezzo, si parla di diffusione molecolare.

Se la dimensione delle molecole sospese è sensibilmente maggiore, si parla di moto Browniano.

Di solito la diffusione molecolare ha un effetto minore nella dispersione degli inquinanti.

La concentrazione $C(x, y, z, t) = C(\vec{r}, t)$ di una sostanza diffondente è definita come la sua massa M , divisa per il volume del campione V in cui è dispersa:

$$C(\vec{r}, t) = \frac{M}{V}$$

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.1 Diffusività e avvezione

Assumiamo che V sia grande rispetto ad a^3 , dove a è la distanza media tra le particelle ospiti. Assumiamo inoltre che $C(\vec{r}, t)$ sia una funzione continua e differenziabile

Infine, assumiamo che la concentrazione $C(\vec{r}, t)$ sia così piccola che la variazione della massa degli elementi di volume infinitesimi dovuta alla diffusione può essere ignorata.

Definiamo un flusso $\vec{F}(\vec{r}, t)$ diretto nella direzione in cui scorrono le particelle ospiti; il suo modulo $|F|$ [$\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$] è la massa delle particelle ospiti che attraversano l'unità di area [m^2] in un secondo [s] nella direzione di $\vec{F}(\vec{r}, t)$.

La relazione tra $\vec{F}(\vec{r}, t)$ e la concentrazione $C(\vec{r}, t)$ è nota come **relazione di Fick**:

$$\vec{F} = -D\vec{\nabla}C$$

La costante D è chiamata diffusività, coefficiente di o costante di diffusione. La legge di Fick può essere derivata rigorosamente dalla teoria cinetica dei gas, che dà la dipendenza di D anche dalla temperatura e dalla pressione.

Valori di coefficienti di diffusione

	$D/[\text{m}^2 \text{s}^{-1}]$
<i>In air</i>	
CO ₂	16.4×10^{-6}
H ₂ O vapour	25.6×10^{-6}
C ₆ H ₆ (benzene)	8.8×10^{-6}
<i>In water</i>	
CO ₂ (water of 20 [°C])	1.60×10^{-9}
N ₂	2.34×10^{-9}
H ₂ S	1.36×10^{-9}
NaCl (water of 20 [°C])	1.3×10^{-9}

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.1 Diffusività e avvezione

$$\vec{F} = -D\vec{\nabla}C$$

La legge di Fick è analoga all'equazione del calore che descrive la proporzionalità tra il flusso di calore e il gradiente della temperatura.

Per ricavare un'equazione differenziale per la concentrazione $C(\vec{r}, t)$ consideriamo un volume arbitrario V . Il deflusso delle particelle ospiti da quel volume può essere espresso utilizzando il **teorema della divergenza**, che afferma che il flusso di \vec{F} attraverso una superficie chiusa coincide con l'integrale della divergenza di \vec{F} svolto nel volume di cui la superficie è frontiera.

Quindi il deflusso di particelle dal volume considerato può essere espresso come:

$$\int \text{div}\vec{F} dV \text{ [kg s}^{-1}\text{]}$$

La conservazione della massa delle particelle ospiti implica che questa debba essere uguale alla diminuzione della massa all'interno del volume, ovvero:

$$-\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int C dV \text{ [kg s}^{-1}\text{]}$$

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.1 Diffusività e avvezione

$$\int \operatorname{div} \vec{F} dV$$

$$-\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int C dV$$

Uguagliando le due espressioni:

$$\int \operatorname{div} \vec{F} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int C dV$$

Poiché questa relazione deve valere per qualunque volume considerato, ne segue che:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$$

In questa equazione, \vec{F} [$\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$] rappresenta il flusso di particelle ospiti.

Consideriamo le particelle ospiti in un mezzo che si muove con velocità \vec{u} .

Il flusso \vec{F} ha quindi una componente di velocità $\vec{u}C$ poiché le particelle ospiti si muovono con il flusso.

Questo fenomeno è noto come **avvezione**.

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.1 Diffusività e avvezione

Ne segue che il flusso risultante avrà un ulteriore contributo:

$$\vec{F} = -D\vec{\nabla}C$$

$$\vec{F} = \vec{u}C - D\vec{\nabla}C$$

L'equazione precedente diventa:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}C) - \vec{\nabla} \cdot (D\vec{\nabla}C) = 0$$

Utilizzando la proprietà dell'operatore divergenza tra scalari e vettori:

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})f + \vec{A} \cdot \vec{\nabla}f$$

possiamo riscrivere $\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}C)$ come:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}C) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})C + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}C$$

Sostituendo:
$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})C + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}C - \vec{\nabla} \cdot (D\vec{\nabla}C) = 0$$

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.1 Diffusività e avvezione

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})C + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} C - \vec{\nabla} \cdot (D\vec{\nabla} C) = 0$$

Analizziamo il termine $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$. La divergenza del campo delle velocità tiene conto della variazione del flusso del fluido. In particolare, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ significa che il fluido si muove senza dilatarsi e senza comprimersi. Nel nostro caso, per l'atmosfera possiamo assumere questa condizione e imporre $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$, che include anche il caso in cui $\vec{u} = 0$.

Per i casi in cui anche il coefficiente di diffusione D è indipendente dalla posizione, si ha:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} C = D\vec{\nabla}^2 C$$

Il termine di sinistra contiene la derivata parziale di $C(x, y, z, t)$ rispetto al tempo t , che è la variazione di concentrazione nel tempo in una certa posizione (x, y, z) .

Possiamo immaginare di seguire il flusso nelle tre direzioni e osservare il cambiamento di concentrazione nel tempo lungo x, y e z .

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.1 Diffusività e avvezione

In tal caso, possiamo scrivere $C = C(x(t), y(t), z(t), t)$, dove la dipendenza temporale di x, y, z è tale che $\frac{dx(t)}{dt} = u_x$ e analogamente $\frac{dy(t)}{dt} = u_y$ e $\frac{dz(t)}{dt} = u_z$.

Il cambiamento di concentrazione nel tempo mentre si segue il flusso è quindi esprimibile come:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial C}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial C}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial C}{\partial t} = \vec{\nabla}C \cdot \vec{u} + \frac{\partial C}{\partial t} = \vec{u} \cdot \vec{\nabla}C + \frac{\partial C}{\partial t}$$

che coincide proprio con il membro sinistro dell'equazione precedente.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}C = D\vec{\nabla}^2C$$

$\frac{dC}{dt}$ è la derivata totale di C rispetto a t .

Il termine $\vec{u} \cdot \vec{\nabla}C$ descrive il cambiamento di concentrazione delle particelle ospiti mentre si muovono con il flusso proprio del mezzo, in altre parole l'avvezione.

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.1 Diffusività e avvezione

$$\frac{dC}{dt} = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} C + \frac{\partial C}{\partial t}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} C = D \vec{\nabla}^2 C$$

Combinando queste due ultime espressioni:

$$\frac{dC}{dt} = D \vec{\nabla}^2 C$$

Questa equazione vale quando per il mezzo ospite è verificata la condizione $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ e il coefficiente di diffusione è indipendente dalla posizione.

Si noti ancora che l'equazione appena ricavata è identica nella forma all'equazione della diffusione del calore.

Questo implica che, per le stesse condizioni fisiche, varrebbero le stesse soluzioni.

Di seguito, discuteremo alcuni diversi esempi fisici di diffusione delle particelle ospiti in un'aria (mezzo).

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.2 Emissione istantanea in atmosfera

Consideriamo un mezzo omogeneo a riposo ($\vec{u} = 0$) e assumiamo D come costante. Consideriamo il caso in cui la concentrazione $C = C(x, t)$ è funzione solo di x e t ed è indipendente sia da y che da z .

L'equazione differenziale si semplifica in:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} C = D \vec{\nabla}^2 C$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

la cui soluzione è una funzione Gaussiana:

$$C(x, t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

come può essere facilmente verificato per sostituzione.

Ponendo $\sigma = \sqrt{Dt}$, possiamo riscriverla come:

$$C(x, t) = \frac{Q}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.2 Emissione istantanea in atmosfera

$$C(x, t) = \frac{Q}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

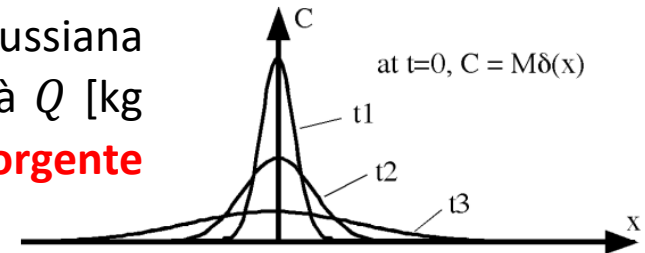
$$\sigma = \sqrt{Dt}$$

Nel limite in cui $\sigma \rightarrow 0$, $C(x, t) \rightarrow Q\delta(x)$, dove $\delta(x)$ è la funzione Delta di Dirac.

Il limite $\sigma \rightarrow 0$ coincide anche con il limite $t \rightarrow 0$, e quindi:

$$C(x, t \rightarrow 0) \rightarrow Q\delta(x)$$

Di conseguenza, si può interpretare la soluzione Gaussiana come la situazione fisica in cui a $t = 0$ una quantità Q [kg m⁻²] viene rilasciata in atmosfera nel piano $x = 0$: **sorgente piana istantanea**.



Per tempi $t > 0$, la concentrazione si disperde simmetricamente, mantenendo lo stesso integrale per ogni istante di tempo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C(x, t) dx = Q$$

La distanza quadratica media $\langle x^2 \rangle$ percorsa dalle particelle ospiti sarà:

$$\langle x^2 \rangle = \sigma^2 = 2Dt$$

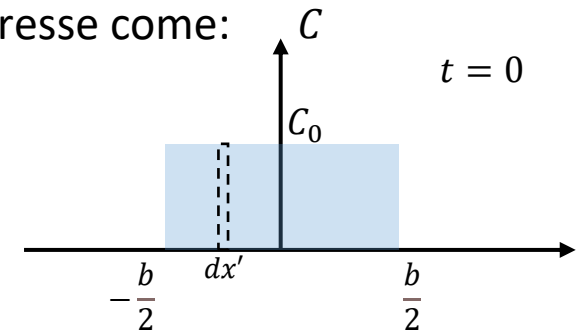
4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.3 Nuvola di dimensioni finite

Consideriamo una “nuvola” di particelle ospiti rilasciate a $t = 0$, con le stesse assunzioni di prima ($\vec{u} = 0$ e D costante).

Per un caso semplice, le condizioni iniziali possono essere espresse come:

$$\begin{cases} C = C_0 & \text{at } -\frac{b}{2} < x < \frac{b}{2}, & t = 0 \\ C = 0 & \text{elsewhere,} & t = 0 \end{cases}$$



Questa rappresenta una nuvola omogenea rilasciata attorno al piano $x = 0$ che si estende all'infinito nelle direzioni y e z . Pertanto, segue la stessa trattazione matematica di prima e la nuvola si diffonderà perpendicolarmente al piano $x = 0$.

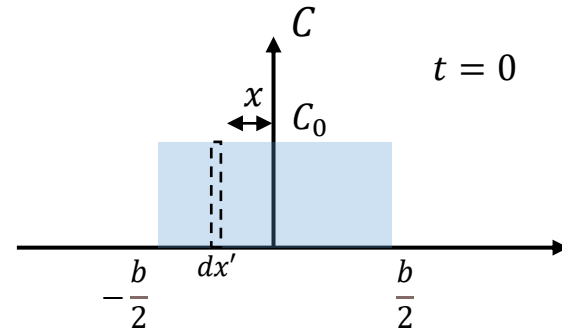
Per risolvere l'equazione differenziale con queste condizioni iniziali, si potrebbe interpretare questa nuvola come una sovrapposizione di un grande numero di funzioni delta di intensità $C_0 dx'$ [kg m^{-2}], ciascuna rappresentante una sorgente istantanea in una striscia compresa tra x e $x + dx$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.3 Nuvola di dimensioni finite

$$\begin{cases} C = C_0 & \text{at } -\frac{b}{2} < x < \frac{b}{2}, & t = 0 \\ C = 0 & \text{elsewhere,} & t = 0 \end{cases}$$



$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

In questo caso il limite $t \rightarrow 0$ diviene:

$$C(x, t \rightarrow 0) \rightarrow C_0 \delta(x - x') dx'$$

$$C(x, t) = \frac{Q}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Di conseguenza la soluzione trovata nel caso precedente applicata alla sorgente dx' distante x dal centro, diviene:

$$\frac{C_0 dx'}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2}}$$

dove l'origine della sorgente è stata spostata in x .

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.3 Nuvola di dimensioni finite

$$\frac{C_0 dx'}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2}}$$

La soluzione completa sarà:

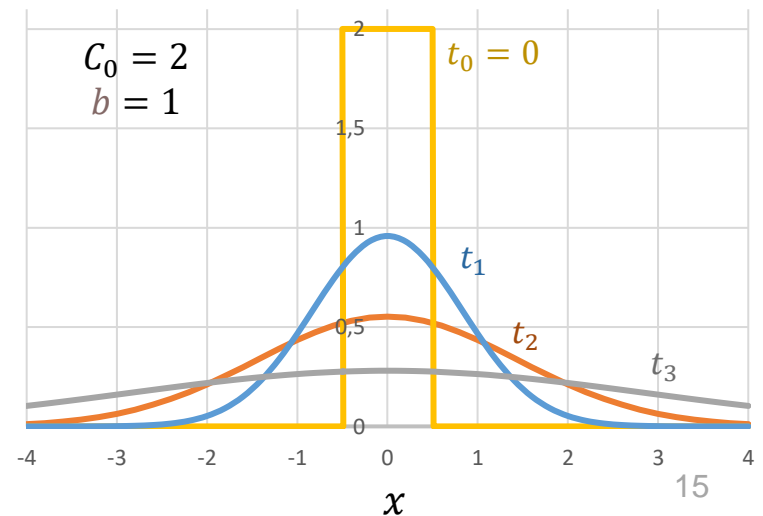
$$C(x, t) = \frac{C_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2}} dx'$$

La dipendenza temporale è “celata” in $\sigma^2 = 2Dt$.

La soluzione è la funzione errore:

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\frac{b}{2} + x}{\sigma\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\frac{b}{2} - x}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]$$

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$



4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.4 Emissione continua in atmosfera

Abbiamo determinato la soluzione dell'equazione di diffusione per una sorgente istantanea posizionata in $x = 0$ al tempo $t = 0$

$$C(x, t) = \frac{Q}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Per analogia si potrebbero scrivere in maniera generalizzata la soluzione per una generica coordinate Cartesiana n :

$$\frac{Q}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

dove r è la distanza dalla sorgente e $\sigma^2 = 2Dt$.

Per $n = 1$ (sorgente puntiforme istantanea), $r = x$ e $\sigma^2 = \sigma_x^2$ e si ritrova la soluzione precedente. Questo corrisponde al caso in cui esiste una dimensione significativa x , equivalente ad un problema unidimensionale.

Per $n = 2$ (sorgente lineare istantanea), $r^2 = x^2 + y^2$ e $\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$.

Per $n = 3$ (sorgente tridimensionale istantanea), $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e $\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$.

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.4 Emissione continua in atmosfera

Consideriamo una sorgente tridimensionale, posizionata all'origine di un sistema cartesiano, e che a partire da $t = 0$, **emette continuamente** ad una velocità di q [kg s⁻¹].

In un intervallo di tempo dt , la sorgente avrà emesso una quantità di molecole ospiti pari a qdt [kg].

Ad un certo istante t e nella posizione \vec{r} , la concentrazione $C(\vec{r}, t)$ può essere ottenuta

integrando $\frac{q}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$ per $n = 3$ nella variabile temporale t .

Questo vuol dire considerare un'emissione continua come una successione di «sbuffi istantanei» infinitesimi che rilasciano in atmosfera una quantità di particelle ospiti qdt' che diffondono nello spazio.

Ne segue che la concentrazione in una certa posizione \vec{r} al tempo t è data dalla somma di tutti gli sbuffi diffusi nei tempi precedenti $t' < t$.

Inoltre, $\sigma^2 = 2Dt$ va riscritta esplicitamente, poiché al tempo t il contributo di uno sbuffo a $t' < t$ lo si ottiene ponendo $\sigma^2 = 2D(t - t')$.

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.4 Emissione continua in atmosfera

$$\frac{Q}{(\sigma\sqrt{2\pi})^3} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

$$\sigma^2 = 2D(t - t')$$

Il risultato è una convoluzione:

$$C(r^2, t) = \frac{q}{8(\pi D)^{3/2}} \int_0^t e^{-\frac{r^2}{4D(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

Per risolvere questo integrale, introduciamo la variabile:

$$\beta^2 = \frac{r^2}{4D(t-t')}$$

Adattiamo gli estremi di integrazione alla nuova variabile di integrazione β

$$\int_0^t \quad \longrightarrow \quad \int_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty}$$

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.4 Emissione continua in atmosfera

$$C(x, t) = \frac{C_0}{8(\pi D)^{3/2}} \int_0^t e^{-\frac{r^2}{4D(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

$$\beta^2 = \frac{r^2}{4D(t-t')}$$

$$\int_0^t \longrightarrow \int_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty}$$

Calcoliamo l'infinitesimo $d\beta$:

$$2\beta d\beta = \frac{r^2}{4D} \frac{1}{(t-t')^2} dt'$$

da cui:

$$\frac{dt'}{(t-t')^2} = \frac{4D}{r^2} 2\beta d\beta$$

Sostituiamo il valore della variabile di integrazione β al secondo membro

$$\frac{dt'}{(t-t')^2} = \frac{4D}{r^2} 2 \frac{r}{2\sqrt{D}(t-t')^{1/2}} d\beta$$

ovvero:

$$\frac{dt'}{(t-t')^{3/2}} = \frac{4\sqrt{D}}{r} d\beta$$

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.4 Emissione continua in atmosfera

$$C(x, t) = \frac{C_0}{8(\pi D)^{3/2}} \int_0^t e^{-\frac{r^2}{4D(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

$$\beta^2 = \frac{r^2}{4D(t-t')}$$

$$\frac{dt'}{(t-t')^{3/2}} = \frac{4\sqrt{D}}{r} d\beta$$

$$\int_0^t \longrightarrow \int_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty}$$

Sostituendo le espressioni ottenute in β

$$C(r^2, t) = \frac{q}{8(\pi D)^{3/2}} \int_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-\beta^2} \frac{4\sqrt{D}}{r} d\beta$$

Portando $\frac{4\sqrt{D}}{r}$ fuori dal segno di integrale

$$C(r^2, t) = \frac{q}{2(\pi)^{3/2} D r} \int_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta$$

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.4 Emissione continua in atmosfera

$$C(r^2, t) = \frac{q}{2(\pi)^{3/2}Dr} \int_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta$$

Introduciamo la funzione degli errori complementare

$$\operatorname{erfc}(x) := 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$$

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

così da riscrivere la soluzione come:

$$C(r^2, t) = \frac{q}{2(\pi)^{3/2}Dr} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta = \frac{q}{4\pi Dr} \operatorname{erfc}\left(\frac{r}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

La distribuzione spazio-temporale della concentrazione può essere analizzata più comodamente se separiamo i contributi delle due variabili.

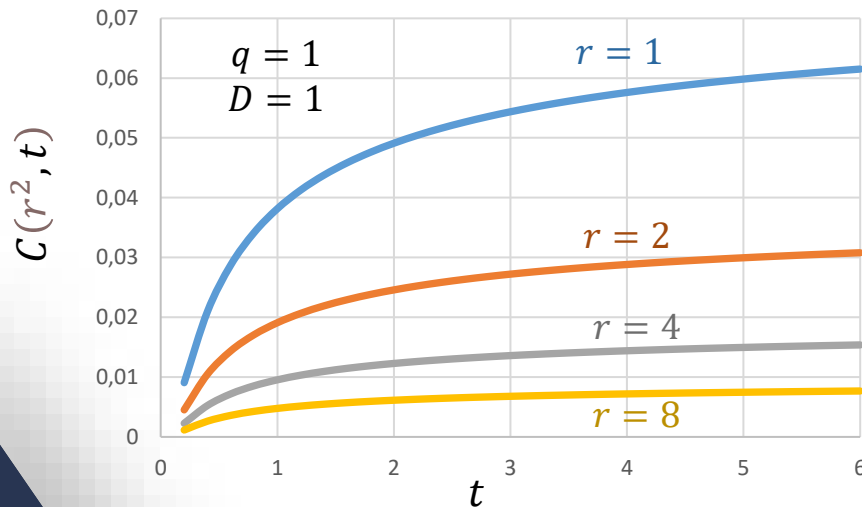
- Fissiamo una distanza r dalla sorgente e analizziamo come evolve la concentrazione nel tempo in quel punto
- Fissiamo un istante di tempo e scattiamo la fotografia della concentrazione a diverse distanze r

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.4 Emissione continua in atmosfera

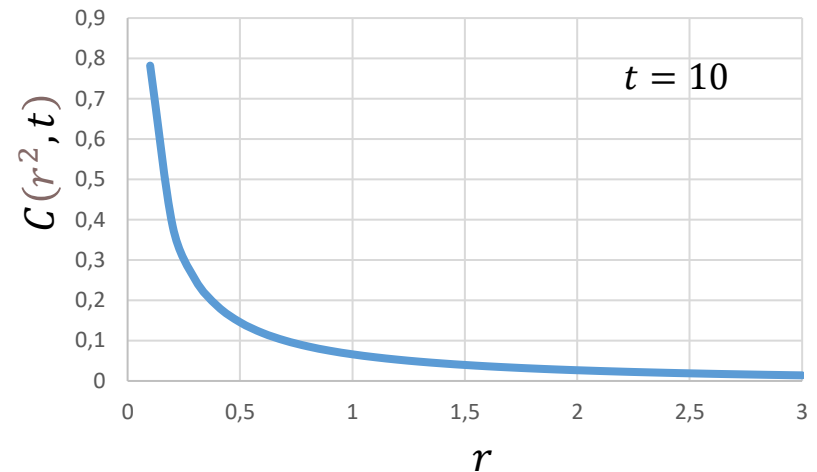
$$C(r^2, t) = \frac{q}{4\pi Dr} \operatorname{erfc}\left(\frac{r}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

Plottiamo $C(r^2, t)$ in funzione del tempo, a diverse distanze r dalla sorgente.



Un'emissione continua causa una concentrazione costante di particelle ospiti in atmosfera per $t \rightarrow \infty$, il cui valore dipende dalla distanza dalla sorgente.

Plottiamo $C(r^2, t)$ in funzione di r , per un t molto grande.



La distribuzione spaziale della concentrazione in regime «stazionario» dipende fortemente dalla distanza dalla sorgente.

4.2 DIFFUSIONE IN PRESENZA DI VENTO UNIFORME

4.2.1 Emissione puntiforme istantanea

Consideriamo una sorgente puntiforme di particelle ospiti in un flusso a velocità uniforme \vec{u} . L'asse x è preso nella direzione del flusso.

Per una sorgente puntiforme istantanea posta all'origine a $t = 0$, introduciamo un sistema di coordinate x', y', z' solidale con il flusso.

La relazione con il sistema x, y, z di laboratorio è data dalle trasformazioni di Galileo:

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Nel sistema di coordinate x', y', z' la soluzione trovata per un'emissione istantanea in atmosfera possiamo scriverla come (per $n = 3$):

$$C(x', y', z', t) = \frac{Q}{(\sigma\sqrt{2\pi})^3} e^{-\frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{Q}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

Usando le trasformazioni di Galileo, nel sistema di coordinate di laboratorio.

$$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{(\sigma\sqrt{2\pi})^3} e^{-\frac{[(x-ut)^2 + y^2 + z^2]}{2\sigma^2}}$$

4.2 DIFFUSIONE IN PRESENZA DI VENTO UNIFORME

4.2.2 Emissione puntiforme continua

Per trovare la concentrazione $C(x, y, z, t)$ nella posizione (x, y, z) al tempo t risultante da una sorgente puntiforme continua fissa nell'origine nell'istante $t = 0$ in un flusso uniforme \vec{u} occorre ripetere lo stesso iter fatto per il passaggio da sorgente istantanea a sorgente puntiforme nel caso di assenza di vento.

Consideriamo un singolo sbuffo istantaneo infinitesimo al tempo $t' < t$ che rilascia in atmosfera una quantità di particelle ospiti $q dt'$ [kg].

Utilizziamo un sistema di coordinate che si muove con il flusso: il nuovo sistema di coordinate inizia a muoversi con lo sbuffo, cioè inizia a muoversi al tempo t' .

Riprendiamo la soluzione trovata per una sorgente continua in assenza di vento:

$$C(x, t) = \frac{q}{8(\pi D)^{3/2}} \int_0^t e^{-\frac{r^2}{4D(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

Essa contiene il fattore r^2 all'esponente che ora dovrebbe essere letto come:

$$r^2 \rightarrow r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

4.2 DIFFUSIONE IN PRESENZA DI VENTO UNIFORME

4.2.2 Emissione puntiforme continua

$$C(x, t) = \frac{q}{8(\pi D)^{3/2}} \int_0^t e^{-\frac{r'^2}{4D(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Le particelle ospiti si muovono con il flusso e si disperdono in un tempo $t - t'$.

Per ritornare al sistema di coordinate fisse per lo sbuffo in esame, le trasformazioni di Galileo diventano:

$$\begin{cases} x' = x - u(t - t') \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

e si ottiene:

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{8(\pi D)^{3/2}} \int_0^t e^{-\frac{[(x-u(t-t'))^2 + y^2 + z^2]}{4D(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

4.2 DIFFUSIONE IN PRESENZA DI VENTO UNIFORME

4.2.2 Emissione puntiforme continua

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{8(\pi D)^{3/2}} \int_0^t e^{-\frac{[(x-u(t-t'))^2 + y^2 + z^2]}{4D(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

Riconduciamoci al caso visto per un'emissione continua in assenza di vento.

Partiamo con lo sviluppare il quadrato all'esponente

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{8(\pi D)^{3/2}} \int_0^t e^{-\frac{[x^2 - 2ux(t-t') + u^2(t-t')^2 + y^2 + z^2]}{4D(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

e separiamo l'esponente in tre contributi:

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{8(\pi D)^{3/2}} \int_0^t e^{-\frac{[x^2 + y^2 + z^2]}{4D(t-t')}} e^{\frac{2ux}{4D}} e^{-\frac{u^2(t-t')}{4D}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

Osserviamo che $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e che $e^{\frac{2ux}{4D}}$ non dipende dal tempo:

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{8(\pi D)^{3/2}} e^{\frac{2ux}{4D}} \int_0^t e^{-\frac{r^2}{4D(t-t')}} e^{-\frac{u^2(t-t')}{4D}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

4.2 DIFFUSIONE IN PRESENZA DI VENTO UNIFORME

4.2.2 Emissione puntiforme continua

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{8(\pi D)^{3/2}} e^{\frac{2ux}{4D}} \int_0^t e^{-\frac{r^2}{4D(t-t')}} e^{-\frac{u^2(t-t')}{4D}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

Introduciamo nuovamente la variabile $\beta^2 = \frac{r^2}{4D(t-t')}$ e con gli stessi passaggi visti per il caso senza vento possiamo riutilizzare quanto già ricavato:

$$\beta^2 = \frac{r^2}{4D(t-t')}$$

$$\int_0^t \longrightarrow \int_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty}$$

$$\frac{dt'}{(t-t')^{3/2}} = \frac{4\sqrt{D}}{r} d\beta$$

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{2(\pi)^{3/2} Dr} e^{\frac{ux}{2D}} \int_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-\beta^2} e^{-\frac{u^2 r^2}{16D^2 \beta^2}} d\beta$$

Introduciamo il parametro: $a^2 = \frac{u^2 r^2}{16D^2}$

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{2(\pi)^{3/2} Dr} e^{\frac{ux}{2D}} \int_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-\left(\beta^2 + \frac{a^2}{\beta^2}\right)} d\beta$$

4.2 DIFFUSIONE IN PRESENZA DI VENTO UNIFORME

4.2.2 Emissione puntiforme continua

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{2(\pi)^{3/2}Dr} e^{\frac{ux}{2D}} \int_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-\left(\beta^2 + \frac{a^2}{\beta^2}\right)} d\beta$$

Imponendo il limite $t \rightarrow \infty$ (analisi del caso stazionario), l'estremo inferiore di integrazione tenderà a zero.

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{2(\pi)^{3/2}Dr} e^{\frac{ux}{2D}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\beta^2 + \frac{a^2}{\beta^2}\right)} d\beta$$

Occorre risolvere l'integrale.

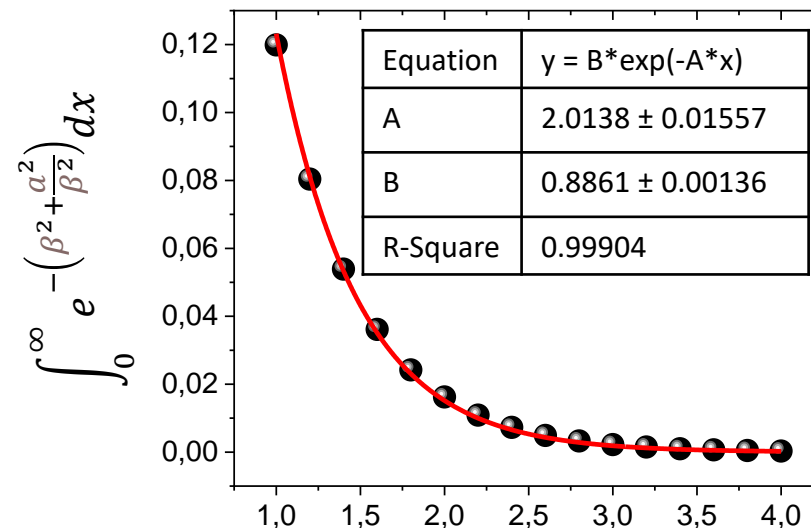
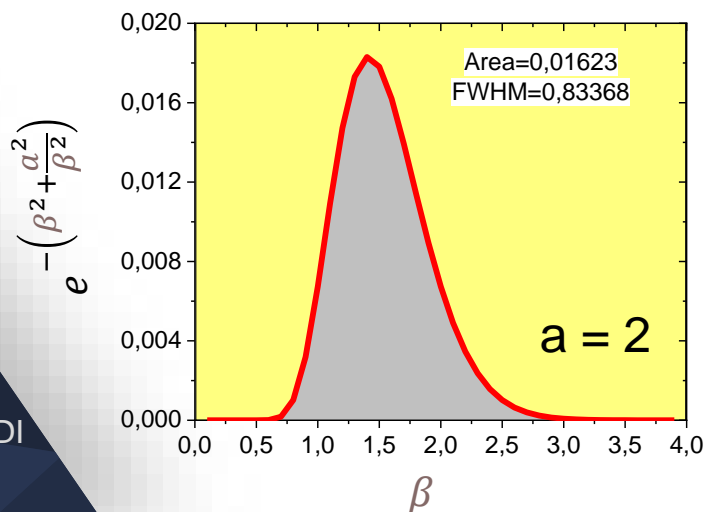
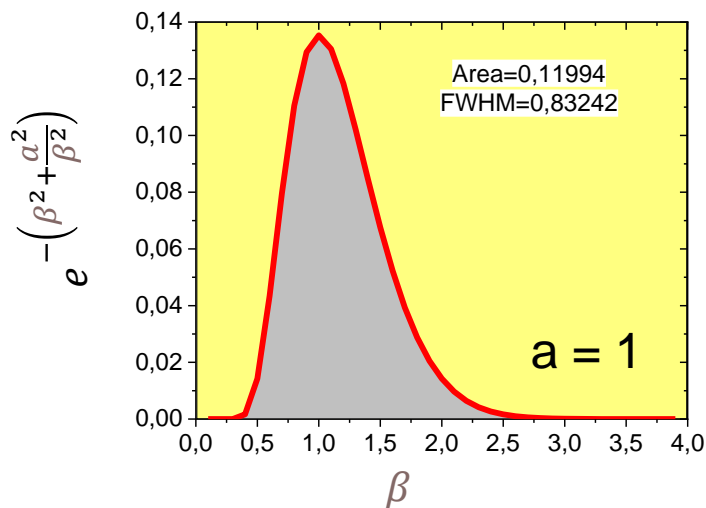
Procediamo per risoluzione grafica. Se esiste una forma analitica della soluzione, sicuramente sarà dipendente dal parametro a .

Calcoliamo l'integrale $\int_0^{\infty} e^{-\left(\beta^2 + \frac{a^2}{\beta^2}\right)}$ per diversi valori del parametro $a > 1$ e poi plottiamo i risultati in funzione di a .

$$a^2 = \frac{u^2 r^2}{16D^2}$$

4.2 DIFFUSIONE IN PRESENZA DI VENTO UNIFORME

4.2.2 Emissione puntiforme continua



a



$$\int_0^{\infty} e^{-\left(\beta^2 + \frac{a^2}{\beta^2}\right)} d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$$

4.2 DIFFUSIONE IN PRESENZA DI VENTO UNIFORME

4.2.2 Emissione puntiforme continua

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{2(\pi)^{3/2}Dr} e^{\frac{ux}{2D}} \int_0^\infty e^{-\left(\beta^2 + \frac{a^2}{\beta^2}\right)} d\beta$$

$$a^2 = \frac{u^2 r^2}{16D^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-\left(\beta^2 + \frac{a^2}{\beta^2}\right)} d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$$

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{2(\pi)^{3/2}Dr} e^{\frac{ux}{2D}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\left(\beta^2 + \frac{a^2}{\beta^2}\right)} d\beta = \frac{q}{4\pi Dr} e^{-\frac{u(r-x)}{2D}}$$

Visualizziamo la soluzione nel piano xy rappresentando le linee a concentrazione costante.

Per una comodità di visualizzazione, introduciamo le variabili adimensionali

$$\bar{x} = \frac{ux}{D} \quad \bar{y} = \frac{uy}{D} \quad \bar{r}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$$

così da riscriverla come:

$$C(x, y, z, t) = \frac{qu}{4\pi\bar{r}D^2} e^{-\frac{(\bar{r}-\bar{x})}{2}}$$

4.2 DIFFUSIONE IN PRESENZA DI VENTO UNIFORME

4.2.2 Emissione puntiforme continua

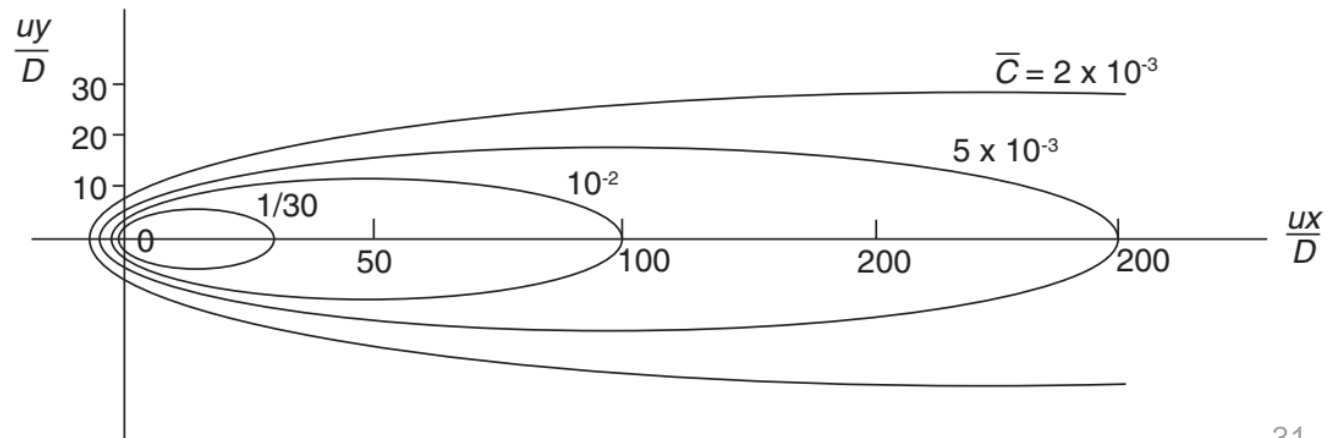
$$C(x, y, z, t) = \frac{qu}{4\pi\bar{r}D^2} e^{-\frac{(\bar{r}-\bar{x})}{2}}$$

che può essere ulteriormente semplificata introducendo $\bar{C}(x, y, z, t) = \frac{4\pi D^2 C}{qu}$ e quindi:

$$\bar{C}(x, y, z, t) = \frac{1}{\bar{r}} e^{-\frac{(\bar{r}-\bar{x})}{2}}$$

Questa relazione non contiene parametri come D , q e u .

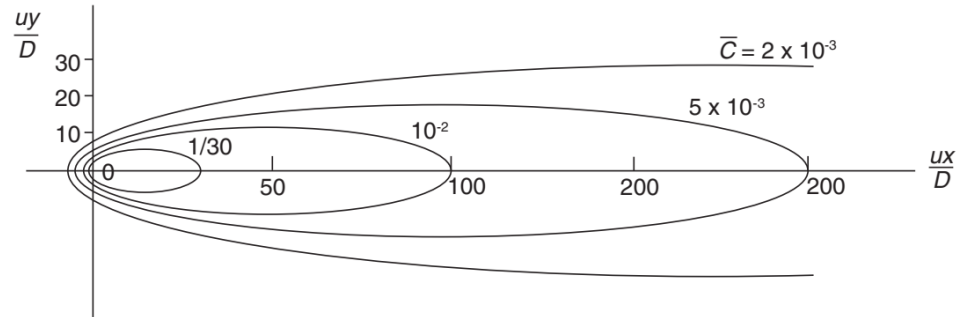
La Figura mostra il plot della soluzione dell'equazione di avvezione-diffusione per valori costanti di \bar{C} relativa ad una sorgente puntiforme continua in un flusso uniforme nel limite $t \rightarrow \infty$



4.2 DIFFUSIONE IN PRESENZA DI VENTO UNIFORME

4.2.2 Emissione puntiforme continua

L'avvezione delle particelle ospiti causato dal fluido in movimento nella direzione \vec{x} domina la diffusione.



Ciò diventa ancora più chiaro per grandi valori di x . Usando l'approssimazione:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x \sqrt{1 + \frac{y^2 + z^2}{x^2}} \approx x \left(1 + \frac{y^2 + z^2}{2x^2} \right) = x + \frac{y^2 + z^2}{2x}$$

e sostituendola nella soluzione per $t \rightarrow \infty$:

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi r D} e^{-\frac{u(r-x)}{2D}}$$

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi r D} e^{-\frac{u(r-x)}{2D}} \approx \frac{q}{4\pi r D} e^{-\frac{u(y^2+z^2)}{4xD}} = \frac{q}{2\pi\mu\sigma^2} e^{-\frac{u(y^2+z^2)}{2\sigma^2}}$$

dove si è utilizzata la relazione $\sigma^2 = \frac{2Dx}{u}$ nell'ultimo passaggio. 32

4.2 DIFFUSIONE IN PRESENZA DI VENTO UNIFORME

4.2.2 Emissione puntiforme continua

Questa funzione descrive la dispersione perpendicolare al flusso. La sua varianza σ^2 è a proporzionale al tempo $t = \frac{x}{u}$ necessario alle particelle per viaggiare dalla sorgente alla posizione x .

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{2\pi\mu\sigma^2} e^{-\frac{u(y^2+z^2)}{2\sigma^2}}$$

Ne segue che la diffusione lungo l'asse x è trascurabile nel limite per grandi valori di x e t . Che questa interpretazione sia corretta deriva anche dal fatto che si è facile dimostrare

che $C(x, y, z, t) = \frac{q}{2\pi\mu\sigma^2} e^{-\frac{u(y^2+z^2)}{2\sigma^2}}$ è soluzione dell'equazione:

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right)$$

che è indipendente dal tempo. Ovviamente, il fatto che non esiste dipendenza dal tempo deriva dall'imposizione del limite $t \rightarrow \infty$, che descrive una situazione stazionaria. L'avvezione nella direzione x (membro di sinistra) equivale quindi alla diffusione nelle direzioni y e z (membro di destra).

4.3 MODELLO DI DISPERSIONE GAUSSIANO A PENNACCHIO

4.3.1 Tipi di emissione da ciminiera

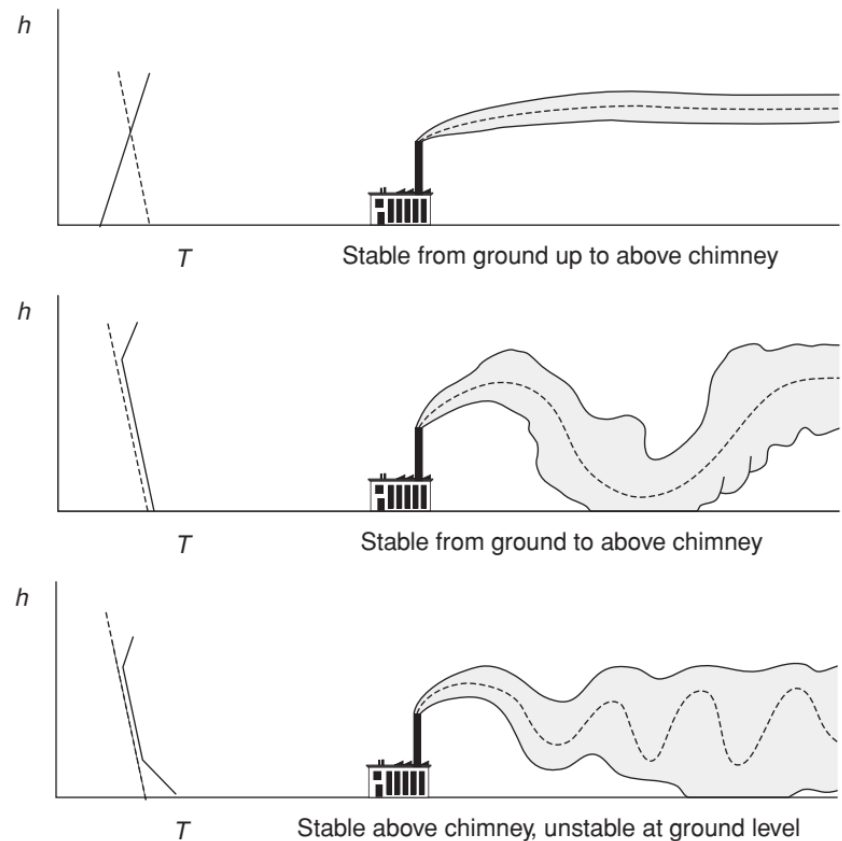
La discussione in questa sezione si concentrerà sulle emissioni da ciminiera, trattate come sorgenti puntiformi di inquinanti.

La Figura mostra il pennacchio di una ciminiera per diversi gradienti di temperatura all'interno dell'atmosfera.

Sul lato sinistro è tratteggiata la dipendenza adiabatica della temperatura dall'altitudine.

Con una linea tracciata viene data la curva della temperatura reale, che porta alle condizioni di stabilità e instabilità finali.

Si può supporre che l'aria che esce dal camino sia un po' più calda dell'ambiente circostante, e quindi inizia a salire.



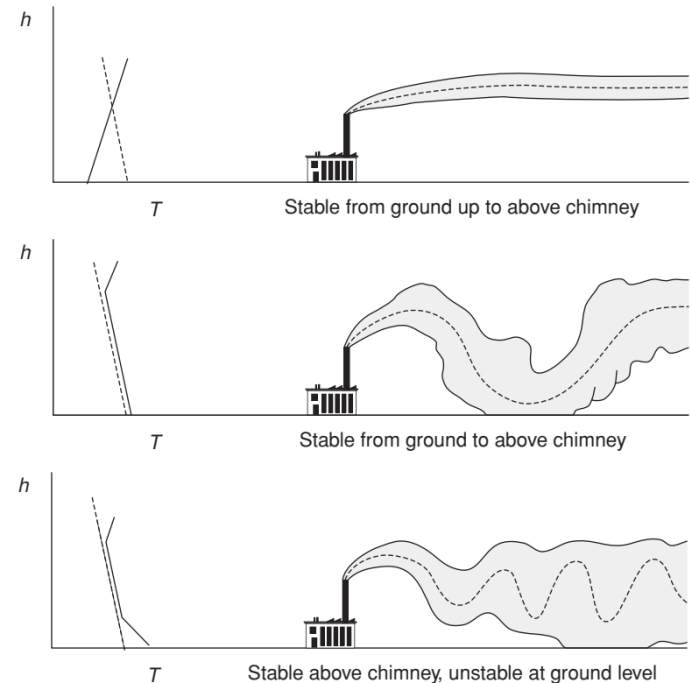
4.3 MODELLO DI DISPERSIONE GAUSSIANO A PENNACCHIO

4.3.1 Tipi di emissione da ciminiera

Ciò che accade dopo dipende dal profilo della temperatura, come rappresentato sul lato destro destro della Figura.

È chiaro che un calcolo realistico della dispersione dell'inquinante richiederebbe la conoscenza del profilo della temperatura nella regione di interesse.

Si dovrebbe calcolare il campo del vento a partire dalle variabili meteorologiche e usare le equazioni di Navier-Stokes, utilizzando alcune approssimazioni per descrivere la turbolenza.



Un modello completo che utilizza le equazioni di Navier-Stokes sarebbe essenziale se, a causa di qualche guasto industriale, si verificasse un'improvvisa emissione di materiale pericoloso. Di conseguenza, si dovrebbe valutare rapidamente quali misure adottare, quali provvedimenti emettere e così via.

4.3 MODELLO DI DISPERSIONE GAUSSIANO A PENNACCHIO

4.3.1 Tipi di emissione da ciminiera

Se però si prendono in considerazione “i comportamenti medi”, modelli più semplici sono in grado di prevedere la conseguente immissione “media” di inquinanti in atmosfera, a livello del suolo e a una distanza arbitraria dalla fonte. Per molti scopi è sufficiente conoscere l’immissione media o l’immissione accumulata in un anno.

Per questi scopi i semplici modelli discussi di seguito servono come utile approssimazione.

In un modello semplice, si presuppone che vi sia una velocità del vento orizzontale dominante lungo la direzione \vec{x} del sistema di coordinate.

Come modello prendiamo la diffusione da una sorgente puntiforme istantanea in presenza di vento uniforme, che ha portato all’equazione per la concentrazione dell’inquinante:

$$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{(\sigma\sqrt{2\pi})^3} e^{-\frac{[(x-ut)^2+y^2+z^2]}{2\sigma^2}}$$

4.3 MODELLO DI DISPERSIONE GAUSSIANO A PENNACCHIO

4.3.1 Tipi di emissione da ciminiera

$$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{(\sigma\sqrt{2\pi})^3} e^{-\frac{[(x-ut)^2+y^2+z^2]}{2\sigma^2}}$$

In questo caso, adattiamo tale equazione al fatto che le tre direzioni possono comportarsi diversamente e quindi:

$$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{(2\pi)^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} e^{-\frac{[(x-ut)^2]}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2}}$$

Qui C [kg m^{-3}] rappresenta la concentrazione di particelle inquinanti. La normalizzazione è tale che in ogni istante t l'integrale spaziale $\int C dV = Q$.

Ciò implica, come prima, che la soluzione descrive una sorgente puntiforme in $x = y = z = 0$ che emette a $t = 0$ una massa Q [kg] di particelle inquinanti.

σ_x , σ_y e σ_z hanno una diversa dipendenza dal tempo e si determinano mediante analisi statistica combinata con le misure.

4.3 MODELLO DI DISPERSIONE GAUSSIANO A PENNACCHIO

4.3.2 Analisi statistica

Consideriamo una sorgente puntiforme dalla quale vengono emesse particelle inquinanti nella forma di una successione di sbuffi, ciascuno corrispondente a una sorgente puntiforme istantanea.

Le velocità effettive delle particelle varieranno attorno al flusso medio avente componenti $(U, 0, 0)$ e saranno descritte dalle componenti $(U + u, v, w)$.

La media temporale delle velocità u, v e w sarà nulla, così come la media delle velocità di tutte le particelle inquinanti.

Tuttavia, in un flusso reale ci sarà una correlazione tra le velocità ad un certo tempo t e le velocità al tempo $t + \tau$.

Ciò che conta nei modelli statistici qui considerati non è il comportamento di una particolare particella in un particolare sbuffo, ma il comportamento medio di tutte le particelle.

La concentrazione C discussa in questa sezione deve essere considerata quindi come una media di molti sbuffi emessi dalla sorgente e si presume proporzionale alla probabilità di trovare una particella in una determinata posizione.

4.3 MODELLO DI DISPERSIONE GAUSSIANO A PENNACCHIO

4.3.2 Analisi statistica

Consideriamo un sistema di coordinate in movimento con il flusso medio nullo $U = 0$.

Il campo di velocità sarà quindi descritto dalla terna di coordinate (u, v, w) e i valori medi $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ indicheranno la media su un elevato numero di sbuffi e di particelle.

Il tempo t viene lasciato come parametro che indica il tempo trascorso da quando sono state emesse le particelle su cui viene calcolata la velocità media.

Per un processo stazionario, la media su molti sbuffi sarà indipendente dal tempo:

$$\overline{u(t)} = 0$$
$$\overline{u^2(t)} = \overline{u^2} = \text{cost}$$

Per le componenti v e w valgono relazioni simili.

Definiamo la funzione di autocorrelazione $R(\tau)$ come:

$$R(\tau) = \frac{\overline{u(t)u(t+\tau)}}{\overline{u^2}}$$

Questa funzione esprime qualitativamente quanto la particella al tempo $t + \tau$ “ricorda” (si correla con) la sua velocità al tempo t .

4.3 MODELLO DI DISPERSIONE GAUSSIANO A PENNACCHIO

4.3.2 Analisi statistica

$$R(\tau) = \frac{\overline{u(t)u(t+\tau)}}{\overline{u^2}}$$

Le principali proprietà della funzione di autocorrelazione $R(\tau)$ sono:

- È una funzione pari di τ .
- $R(0) = 1$.
- $R(\infty) = 0$, poiché dopo un lungo periodo di tempo la particella avrà 'dimenticato' le sue condizioni iniziali.

Per una singola particella con la condizione iniziale $x(0) = 0$ si può scrivere:

$$x(t) = \int_0^t u(t') dt'$$

e quindi:

$$\frac{d}{dt} x^2(t) = 2x \frac{dx}{dt} = 2x(t)u(t) = 2 \int_0^t u(t')u(t) dt' = 2 \int_{-t}^0 u(t+\tau)u(t) d\tau$$

dove nell'ultimo passaggio τ è stata scelta come variabile di integrazione assumendo $t' = t + \tau$.

4.3 MODELLO DI DISPERSIONE GAUSSIANO A PENNACCHIO

4.3.2 Analisi statistica

$$\frac{d}{dt} x^2(t) = 2 \int_{-t}^0 u(t + \tau) u(t) d\tau$$

Quest'ultima può essere mediata su molti sbuffi:

$$R(\tau) = \frac{\overline{u(t)u(t+\tau)}}{\overline{u^2}}$$

$$\frac{d}{dt} \overline{x^2(t)} = 2 \int_{-t}^0 \overline{u(t + \tau)u(t)} d\tau = 2 \int_{-t}^0 \overline{u^2} R(\tau) d\tau = 2 \overline{u^2} \int_0^t R(\tau) d\tau$$

Quest'ultima relazione è chiamata Teorema di Taylor.

Consideriamo ora una nuvola di particelle attorno a $x = 0$. La sua estensione (raggio) sarà descritta dalla media di x^2 su tutte le particelle e potrà quindi essere trovata integrando l'equazione precedente:

$$\overline{x^2} = 2 \overline{u^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} R(\tau) d\tau$$

Ciò mostra che la funzione di autocorrelazione $R(\tau)$ determina la dimensione della nuvola.

4.3 MODELLO DI DISPERSIONE GAUSSIANO A PENNACCHIO

4.3.2 Analisi statistica

Il passo successivo è approssimare la funzione di autocorrelazione tenendo conto delle tre proprietà enunciate prima.

- È una funzione pari di τ .
- $R(0) = 1$.
- $R(\infty) = 0$

Per $\tau \gg 0$, la funzione di autocorrelazione può essere approssimata:

$$R(\tau) = e^{-\frac{\tau}{t_L}}$$

Questa relazione ha il comportamento postulato sia per $\tau \rightarrow \infty$ che per $\tau = 0$.

Calcoliamo ora $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$ e $\overline{z^2}$.

Assumendo una distribuzione Gaussiana delle concentrazioni, risulterà $\sigma_x^2 = \overline{x^2}$, $\sigma_y^2 = \overline{y^2}$ e $\sigma_z^2 = \overline{z^2}$.

$$\overline{x^2} = 2\overline{u^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} R(\tau) d\tau$$

Prendendo ad esempio la direzione x :

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 = \overline{x^2} &= 2\overline{u^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} e^{-\frac{\tau}{t_L}} d\tau = 2\overline{u^2} \int_0^t dt' \left[-t_L e^{-\frac{\tau}{t_L}} \right]_0^{t'} = 2\overline{u^2} t_L \int_0^t dt' \left(1 - e^{-\frac{t'}{t_L}} \right) \\ &= 2\overline{u^2} t_L \left[\int_0^t dt' - \int_0^{t'} e^{-\frac{t'}{t_L}} dt' \right] = 2\overline{u^2} t_L \left\{ t + \left[t_L e^{-\frac{t'}{t_L}} \right]_0^t \right\} = 2\overline{u^2} t_L^2 \left(\frac{t}{t_L} + e^{-\frac{t}{t_L}} - 1 \right) \end{aligned}$$

4.3 MODELLO DI DISPERSIONE GAUSSIANO A PENNACCHIO

4.3.2 Analisi statistica

$$\sigma_x^2 = 2\overline{u^2}t_L^2 \left(\frac{t}{t_L} + e^{-\frac{t}{t_L}} - 1 \right)$$

Per le direzioni x e z si possono ricavare espressioni simili.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Per $t \ll t_L$, possiamo considerare l'espansione in serie di $e^{-\frac{t}{t_L}}$ troncata al terzo termine

$$\sigma_x^2 = 2\overline{u^2}t_L^2 \left(\frac{t}{t_L} + e^{-\frac{t}{t_L}} - 1 \right) \approx 2\overline{u^2}t_L^2 \left(\frac{t}{t_L} + 1 - \frac{t}{t_L} + \frac{t^2}{t_L^2} - 1 \right) = 2\overline{u^2}t^2$$

Le deviazioni standard nelle tre direzioni saranno:

$$\sigma_x \approx \sqrt{\overline{u^2}t} = u_m t$$

$$\sigma_y \approx \sqrt{\overline{v^2}t} = v_m t$$

$$\sigma_z \approx \sqrt{\overline{w^2}t} = w_m t$$

Pertanto, per $t \ll t_L$, le deviazioni standard variano linearmente con il tempo.

4.3 MODELLO DI DISPERSIONE GAUSSIANO A PENNACCHIO

4.3.3 Emissione continua da sorgente puntiforme

Torniamo al modello a pennacchio gaussiano.

Riprendiamo il risultato trovato per una sorgente puntiforme ad emissione istantanea che emette una massa q di particelle al secondo [kg s^{-1}].

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} e^{-\frac{(x-ut)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2}}$$

Integrando sulla variabile temporale e sostituendo le espressioni trovate per σ_x , σ_y e σ_z :

$$\sigma_x = u_m t$$

$$\sigma_y = v_m t$$

$$\sigma_z = w_m t$$

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty e^{-\frac{[(x-Ut)^2]}{2u_m^2 t^2} - \frac{y^2}{2v_m^2 t^2} - \frac{z^2}{2w_m^2 t^2}} \frac{dt}{u_m v_m w_m t^3}$$

Risolvendo questo integrale non proprio banale si arriva alla seguente espressione analitica:

4.3 MODELLO DI DISPERSIONE GAUSSIANO A PENNACCHIO

4.3.3 Emissione continua da sorgente puntiforme

$$C(x, y, z, t) = \frac{qu_m}{(2\pi)^{3/2} v_m w_m r^2} e^{-\frac{U^2}{2u_m^2}} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{Ux}{u_m r} e^{\frac{U^2 x^2}{2u_m^2 r^2}} \operatorname{erfc} \left(-\frac{Ux}{u_m r \sqrt{2}} \right) \right\} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2}}$$

con

$$r^2 = x^2 + \frac{u_m^2}{v_m^2} y^2 + \frac{u_m^2}{w_m^2} z^2$$

Adottiamo due approssimazioni:

- per una certa distanza a valle della sorgente possiamo assumere $r \rightarrow x$
- $\frac{U}{u_m} \rightarrow \infty$ poiché $u_m \ll U$.

Trascurando momentaneamente gli esponenziali in verde:

$$C(x, y, z, t) = \frac{qu_m}{(2\pi)^{3/2} v_m w_m x^2} \left\{ e^{-\frac{U^2}{2u_m^2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{Ur}{u_m r} e^{-\frac{U^2}{2u_m^2}} e^{\frac{U^2 y^2}{2u_m^2 x^2}} \operatorname{erfc} \left(-\frac{Ur}{u_m r \sqrt{2}} \right) \right\}$$

$$C(x, y, z, t) = \frac{qu_m}{(2\pi)^{3/2} v_m w_m x^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{U}{u_m}$$

$$\operatorname{erfc}(x) := 1 - \operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

4.3 MODELLO DI DISPERSIONE GAUSSIANO A PENNACCHIO

4.3.3 Emissione continua da sorgente puntiforme

$$C(x, y, z, t) = \frac{qU}{4\pi v_m w_m x^2}$$

$$\sigma_x = u_m t$$

$$\sigma_y = v_m t$$

$$\sigma_z = w_m t$$

Utilizzando $x = Ut$ si ottiene l'espressione finale:

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{2\pi\sigma_y\sigma_z U} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2}}$$

La dipendenza da x viene persa poiché viene trascurata la diffusione nella direzione del flusso principale. L'integrale su una sezione trasversale perpendicolare al flusso può essere calcolato come:

$$\int C dy dz = \frac{q}{U}$$

Questo risultato può essere interpretato nel modo seguente: in un tempo dt una massa qdt di particelle viene emessa dalla sorgente. Dopo un tempo t , la massa qdt avrà percorso una distanza $x = Ut$ e avrà larghezza $dx = Udt$. Se si moltiplica l'integrale $\int C dy dz$ per la larghezza Udt dell'infinitesimo dx si ottiene infatti la massa di particelle qdt che sono state emesse nel tempo dt .

4.3 MODELLO DI DISPERSIONE GAUSSIANO A PENNACCHIO

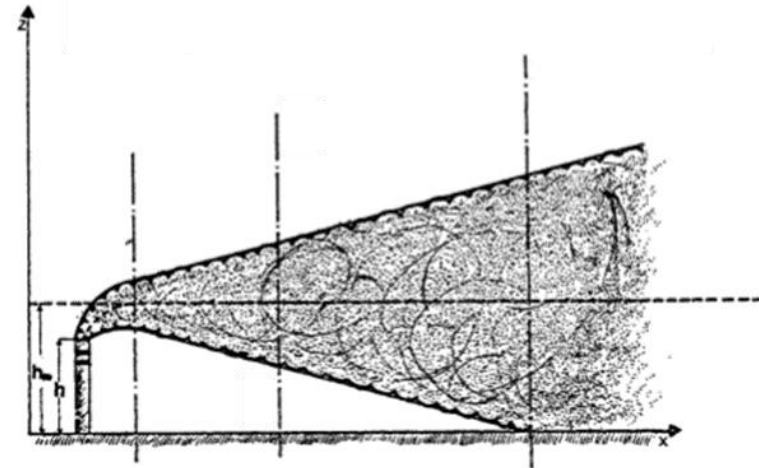
4.3.4 Esempio di calcolo con emissione da una ciminiera

Consideriamo una ciminiera di altezza h , che emette continuamente una massa q [kg s^{-1}] di particelle al secondo.

Prendendo la verticale come direzione z , le coordinate della sorgente, quindi, sono $(0, 0, h)$.

Al livello del suolo ($z = 0$) assumiamo una riflessione completa: tutte le particelle che scendono rimbalzano indietro.

Ciò equivale ad aggiungere una sorgente fittizia con coordinate $(0, 0, -h)$.



La soluzione trovata precedentemente è quindi generalizzabile come:

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{2\pi\sigma_y\sigma_z U} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2}}$$

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{2\pi\sigma_y\sigma_z U} \left[e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z-h)^2}{2\sigma_z^2}} + e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z+h)^2}{2\sigma_z^2}} \right]$$

4.3 MODELLO DI DISPERSIONE GAUSSIANO A PENNACCHIO

4.3.4 Esempio di calcolo con emissione da una ciminiera

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{2\pi\sigma_y\sigma_z U} \left[e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z-h)^2}{2\sigma_z^2}} + e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z+h)^2}{2\sigma_z^2}} \right]$$

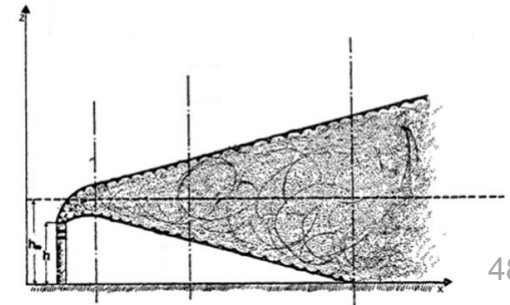
Dal punto di vista “sicurezza”, è interessante valutare la concentrazione in massa degli inquinanti presenti nell'aria a livello del suolo $z = 0$, che sarà pari a:

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{\pi\sigma_y\sigma_z U} \left[e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{h^2}{2\sigma_z^2}} \right]$$

Se il pennacchio venisse completamente assorbito nel punto in cui tocca il suolo (deposito di particelle sul suolo senza reimmissione in aria), non si dovrebbe aggiungere la “sorgente specchio” e la concentrazione nell'aria a livello del suolo risulterebbe dimezzata.

Le maggiori concentrazioni del pennacchio si avranno sul piano xz , ovvero a $y = 0$:

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{\pi\sigma_y\sigma_z U} \left[e^{-\frac{h^2}{2\sigma_z^2}} \right]$$



4.3 MODELLO DI DISPERSIONE GAUSSIANO A PENNACCHIO

4.3.4 Esempio di calcolo con emissione da una ciminiera

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{\pi \sigma_y \sigma_z U} \left[e^{-\frac{h^2}{2\sigma_z^2}} \right]$$

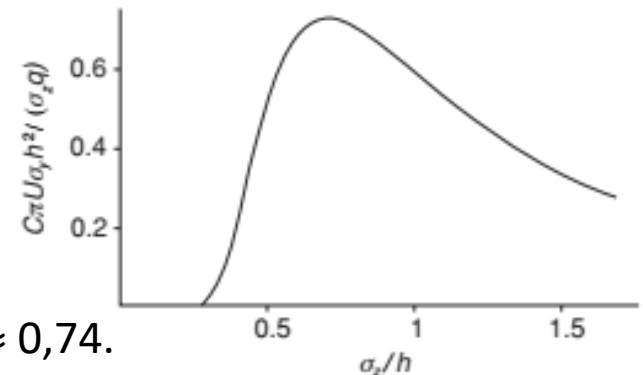
La distanza dalla ciminiera è implicitamente contenuta nei parametri σ_y e σ_z .

La concentrazione C è rappresentata in Figura in funzione di $\frac{\sigma_z}{h}$, che dovrebbe essere una misura della distanza dalla ciminiera.

L'ordinata è scritta come $\frac{C\pi U \sigma_y h^2}{\sigma_z q} = \frac{h^2}{\sigma_z^2} e^{-\frac{h^2}{2\sigma_z^2}}$.

Si osserva un massimo nel punto di ascissa $\frac{\sigma_z}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Il valore in corrispondenza del massimo è $\frac{C\pi U \sigma_y h^2}{\sigma_z q} \approx 0,74$.



Ciò implica che la massima concentrazione C al suolo è inversamente proporzionale al quadrato dell'altezza h della ciminiera, un buon motivo per costruire alte ciminiere.

4.3 MODELLO DI DISPERSIONE GAUSSIANO A PENNACCHIO

4.3.4 Esempio di calcolo con emissione da una ciminiera

Va notato che l'andamento trovato si riferisce solo al piano xz , sotto il pennacchio.

Fuori dal piano xz , la distanza da questa posizione mostra un esponenziale gaussiano aggiuntivo che implica che la concentrazione diminuirà rapidamente.

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{\pi\sigma_y\sigma_z U} \left[e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} e^{-\frac{h^2}{2\sigma_z^2}} \right]$$

I parametri σ_y e σ_z dipenderanno fortemente da:

- l'altezza: la turbolenza diminuirà ulteriormente rispetto alla sua causa, che è il terreno;
 - le condizioni del terreno;
 - la stabilità dell'atmosfera: maggiore stabilità implica minore turbolenza.

