Fisica Generale – Modulo A

Classe B

CINEMATICA DEL PUNTO – MOTI NELLO SPAZIO

Dott.ssa **Marilena Giglio**

marilena.giglio@poliba.it

Moti nello spazio

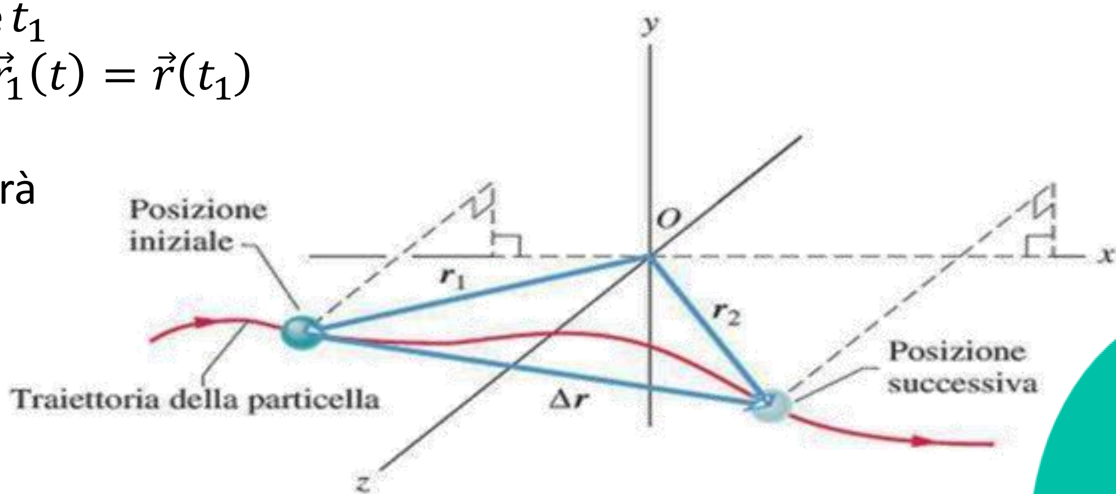
Un punto nello spazio si muove in generale descrivendo una curva che può essere in un piano come nello spazio. Il punto materiale P può essere seguito considerando il **vettore posizione** o **raggio vettore** che congiunge l'origine O con il punto P.

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP} = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}$$

Dove:

- $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ (oppure $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$) sono i versori lungo gli assi cartesiani x y z
- x, y, z sono le coordinate di P rispetto all'origine O
- $x\,\hat{\imath}$, $y\,\hat{\jmath}$, $z\,\hat{k}$ sono i componenti di $\vec{r}$ lungo gli assi cartesiani

Quando un corpo si muove il suo vettore posizione si sposta.
Nella figura all'istante t_1
il vettore posizione è $\vec{r}_1(t) = \vec{r}(t_1)$
mentre all'istante t_2
il vettore posizione sarà
$\vec{r}_2(t) = \vec{r}(t_2)$



Moti nello spazio

di conseguenza il vettore spostamento è

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

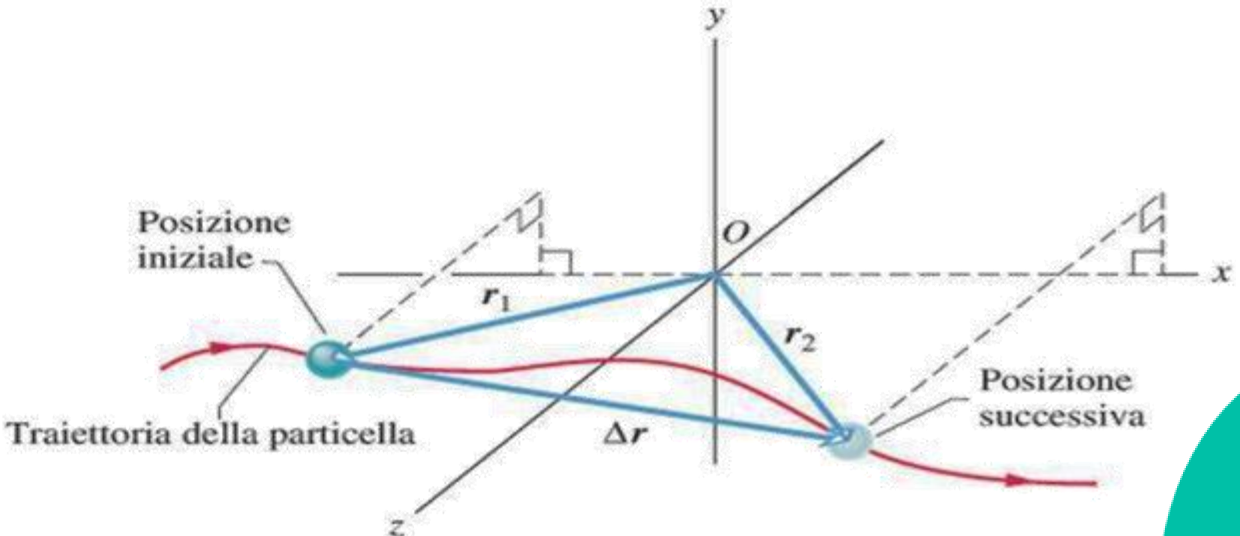
(regola del parallelogramma) che in termini delle componenti diventa:

$$\overrightarrow{\Delta r} = \left(x_2\,\hat{\imath} + y_2\,\hat{\jmath} + z_2\,\hat{k}\right) - \left(x_1\,\hat{\imath} + y_1\,\hat{\jmath} + z_1\,\hat{k}\right) =$$
$$= (x_2 - x_1)\,\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\,\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\,\hat{k} =$$

che possiamo anche scrivere in modo sintetico:

$$\overrightarrow{\Delta r} = \Delta x\,\hat{\imath} + \Delta y\,\hat{\jmath} + \Delta z\,\hat{k}$$

(Lo spostamento nello spazio si ottiene sommando vettorialmente gli spostamenti sui 3 assi come se fossero indipendenti $\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{\Delta x} + \overrightarrow{\Delta y} + \overrightarrow{\Delta z}$)



Problema 2.1

Una particella si sposta da A(1,2,3) a B(1,3,1). Si determinino i vettori posizione iniziale e finale rispetto all'origine e l'espressione del vettore spostamento.

Soluzione:

$$\vec{r}_A = \hat{i} + 2\,\hat{j} + 3\,\hat{k}$$
$$\vec{r}_B = \hat{i} + 3\,\hat{j} + \hat{k}$$
$$\vec{s} = \hat{j} - 2\,\hat{k}$$

Velocità media e velocità istantanea

La definizione non cambia rispetto al capitolo precedente (Cinematica 1D):

$$\overrightarrow{v_M} = < \vec{v} > = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

è la velocità media che possiamo scrivere nella forma

$$\overrightarrow{v_M} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\, \hat{i} + \Delta y\, \hat{j} + \Delta z\, \hat{k}}{\Delta t}$$

$$\overrightarrow{v_M} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\, \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\, \hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\, \hat{k}$$

e la velocità istantanea è definita come:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt}$$

Velocità media e velocità istantanea

Dalla precedente equazione abbiamo anche che

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}\right) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

Il vettore $\vec{v}$ possiamo sempre scomporlo lungo gli assi del sistema di riferimento x y z

$$\vec{v} = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j} + v_z\,\hat{k}$$

Per cui si deve avere che

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$
$$v_y = \frac{dy}{dt}$$
$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

Le componenti cartesiane v_x, v_y, v_z del vettore velocità si ottengono derivando rispetto al tempo le coordinate del punto.

Accelerazione

Quando la velocità del punto varia nel tempo, il moto si dice accelerato. Analogamente a quanto fatto nel caso unidimensionale, l'accelerazione media è definita come rapporto tra variazione di velocità $\Delta\vec{v}$ nell'intervallo di tempo Δt in cui avviene la variazione:

$$\overrightarrow{a_m} =< \vec{a} > = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

L'accelerazione media fornisce un'indicazione globale. Viceversa l'accelerazione istantanea permette di conoscere la variazione temporale della velocità nel limite di $\Delta t \to 0$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

L'accelerazione istantanea è dunque la derivata del vettore velocità rispetto al tempo, ovvero la derivata seconda del vettore posizione rispetto al tempo.

Se $\vec{a} = 0$, allora $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ quindi la velocità è costante in modulo, direzione e verso:
moto rettilineo uniforme (il punto si muove lungo una retta).
In generale l'acc. non è tangente al moto (come nel caso della velocità).

Accelerazione

Dalle seguenti equazioni

$$\vec{a} = a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath} + a_z\,\hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}\right) = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\hat{\imath} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\hat{\jmath} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)\hat{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

si ottengono le relazioni

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$
$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

È possibile scomporre l'accelerazione $\vec{a}$ nelle sue componenti cartesiane. Queste ultime sono le accelerazioni dei moti rettilinei ottenuti come proiezione del moto del punto materiale sugli assi cartesiani.

Accelerazione

Viceversa, integrando l'accelerazione tra t_0 e t, si ottiene la velocità in funzione del tempo.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\, dt \quad \begin{cases} x(t) = x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} v_x(t)\, dt \\ y(t) = y(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} v_y(t)\, dt \\ z(t) = z(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} v_z(t)\, dt \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} \\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\, dt \quad \begin{cases} v_x(t) = v_x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} a_x(t)\, dt \\ v_y(t) = v_y(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} a_y(t)\, dt \\ v_z(t) = v_z(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} a_z(t)\, dt \end{cases}$$

Accelerazione

Quindi il vantaggio nell'uso delle componenti è quello di **poter scomporre il moto considerando il moto** proiettato **su ciascun asse**, trattando indipendentemente una componente dall'altra. Di conseguenza ogni componente si tratta come nella cinematica 1D ed il moto risultante (quello reale) è dato dalla composizione dei moti delle varie componenti.

Esempio

1) $\vec{a} = 2\,\hat{\imath} \Rightarrow$ il moto è rettilineo uniformemente accelerato sull'asse x e rettilineo uniforme sugli altri assi

2) $\vec{a} = costante \Rightarrow \vec{a} = a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath} + a_z\,\hat{k}$ e affinché un vettore sia costante lo devono essere tutte le sue componenti quindi $a_x = costante$, $a_y = costante$, $a_z = costante$ ovvero su ogni asse c'è un moto uniformemente accelerato.

Moto parabolico

Il moto parabolico è il moto (nel vuoto) di un **punto materiale** lanciato con una **velocità iniziale** $\overrightarrow{v_0}$ al tempo $t_0 = 0$, formante un **angolo** θ **con l'asse x**, soggetto all'**accelerazione** di gravità $\vec{g}$, diretta verso il basso.

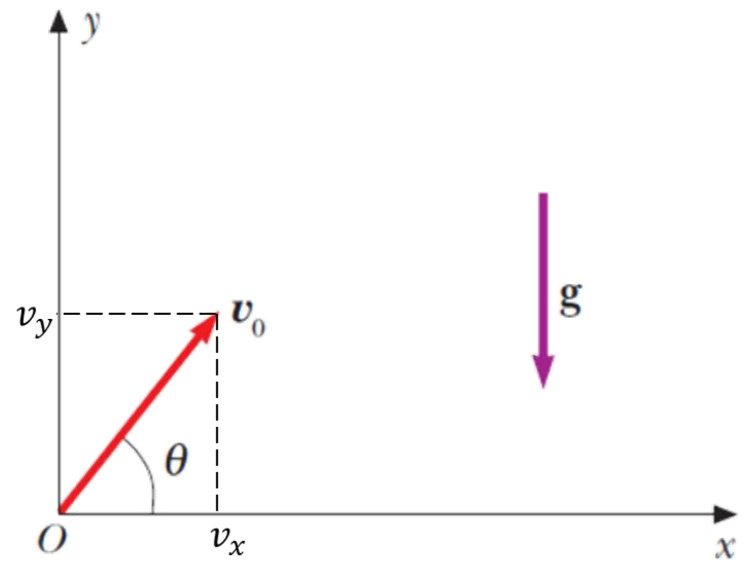
A differenza del moto 1D della caduta libera, **velocità iniziale ed accelerazione** **non** **sono tra loro** **paralleli** ed il moto avviene nel piano definito da questi due vettori (moto 2D, piano xy).

Usiamo il sistema di rif. xy in figura:

$$\vec{a} = \vec{g} = -g\,\hat{j}$$

$$\overrightarrow{v_0} = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\,\hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)\,dt = \vec{v}_0 - gt\hat{u}_y$$



Obiettivi: determinare la
- Traiettoria xy
- Massima altezza
- Gittata

Moto parabolico

Analizziamo separatamente i moti sugli assi cartesiani :

x $\begin{cases} v_{0x} = v_0 \ \cos\Theta \\ a_x = 0 \end{cases}$ y $\begin{cases} v_{0y} = v_0 \ \text{sen}\,\Theta \\ a_y = -g \end{cases}$

Pertanto il moto **è rettilineo uniforme sull'asse x** ($a_x = 0$ e $v_x = costante$) e **rettilineo uniformemente accelerato sull'asse y.**
Di conseguenza, valgono le seguenti **leggi orarie**:

x $\begin{cases} a_x = 0 \\ v_x = v_{0x} = v_0 \cos\Theta \\ x = x_0 + v_{0x}\, t \end{cases}$ y $\begin{cases} a_y = -g \\ v_y = v_{0y} - g\,t \ = v_0\, sen\,\Theta \ - gt \\ y = y_0 + v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{cases}$

Per determinare la **traiettoria** esplicitiamo t in $x = \cdots$ e sostituiamo in $y = \cdots$

Otteniamo $t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos\Theta}$ e $y = y_0 + (v_0 \sin\Theta)\left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos\Theta}\right) - \frac{1}{2}\ \text{g} \left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos\Theta}\right)^2$

$$y = y_0 + tan\Theta\ (x - x_0) - \frac{1}{2}\ \text{g}\ \frac{(x - x_0)^2}{(v_0 \cos\Theta)^2}$$

che è **l'equazione di una parabola.**

Moto parabolico

Nel caso $x_0 = 0$ otteniamo:

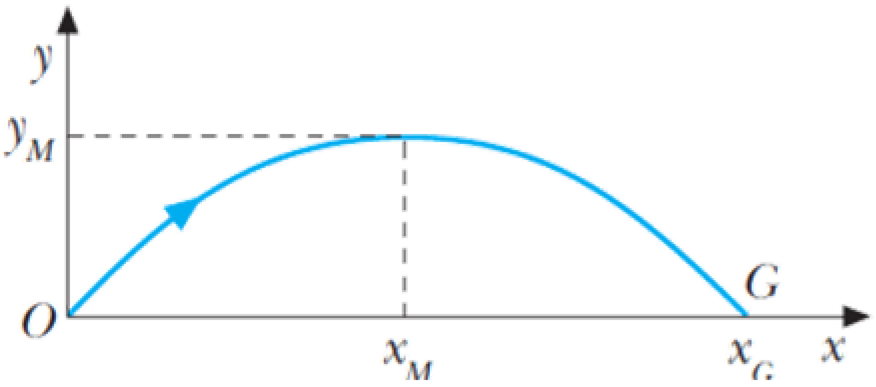
$$y = y_0 + \tan\Theta \cdot x - \frac{g\,x^2}{2(v_0 \cos\Theta)^2}$$

Pertanto la traiettoria nel moto del proiettile è una parabola (moto parabolico)

Il punto materiale sale (v_y positiva) fino a raggiungere una quota massima, per poi invertire il suo moto e scendere verso il suolo (v_y negativa).

La **massima altezza** y_{Max} coincide con la condizione $v_y = 0$.

Calcoliamo, allora, come varia la velocità in funzione della posizione.



Moto parabolico

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\Theta$$

Per la componente y, esplicitiamo il tempo in

$$v_y = v_0 \ \sin\Theta - g\,t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0 \ \sin\Theta - v_y}{g}$$

E sostituiamo in $y = y_0 + v_{0y}\,t - \frac{1}{2} g\,t^2 \Rightarrow$

$$y = y_0 + (v_0 \sin\Theta)\left(\frac{v_0 \sin\Theta - v_y}{g}\right) - \frac{1}{2}\ \mathrm{g}\left(\frac{v_0 \sin\Theta - v_y}{g}\right)^2 \Rightarrow$$

$$2gy = 2gy_0 + 2(v_0 \sin\Theta)\left(v_0 \sin\Theta - v_y\right) - \left(v_0 \sin\Theta - v_y\right)^2 \Rightarrow$$

$$2\ g\,(y - y_0) = \left(v_0 \sin\Theta - v_y\right)\left(2\ v_0 \sin\Theta - (v_0 \sin\Theta - v_y)\right) \Rightarrow$$

$$2\ g\,(y - y_0) = \left(v_0 \sin\Theta - v_y\right)\left(v_0 \sin\Theta + v_y\right) \Rightarrow$$

$$2\ g\,(y - y_0) = (v_0 \sin\Theta)^2 - v_y^2 \quad \Rightarrow \quad v_y^2 = (v_0 \sin\Theta)^2 - 2\ g\,(y - y_0)$$

Massima altezza $\Leftrightarrow v_y$=0 $\quad \Rightarrow \quad 0 = (v_0 \sin\Theta)^2 - 2\ g\,(y_{Max} - y_0)$

$$2\ g\,(y_{Max} - y_0) = (v_0 \sin\Theta)^2$$

$$(y_{Max} - y_0) = \frac{(v_0 \ \sin\Theta)^2}{2\ g}$$

$$y_{Max} = y_0 + \frac{(v_0 \ \sin\Theta)^2}{2\ g}$$

Moto parabolico

Si definisce **gittata** orizzontale G il percorso in orizzontale necessario affinché il proiettile ripassi per la stessa quota iniziale, ovvero $y = y_0$. Quindi poniamo le condizioni $x - x_0 = G$ e $y - y_0 = 0$ nelle equazioni $x = \cdots$ e $y = \cdots$ ottenendo:

x $\begin{cases} a_x = 0 \\ v_x = v_{0x} = v_0 \cos\Theta \\ x = x_0 + v_{0x}\, t \end{cases}$ $\rightarrow \quad G = (v_0 \cos\Theta)\, t$

y $\begin{cases} a_y = -g \\ v_y = v_{0y} - g\, t = v_0 \,\mathrm{sen}\, \Theta - gt \\ y = y_0 + v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{cases}$ $\rightarrow 0 = (v_0 \sin\Theta)\, t - \dfrac{1}{2} g t^2 \;\rightarrow\; \dfrac{1}{2} g\, t = v_0 \sin\Theta$

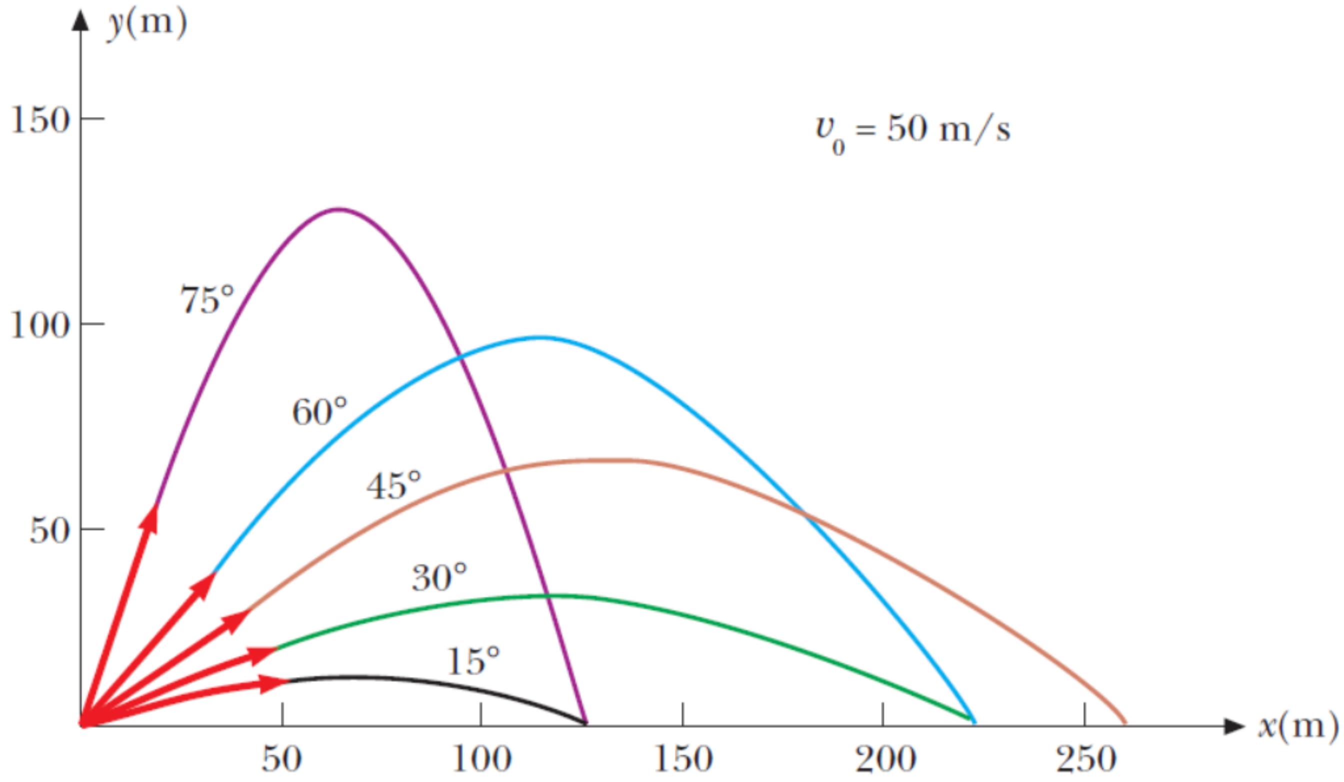
Esplicitando il tempo t nella seconda equazione e sostituendo nella prima otteniamo:

$$\boldsymbol{G} = (v_0 \cos\Theta)\left(\frac{2\, v_0 \sin\Theta}{g}\right) = \frac{2v_0^2}{g} \sin\Theta \cos\Theta = \frac{\boldsymbol{v_0^2}}{\boldsymbol{g}} \boldsymbol{sin}(\boldsymbol{2\Theta})$$

Da questa notiamo che **la gittata è massima quando** dG/dΘ = 0, ovvero quando **l'angolo di lancio** è $\boldsymbol{\pi/4}$ $(\sin(2\Theta) = 1)$.

<u>Questo risultato è valido solo se</u> y_0=0.

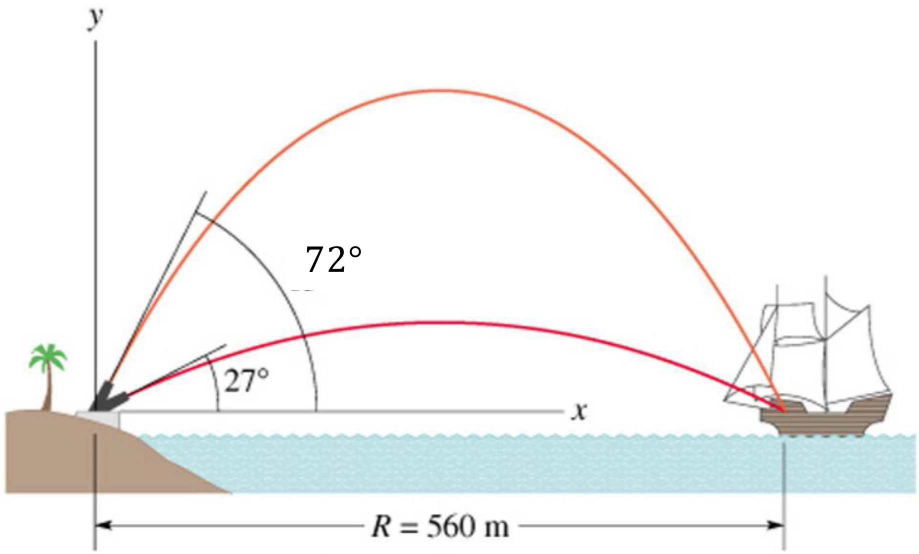
Moto parabolico



Si trova che in corrispondenza degli angoli $\theta_1 = 45° + \alpha$ e $\theta_2 = 45° - \alpha$, la gittata è la stessa.

Problema 2.2

Una nave si trova a 560 m dal forte che difende il porto di un'isola. Il forte è dotato di un cannone che lancia proiettili alla velocità v_0 = 82 m/s. Con quale angolo di elevazione si devono lanciare i proiettili per colpire la nave?



Soluzione:

$$\theta = 27° \vee \theta = 72°$$

Problema 2.3

Una gazza, in picchiata a velocità costante con angolo di 37° rispetto l'orizzontale, lascia cadere un rametto alla quota 15 m dal suolo.
Il rametto tocca il terreno dopo 1,5 s. Qual è la velocità della gazza?

Soluzione:

v_0 = 4,41 m/s.

Problema 2.4

In un bar, l'avventore lancia il boccale della birra lungo il banco. Il barista non si accorge del lancio e il boccale cade verso il suolo. Se il banco è alto 0.86 m e il boccale cade a 1.4 m dalla base del banco, determinare la velocità iniziale del boccale e la velocità nel momento in cui tocca il suolo.

Soluzione:

$$\vec{v}_0 = v_0 \hat{i} \ ; \ v_0 = 3{,}3 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_1 = v_{1x}\hat{i} + v_{1y}\hat{j} = 3{,}3 \text{ m/s}\,\hat{i} - 4{,}11\,\hat{j}$$

Problema 2.5

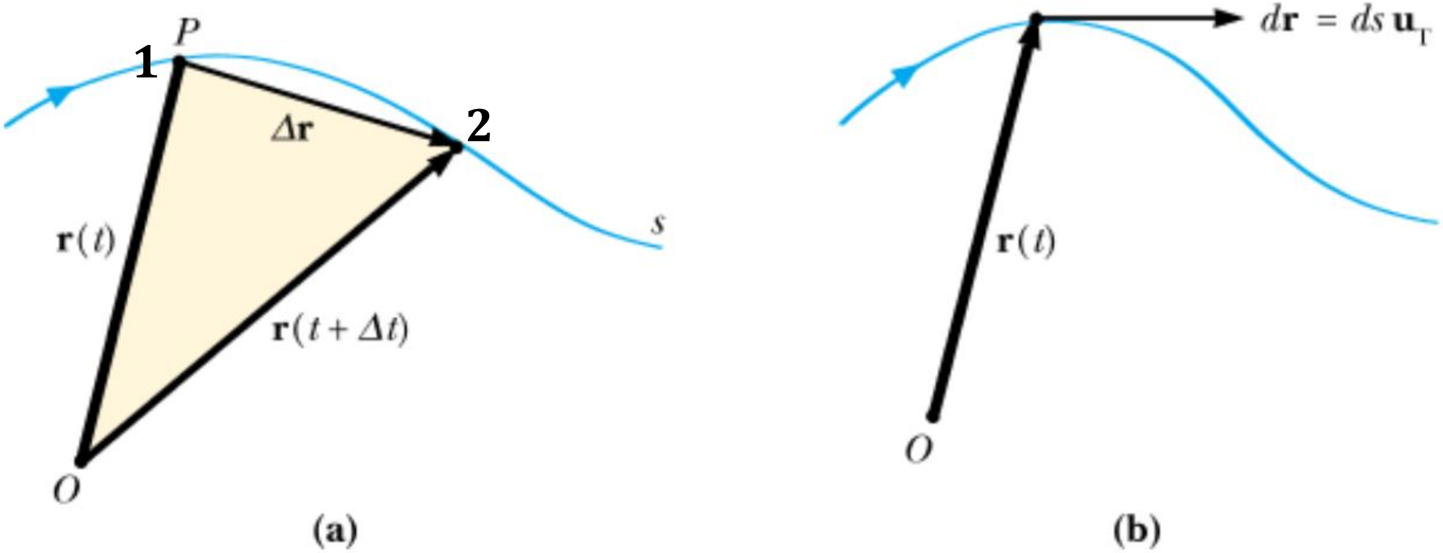
Un calciatore lancia il pallone ad una distanza di 36 m dalla porta, alta 3.05 m. Sapendo che il pallone parte con angolo 53° e velocità 20 m/s, determinare se il pallone passa sopra o sotto la traversa.

Soluzione:

$$y(t_1) = 3{,}93 \text{ m} > 3{,}05\ m$$

Velocità media e velocità istantanea

Come definiamo la **derivata di un vettore** in generale?
Osserviamo tramite la figura che al tendere dell'intervallo $\Delta t \to 0$ si ha che il punto 2 si avvicina a 1 e $\overrightarrow{\Delta r}$ tende a diventare tangente alla traiettoria.

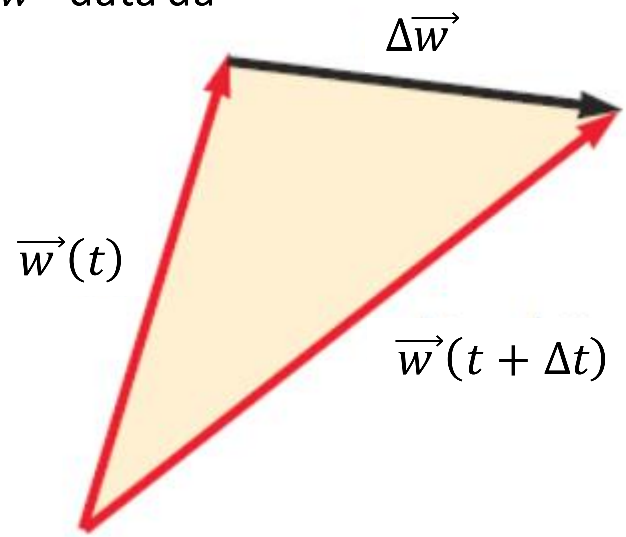


Concludiamo che la velocità istantanea è un vettore che è sempre tangente alla traiettoria del punto materiale, indipendentemente dalla scelta del sistema di riferimento. Di conseguenza, si può scrivere **la velocità istantanea in coordinate intrinseche** come $\vec{v} = v\,\hat{u}_t$ ($\hat{u}_t$ **direzione tangente alla traiettoria**)

Derivata di un vettore (Appendice C.4 Mazzoldi)

Calcoliamo la derivata di un vettore $\vec{w}$ il cui modulo e la cui direzione cambiano al variare del tempo.
Consideriamo il vettore al tempo t, $\vec{w}(t)$, e quello al tempo $(t + \Delta t)$, $\vec{w}(t + \Delta t)$.
Nell'intervallo di tempo Δt avviene un variazione vettoriale $\Delta\vec{w}$ data da

$$\Delta\vec{w} = \vec{w}(t + \Delta t) - \vec{w}(t)$$



Definiamo il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta\vec{w}}{\Delta t} = \frac{\vec{w}(t + \Delta t) - \vec{w}(t)}{\Delta t}$$

Si definisce derivata del vettore $\vec{w}$ rispetto alla variabile t, la quantità:

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{w}(t + \Delta t) - \vec{w}(t)}{\Delta t}$$

La derivata di un vettore è ancora un vettore, in generale non parallelo a $\vec{w}$.

Derivata di un vettore

Possiamo rappresentare il vettore in un sistema di assi cartesiani

$$\vec{w} = w_x\,\hat{\imath} + w_y\,\hat{\jmath} + w_z\,\hat{k}$$

Nell'ipotesi in cui gli assi siano fissi, la derivata di partenza diventa

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d\left(w_x\,\hat{\imath} + w_y\,\hat{\jmath} + w_z\,\hat{k}\right)}{dt} = \frac{dw_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dw_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dw_z}{dt}\hat{k}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(m\vec{a}) = \mathrm{m}\frac{d\vec{a}}{dt}$$ Se m=costante

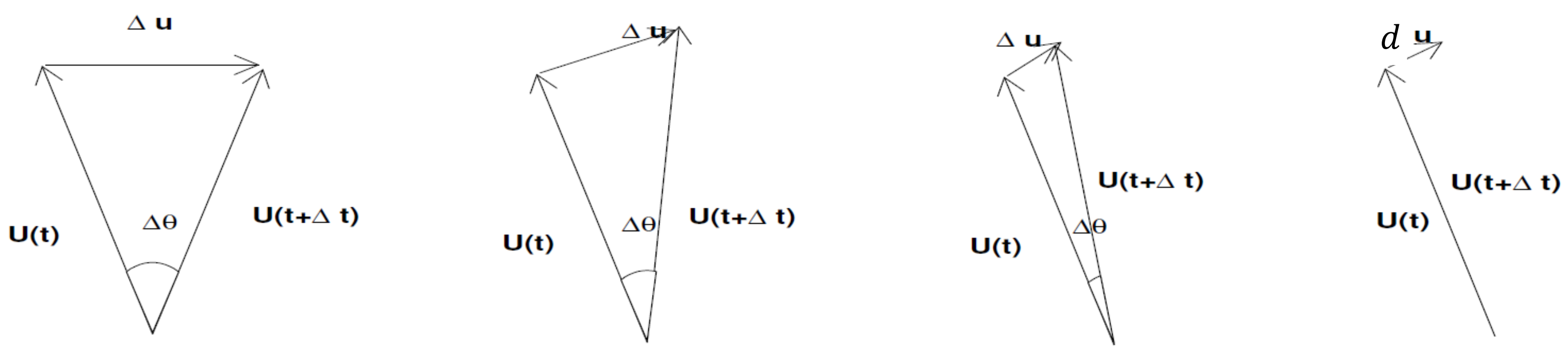
$$\frac{d}{dt}(m\vec{a}) = \frac{dm}{dt}\vec{a} + \mathrm{m}\frac{d\vec{a}}{dt}$$ Se m=m(t) ovvero dipende da t

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{dt}$$

Derivata di un versore

Il versore è un vettore di modulo unitario, quindi il suo modulo non varia nel tempo. Vediamo **come si deriva un versore $\vec{u}(t)$ quando la sua direzione cambia nel tempo, ovvero compie una rotazione di un certo angolo $\Delta\Theta$**.
L'esempio di seguito ci aiuterà a capire quale direzione ha la derivata di un versore.



$$|\Delta\hat{u}| = R\,\Delta\Theta = |\hat{u}(t)|\,\Delta\Theta$$

La regola del parallelogramma ci suggerisce che la differenza

$$\Delta\hat{u} = \hat{u}(t+\Delta t) - \hat{u}(t)$$

segue la congiungente tra $\hat{u}(t)$ e $\hat{u}(t+\Delta t)$
Al limite per $\Delta t \to 0$, $\Delta\hat{u}$ tende ad un vettore infinitesimo, perpendicolare a $\hat{u}(t)$

Derivata di un versore

Per cui la derivata del versore avrà modulo:

$|\Delta\hat{u}| = |\hat{u}(t)|\,\Delta\Theta$ => $|d\hat{u}| = |\hat{u}(t)|\,d\Theta = d\Theta$

e direzione perpendicolare a $\hat{u}(t)$ che possiamo anche scrivere come

$$d\hat{u} = d\Theta\,\hat{u}_N$$

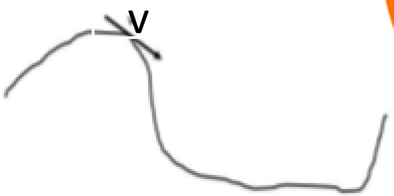
dove $\hat{u}_N$ è un versore perpendicolare a $\hat{u}$.

Di conseguenza la derivata sarà

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\Theta}{dt}\,\hat{u}_N$$

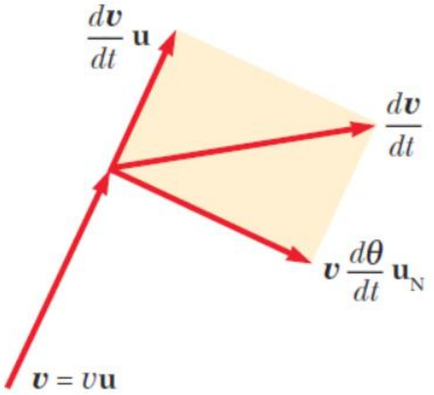
La derivata di un versore è un vettore perpendicolare al versore stesso, con modulo $\frac{d\Theta}{dt}$. Deduciamo che, in genere, la derivata di un versore non è un versore.

Derivata di un vettore



Scrittura intrinseca della derivata

Se rappresentiamo un vettore nella sua forma indipendente dai sistemi di riferimento cioè $\vec{v} = v\,\hat{u}$ possiamo ricavare la derivata del vettore utilizzando la regola di derivazione di un prodotto e quanto abbiamo appena ricavato:



$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\,\hat{u})}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u} + v\frac{d\hat{u}}{dt}$$

quindi

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u} + v\frac{d\Theta}{dt}\hat{u}_N$$

la derivata restituisce due termini: il primo termine $\frac{dv}{dt}\hat{u}$ è parallelo a $\vec{v}$ ed è dovuto alla variazione del modulo del vettore, il secondo termine $v\frac{d\hat{u}}{dt} = v\frac{d\Theta}{dt}\hat{u}_N$ è perpendicolare a $\vec{v}$ ed è dovuto alla variazione della sua direzione.
Infine, il modulo del vettore derivata è dato da:

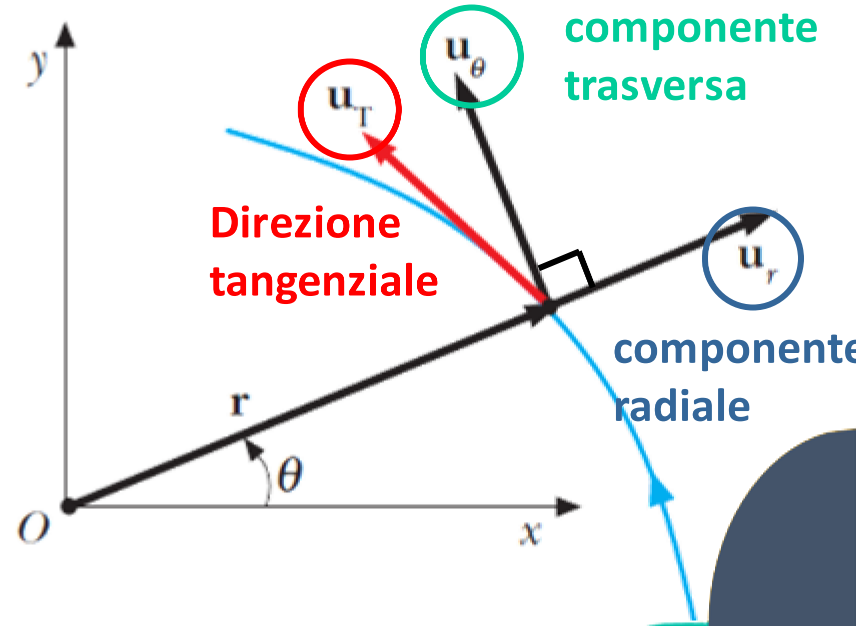
$$\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(v\frac{d\Theta}{dt}\right)^2}$$

Componenti polari della velocità

Introduciamo i versori $\hat{u}_r$ e $\hat{u}_\Theta$, il primo con direzione di $\vec{r}$, radiale, e l'altro perpendicolare al primo.
Potremo allora scrivere il raggio vettore come: $\vec{r} = r\,\hat{u}_r$
La velocità può scomporsi così:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\,\hat{u}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\hat{u}_r + r\frac{d\,\hat{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\hat{u}_r + r\frac{d\Theta}{dt}\hat{u}_\Theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\Theta$$

La **componente radiale** $\vec{v}_r$ dipende dalla **variazione del <u>modulo</u> del raggio vettore**, mentre la **componente trasversa** $\vec{v}_\Theta$ dipende dalla **variazione della <u>direzione</u> del raggio vettore**.



La velocità è stata scomposta nelle sue componenti:

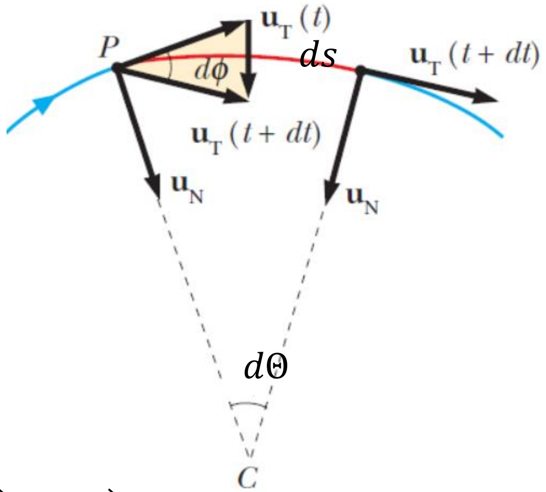
- radiale $\vec{v}_r$, diretta lungo $\vec{r}$ e di modulo $\frac{dr}{dt}$
- trasversale $\vec{v}_\Theta$,ortogonale ad $\vec{r}$ e di modulo $r\frac{d\Theta}{dt}$.

Il modulo della velocità è: $v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\Theta}{dt}\right)^2}$

Moti su traiettoria curvilinea

In un moto curvilineo qualunque, la velocità istantanea è sempre tangente alla traiettoria. Se chiamiamo con $\boldsymbol{\hat{u}_T}$ **il versore tangente alla traiettoria**, possiamo scrivere

$$\boldsymbol{\vec{v}} = \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{\hat{u}_T} \;\Rightarrow\quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\,\hat{u}_T) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\Theta}{dt}\hat{u}_N$$



Se $R = \overline{CP}$ è il <u>raggio di curvatura della traiettoria</u> ($\neq$ <u>dal raggio vettore!!</u>),

$$ds = R\,d\Theta \;\Rightarrow\; \frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v = \frac{v}{R}$$

per cui si ottiene

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\Theta}{dt}\hat{u}_N = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{v}{R}\hat{u}_N = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_C$$

Le due componenti sono

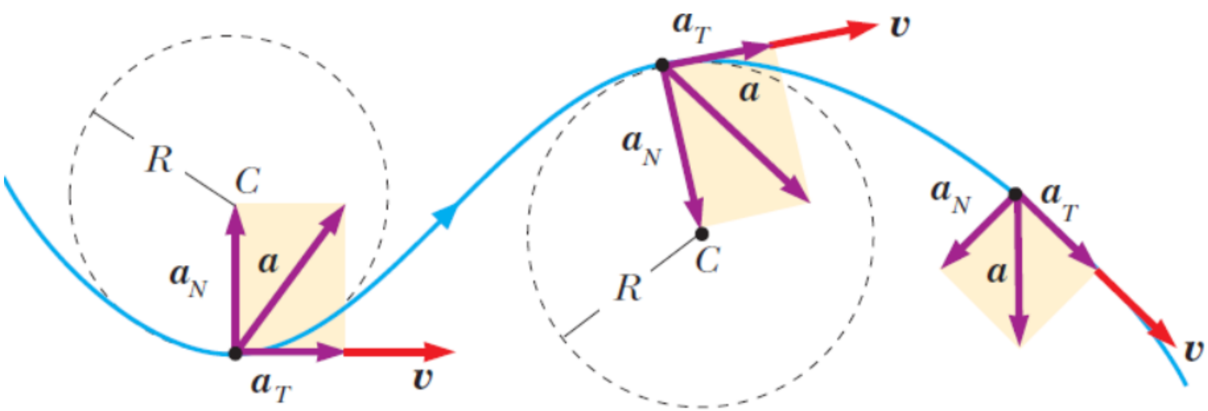
$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T$ **accelerazione tangenziale**

$\vec{a}_C = \frac{v^2}{R}\hat{u}_N$ **accelerazione normale o centripeta**

Moti su traiettoria curvilinea

La descrizione è valida anche quando la traiettoria non è circolare: in tal caso il raggio $\overline{CP}$ è quello di una circonferenza tangente alla traiettoria nel punto P (circonferenza osculatrice) e il raggio viene detto raggio di curvatura.

$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_C$ In modulo: $a = \sqrt{a_T^2 + a_C^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$



L'accelerazione non è parallela alla velocità ed è diretta verso la concavità della curva che rappresenta la traiettoria.

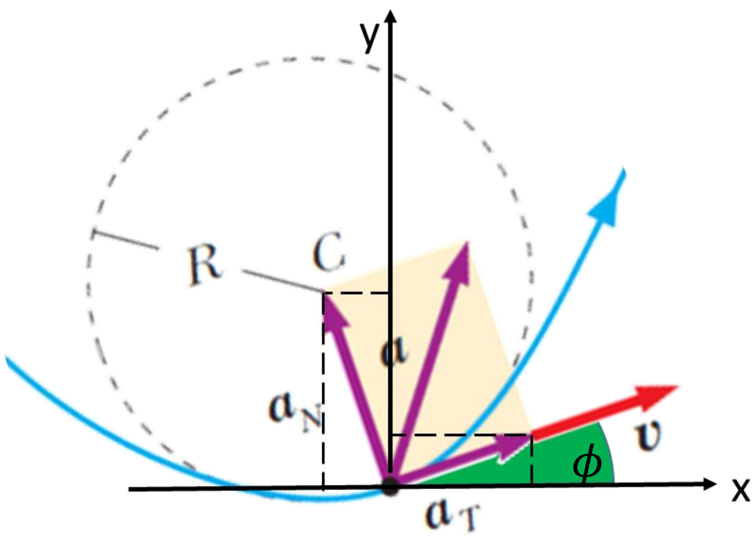
In un moto curvilineo qualsiasi $\vec{a}_T$ e $\vec{a}_C$ sono diverse da zero.

Cosa succede se $\vec{a}_T = 0$? Moto curvilineo uniforme
Cosa succede se $\vec{a}_N = 0$? Moto rettilineo (vario)
Cosa succede se $\vec{a}_T = 0$ e $\vec{a}_N = 0$? Moto rettilineo uniforme

Moti su traiettoria curvilinea

Se scegliamo un sistema di riferimento cartesiano xy, possiamo scomporre le componenti normale e tangenziale dell'accelerazione lungo gli assi cartesiani.

Sia ϕ l'angolo tra l'asse x e $\vec{a}_T$ (in verde)



$$\vec{a}_T = a_{Tx}\,\hat{i} + a_{Ty}\,\hat{j}$$
$$\vec{a}_N = -a_{Nx}\,\hat{i} + a_{Ny}\,\hat{j}$$

Asse x:

$$a_x = a_{Tx} - a_{Nx} = a_T \cos\phi - a_N \sin\phi = $$
$$= \frac{dv}{dt}\cos\phi - \frac{v^2}{R}\sin\phi$$

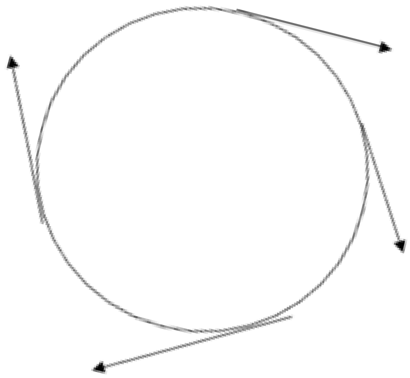
Asse y:

$$a_y = a_{Ty} + a_{Ny} = a_T \sin\phi + a_N \cos\phi = $$
$$= \frac{dv}{dt}\sin\phi + \frac{v^2}{R}\cos\phi$$

Moto circolare uniforme

Una particella la cui traiettoria è una circonferenza o un arco di circonferenza si dice essere in **moto circolare**.

Poiché il vettore velocità è sempre tangente alla traiettoria,
la velocità cambia direzione punto per punto e, quindi,
l'accelerazione centripeta è $\neq 0$.



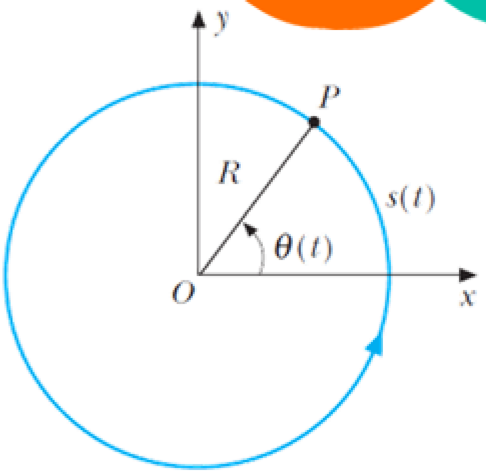
Se nel moto circolare la **velocità** è **costante in modulo**,
allora il moto è detto **moto circolare uniforme.**

In tal caso, $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$ e $\overrightarrow{a} = \vec{a}_C$

Ovvero, nel moto circolare uniforme **l'accelerazione** è solo **centripeta**, quindi sempre **diretta radialmente** e **verso il centro** della circonferenza.

Moto circolare uniforme

Il moto circolare può essere descritto anche in termini di coordinate polari, con il vantaggio che $r(t) = R = const$ e solo $\Theta(t)$ è variabile!
Ricordando che $\mathrm{d}s = R\, d\Theta$, definiamo velocità ed accelerazione angolare istantanee:



velocità angolare $\omega = \dfrac{d\Theta}{dt} = \dfrac{d\Theta}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{R}v = \dfrac{v}{R}$

accelerazione angolare $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} \left(= \dfrac{d^2\Theta}{dt^2} \right)$

Poiché nel moto circolare uniforme v e R sono costanti, anche $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{R}}$ **è costante**. Segue che l'**accelerazione angolare $\boldsymbol{\alpha}$ è nulla** (c'è però una accelerazione centripeta!).

Leggi orarie

$$\Theta(t) = \Theta_0 + \omega\, t \qquad \Theta_0 = \Theta(t = 0)$$

$$[\; s(t) = s_0 + v\, t \qquad s_0 = s(t = 0) \;]$$

$$a = a_C = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

Moto circolare vario

Nel moto circolare **vario**:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}\left(= \frac{d^2\Theta}{dt^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{R}\right) = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R = \alpha\, R$$

Nota la funzione $\alpha(t)$ si possono ottenere le descrizioni cinematiche angolari:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)dt$$

$$\Theta(t) = \Theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)dt$$

e nel caso di moto **circolare uniformemente accelerato** si ha (per $t_0 = 0$)

$$\alpha = costante \quad (a_T = costante) \qquad \left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha\, t \qquad \left[\frac{rad}{s}\right]$$ *unità di misura*

$$\Theta(t) = \Theta_0 + \omega_0\, t + \frac{1}{2}\,\alpha\, t^2 \qquad [rad]$$

$$a_C = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = (\omega_0 + \alpha\, t\,)^2 R \qquad \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Notazione vettoriale nel moto circolare

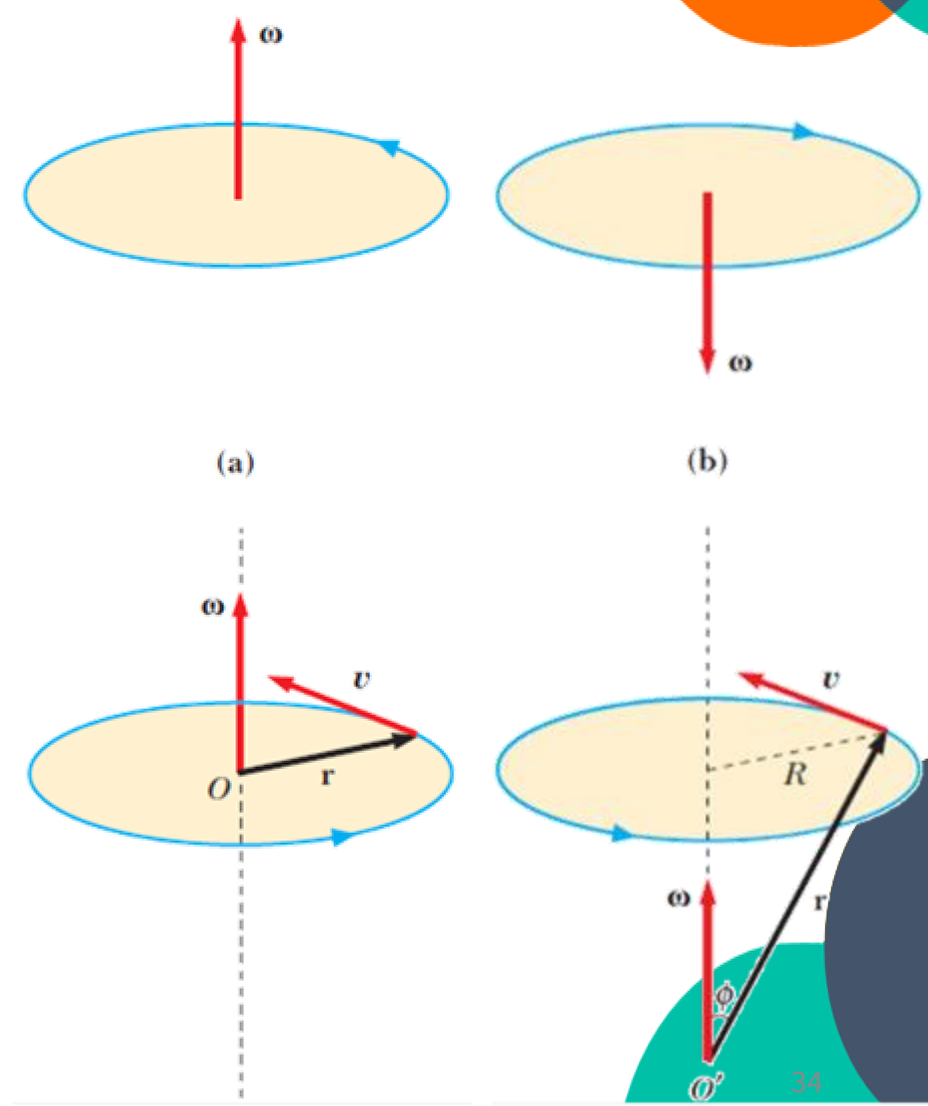
La **velocità angolare** è un **vettore** avente come modulo l'espressione di ω calcolata in precedenza, direzione perpendicolare al piano su cui si trova la circonferenza e verso tale che dalla punta del vettore $\vec{\omega}$ il moto appaia antiorario.

Da questa definizione quindi risulta che

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$(v = R\ \omega)$.

L'**accelerazione angolare** è anch'essa un **vettore**, parallelo a ω, il cui modulo è ottenuto per derivazione della velocità angolare rispetto al tempo.



Notazione vettoriale nel moto circolare

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Tramite le grandezze angolari si può indicare l’accelerazione del moto circolare:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

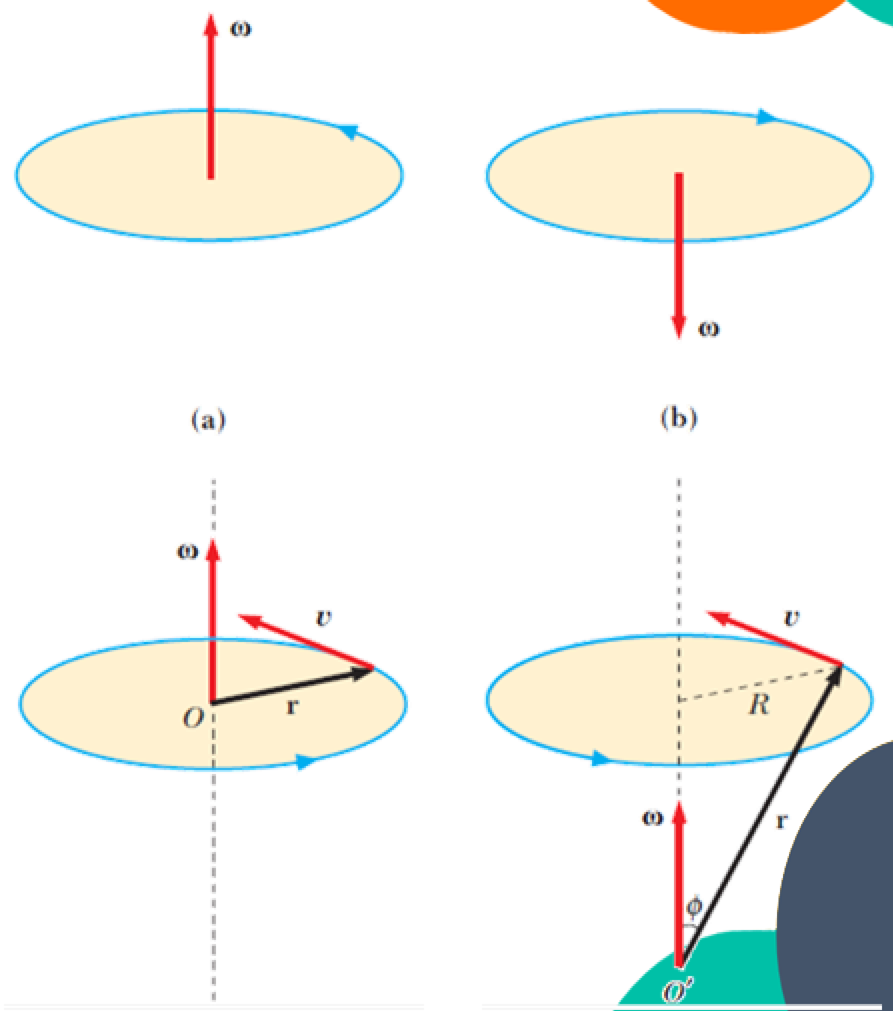
$$= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$(\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_C)$$

Il primo termine è l’accelerazione tangenziale $\vec{a}_T$ il secondo è invece l’accelerazione centripeta $\vec{a}_C$

Modulo: $a_T = \alpha R$

$$a_c = \omega^2 R$$



Periodo nel moto circolare uniforme

Il tempo necessario a compiere un giro sulla circonferenza è definito **periodo** T. Nel moto circolare uniforme vengono percorsi (a causa della costanza in modulo della velocità) archi uguali in tempi uguali. Possiamo allora scrivere che (considerando che la circonferenza $2\pi R$ è percorsa in un periodo T):

$$s = v \cdot t \quad \Rightarrow \quad 2\pi R = v \cdot T \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi R}{v}$$

sostituendo l'espressione della velocità $v = \omega R$ nell'equazione del periodo

$$T = \frac{2\pi R}{\omega R} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

con la quale abbiamo il legame tra il periodo e la velocità angolare.

Si definisce frequenza $\nu = \frac{1}{T}$ il numero di giri al secondo e si misura in hertz:

$$1\ Hz = 1\ s^{-1}$$

Problema 2.6

Un satellite terrestre si muove con orbita circolare alla quota di $640\ km$ sopra la Terra, con un periodo di rotazione di $98\ \mathrm{min}$. Qual è la velocità del satellite? Qual è la sua accelerazione centripeta ?

Soluzione:

$$v = 7{,}53\ \ 10^3\ \mathrm{m/s}$$
$$a_c = 7{,}91\ \mathrm{m}/s^2$$

Problema 2.7

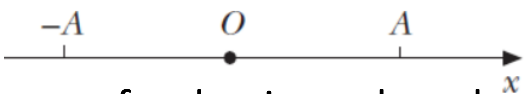
La ruota del luna park ha raggio $R = 15\ m$ e compie 5 giri in 1 minuto.
1. Qual è il periodo?
2. Qual è l'accelerazione centripeta nel punto più in alto?
3. Qual è l'accelerazione centripeta nel punto più basso?

Soluzione:

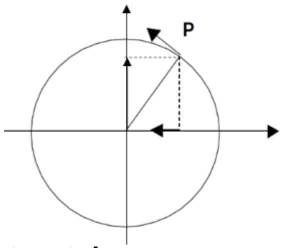
$$a_c = 4{,}11\ \mathrm{m}/s^2$$

Moto armonico semplice

Nel moto armonico semplice, un punto oscilla intorno una posizione media con la legge
$x(t) = A\, sin(\omega t\ +\ \phi)$



con A ampiezza, ϕ la fase iniziale ed ω la pulsazione (da non confondersi con la velocità angolare!!), tutte grandezze costanti.
Il punto si muove lungo un segmento di retta tra le posizioni –A e +A, pertanto si tratta di un moto rettilineo vario, in cui le grandezze cinematiche variano nel tempo.



Un esempio è la proiezione sugli assi cartesiani del moto circolare uniforme:
$x(t) = R\, cos(\omega t\ +\ \phi)$ $\qquad$ $y(t) = R\, sin(\omega t\ +\ \phi)$
aventi stessa ampiezza, sfasati di $\pi/2$, con periodo del moto armonico coincidente con quello del moto circolare uniforme (**moto periodico**) di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Infatti: $\quad x(t) = x(t+T) \quad \Rightarrow \quad A\, sin(\omega t + \phi) = A\, sin(\omega(t+T) + \phi) \Rightarrow$

$$A\, sin(\omega t + \phi) = A\, sin(\omega t + \omega T + \phi) \Rightarrow$$

e poiché la funzione sin assume gli stessi valori ogni 2π allora si deve avere che
$\omega T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$ e $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ e la ϕ è la fase quando $t = 0$.
Infine si definisce frequenza $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ il numero di oscillazioni in un secondo.
T e ν di un moto armonico semplice sono indipendenti dall'ampiezza del moto!

Moto armonico semplice

$$x(t) = A\, sin(\omega t\ +\ \phi)$$

Il moto armonico semplice è un moto accelerato:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = A\,\omega\ \cos(\omega t + \phi)$$

e derivando ancora:

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = -A\,\omega^2\ \sin(\omega t + \phi)$$
$$= -\omega^2\ x(t)$$

La velocità ha un massimo in corrispondenza del centro di oscillazione e si annulla agli estremi del moto. L'accelerazione è invece nulla al centro di oscillazione e massima agli estremi.

Si può dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché il moto sia armonico è che sia soddisfatta l'equazione differenziale del moto armonico:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2\ x(t) = 0$$