

Prof. **PIETRO PATIMISCO**

Dipartimento INTERATENO di Fisica

II PIANO – Stanza 233

pietro.patimisco@uniba.it

ORARIO DI RICEVIMENTO:

LUNEDI 09:00 – 11:00

GIOVEDI 10:30 – 12:30

PROGRAMMA DEL CORSO

SLIDE DELLE LEZIONI

<http://polysense.poliba.it/index.php/struttura-della-materia/>

TESTI CONSIGLIATI

- R. Eisberg, R. Resnick, "Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles", Wiley (1985)
- M. Alonso, E. J. Finn, "Fundamental University Physics III Quantum and Statistical Physics", Addison-Wesley (1968)

SYLLABUS

1. La radiazione termica e il postulato di Planck

1.1 La radiazione termica. **1.2 Il concetto di corpo nero.** 1.2.1 La radianza spettrale. 1.2.2 La legge di Stefan-Boltzmann. 1.2.3 La legge di spostamento di Wien. 1.2.4 Emissione di corpo nero da una cavità. **1.3 La teoria classica della radiazione di cavità.** 1.3.1 Le onde stazionarie in cavità. 1.3.2 La legge di Rayleigh-Jeans. **1.4 La Teoria di Planck.** 1.4.1 L'ipotesi di Planck. 1.4.2 Il calcolo della formula di Planck. 1.4.3 Il confronto con i risultati sperimentali. 1.4.4 Il postulato di Planck e le sue implicazioni.

2. La natura corpuscolare della luce

2.1 L'effetto fotoelettrico. 2.1.1 Gli esperimenti di Hertz. 2.1.2 L'esperimento di Lenard e le contraddizioni con la teoria classica. 2.1.3 La teoria di Einstein dell'effetto fotoelettrico. **2.2 L'effetto Compton.** 2.2.1 L'esperimento di Compton. 2.2.2 La collisione fotone-elettrone. 2.2.3 Scattering Compton e scattering Rayleigh. **2.3 La Radiazione di Bremsstrahlung.** **2.4 Il concetto di sezione d'urto.**

3. La natura ondulatoria della materia

3.1 Le onde di materia. 3.1.1 L'ipotesi di de Broglie. 3.1.2 L'esperimento di Davisson and Germer. 3.1.3 Analogia con la legge di diffrazione di Bragg per i raggi X. 3.1.4 L'esperimento di Thomson. **3.2 Il dualismo onda-corpuscolo.** 3.2.1 Il principio di complementarità di Bohr. 3.2.2 Interpretazione di Einstein del dualismo per la radiazione. 3.2.3 Interpretazione di Born del dualismo per la materia.

4. Il modello dell'atomo di Bohr

4.1 Il modello di Thomson. 4.1.1 L'atomo di Thomson. 4.1.2 L'esperimento di Rutherford. **4.2 Il modello di Rutherford.** 4.2.1 Calcolo della distribuzione angolare delle particelle diffuse. 4.2.2 Confronto tra modello di Rutherford e modello di Thomson. 4.2.3 La sezione d'urto differenziale di Rutherford. **4.3 Il modello di Bohr.** 4.3.1 La stabilità del nucleo. 4.3.2 Gli spettri atomici. 4.3.3 I postulati di Bohr. 4.3.4 L'esperimento di Franck e Hertz. 4.3.5 Le regole di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld. 4.3.6 Il modello di Sommerfeld e la struttura fine degli spettri.

SYLLABUS

5. La formulazione di Schroedinger dell'atomo

5.1 Atomo a singolo elettrone. 5.1.1 Soluzione dell'equazione di Schroedinger. 5.1.2 Autovalori, numeri quantici e degenerazione. 5.1.3 Momento angolare orbitale. **5.2 Momento di dipolo magnetico e spin.** 5.2.1 Il magnetone di Bohr. 5.2.2 La precessione di Larmor. 5.2.3 L'esperimento di Stern-Gerlach e lo spin dell'elettrone. 5.2.4 L'interazione spin-orbita. 5.2.5 Il momento angolare totale. **5.3 Atomi a molti elettroni.** 5.3.1 Estensione del modello per atomi a molti elettroni. 5.3.2 Le particelle identiche. 5.3.3 Il principio di esclusione di Pauli. 5.4.4 L'atomo di elio. 5.3.5. Struttura elettronica degli atomi a molti elettroni.

6. Molecole

6.1 La molecola dell'idrogeno ione. 6.2 Orbitali molecolari di molecole diatomiche. 6.3 Configurazione elettronica di alcune molecole diatomiche. 6.4 Molecole poliatomiche. 6.5 Molecole coniugate. 6.6 Rotazione molecolare 6.7 Vibrazione molecolare 6.8 Transizioni elettroniche nelle molecole. 6.9 Problemi.

7. Solidi

7.1 Tipi di solidi. 7.2 Teoria delle bande. 7.3 Modello ad elettroni liberi in un solido. 7.4 Moto degli elettroni in una struttura periodica 7.5 Conduttori, isolanti, semiconduttori. 7.6 Conducibilità elettrica. 7.7 Transizioni radiative nei solidi. 7.8 Problemi

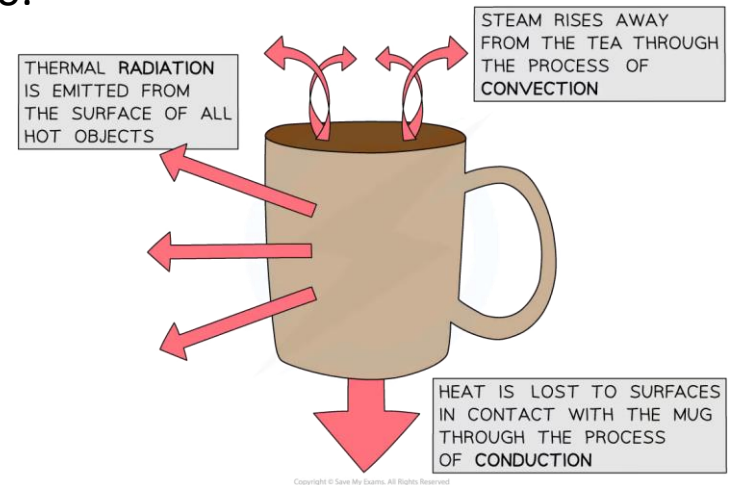
CAPITOLO 1

RADIAZIONE TERMICA E IPOTESI DI PLANCK

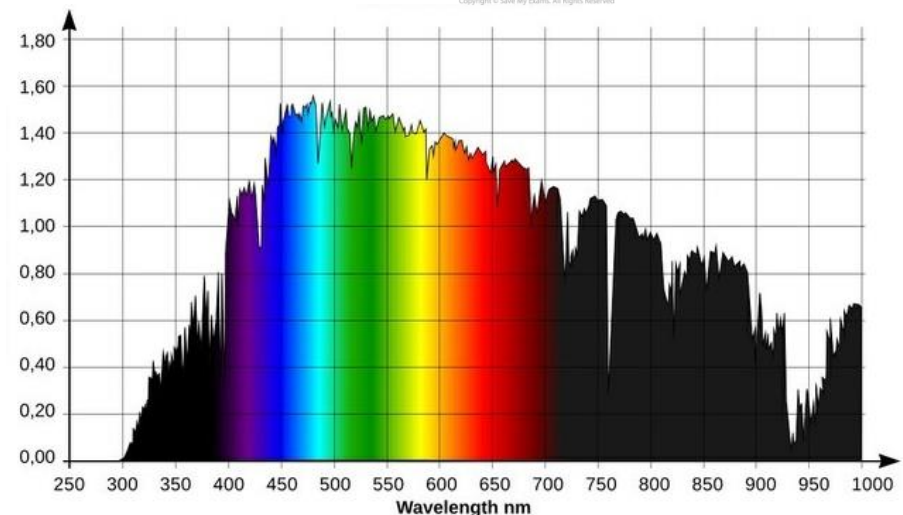
1.1 RADIAZIONE TERMICA

La radiazione emessa da un corpo a causa della sua temperatura si chiama **radiazione termica**. Tutti i corpi emettono tali radiazioni nell'ambiente circostante e, contemporaneamente, assorbono radiazione da esso.

Se un corpo è inizialmente più caldo dell'ambiente circostante, si raffredderà perché la sua rapidità di emissione di energia supera la rapidità di assorbimento di energia. Quando i tassi di emissione e assorbimento si eguagliano viene raggiunto l'**equilibrio termico**.

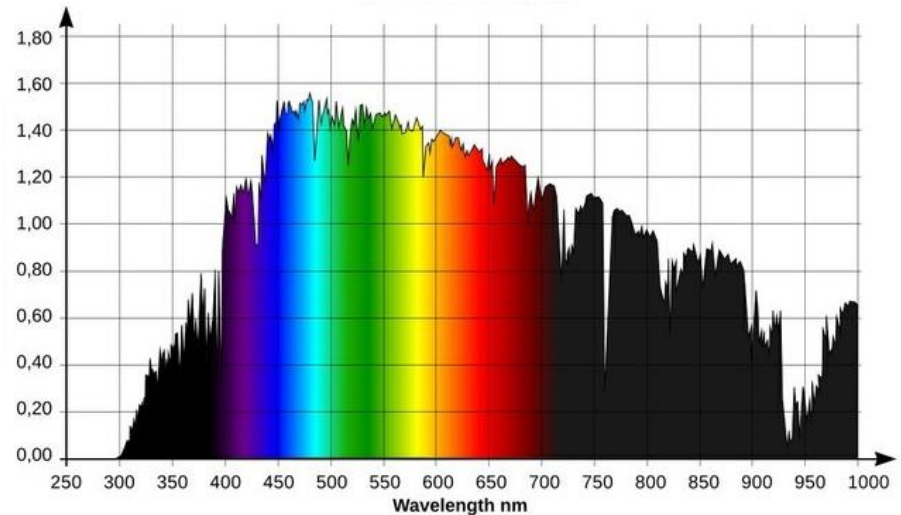


La **distribuzione del flusso** (o potenza) **radiante** (l'energia emessa per unità di tempo) da una sorgente **in funzione della lunghezza d'onda** di emissione è detta **spettro di emissione**.



1.1 RADIAZIONE TERMICA

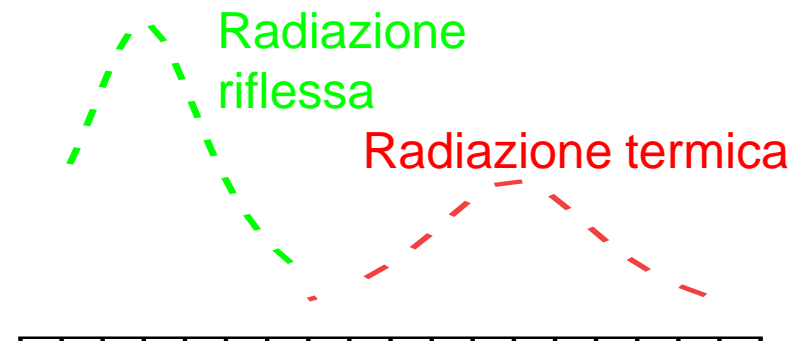
La materia in uno stato condensato (cioè, solido o liquido) emette uno spettro continuo di radiazioni. Le caratteristiche dello spettro di radiazione termica sono quasi indipendenti dal particolare materiale di cui è composto un corpo, ma dipendono fortemente dalla temperatura.



Attenzione: la radiazione termica non va confusa con la luce riflessa dai corpi.

A temperature normali la maggior parte dei corpi ci è visibile non per la luce emessa, ma per quella che riflettono. Se non c'è luce su di loro non possiamo vederli.

La radiazione termica, alle temperature tipiche in ambiente, è per noi invisibile, trovandosi nella parte infrarossa dello spettro elettromagnetico.



1.1 RADIAZIONE TERMICA

Se si raggiungono temperature molto elevate, tuttavia, i corpi diventano autoluminosi. Consideriamo, ad esempio, il riscaldamento di un attizzatoio di ferro nel fuoco e supponiamo di osservarne il comportamento a temperature sempre più elevate.

Con l'aumentare della temperatura la quantità di radiazione che l'attizzatoio emette aumenta molto rapidamente (e lo percepiamo più caldo) e si notano effetti visibili. L'attizzatoio assume un colore rosso opaco, poi rosso vivo, e, a temperature molto elevate, un colore bianco-blu intenso.



Cioè, con l'aumentare della temperatura il corpo emette radiazioni termiche più intense e la frequenza delle radiazioni più intense diventa più alta, spostandosi dall'infrarosso al visibile.

In generale, la forma dettagliata dello spettro della radiazione termica emessa da un corpo caldo dipende fortemente dalla temperatura e, in modo minore, dalla natura del corpo.

1.2 IL CONCETTO DI CORPO NERO

1.2.1 La radianza spettrale

Esiste una classe di corpi caldi che emette radiazione termica con uno spettro di carattere universale, ovvero che dipende in maniera trascurabile dalla natura del corpo emettitore.

Questi sono detti **corpi neri**, cioè corpi che hanno superfici che assorbono tutta la radiazione incidente su di esse.

Il nome è appropriato perché tali corpi non riflettono la luce e appaiono neri quando la loro temperatura è sufficientemente bassa da non essere autoluminosi. Un esempio di corpo nero sarebbe qualsiasi oggetto rivestito con uno strato diffuso di pigmento nero.

La distribuzione spettrale della radiazione del corpo nero è nota come **radianza spettrale** $R_T(\nu)$, definita in modo che $R_T(\nu)d\nu$ sia uguale all'energia emessa per unità di tempo e per unità di superficie alla temperatura T nell'intervallo spettrale $[\nu, \nu + d\nu]$.

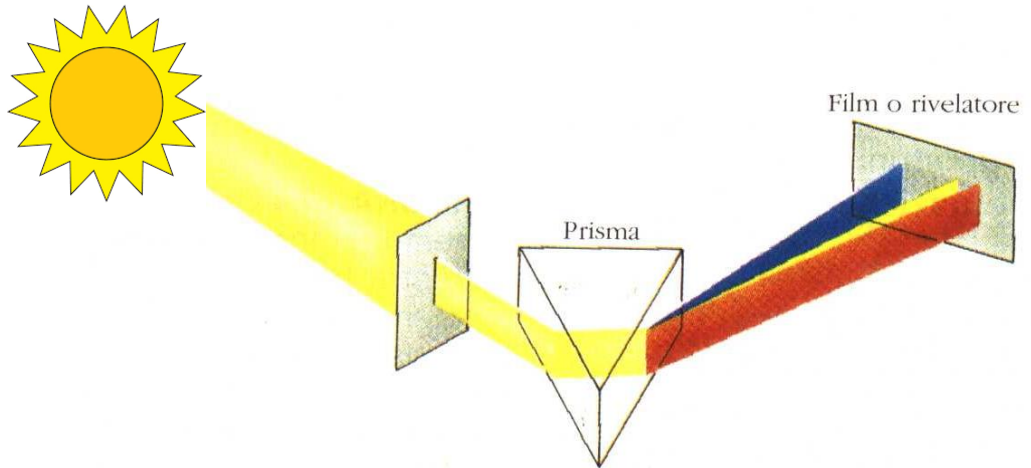
Le prime misurazioni accurate di questa quantità furono effettuate da Lummer e Pringsheim nel 1899.

1.2 IL CONCETTO DI CORPO NERO

1.2.1 La radianza spettrale

Come possiamo ricostruire lo spettro di emissione di un corpo nero?

- Una fenditura convoglia la radiazione termica emessa dal corpo nero su un elemento disperdente, quale un prisma o un reticolo (in Figura è rappresentato un prisma).
- Il prisma separa angularmente le diverse componenti spettrali della luce che lo attraversa. Ciascuna lunghezza d'onda sarà deviata ad un diverso angolo, nei limiti della risoluzione spettrale del prisma.
 - Un fotorivelatore registrerà un segnale proporzionale all'intensità per ogni posizione angolare.
 - Poiché ad ogni posizione angolare corrisponde una lunghezza d'onda, possiamo ricostruire la distribuzione di intensità in funzione della lunghezza d'onda, ovvero lo spettro di radiazione termica del corpo nero.



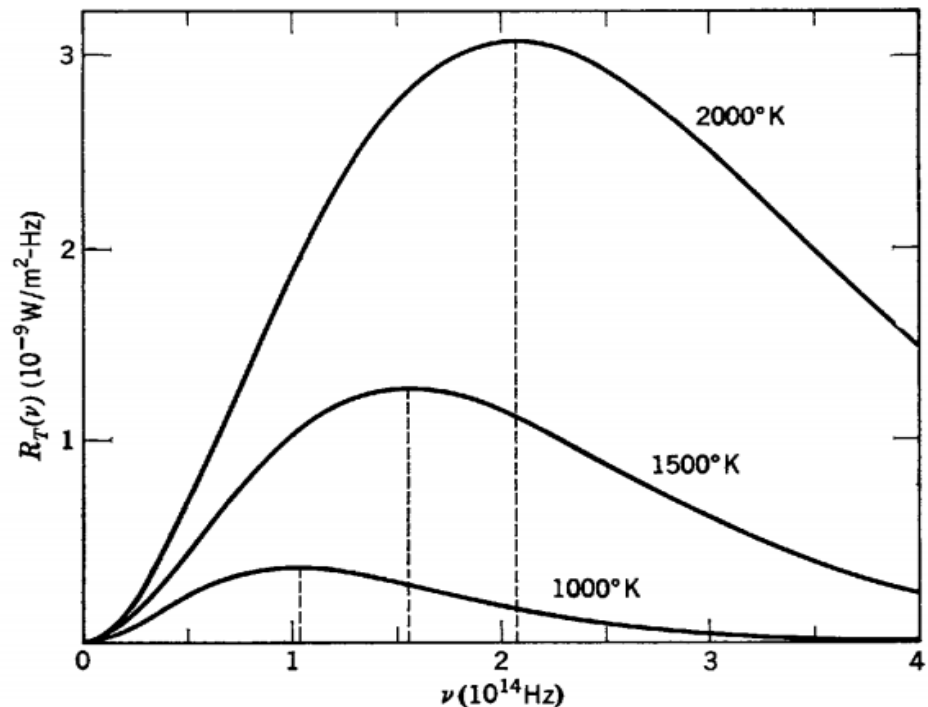
1.2 IL CONCETTO DI CORPO NERO

1.2.1 La radianza spettrale

Si osservò che, indipendentemente dalla loro composizione, tutti i corpi neri alla stessa temperatura emettono radiazione termica con lo stesso spettro, ovvero con la stessa forma.

Questa caratteristica può essere derivata sulla base di argomenti classici che coinvolgono l'equilibrio termodinamico.

Tuttavia, la forma specifica dello spettro di radiazione di corpo nero non può essere ottenuta solo con argomenti termodinamici.



Le proprietà universali della radiazione emessa dai corpi neri li rendono così interessanti che i fisici hanno cercato di spiegare le caratteristiche specifiche del loro spettro.

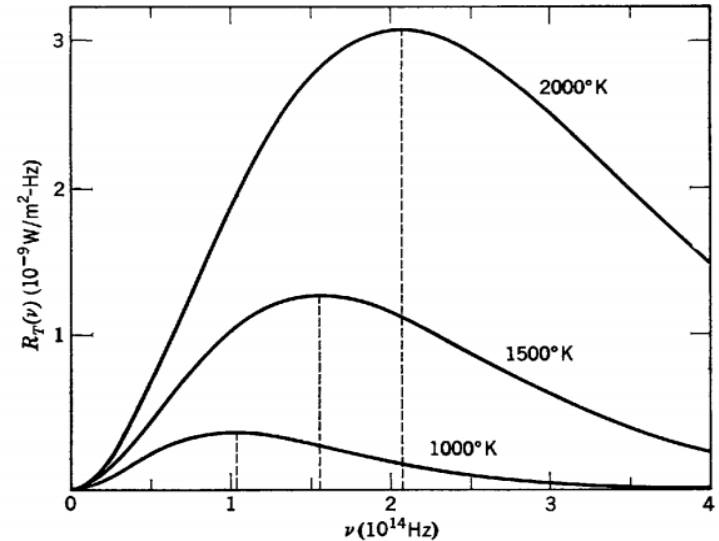
1.2 IL CONCETTO DI CORPO NERO

1.2.2 La legge di Stefan-Boltzmann

L'integrale della radianza spettrale $R_T(\nu)$ su tutto il campo di frequenze ν è l'energia totale emessa per unità di tempo per unità di area da un corpo nero alla temperatura T .

Questa prende il nome di **radianza** R_T ed è definita:

$$R_T = \int_0^{\infty} R_T(\nu) d\nu$$



Come si evince dalla Figura, R_T aumenta rapidamente con l'aumentare della temperatura.

Questo risultato è noto come **legge di Stefan-Boltzmann** e fu enunciato per la prima volta nel 1879 sotto forma di un'equazione empirica:

$$R_T = \sigma T^4$$

dove
$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

è detta costante di Stefan-Boltzmann.

1.2 IL CONCETTO DI CORPO NERO

1.2.3 La legge di spostamento di Wien

La Figura ci mostra anche che lo spettro si sposta verso frequenze più alte all'aumentare di T .

Questo risultato è noto come **legge di spostamento di Wien**

$$\nu_{max} \propto T$$

dove ν_{max} è la frequenza alla quale $R_T(\nu)$ ha il suo valore massimo per un particolare T .

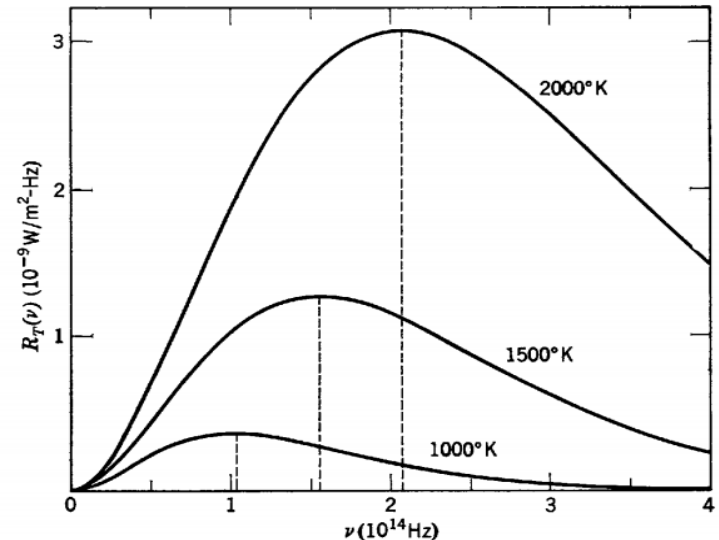
All'aumentare di T , ν_{max} si sposta verso frequenze più alte.

Sia la legge di Stefan-Boltzmann che la legge di spostamento di Wien sono in accordo con le esperienze familiari discusse in precedenza.

La legge di spostamento di Wien può essere riscritta utilizzando la relazione $\lambda\nu = c$, come:

$$\nu_{max} = \frac{c}{\lambda_{max}} \propto T$$

ovvero: $\lambda_{max}T = cost$



1.2 IL CONCETTO DI CORPO NERO

1.2.3 La legge di spostamento di Wien

$$\lambda_{max}T = cost$$

Il valore della costante di Wien è stato sperimentalmente misurato in $2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$.

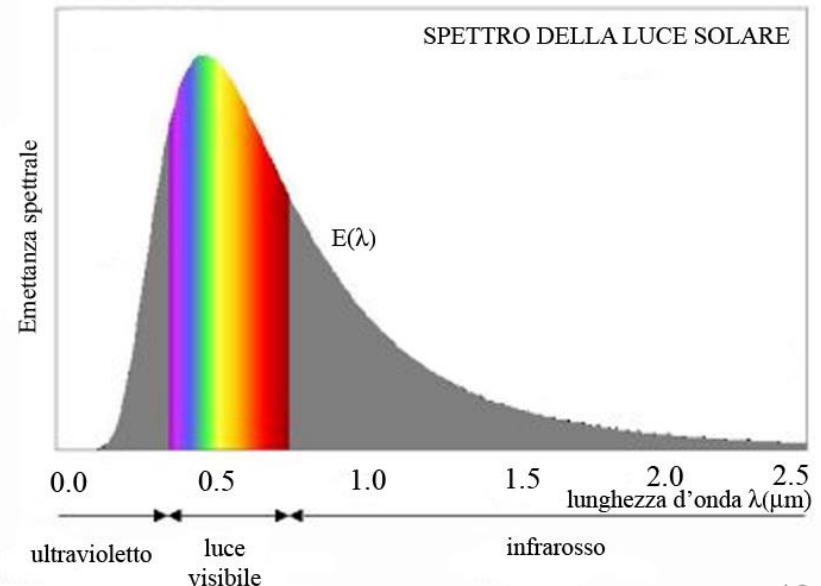
Se assumiamo che la superficie di una stella si comporti come un corpo nero, possiamo utilizzare la legge di spostamento di Wien per determinare la sua temperatura.

Ad esempio, consideriamo lo spettro di emissione del Sole:

Il picco di emissione è a $\lambda_{max} = 510 \text{ nm}$.

Quindi, la temperatura della superficie solare può essere calcolata utilizzando la legge di spostamento di Wien:

$$T_S = \frac{cost}{\lambda_{max}} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}}{510 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \approx 5700 \text{ K}$$

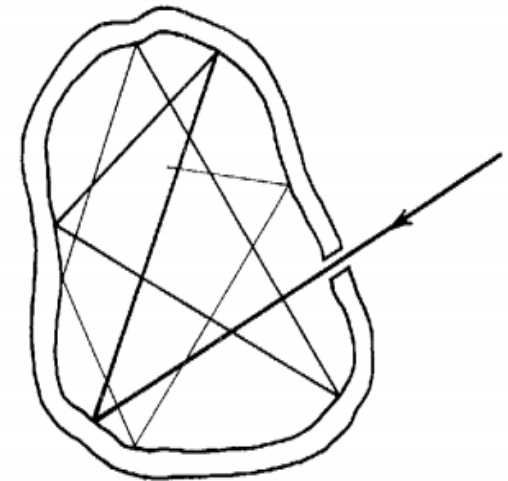


1.2 IL CONCETTO DI CORPO NERO

1.2.4 Emissione di corpo nero da una cavità

Un altro esempio di corpo nero, che vedremo particolarmente importante per la costruzione di un modello teorico, è costituito da un oggetto contenente una cavità a cui è applicato un piccolo foro che comunica con l'esterno.

La radiazione incidente sul foro dall'esterno entra in cavità e viene riflessa dalle pareti della cavità, fino ad essere assorbita completamente dalle pareti. Se l'area del foro è molto piccola rispetto all'area della superficie interna della cavità, solo una quantità trascurabile della radiazione incidente fuoriuscirà dal foro.



In definitiva, tutta la radiazione incidente sul foro viene assorbita.

Supponiamo ora che le pareti della cavità siano riscaldate uniformemente ad una temperatura T . Di conseguenza, le pareti emetteranno radiazione termica che riempirà la cavità.

La piccola frazione di questa fuoriuscirà dal foro. Pertanto, il foro fungerà da emettitore di radiazione termica.

1.2 IL CONCETTO DI CORPO NERO

1.2.4 Emissione di corpo nero da una cavità

In definitiva, il foro avrà le proprietà di superficie di un corpo nero e la radiazione emessa dal foro deve avere le caratteristiche di uno spettro di corpo nero alla temperatura T delle pareti, poiché questa è l'unica temperatura definita per il sistema.

Lo spettro emesso dal foro nella cavità può essere specificato in termini di radianza spettrale $R_T(\nu)$.

È più utile, tuttavia, specificare lo spettro della radiazione all'interno della cavità, detta radiazione di cavità, in termini di **densità di energia**, $\rho_T(\nu)d\nu$, che è definita come l'energia contenuta in un volume unitario della cavità a temperatura T nell'intervallo di frequenze $[\nu, \nu + d\nu]$.

È evidente che queste quantità devono essere proporzionali tra loro:

$$\rho_T(\nu) \propto R_T(\nu)$$

Quindi la radiazione all'interno di una cavità con le pareti a temperatura T ha le stesse caratteristiche di emissione di un corpo nero a temperatura T .

Teoricamente, è conveniente studiare la radiazione di corpo nero in termini di densità spettrale perché è possibile applicare argomenti generali per descrivere le proprietà della radiazione in cavità.

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

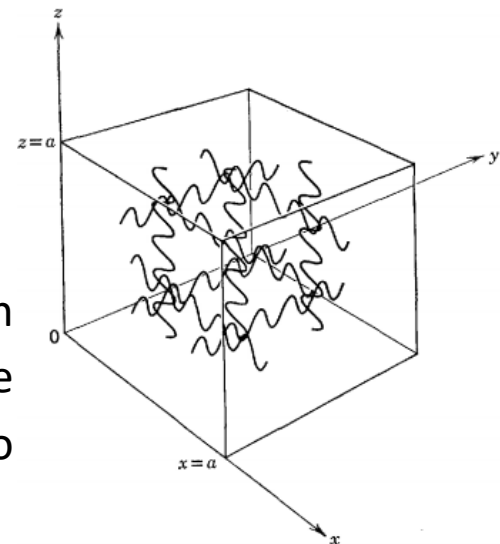
Poco dopo la fine del secolo scorso, Rayleigh e Jeans effettuarono un calcolo della densità di energia della radiazione della cavità (o del corpo nero). Questo calcolo è simile ai calcoli che sorgono considerando molti altri fenomeni simili.

Consideriamo una cavità con pareti metalliche riscaldate uniformemente alla temperatura T .

Le pareti emettono radiazione elettromagnetica e ciò avviene, fondamentalmente, a causa dei moti accelerati degli elettroni nelle pareti metalliche che nascono dall'agitazione termica. Non è però necessario studiare in dettaglio il comportamento degli elettroni nelle pareti della cavità.

L'attenzione è invece focalizzata sul comportamento delle onde elettromagnetiche all'interno della cavità.

Assumiamo per semplicità che la cavità con pareti metalliche riempita di radiazione elettromagnetica abbia la forma di un cubo con spigolo di lunghezza a .



1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

Consideriamo prima la componente x e la parete metallica in $x = 0$.

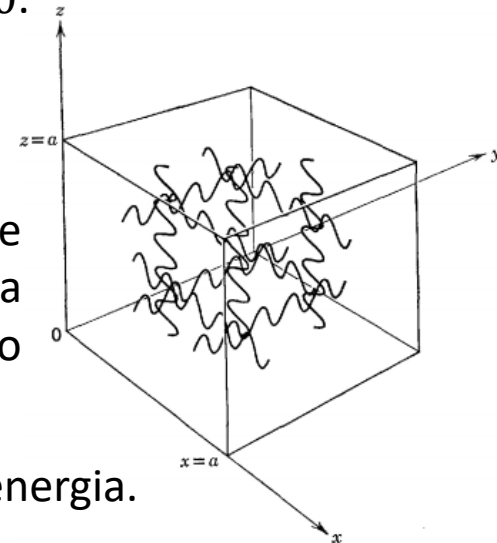
La componente che incide sulla parete viene riflessa da essa, e le onde incidenti e riflesse si combinano tra le due pareti.

Poiché il vettore campo elettrico \vec{E} è perpendicolare alla direzione di propagazione, e poiché la direzione di propagazione di questa componente è perpendicolare alla parete in questione, il suo vettore campo elettrico \vec{E} è parallelo alla parete.

Ad ogni interazione con la parete, l'onda cederà parte della sua energia. Dopo un certo numero di riflessioni, l'onda si sarà estinta.

L'unica possibilità per cui \vec{E} sopravviva in cavità in modo da avere una densità di energia all'interno è che questa componente deve essere sempre zero in corrispondenza della parete in $x = 0$ così come in corrispondenza della parete $x = a$.

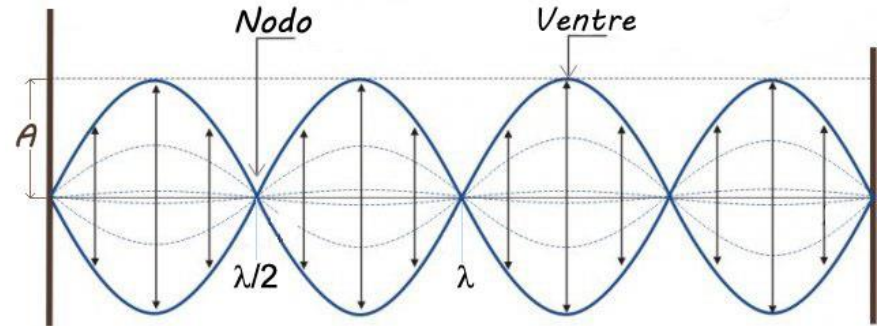
Per tutte le frequenze che soddisfano questa condizione, parleremo di **onda stazionaria** associata alla componente x della radiazione, che avrà un nodo (ampiezza zero) in $x = 0$ e un nodo in $x = a$.



1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITÀ'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

Condizioni simili si applicano alle altre due componenti; l'onda stazionaria associata alla componente y deve avere nodi in $y = 0$ e $y = a$, e l'onda stazionaria associata alla componente z deve avere nodi in $z = 0$ e $z = a$.



Queste condizioni pongono una limitazione sulle possibili lunghezze d'onda, e quindi sulle possibili frequenze, dello spettro di radiazione elettromagnetica nella cavità.

Consideriamo ora la questione del conteggio del numero di onde stazionarie con nodi sulle superfici della cavità, le cui lunghezze d'onda si trovano nell'intervallo $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ corrispondente all'intervallo di frequenze $[\nu, \nu + d\nu]$.

Per focalizzare l'attenzione sul calcolo, tratteremo la sola componente x .

Consideriamo quindi il caso semplificato di una "cavità unidimensionale" di lunghezza a . Dopo aver analizzato questo caso, vedremo che la procedura per generalizzare ad una cavità tridimensionale reale è immediata.

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

Il campo elettrico per un'onda stazionaria elettromagnetica unidimensionale può essere descritto matematicamente dalla funzione:

$$E(x, t) = E_0 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) \operatorname{sen}(2\pi \nu t) \quad \text{con} \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$$

L'equazione rappresenta un'onda la cui ampiezza varia sinusoidalmente nello spazio e che oscilla nel tempo sinusoidalmente con frequenza ν .

Per le posizioni che soddisfano la relazione

$$\frac{2x}{\lambda} = n \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

l'ampiezza dell'onda è ovviamente zero per ogni istante t , e a queste posizioni corrispondono nodi fissi; cioè, è un'onda stazionaria.

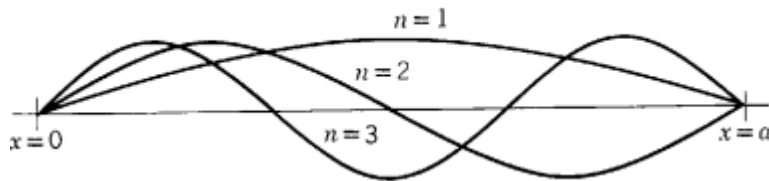
Se scegliamo l'origine dell'asse x ad un'estremità della cavità ($x = 0$), richiediamo che all'altra estremità $x = a$.

Questa condizione determina un insieme di valori consentiti della lunghezza d'onda λ .

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

Per questi valori consentiti, l'ampiezza delle onde stazionarie hanno l'aspetto mostrato in Figura.



In altre parole, le onde stazionarie sono tutte quelle onde che soddisfano questa condizione: la lunghezza dello spigolo deve essere un multiplo intero di mezza lunghezza d'onda.

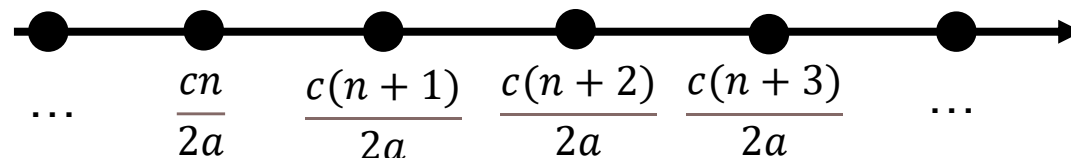
È conveniente continuare la discussione in termini di frequenze consentite invece che di lunghezze d'onda consentite. La relazione diventa:

$$v_n = \frac{cn}{2a}$$

$$\frac{2a}{\lambda} = n$$

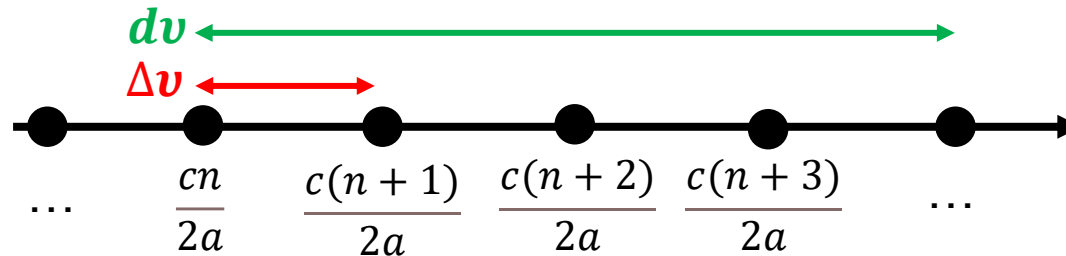
$$\lambda v = c$$

Possiamo rappresentare questi valori ammessi di frequenza in termini di un diagramma costituito da un asse su cui tracciamo un punto per ogni frequenza permessa, a cui corrisponderà un valore di n .



1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità



Tale diagramma è utile per calcolare il numero frequenze consentite nell' intervallo $[\nu, \nu + dv]$, che chiameremo $N(\nu)dv$.

Calcoliamo la distanza tra due frequenze consecutive.

$$\Delta\nu = \nu_{n+1} - \nu_n = \frac{c(n+1)}{2a} - \frac{cn}{2a} = \frac{c}{2a}$$

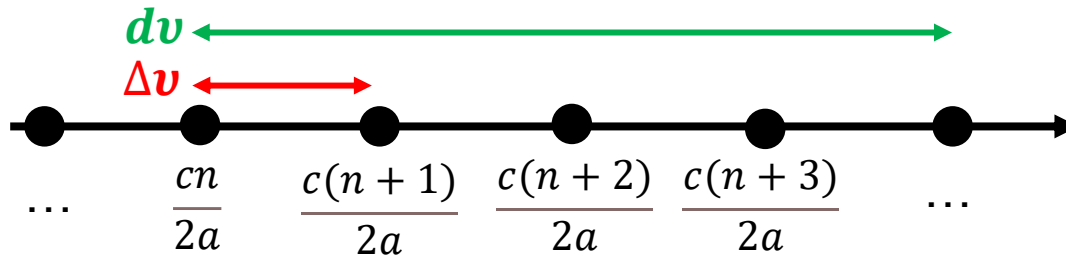
$$\nu_n = \frac{cn}{2a}$$

Poiché $\Delta\nu$ non dipende da n , ne segue che i punti sono distribuiti uniformemente lungo l'asse delle frequenze, e quindi il numero di punti compresi tra i due limiti sarà proporzionale a dv ma non dipenderà da ν .

All'interno dell'intervallo dv il numero di punti è calcolabile geometricamente come rapporto tra l'ampiezza dell'intervallo dv e la distanza tra due punti consecutivi $\Delta\nu$.

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità



$$N(\nu)d\nu = \frac{d\nu}{\Delta\nu} = \frac{2a}{c} d\nu$$

$$\Delta\nu = \frac{c}{2a}$$

Dobbiamo però moltiplicarlo per un ulteriore fattore 2 poiché, per ciascuna delle frequenze consentite, esistono in realtà due onde indipendenti corrispondenti ai due possibili stati di polarizzazione delle onde elettromagnetiche. Così abbiamo:

$$N(\nu)d\nu = \frac{4a}{c} d\nu$$

Estendiamo il calcolo al caso reale di una cavità tridimensionale.

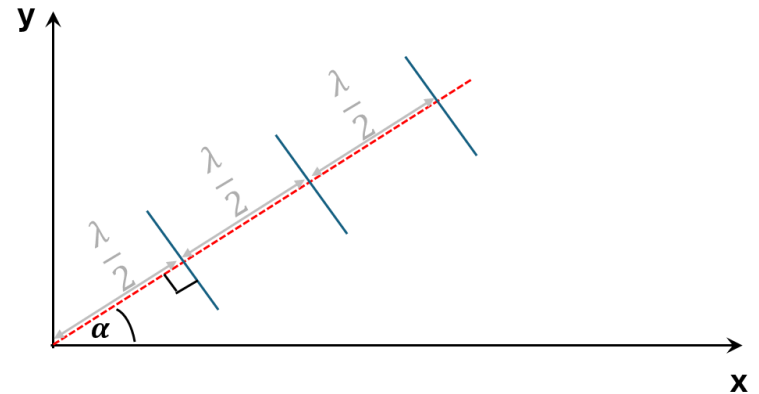
1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

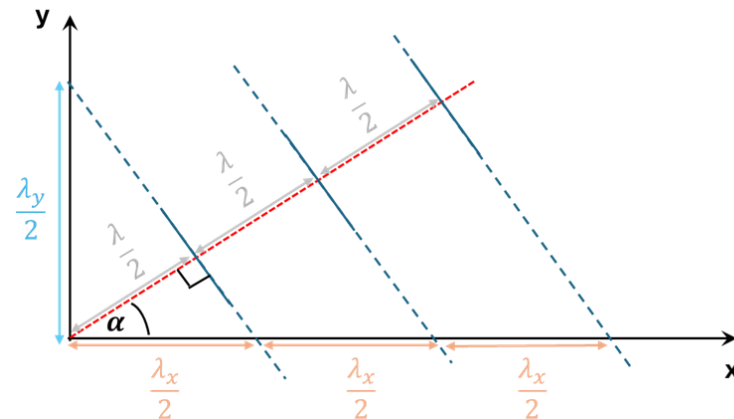
Consideriamo la radiazione di lunghezza d'onda λ che si propaga nella direzione definita dai tre angoli α, β, γ rispettivamente con gli assi x, y e z .

L'onda deve essere stazionaria poiché tutte e tre le sue componenti devono essere onde stazionarie.

Per semplicità, rappresentiamo solo il piano xy , e indichiamo la direzione di propagazione dell'onda stazionaria che forma l'angolo α con l'asse x . Indichiamo i piani corrispondenti ai punti nodali dell'onda, che disteranno tra loro $\frac{\lambda}{2}$.



Se proiettiamo questi piani sui due assi cartesiani, otterremo la distanza nodale della proiezione dell'onda sull'asse x e y



1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

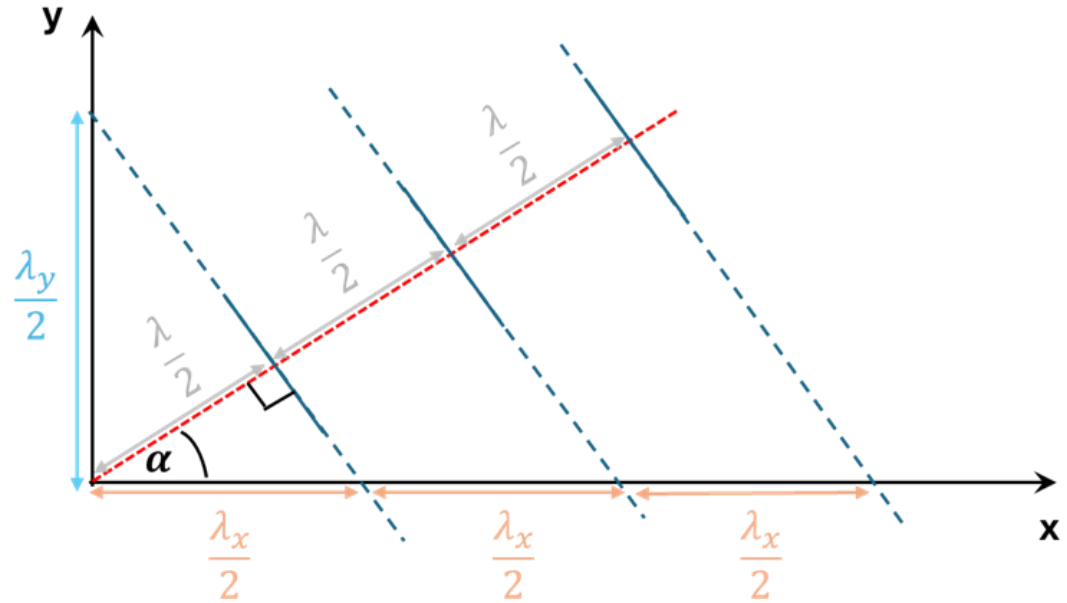
1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

Le proiezioni sugli assi definiscono le componenti della lunghezza d'onda lungo gli assi:

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_x}{2} \cos \alpha$$

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_y}{2} \cos \beta$$

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_z}{2} \cos \gamma$$



Per far sì che soddisfino anche il requisito che la componente x abbia un nodo in $x = a$, la componente y abbia un nodo in $y = a$ e la componente z abbia un nodo in $z = a$, imponiamo che:

$$\frac{2a}{\lambda} = n$$

$$\frac{2x}{\lambda_x} = n_x \text{ per } x = a \text{ con } n_x = 1, 2, 3 \dots$$

$$\frac{2y}{\lambda_y} = n_y \text{ per } y = a \text{ con } n_y = 1, 2, 3 \dots$$

$$\frac{2z}{\lambda_z} = n_z \text{ per } z = a \text{ con } n_z = 1, 2, 3 \dots$$

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_x}{2} \cos\alpha$$

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_y}{2} \cos\beta$$

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_z}{2} \cos\gamma$$

$$\frac{2a}{\lambda_x} = n_x$$

$$\frac{2a}{\lambda_y} = n_y$$

$$\frac{2a}{\lambda_z} = n_z$$

Combinando queste ultime componenti per componente, si ottiene:

$$\frac{2a}{\lambda} \cos\alpha = n_x$$

$$\frac{2a}{\lambda} \cos\beta = n_y$$

$$\frac{2a}{\lambda} \cos\gamma = n_z$$

Elevando al quadrato ambo i membri e sommando membro a membro :

$$\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$$

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITÀ'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

$$\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$$

Usando la relazione per gli angoli solidi $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$:

$$\frac{2a}{\lambda} = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Questa equazione descrive la limitazione sulle possibili lunghezze d'onda della radiazione elettromagnetica contenuta nella cavità. In termini di frequenze:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2a} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Dobbiamo contare ora il numero di frequenze ammesse in un dato intervallo di frequenze. Rispetto al caso unidimensionale dove l'insieme di punti sono distribuiti uniformemente lungo un singolo asse x , nel caso tridimensionale abbiamo un insieme tridimensionale uniforme di punti le cui tre coordinate si presentano a valori interi lungo ciascuno dei tre assi cartesiani reciprocamente perpendicolari.

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

Questo costrutto è noto come reticolo cubico. Ogni punto corrisponde ad una particolare onda stazionaria tridimensionale consentita. I valori interi di n_x , n_y e n_z specificati da ciascun punto danno il numero di nodi delle componenti x , y e z , rispettivamente, dell'onda tridimensionale.

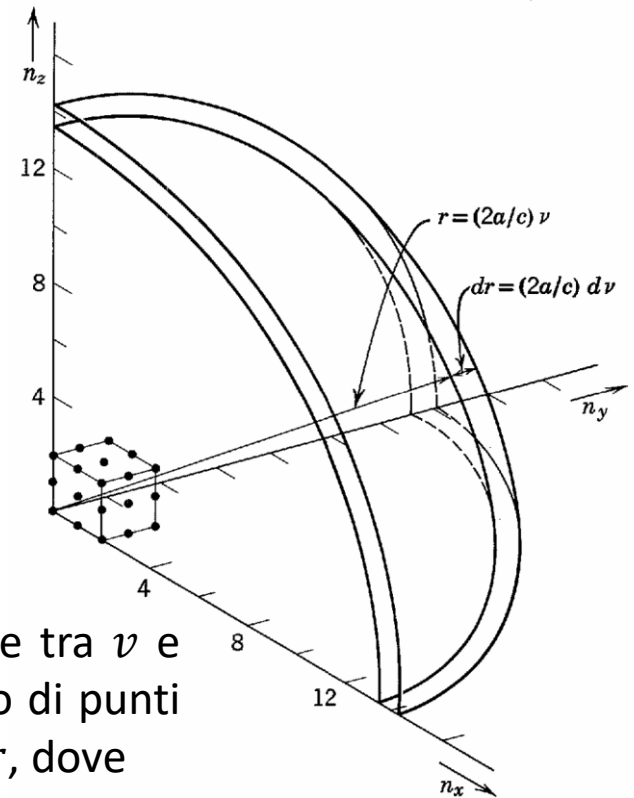
Per costruzione, ogni punto del reticolo corrisponde ad una frequenza consentita.

Quindi $N(\nu)d\nu$, il numero di frequenze consentite tra ν e $\nu + d\nu$ corrisponderà a $N(r)dr$, ovvero al numero di punti contenuti tra gusci concentrici di raggio r e $r + dr$, dove

$$r = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Sostituendo nell'espressione precedente:

$$\nu = \frac{c}{2a} r$$



$$\nu = \frac{c}{2a} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

$N(r)dr$ è uguale al volume racchiuso dai gusci ($4\pi r^2 dr$) diviso il volume occupato da un singolo punto, che è pari a 1.

Poiché consideriamo solo 1/8 del guscio in quanto n_x , n_y e n_z possono assumere solo valori positivi, ne segue che

$$N(r)dr = \frac{1}{8} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \pi r^2 dr$$

Usando la relazione precedente, sappiamo che:

$$v = \frac{c}{2a} r$$

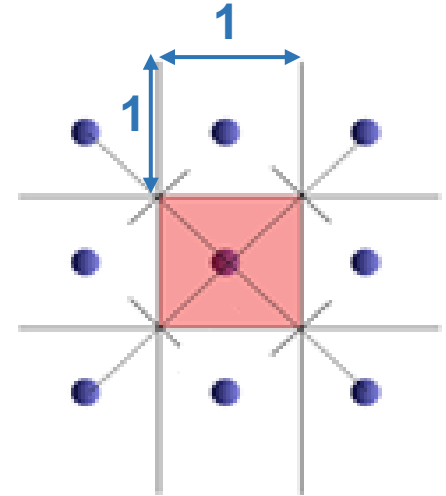
$$r = \frac{2a}{c} v \quad \text{e differenziando} \quad dr = \frac{2a}{c} dv$$

Sostituendo nella precedente:

$$N(v)dv = N(r)dr = \frac{1}{2} \pi r^2 dr = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{2a}{c} v \right)^2 \frac{2a}{c} dv = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2a}{c} \right)^3 v^2 dv$$

Ricordano il fattore 2 derivante dai due stati di polarizzazione consentiti:

$$N(v)dv = \frac{8\pi V}{c^3} v^2 dv$$



1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.2 La legge di Rayleigh-Jeans

Abbiamo ottenuto il conteggio del numero di onde stazionarie in una cavità.

Il passo successivo è la valutazione dell'energia totale media contenuta in ciascuna onda stazionaria di frequenza ν .

Secondo la fisica classica, l'energia di un'onda è proporzionale al modulo quadro di E_0 .

Tuttavia, per un sistema contenente un gran numero di entità fisiche dello stesso tipo che sono in equilibrio termico tra loro alla temperatura T , la fisica classica fa una previsione molto precisa sui valori medi delle energie di ciascuna entità.

Ciò vale nel nostro caso poiché la moltitudine di onde stazionarie che costituiscono la radiazione termica all'interno della cavità, sono entità dello stesso tipo che si trovano in equilibrio termico tra loro alla temperatura T delle pareti della cavità. L'equilibrio termico è assicurato dal fatto che le pareti della cavità assorbono e irradiano continuamente e, quindi, si scambiano gradualmente l'energia necessaria per mantenere l'equilibrio.

Questa previsione è diretta conseguenza dalla teoria cinetica classica ed è chiamata **legge di equipartizione dell'energia**, che afferma che l'energia cinetica media di ogni entità per grado di libertà è $kT/2$, dove $k = 1,38 \cdot 10^{-23} J/K$ è detta costante di Boltzmann.

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.2 La legge di Rayleigh-Jeans

Nel caso in questione le entità sono onde stazionarie che hanno un grado di libertà, ovvero le loro ampiezze del campo elettrico. Quindi in media le loro energie cinetiche hanno tutte lo stesso valore $kT/2$.

Tuttavia, ciascuna onda stazionaria che oscilla sinusoidalmente può essere vista come un oscillatore classico, la cui energia totale è il doppio della sua energia cinetica media. Pertanto, ciascuna onda stazionaria nella cavità ha, secondo la classica legge di equipartizione, un'energia totale media:

$$\bar{E} = kT$$

Il punto più importante da notare è che l'energia totale media \bar{E} abbia lo stesso valore per tutte le onde stazionarie nella cavità, indipendentemente dalle loro frequenze.

La densità di energia $\rho_T(\nu) \propto R_T(\nu)$ nell'intervallo di frequenze $[\nu, \nu + d\nu]$ dello spettro del corpo nero di una cavità alla temperatura T è esprimibile come il prodotto dell'energia media per onda stazionaria per il numero di onde stazionarie nell'intervallo di frequenza, diviso per il volume della cavità.

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{kT \cdot N(\nu)d\nu}{V} = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3} d\nu$$

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu$$

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.2 La legge di Rayleigh-Jeans

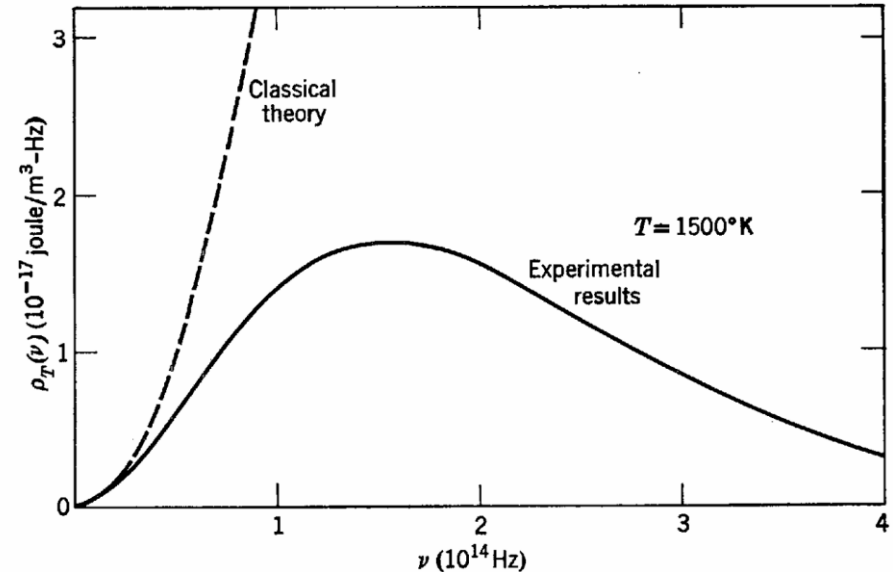
Questa è la **formula di Rayleigh-Jeans** per la radiazione del corpo nero. In Figura confrontiamo le previsioni di questa equazione con i dati sperimentali.

$$\rho_T(\nu) = \frac{8\pi\nu^2KT}{c^3}$$

La discrepanza è evidente.

Nel limite delle basse frequenze, lo spettro classico si avvicina ai risultati sperimentali, ma, all'aumentare della frequenza, la previsione teorica diverge all'infinito!

L'esperimento dimostra che la densità di energia rimane sempre finita, come ovviamente deve essere, e, di fatto, che la densità di energia deve andare a zero a frequenze molto elevate.



Il comportamento grossolanamente irrealistico della previsione della teoria classica alle alte frequenze è noto in fisica come la "**catastrofe ultravioletta**".

Questo termine sottolinea pesantemente il fallimento della teoria. 31

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.1 L'ipotesi di Planck

Nel tentativo di risolvere la discrepanza tra teoria ed esperimento, Planck fu portato a considerare la possibilità di una violazione della legge di equipartizione dell'energia su cui si basava la teoria.

Dalla Figura è chiaro che la legge fornisce risultati soddisfacenti per piccole frequenze.

Quindi possiamo supporre:

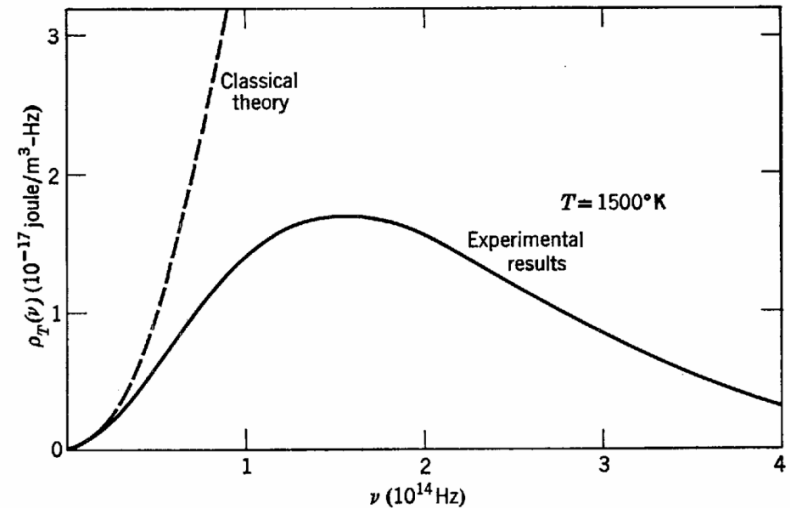
$$\bar{E} \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} KT$$

cioè, l'energia totale media tende a KT quando la frequenza si avvicina a zero.

La discrepanza alle alte frequenze potrebbe essere eliminata se per qualche motivo fosse presente un limite:

$$\bar{E} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$$

In altre parole, Planck si rese conto che, nelle circostanze che prevalgono nel caso della radiazione di corpo nero, l'energia media delle onde stazionarie è una funzione della frequenza $\bar{E}(\nu)$ avente le proprietà indicate prima.



1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.1 L'ipotesi di Planck

Ciò è in contrasto con la legge di equipartizione dell'energia che assegna all'energia media un valore indipendente dalla frequenza.

Consideriamo l'origine della legge di equipartizione.

Deriva, fondamentalmente, da un risultato più completo della meccanica statistica classica, ovvero dalla distribuzione di Boltzmann.

La funzione di distribuzione di Boltzmann è espressa in termini di $P(E)dE$ che rappresenta la probabilità di trovare una data entità fisica di un sistema con energia nell'intervallo $[E, E + dE]$. Essa è pari a:

$$P(E) = \frac{e^{-\frac{E}{KT}}}{KT}$$

Si suppone che il sistema contenga un gran numero di entità dello stesso tipo in equilibrio termico alla temperatura T .

Nel nostro caso, il sistema da considerare è un insieme di semplici onde stazionarie armoniche in equilibrio termico in una cavità di corpo nero.

Il valore medio \bar{E} dell'energia delle onde può essere espresso come:

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.1 L'ipotesi di Planck

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} EP(E)dE}{\int_0^{\infty} P(E)dE}$$

L'integrando al numeratore è l'energia dell'entità, E , ponderata con la probabilità che l'entità venga trovata con questa energia. Integrando su tutte le energie possibili si ottiene il valore medio dell'energia. Il denominatore integra la probabilità di trovare l'entità con una certa energia su tutto il dominio di E , e quindi dovrebbe avere valore uno.

Calcolato l'integrale al numeratore, il risultato è proprio la legge di equipartizione dell'energia: $\bar{E} = KT$.

Il grande contributo di Planck fu quello di rendersi conto che avrebbe potuto ottenere il limite richiesto, $\bar{E} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$, se avesse modificato il calcolo che porta da $P(E)$ a \bar{E} trattando l'energia E come se fosse una variabile discreta invece di una variabile continua.

Quantitativamente, ciò può essere fatto riscrivendo l'espressione di \bar{E} non come integrali, ma come sommatorie.

Vedremo che questo non è troppo difficile da fare, ma sarà molto più istruttivo studiare prima la presentazione grafica della sua ipotesi.

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

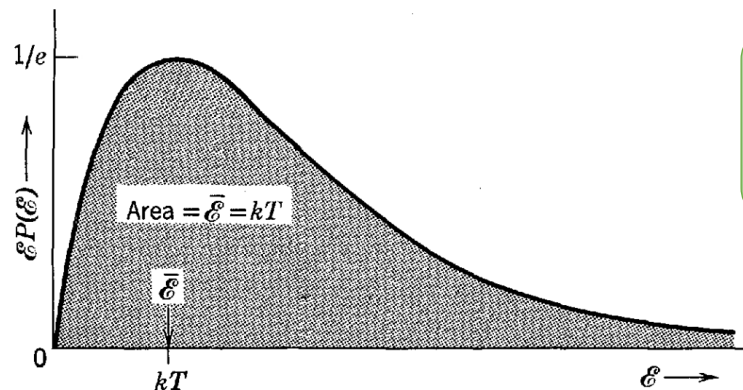
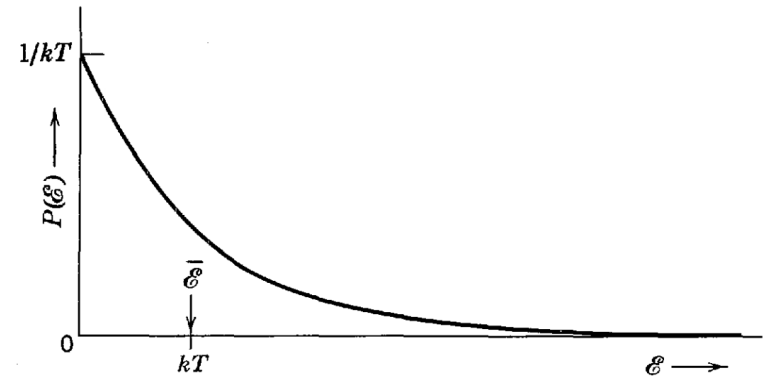
1.4.1 L'ipotesi di Planck

Analizziamo il grafico di $P(E) = \frac{e^{-\frac{E}{kT}}}{kT}$

Il valore massimo della probabilità pari a $1/kT$ è in corrispondenza di $E = 0$, che rappresenta il valore più probabile. All'aumentare dell'energia, il valore di $P(E)$ diminuisce gradualmente per azzerarsi quando $E \rightarrow \infty$.

Il valore medio di in un gran numero di misurazioni di E sarà maggiore di zero perché, nonostante è molto probabile che un'entità ha energia nulla, molte misurazioni di E porteranno a valori maggiori di zero.

Il grafico sottostante mostra \bar{E} , ottenuto eseguendo l'integrazione di $EP(E)$.



$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} EP(E)dE}{\int_0^{\infty} P(E)dE}$$

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

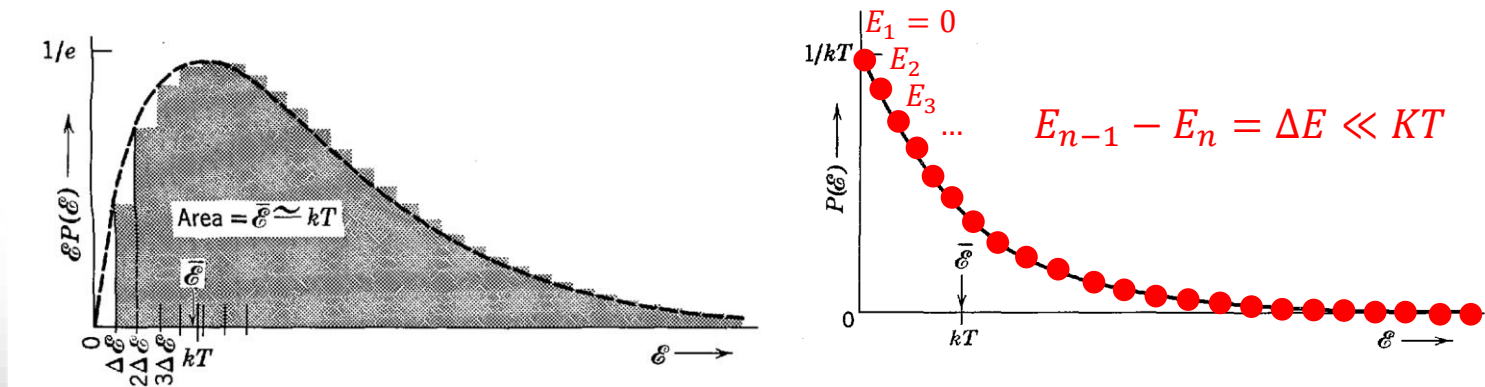
1.4.1 L'ipotesi di Planck

Planck ipotizzò che l'energia E potesse assumere solo certi valori discreti, anziché qualsiasi valore, e che i valori discreti dell'energia fossero distribuiti uniformemente, ovvero:

$$E = 0, \Delta E, 2\Delta E, 3\Delta E \dots$$

La prima domanda che ci si pone è: quanto vale ΔE ? Proviamo a ricostruire la curva $EP(E)$, facendo delle ipotesi su ΔE rispetto al valor medio $\bar{E} = kT$.

Se $\Delta E \ll kT$, la curva può essere ricostruita con ottima precisione e non c'è una differenza significativa tra il caso continuo e quello discreto.

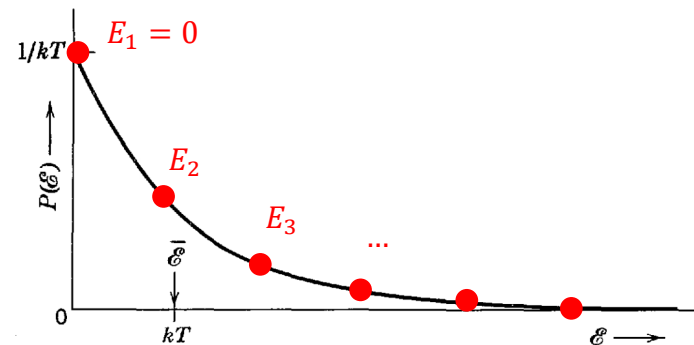
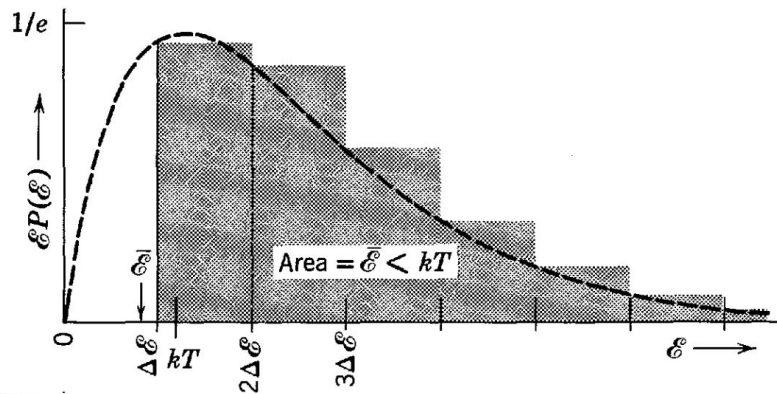


I pallini rossi simboleggiano i soli valori di E consentiti, a seguito della discretizzazione.

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.1 L'ipotesi di Planck

Se $\Delta E \sim KT$, la maggior parte delle entità ha energia $E = 0$ poiché $P(E)$ ha un valore piuttosto piccolo al primo valore di E consentito diverso da zero. Quindi le entità con $E = 0$ dominano nel calcolo del valore medio di \bar{E} . Ci aspettiamo quindi di ottenere $\bar{E} < KT$.

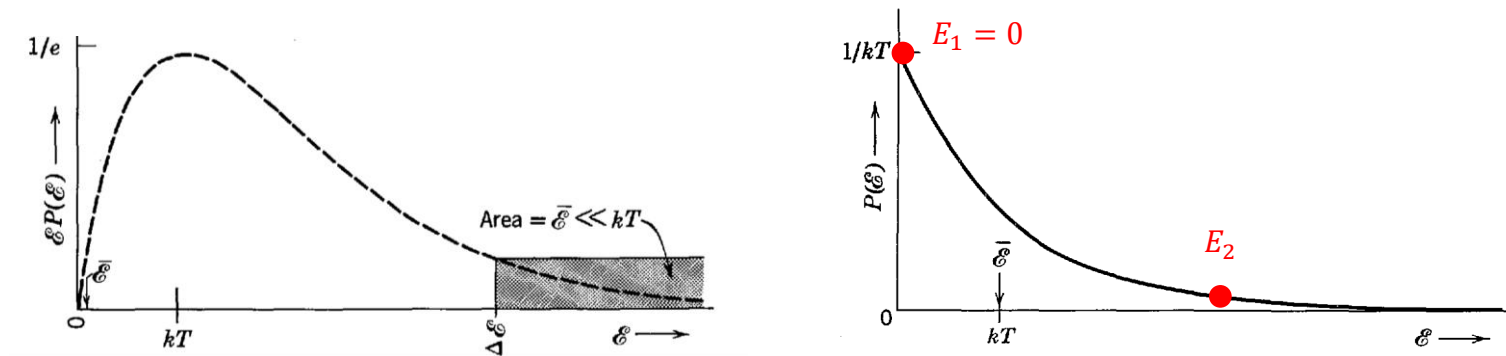


L'effetto della discrezione si vede tuttavia più chiaramente se ipotizziamo che $\Delta E \gg KT$.

In questo caso la probabilità di trovare un'entità con uno qualsiasi dei valori di energia consentiti maggiore di zero è trascurabile, poiché $P(E)$ è estremamente piccolo per tutti questi valori, e il risultato ottenuto è $\bar{E} \ll KT$.

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.1 L'ipotesi di Planck



Ricapitolando, Planck scoprì che poteva ottenere $\bar{E} \sim KT$ quando la differenza tra due energie adiacenti ΔE è piccola, e $\bar{E} \sim 0$ quando ΔE è grande.

Poiché aveva bisogno di ottenere il primo risultato per piccoli valori della frequenza ν , e il secondo risultato per grandi valori di ν , aveva chiaramente bisogno di rendere ΔE una funzione crescente di ν . Ipotizzò la relazione più semplice, supponendo che queste quantità fossero proporzionali, ovvero:

$$\Delta E \propto \nu$$

Scrivendola come un'equazione si ha:

$$\Delta E = h\nu$$

$$\bar{E} \longrightarrow KT$$

$\nu \rightarrow 0$

$$\bar{E} \longrightarrow 0$$

$\nu \rightarrow \infty$

con h nota come costante di Planck.

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.2 Calcolo della formula di Planck

Calcoliamo il valore medio \bar{E} dell'energia come una sommatoria, adottando l'ipotesi di Planck:

$$\bar{E} = \frac{\sum_0^{\infty} EP(E)}{\sum_0^{\infty} P(E)}$$

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} EP(E)dE}{\int_0^{\infty} P(E)dE}$$

La discretizzazione dei valori di energia ci porta a scrivere $E = nh\nu$. Sostituendo anche l'espressione per $P(E)$

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nh\nu}{KT} e^{-\frac{nh\nu}{KT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{KT} e^{-\frac{nh\nu}{KT}}}$$

$$P(E) = \frac{e^{-\frac{E}{KT}}}{KT}$$

Imponendo $\alpha = \frac{h\nu}{KT}$, la riscriviamo come:

$$\bar{E} = KT \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}$$

Notiamo che l'argomento della sommatoria al numeratore possiamo esprimerlo come:

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.2 Calcolo della formula di Planck

$$n\alpha e^{-n\alpha} = -\alpha \frac{d}{d\alpha} e^{-n\alpha}$$

$$\bar{E} = KT \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}$$

Sostituendo:

$$\bar{E} = KT \frac{-\sum_{n=0}^{\infty} \alpha \frac{d}{d\alpha} e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}$$

Poiché la sommatoria è solo sull'indice n , possiamo portare l'operazione di derivata fuori dalla sommatoria:

$$\bar{E} = KT \frac{-\alpha \frac{d}{d\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}$$

Questa può essere riscritta richiamando la funzione logaritmo:

$$\bar{E} = KT \left[-\alpha \frac{d}{d\alpha} \ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} \right) \right]$$

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.2 Calcolo della formula di Planck

$$\bar{E} = KT \left[-\alpha \frac{d}{d\alpha} \ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} \right) \right]$$

Ricordando la definizione di α :

$$\alpha = \frac{h\nu}{KT}$$

$$\bar{E} = -h\nu \frac{d}{d\alpha} \ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} \right)$$

Analizziamo la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}$.

E' convergente perché il suo argomento è minore di uno e quindi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}$$

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.2 Calcolo della formula di Planck

$$\bar{E} = -hv \frac{d}{d\alpha} \ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} \right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}$$

Sostituendo:

$$\bar{E} = -hv \frac{d}{d\alpha} \ln \left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha}} \right) = -hv(1 - e^{-\alpha}) \frac{(-1)e^{-\alpha}}{(1 - e^{-\alpha})^2} = \frac{hve^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} = \frac{hv}{e^{\alpha} - 1}$$

Ovvero:

$$\bar{E}(hv) = \frac{hv}{e^{\frac{hv}{KT}} - 1}$$

$$\alpha = \frac{hv}{KT}$$

Verifichiamo se i limiti attesi sono rispettati:

Per $\frac{hv}{KT} \rightarrow 0$, l'esponenziale $e^{\frac{hv}{KT}} \sim 1 + \frac{hv}{KT}$, da cui $\bar{E} \rightarrow KT$,
come predetto dal limite classico.

Per $\frac{hv}{KT} \rightarrow \infty$, si ottiene immediatamente che $\bar{E} \rightarrow 0$

$$\bar{E} \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} KT$$

$$\bar{E} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$$

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.2 Calcolo della formula di Planck

La formula che poi ottenne immediatamente per la densità di energia nello spettro del corpo nero, usando il suo risultato per $\bar{E}(h\nu)$ anziché il classico valore $\bar{E} = KT$ nella formula di Rayleigh-Jeans è

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} d\nu$$

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2 KT}{c^3} d\nu$$

$$\bar{E}(h\nu) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1}$$

che rappresenta la legge di Planck per il corpo nero.

E' doveroso sottolineare che Planck non alterò la distribuzione di Boltzmann.

"Tutto" ciò che fece fu trattare l'energia delle onde stazionarie elettromagnetiche, che oscillano sinusoidalmente nel tempo, come una quantità discreta invece che continua.

Analizzeremo adesso il confronto tra la teoria proposta da Planck e i risultati sperimentali ottenuti nella misura dell'emissione di corpo nero e le principali implicazioni derivanti dall'applicare la sua teoria.

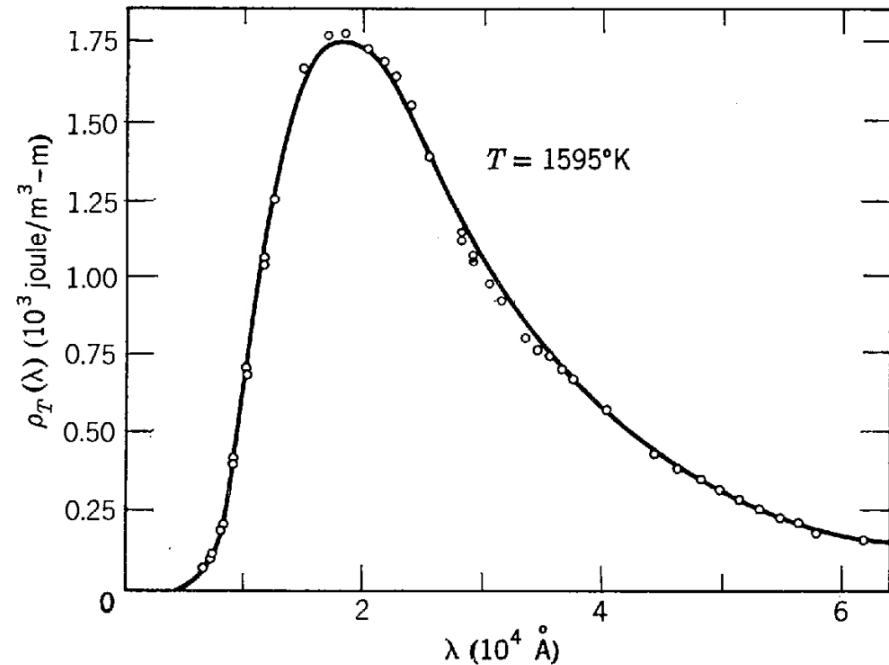
1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.3 Confronto con i risultati sperimentali

La Figura mostra un confronto del risultato della teoria di Planck (espresso in termini di lunghezza d'onda) con i risultati sperimentali per una temperatura $T = 1595^\circ\text{K}$.

I risultati sperimentali sono in completo accordo con la formula di Planck a tutte le temperature.

Ulteriori lavori numerici permisero a Planck di determinare il valore della costante h trovando il valore che meglio adattava la sua teoria ai dati sperimentali.



Il valore ottenuto era molto vicino al valore attualmente accettato:

$$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

universalmente accettata come costante di Planck.

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.3 Confronto con i risultati sperimentali

E' conveniente esprimere la legge di corpo nero in termini di lunghezza d'onda λ .

Partiamo da:

$$v = \frac{c}{\lambda}$$

e differenziamo:

$$dv = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

Quindi:

$$\rho_T(v)dv = -\rho_T(\lambda)d\lambda$$

$$\rho_T(v)dv = \frac{8\pi v^2}{c^3} \frac{hv}{e^{\frac{hv}{kT}} - 1} dv$$

dove il segno meno identifica il fatto che dv e $d\lambda$ hanno segno opposto.

Quindi:

$$\rho_T(\lambda) = -\rho_T(v) \frac{dv}{d\lambda} = \frac{c}{\lambda^2} \rho_T(v) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

Sia la legge di spostamento di Wien che la legge di Stefan-Boltzmann possono essere ricavate a partire dalla legge di Planck.

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.3 Confronto con i risultati sperimentali

Per la legge di spostamento di Wien, occorre determinare

la λ_{MAX} soluzione dell'equazione $\frac{\partial \rho_T(\lambda)}{\partial \lambda} = 0$

$$\rho_T(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1}$$

$$\frac{\partial \rho_T(\lambda)}{\partial \lambda} = 8\pi hc \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1} \right] = 8\pi hc \left\{ -\frac{5}{\lambda^6} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1} + \frac{1}{\lambda^5} \left[\frac{-e^{\frac{hc}{\lambda KT}} \frac{hc}{KT} \left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1\right)^2} \right] \right\}$$

Imponiamo che il termine tra parentesi graffa sia nullo.

Scriviamolo con un denominatore comune:

$$\frac{-5\left(e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1\right) + \frac{hc}{\lambda KT} e^{\frac{hc}{\lambda KT}}}{\lambda^6 \left(e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1\right)^2} = 0$$

e imponiamo che il numeratore sia nullo:

$$-5\left(e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1\right) + \frac{hc}{\lambda KT} e^{\frac{hc}{\lambda KT}} = 0$$

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.3 Confronto con i risultati sperimentali

Introduciamo la variabile $x = \frac{hc}{\lambda KT}$,

$$-5\left(e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1\right) + \frac{hc}{\lambda KT} e^{\frac{hc}{\lambda KT}} = 0$$

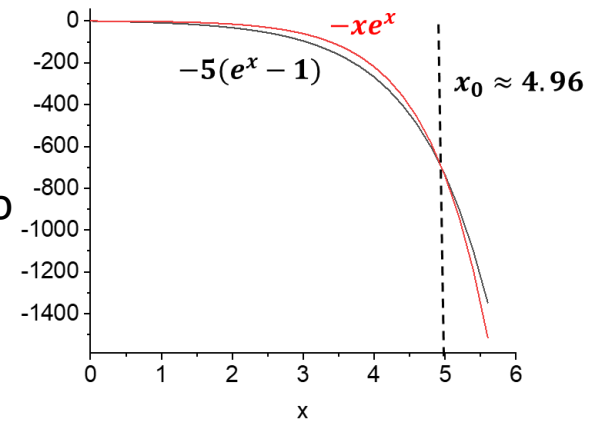
$$-5(e^x - 1) + xe^x = 0$$

L'equazione può essere risolta graficamente e restituisce:

Quindi $\lambda_{MAX} = \frac{hc}{x_0 KT}$ da cui si ottiene la legge di spostamento

di Wien:

$$\lambda_{MAX} T \approx 0.2 \frac{hc}{K}$$



La legge di Stefan-Boltzmann si ottiene integrando la legge di Planck sull'intero spettro delle lunghezze d'onda.

$$R_T = \int_0^{\infty} \rho_T(\nu) d\nu$$

L'integrale può essere risolto nel campo complesso e restituisce una dipendenza dalla quarta potenza della temperatura con la costante di proporzionalità pari a $\frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}$, in perfetto accordo con il valore determinato sperimentalmente della costante di Stefan-Boltzmann $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$.

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.4 Il postulato di Planck e le sue implicazioni

Il contributo di Planck può essere espresso come postulato:

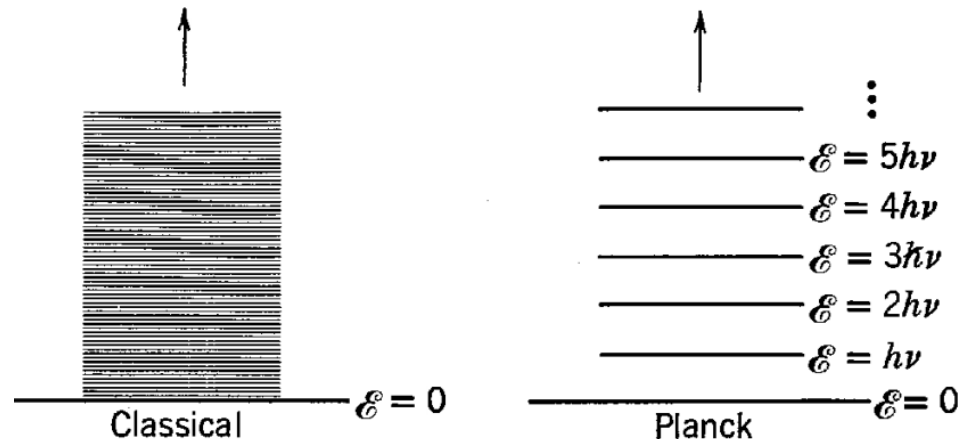
Any physical entity with one degree of freedom whose “coordinate” is a sinusoidal function of time (i.e., executes simple harmonic oscillations) can possess only total energies \mathcal{E} which satisfy the relation

$$\mathcal{E} = nh\nu \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

where ν is the frequency of the oscillation, and h is a universal constant.

La parola coordinata è usata nel suo senso generale per indicare qualsiasi grandezza che descriva la condizione istantanea dell'entità.

Un diagramma dei livelli energetici, come mostrato nella Figura, fornisce un modo conveniente per illustrare il comportamento di un'entità governata da questo postulato.

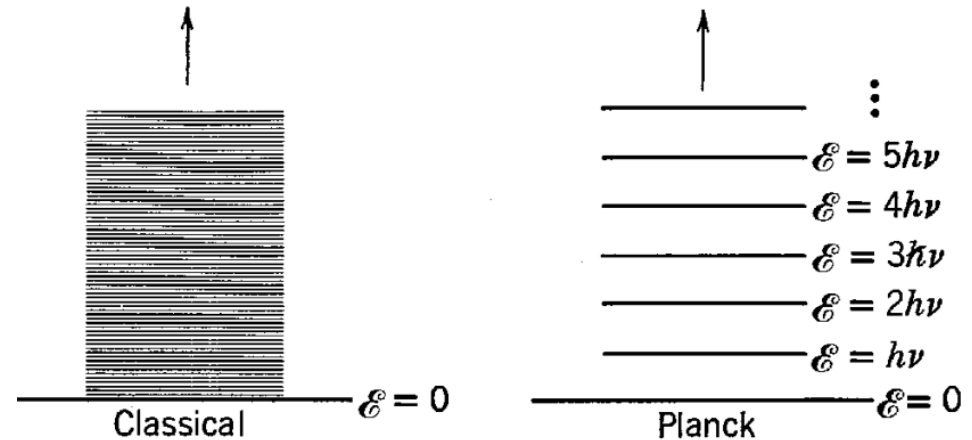


Inoltre, è utile per confrontare questo comportamento con quello che ci si aspetterebbe sulla base della fisica classica.

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.4 Il postulato di Planck e le sue implicazioni

In tale diagramma indichiamo ciascuno dei possibili stati energetici dell'entità con una linea orizzontale. La distanza di ogni linea dalla linea a energia zero è proporzionale all'energia totale a cui corrisponde.



Poiché secondo la fisica classica l'entità può avere qualsiasi energia da zero a infinito, il diagramma classico del livello energetico consiste in un continuum di linee che si estendono da zero in su.

Tuttavia, l'entità che segue oscillazioni armoniche semplici può avere solo una delle energie totali discrete $E = 0, hv, 2hv, 3hv \dots$ se obbedisce al postulato di Planck. Ciò è indicato dall'insieme discreto di linee nel suo diagramma del livello energetico. Si dice che l'energia dell'entità che obbedisce al postulato di Planck è quantizzata, gli stati energetici consentiti sono chiamati stati quantistici e l'intero n è chiamato numero quantico.

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.4 Il postulato di Planck e le sue implicazioni

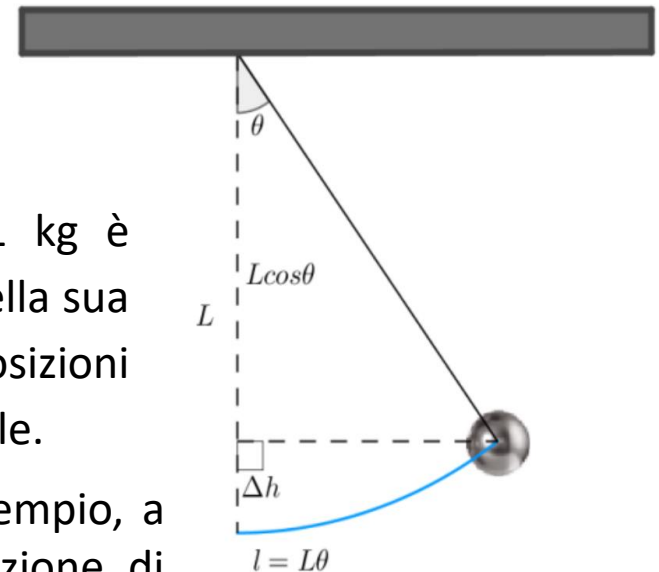
Non ci sono dubbi che la fisica classica è stata elaborata studiando sistemi fisici il cui comportamento non richiede l'adozione del postulato di Planck. Com'è possibile? Proviamo a valutarlo con un esempio.

Consideriamo un normale pendolo che esegue semplici oscillazioni armoniche. E' intuitivo pensare che questo sistema possieda una gamma continua di energie. Prima di accettare questa argomentazione, però, è opportuno fare alcuni semplici calcoli numerici riguardanti tale sistema.

ESERCIZIO

Un pendolo costituito da una massa di 0.01 kg è sospeso ad un filo lungo 0.1 m. Sia l'ampiezza della sua oscillazione tale che la corda nelle sue posizioni estreme formi un angolo di 0.1 rad con la verticale.

L'energia del pendolo diminuisce, ad esempio, a causa degli effetti di attrito. La diminuzione di energia osservata è continua o discontinua?



1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.4 Il postulato di Planck e le sue implicazioni

La frequenza di oscillazione del pendolo è pari a:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9.8 \text{ m/s}^2}{0.1 \text{ m}}} = 1.6 \text{ Hz}$$

L'energia del pendolo è, al massimo della sua energia potenziale, pari a:

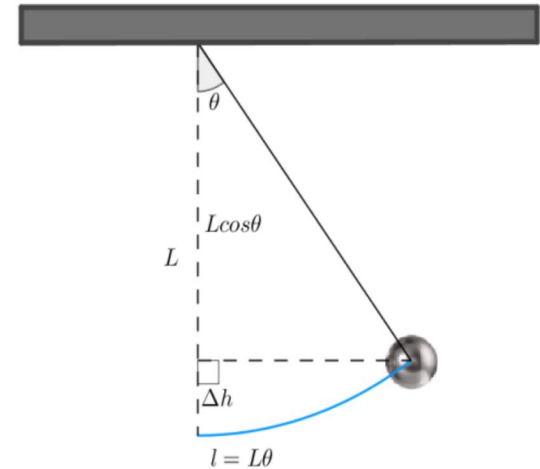
$$mg\Delta h = mgL(1 - \cos\theta) = 0.01 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0.1 \text{ m} \times (1 - \cos 0.1) = 5 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

Se supponiamo di applicare il postulato di Planck, l'energia del pendolo è quantizzata e le variazioni di energia avvengono per salti pari a:

$$\Delta E = h\nu = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \times 1.6 \text{ Hz} = 10^{-33} \text{ J}$$

Valutiamo il rapporto:

$$\frac{\Delta E}{E} \approx 2 \cdot 10^{-29}$$



1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.4 Il postulato di Planck e le sue implicazioni

$$\frac{\Delta E}{E} \approx 2 \cdot 10^{-29}$$

Quindi, per misurare la discretezza nella diminuzione di energia dobbiamo misurare l'energia meglio di due parti su 10^{29} . È evidente che anche l'attrezzatura sperimentale più sensibile è totalmente incapace di apprezzare questa risoluzione energetica.

Concludiamo che gli esperimenti che coinvolgono un pendolo ordinario non possono determinare se il postulato di Planck è valido o meno. Lo stesso vale per gli esperimenti su tutti gli altri sistemi meccanici macroscopici. L'ordine di grandezza di h rende la granulosità dell'energia troppo fine per essere distinta da un continuum energetico.

In effetti, h potrebbe anche essere zero per i sistemi classici e, infatti, un modo per ridurre le formule quantistiche ai loro limiti classici sarebbe quello di mandare $h \rightarrow 0$ in queste formule. Solo quando consideriamo sistemi in cui ν è molto grande e/o E è sufficientemente piccolo tale per cui $\Delta E = h\nu$ è dell'ordine di E siamo in grado di verificare il postulato di Planck.

Un esempio è, ovviamente, le onde stazionarie ad alta frequenza nella radiazione del corpo nero. Molti altri esempi verranno presi in considerazione nei capitoli successivi.