

# CAPITOLO 2

## LA NATURA CORPUSCOLARE DELLA LUCE

# 2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

## 2.1.1 Gli esperimenti di Hertz

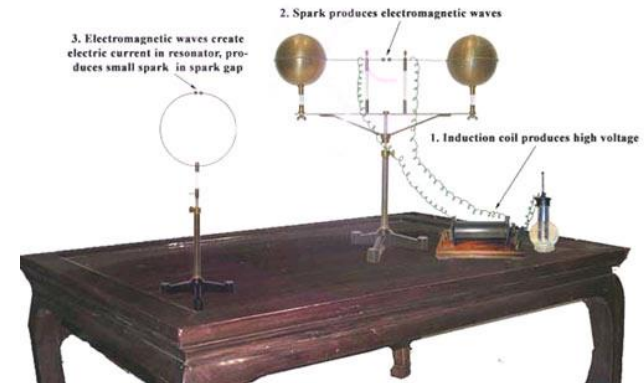
In questo capitolo esamineremo i processi in cui la radiazione interagisce con la materia. Due processi (l'**effetto fotoelettrico** e l'**effetto Compton**) comportano la diffusione o l'assorbimento di radiazione nella materia.

Il **processo di bremsstrahlung** comporta la generazione di radiazione.

In ogni caso otterremo la prova sperimentale che la radiazione è simile a una particella nella sua interazione con la materia, distinta dalla natura ondulatoria della radiazione quando si propaga.

Fu nel 1886 e nel 1887 che Heinrich Hertz eseguì gli esperimenti che per primo confermarono l'esistenza delle onde elettromagnetiche e la teoria elettromagnetica della propagazione della luce di Maxwell.

Hertz scoprì che una scarica elettrica tra due elettrodi avviene più facilmente quando la luce ultravioletta incide su uno degli elettrodi, provocando l'emissione di elettroni dalla superficie del catodo.



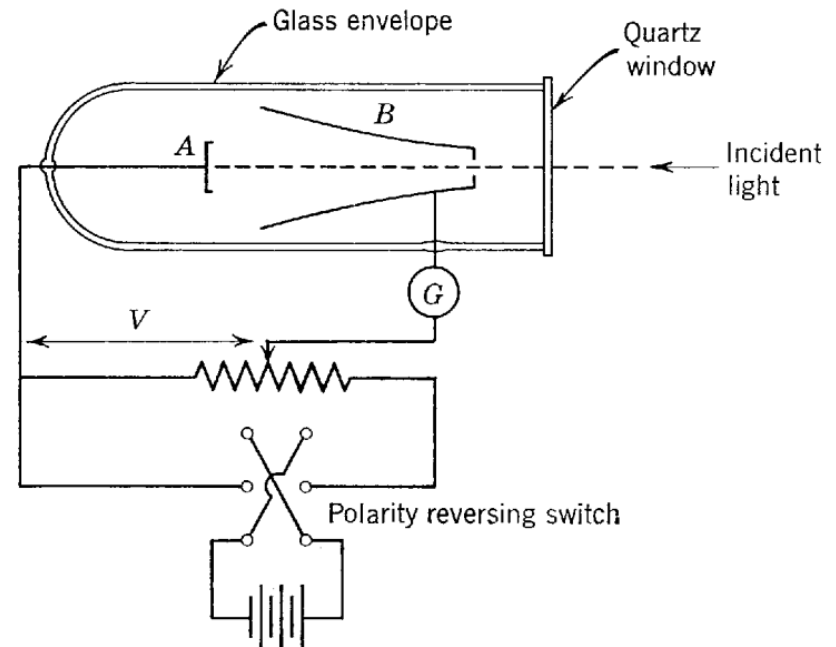
# 2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

## 2.1.2 L'esperimento di Lenard e le contraddizioni con la teoria classica

L'espulsione di elettroni da una superficie mediante l'azione della luce è chiamata **effetto fotoelettrico**.

La Figura mostra lo schema tipico di un apparato utilizzato per studiare l'effetto fotoelettrico. Un involucro di vetro racchiude due elettrodi in uno spazio in cui è stato fatto il vuoto.

La luce monocromatica, incidente attraverso una finestra di quarzo, incide sulla lastra metallica A che di conseguenza emette elettroni, chiamati fotoelettroni.



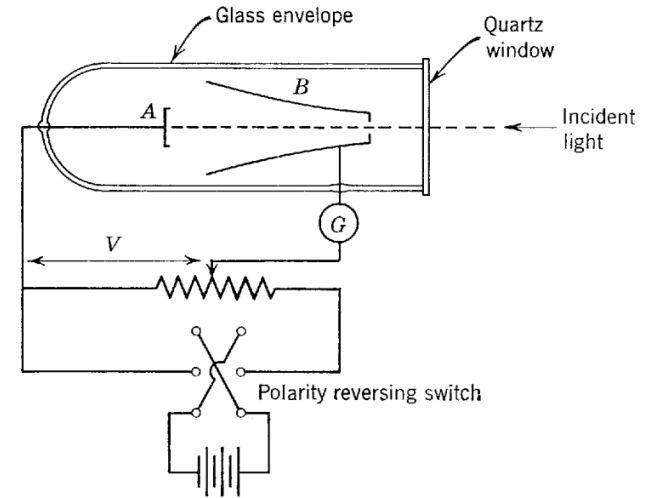
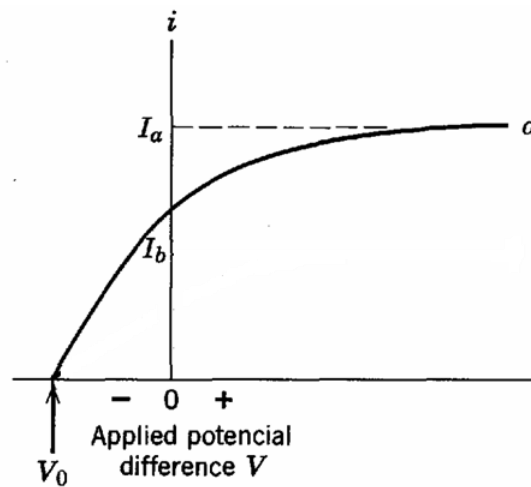
Gli elettroni generano un segnale di corrente se si applica una differenza di potenziale  $V$  tra A e B. La differenza di potenziale genera un campo elettrico tra i due elettrodi che indirizzano gli elettroni verso l'elettrodo B, che funge da elettrodo di raccolta degli elettroni. Il segnale di corrente fotoelettrica generata è rilevato dall'amperometro G.

# 2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

## 2.1.2 L'esperimento di Lenard e le contraddizioni con la teoria classica

La **curva a** in Figura mostra l'andamento della corrente fotoelettrica in funzione della differenza di potenziale  $V$ .

In corrispondenza di un potenziale nullo, l'amperometro registra un segnale di corrente, segno che un certo numero di elettroni è raccolto dall'elettrodo B anche in assenza di campo elettrico.



All'aumentare della differenza di potenziale, la corrente aumenta perché il campo elettrico aumenta l'efficienza di raccolta degli elettroni di B.

Se  $V$  è sufficientemente grande, la corrente fotoelettrica raggiunge un certo limite (saturazione), valore per il quale tutti i fotoelettroni espulsi da A vengono raccolti da B.

Aumentare ulteriormente la differenza di potenziale non produce aumento di corrente.

# 2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

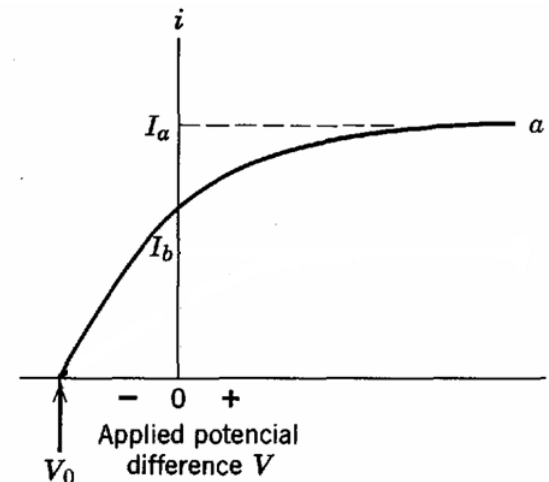
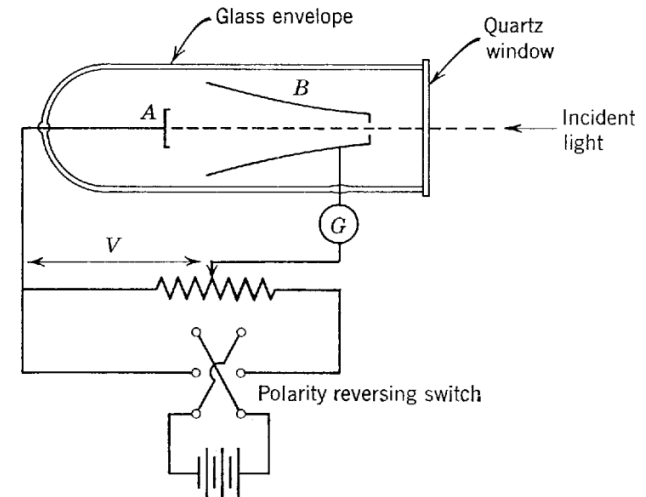
## 2.1.2 L'esperimento di Lenard e le contraddizioni con la teoria classica

Se invertiamo il segno del potenziale, la corrente fotoelettrica non scende immediatamente a zero, il che suggerisce che gli elettroni vengono emessi da A con una certa energia cinetica.

Infatti, alcuni elettroni riusciranno a raggiungere l'elettrodo B nonostante il campo elettrico si opponga al loro movimento. Tuttavia, aumentando il potenziale invertito, si raggiunge un valore  $V_0$  noto come potenziale di arresto, in corrispondenza del quale la corrente fotoelettrica scende a zero.

Fenomenologicamente, il potenziale di arresto  $V_0$ , moltiplicata per la carica dell'elettrone, rappresenta l'energia cinetica  $K_{max}$  del fotoelettrone espulso più velocemente:

$$K_{max} = eV_0$$



# 2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

## 2.1.2 L'esperimento di Lenard e le contraddizioni con la teoria classica

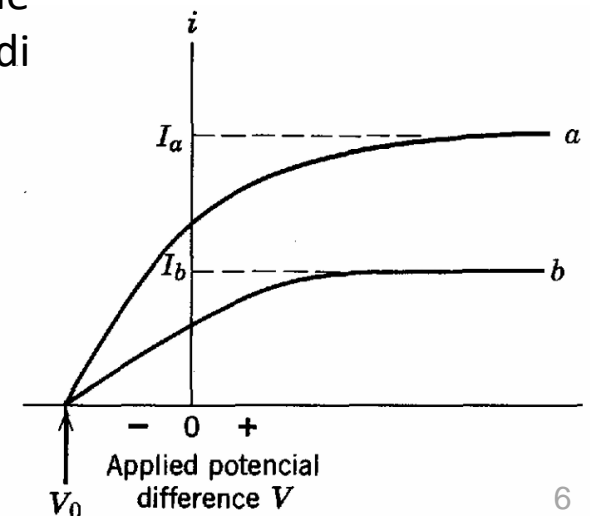
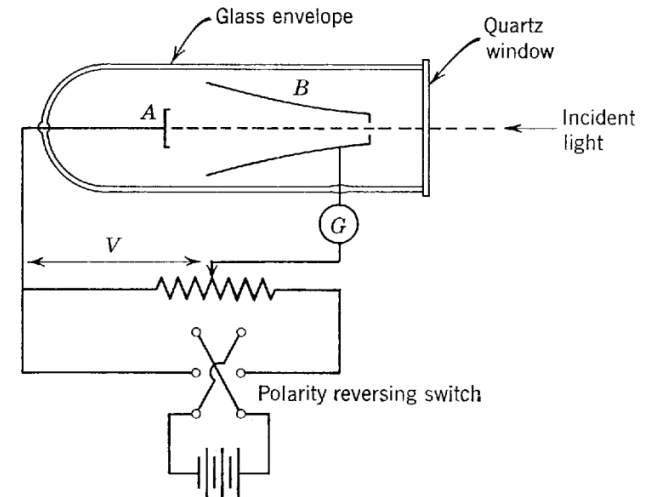
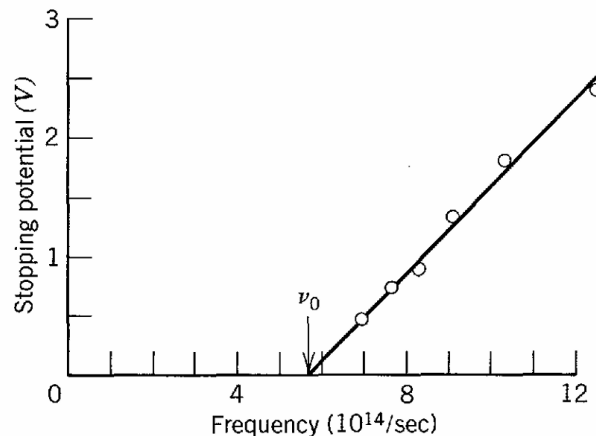
$$K_{max} = eV_0$$

Riduciamo l'intensità della luce incidente e registriamo la curva Tensione-Corrente. Il risultato è la **curva b** della Figura.

La quantità  $K_{max}$  risulta sperimentalmente indipendente dall'intensità della luce.

Cambiamo la frequenza della luce incidente.

La Figura mostra il potenziale di arresto  $V_0$  in funzione della frequenza della luce incidente su un elettrodo di sodio.



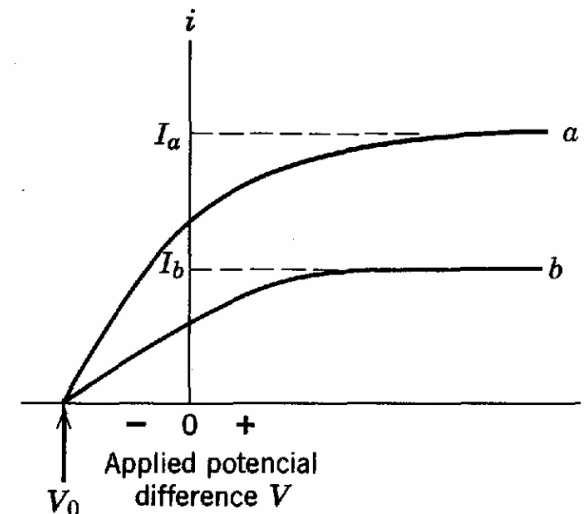
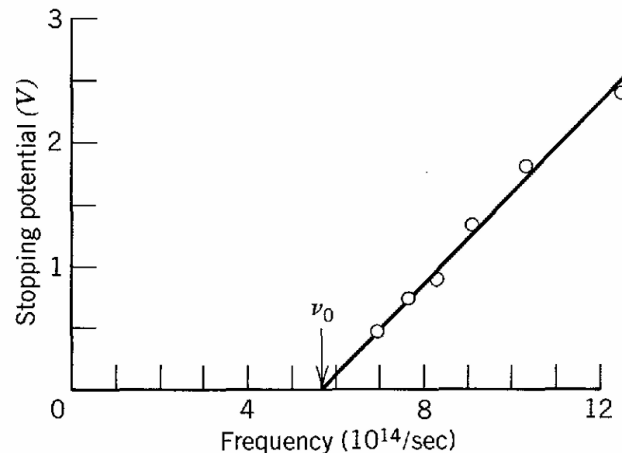
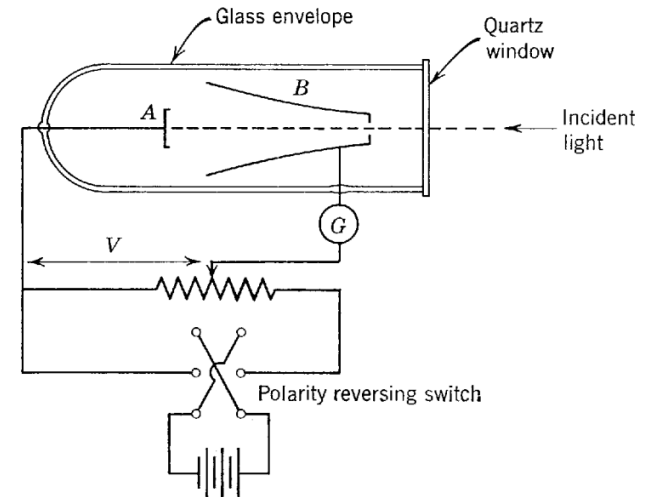
# 2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

## 2.1.2 L'esperimento di Lenard e le contraddizioni con la teoria classica

Si nota che esiste una frequenza di soglia definita come  $\nu_0$ , al di sotto della quale non si verifica alcun effetto fotoelettrico.

Questi dati furono rilevati nel 1914 da Millikan, il cui minuzioso lavoro sull'effetto fotoelettrico gli valse il premio Nobel nel 1923.

Ci sono tre caratteristiche principali dell'effetto fotoelettrico che non possono essere spiegate nei termini della classica teoria ondulatoria della luce:



# 2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

## 2.1.2 L'esperimento di Lenard e le contraddizioni con la teoria classica

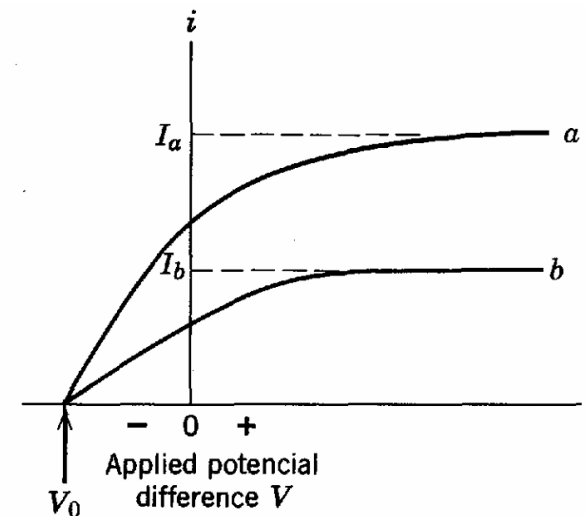
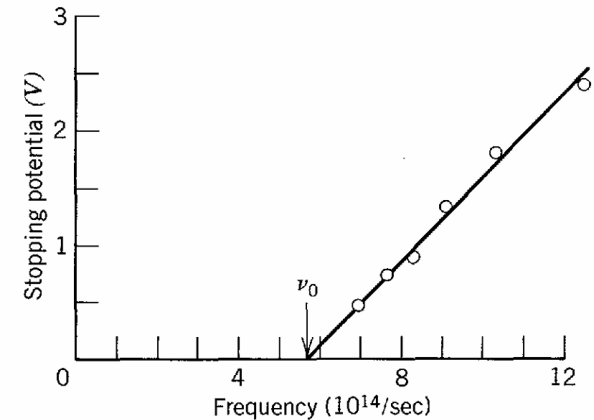
**1.** La teoria ondulatoria richiede che il vettore campo elettrico oscillante  $\vec{E}$  dell'onda luminosa aumenti di ampiezza all'aumentare dell'intensità dell'onda elettromagnetica.

La forza applicata all'elettrone a seguito dell'interazione con l'onda elettromagnetica è di natura Coulombiana,  $\vec{F} = e\vec{E}$

Ciò suggerisce che anche l'energia cinetica dei fotoelettroni espulsi dovrebbe aumentare all'aumentare dell'intensità dell'onda elettromagnetica.

Tuttavia, la Figura in basso mostra che  $K_{max}$ , che equivale a  $eV_0$ , è indipendente dall'intensità dell'onda.

$$K_{max} = eV_0$$



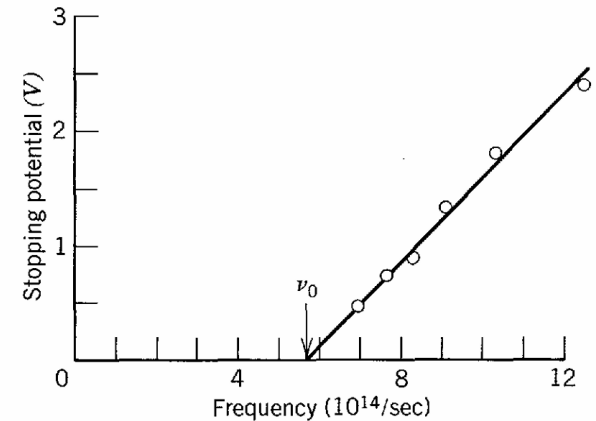


# 2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

## 2.1.2 L'esperimento di Lenard e le contraddizioni con la teoria classica

**2.** Secondo la teoria ondulatoria della luce, l'effetto fotoelettrico dovrebbe verificarsi per qualsiasi frequenza dell'onda, a condizione solo che la luce sia sufficientemente intensa da fornire l'energia necessaria per espellere i fotoelettroni.

Tuttavia, la Figura a lato mostra che esiste, per ciascuna superficie, una frequenza di taglio caratteristica  $\nu_0$ . Per  $\nu < \nu_0$ , l'effetto fotoelettrico non si verifica, indipendentemente dell'intensità dell'onda incidente.



**3.** Nella teoria classica l'energia luminosa è distribuita uniformemente sul fronte d'onda. Pertanto, se l'intensità dell'onda è sufficientemente debole, dovrebbe esserci un intervallo di tempo misurabile, tra il momento in cui la luce inizia a colpire la superficie e l'espulsione del fotoelettrone. Durante questo intervallo l'elettrone dovrebbe assorbire energia dal fascio finché non ne avrà accumulata abbastanza per fuoriuscire. Tuttavia, non è fu misurato alcun ritardo temporale rilevabile.

# 2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

## 2.1.3 La teoria di Einstein

Influenzato dall'esperimento di Lenard, nel 1905 Einstein mise in discussione la teoria classica della luce, propose una nuova teoria e citò l'effetto fotoelettrico come un'applicazione in grado di verificare quale teoria fosse corretta.

Come abbiamo accennato, Planck originariamente limitò il suo concetto di quantizzazione dell'energia all'elettrone delle pareti di una cavità del corpo nero. Planck credeva che l'energia elettromagnetica, una volta irradiata, si diffondesse nello spazio come onde.

Einstein propose invece che l'energia radiante fosse quantizzata in entità che in seguito vennero chiamati **fotoni**.

Einstein sosteneva che i ben noti esperimenti ottici sull'interferenza e sulla diffrazione della radiazione elettromagnetica erano stati eseguiti solo in situazioni che coinvolgevano un numero molto elevato di fotoni. Questi esperimenti producono risultati che sono medie dei comportamenti dei singoli fotoni.

Naturalmente gli esperimenti di interferenza e diffrazione mostrano definitivamente che i fotoni viaggiano come le onde classiche, nel senso che i calcoli basati sul modo in cui tali onde si propagano spiegano correttamente i risultati sperimentali.

# 2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

## 2.1.3 La teoria di Einstein

Einstein concentrò la sua attenzione non sul familiare modo ondulatorio in cui la radiazione si propaga, ma su ciò che per primo realizzò essere la natura corpuscolare in cui viene emessa e assorbita.

Secondo Einstein, il postulato di Planck secondo cui il contenuto energetico delle onde elettromagnetiche di frequenza  $\nu$  in una sorgente radiante (ad esempio, una sorgente di luce ultravioletta in un esperimento fotoelettrico) può essere solo 0, o  $h\nu$ , o  $2h\nu$ , ..., o  $nh\nu$ , ... implica che nel processo di passaggio dallo stato energetico  $nh\nu$  allo stato energetico  $(n - 1)h\nu$  la sorgente emetterebbe energia elettromagnetica di contenuto energetico  $h\nu$ .

Egli ipotizzò che il contenuto energetico  $E$  del singolo fotone, fosse correlato alla sua frequenza  $\nu$  mediante la relazione:

$$E = h\nu$$

Ipotizzò inoltre che nel processo fotoelettrico un fotone fosse completamente assorbito da un elettrone nel fotocatodo. Quando l'elettrone viene emesso dalla superficie del metallo, la sua energia cinetica sarà:

$$K = h\nu - w$$

# 2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

## 2.1.3 La teoria di Einstein

$$K = h\nu - w$$

dove  $h\nu$  è l'energia del fotone incidente assorbito e  $w$  è il lavoro necessario per rimuovere l'elettrone dal metallo. Questo lavoro è necessario per superare i campi attrattivi degli atomi in superficie e le perdite di energia cinetica dovute alle collisioni interne dell'elettrone.

Alcuni elettroni sono legati più strettamente di altri; alcuni perdono energia nelle collisioni in uscita. Nel caso di legame più debole, il fotoelettrone emergerà con la massima energia cinetica,  $K_{max}$ .

$$K_{max} = h\nu - w_0$$

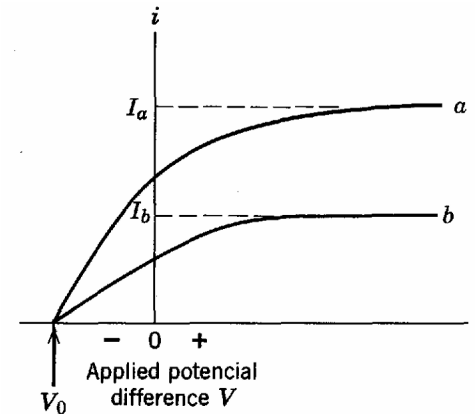
dove  $w_0$ , un'energia caratteristica del metallo chiamata funzione lavoro, è l'energia minima necessaria a un elettrone per attraversare la superficie del metallo e sfuggire alle forze attrattive che normalmente legano l'elettrone al metallo.

Consideriamo ora come l'ipotesi del fotone di Einstein soddisfa le tre obiezioni sollevate contro l'interpretazione dell'effetto fotoelettrico da parte della teoria ondulatoria.

# 2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

## 2.1.3 La teoria di Einstein

Per quanto riguarda l'obiezione **1** (la mancanza di dipendenza di  $K_{max}$  dall'intensità dell'illuminazione), c'è completo accordo tra la teoria del fotone di Einstein e l'esperimento. Raddoppiando l'intensità della luce si raddoppia semplicemente il numero di fotoni e quindi la corrente fotoelettrica; non modifica l'energia  $h\nu$  dei singoli fotoni né la natura del singolo processo fotoelettrico.



L'obiezione **2** (l'esistenza di una frequenza di taglio) viene rimossa immediatamente se si considera la condizione minima di emissione del fotoelettrone dal metallo ovvero  $K_{max} = 0$ :

$$h\nu_0 = w_0$$

$$K_{max} = h\nu - w_0$$

che asserisce che un fotone di frequenza  $\nu_0$  ha solo energia sufficiente per espellere i fotoelettroni e nessun contributo come energia cinetica. Per frequenze al di sotto di  $\nu_0$ , i singoli fotoni, non importa quanti siano (cioè non importa quanto intensa sia l'onda elettromagnetica), non avranno abbastanza energia per espellere individualmente i fotoelettroni.

# 2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

## 2.1.3 La teoria di Einstein

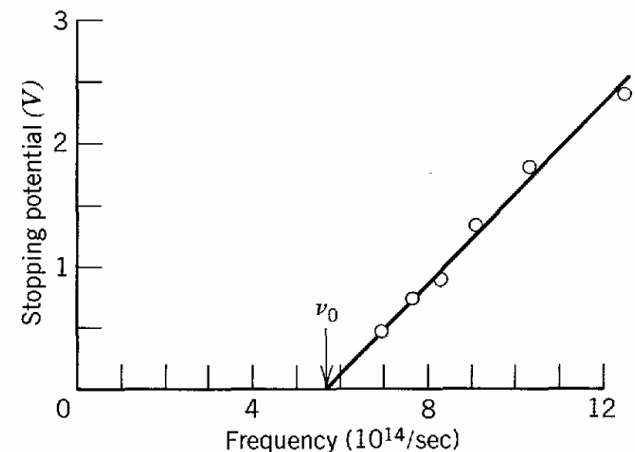
L'obiezione **3** (l'assenza di un ritardo temporale) viene eliminata nella teoria dei fotoni perché l'energia richiesta viene fornita in “pacchetti”, non essendo distribuita uniformemente sul fronte d'onda, come richiesto dalla teoria ondulatoria. Se c'è luce incidente sul catodo, allora ci sarà almeno un fotone che lo colpisce; questo fotone verrà immediatamente assorbito, da qualche atomo, determinando l'immediata emissione di un fotoelettrone.

Riscriviamo l'equazione fotoelettrica di Einstein  $K_{max} = h\nu - w_0$

$$K_{max} = eV_0$$

$$V_0 = \frac{h\nu}{e} - \frac{w_0}{e}$$

Pertanto, la teoria di Einstein prevede una relazione lineare tra il potenziale di arresto  $V_0$  e la frequenza  $\nu$ , in completo accordo con i risultati sperimentali come mostrato in Figura.



# 2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

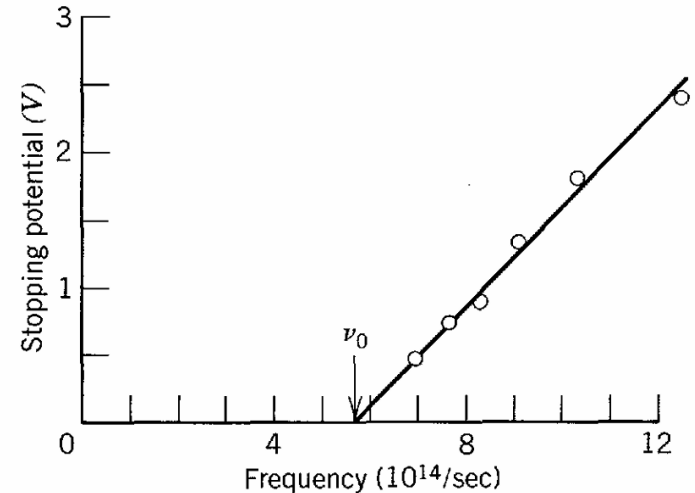
## 2.1.3 La teoria di Einstein

La pendenza della curva sperimentale dovrebbe restituire  $\frac{h}{e}$ ; moltiplicandola per la carica dell'elettrone, si dovrebbe ottenere la costante di Planck.

Con questo approccio, Millikan stimò il valore di:

$$h = 6,57 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

con una precisione di circa lo 0,5%. Questa prima misurazione era in buon accordo con il valore di  $h$  derivato dalla formula della radiazione di Planck.



$$V_0 = \frac{h\nu}{e} - \frac{w_0}{e}$$

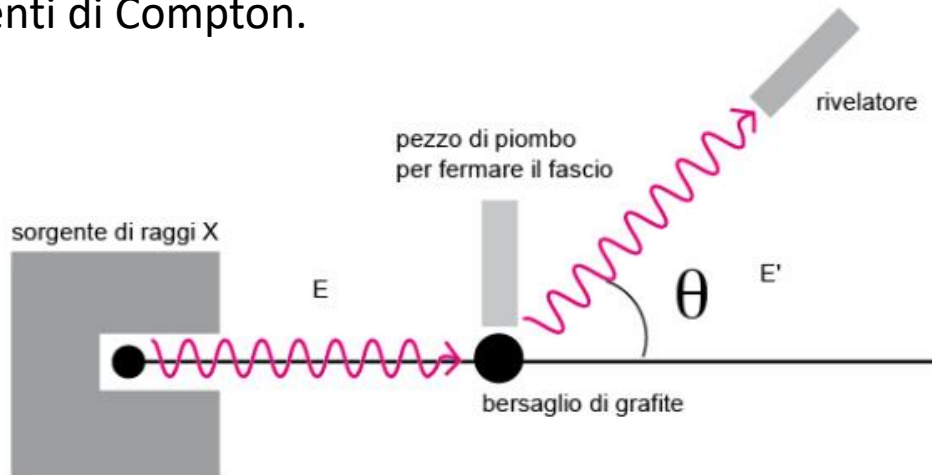
Colpisce l'accordo numerico in due determinazioni di  $h$ , utilizzando fenomeni e teorie completamente diverse. Un valore moderno di  $h$ , dedotto da diversi esperimenti, è

$$h = 6,6262 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

# 2.2 L'EFFETTO COMPTON

## 2.2.1 L'esperimento di Compton

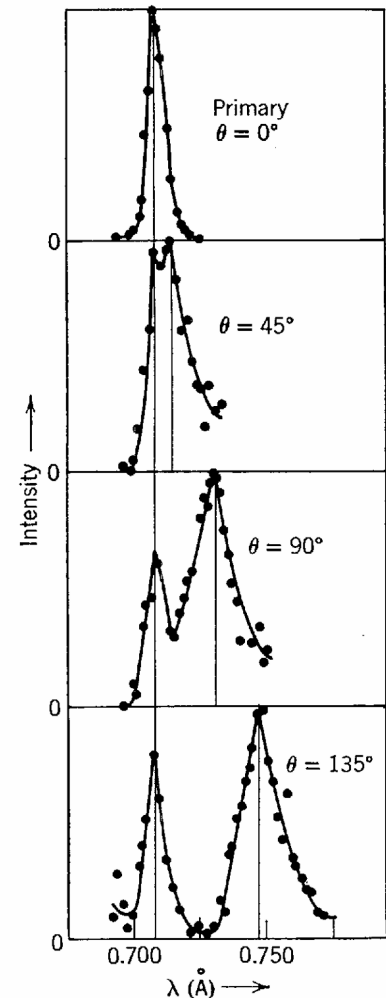
La natura corpuscolare delle radiazioni ricevette una definita conferma nel 1923 dagli esperimenti di Compton.



Un fascio di raggi X di lunghezza d'onda  $\lambda$  fu fatto incidere su un bersaglio di grafite, come mostrato nella Figura.

Compton misurò l'intensità dei raggi X dispersi in funzione della loro lunghezza d'onda, a diversi angoli di diffusione.

La Figura a lato mostra i risultati sperimentali acquisiti a diversi angoli.





# 2.2 L'EFFETTO COMPTON

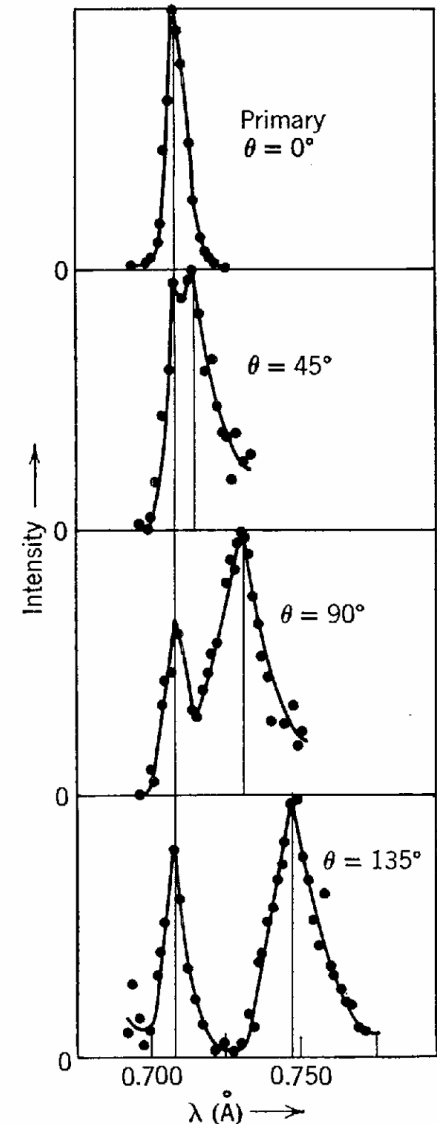
## 2.2.1 L'esperimento di Compton

Osserviamo che, sebbene il fascio incidente sia essenzialmente monocromatico, i raggi X diffusi presentano due picchi di intensità a due lunghezze d'onda diverse; uno di essi è alla lunghezza d'onda incidente  $\lambda$ , l'altro,  $\lambda'$ , è maggiore di una quantità  $\Delta\lambda$ .

Questo fenomeno fu identificato inizialmente come **spostamento Compton**  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$  e varia con l'angolo al quale si osservano i raggi X diffusi, ovvero  $\Delta\lambda(\theta)$ .

La presenza della lunghezza d'onda diffusa  $\lambda'$  non può essere spiegata se la radiazione incidente viene considerata come un'onda elettromagnetica classica.

Nel modello classico, il vettore oscillante campo elettrico dell'onda incidente di frequenza  $\nu$  agisce sugli elettroni liberi nel bersaglio di scattering e li fa oscillare alla stessa frequenza.



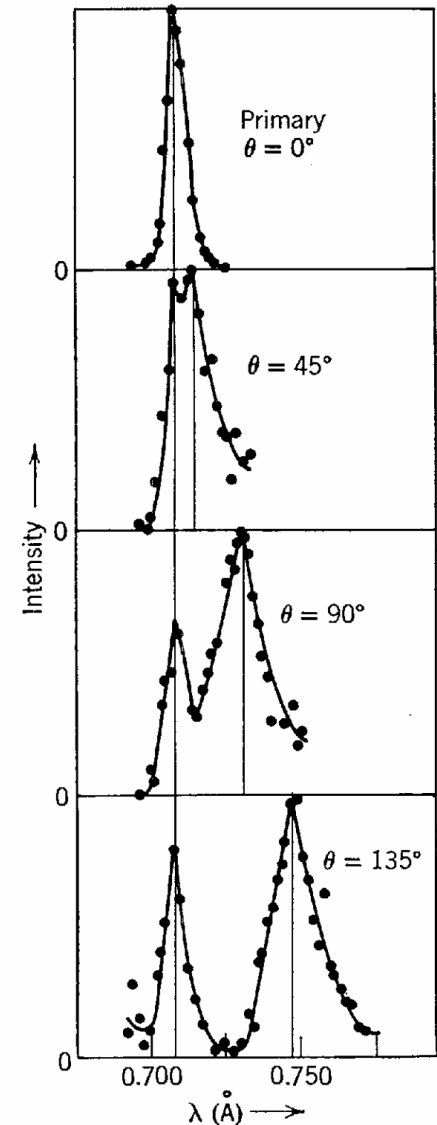
# 2.2 L'EFFETTO COMPTON

## 2.2.1 L'esperimento di Compton

Questi elettroni oscillanti dovrebbero irradiare onde elettromagnetiche anch'esse alla stessa frequenza  $\nu$ , esattamente come nelle antenne in cui l'oscillazione meccanica degli elettroni genera un campo elettromagnetico oscillante alla stessa frequenza.

Quindi, nell'immagine classica, l'onda diffusa dovrebbe avere la stessa frequenza  $\nu$  e la stessa lunghezza d'onda  $\lambda$  dell'onda incidente.

Compton interpretò i suoi risultati sperimentali postulando che il fascio di raggi X incidente non fosse descritto da un'onda di frequenza  $\nu$  ma bensì da un fascio di fotoni, ciascuno di energia  $E = h\nu$ , e che questi fotoni entrassero in collisione con gli elettroni liberi, come in una collisione classica tra corpi puntiformi.



# 2.2 L'EFFETTO COMPTON

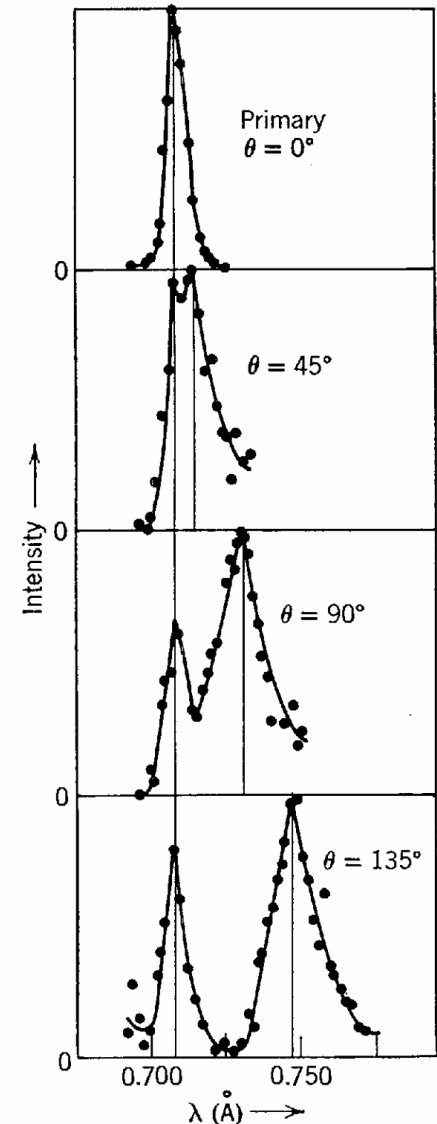
## 2.2.1 L'esperimento di Compton

In questa visione, i fotoni di “rinculo” che emergono dal bersaglio costituiscono la radiazione diffusa.

Poiché il fotone incidente cede parte della sua energia all'elettrone con cui urta, il fotone diffuso avrà un'energia  $E'$  minore; deve quindi avere una frequenza minore  $\nu' = \frac{E'}{h}$ , il che implica una lunghezza d'onda maggiore  $\lambda' = \frac{c}{\nu'}$ .

Questo punto di vista spiega qualitativamente lo shift in lunghezza d'onda,  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ .

Si noti che nell'interazione i raggi X sono considerati particelle, non onde, e che, distinti dal loro comportamento nel processo fotoelettrico, i fotoni dei raggi X vengono diffusi anziché assorbiti.



# 2.2 L'EFFETTO COMPTON

## 2.2.2 La collisione fotone-elettrone

Analizziamo ora quantitativamente una singola collisione fotone-elettrone. Per un fascio di raggi X di frequenza  $\nu$ , l'energia  $E$  di un fotone nel fascio incidente è:

$$E = h\nu$$

Prendendo alla lettera l'idea del fotone come particella, lo considereremo come una particella di energia relativistica  $E$  interamente cinetica, quantità di moto  $p$  e massa a riposo nulla.

La quantità di moto di un fotone può essere valutata dalla relazione generale tra l'energia relativistica totale  $E$ , la quantità di moto  $p$ :

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

dove  $\lambda = \frac{c}{\nu}$  è la lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica che accompagna il fotone.

Una prima osservazione importante fu che la frequenza  $\nu$  della radiazione diffusa era indipendente dal materiale della lamina. Ciò implica che la diffusione non coinvolge atomi interi.

# 2.2 L'EFFETTO COMPTON

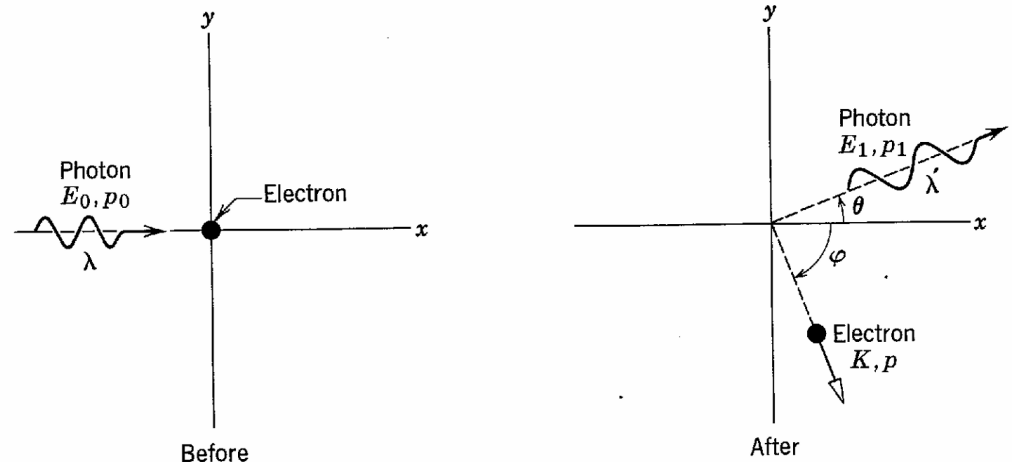
## 2.2.2 La collisione fotone-elettrone

Compton ipotizzò che la diffusione fosse dovuta alle collisioni tra il fotone e un singolo elettrone nel bersaglio.

Assunse inoltre che gli elettroni partecipanti a questo processo di diffusione fossero liberi e inizialmente stazionari.

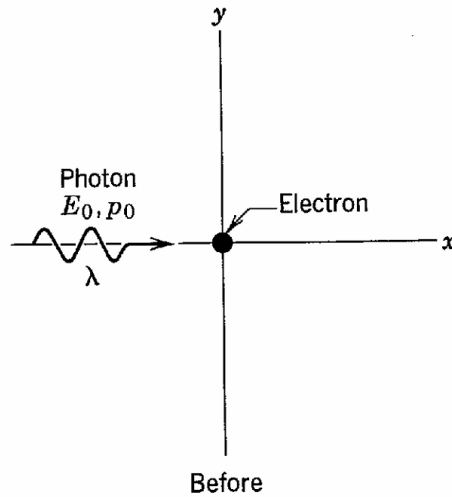
Una giustificazione a priori di queste ipotesi può essere trovata considerando il fatto che l'energia di un fotone di raggi X è diversi ordini di grandezza maggiore dell'energia di un fotone ultravioletto, e dalla nostra discussione sull'effetto fotoelettrico risulta evidente che l'energia di un fotone ultravioletto è paragonabile all'energia minima con cui un elettrone è legato in un metallo.

Consideriamo quindi, una collisione tra un fotone e un elettrone stazionario libero, come rappresentato in Figura.

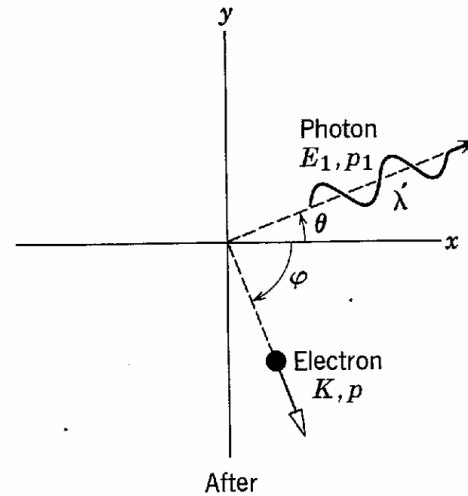


# 2.2 L'EFFETTO COMPTON

## 2.2.2 La collisione fotone-elettrone



Nel diagramma a sinistra, un fotone di energia relativistica totale  $E_0$  e quantità di moto  $p_0$  incide su un elettrone stazionario di energia di massa a riposo  $m_0c^2$ .

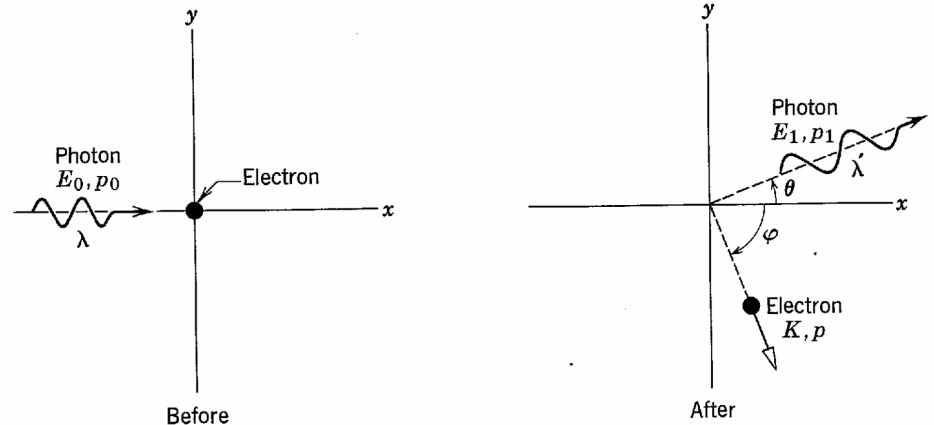


Nel diagramma a destra, il fotone viene diffuso con un angolo  $\theta$  e si allontana con energia relativistica totale  $E_1$  e quantità di moto  $p_1$ , mentre l'elettrone si allontana dalla posizione a riposo con un angolo  $\varphi$  con energia cinetica  $K$  e quantità di moto  $p$ .

# 2.2 L'EFFETTO COMPTON

## 2.2.2 La collisione fotone-elettrone

Compton applicò la conservazione della quantità di moto e dell'energia relativistica totale a questo problema di collisione. Sono state utilizzate equazioni relativistiche poiché il fotone si muove sempre a velocità relativistiche, e anche l'elettrone che rincula può essere trattato con le medesime circostanze.



La **conservazione della quantità di moto** impone che:

$$\begin{cases} p_0 = p_1 \cos\theta + p \cos\varphi & \text{lungo l'asse } x \\ p_1 \sin\theta = p \sin\varphi & \text{lungo l'asse } y \end{cases}$$

Elevando al quadrato ambo i membri:

$$\begin{cases} (p_0 - p_1 \cos\theta)^2 = p^2 \cos^2\varphi & \text{lungo l'asse } x \\ p_1^2 \sin^2\theta = p^2 \sin^2\varphi & \text{lungo l'asse } y \end{cases}$$

# 2.2 L'EFFETTO COMPTON

## 2.2.2 La collisione fotone-elettrone

$$\begin{cases} (p_0 - p_1 \cos\theta)^2 = p^2 \cos^2\varphi & \text{lungo l'asse } x \\ p_1^2 \sin^2\theta = p^2 \sin^2\varphi & \text{lungo l'asse } y \end{cases}$$

Sviluppando il quadrato e sommando membro a membro

$$p_0^2 + p_1^2 \cos^2\theta + p_1^2 \sin^2\theta - 2p_0 p_1 \cos\theta = p^2 \cos^2\varphi + p^2 \sin^2\varphi$$

Usando l'identità trigonometrica  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall x$

$$p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos\theta = p^2$$

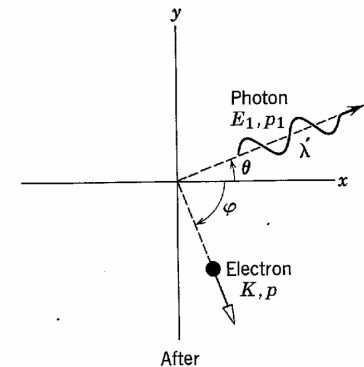
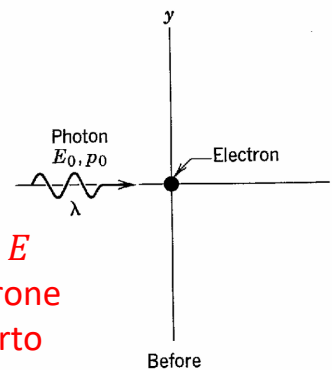
La **conservazione dell'energia** impone:

$$E_0 + m_0 c^2 = E_1 + K + m_0 c^2$$

da cui:

$$E_0 - E_1 = K$$

Energia  $E$   
dell'elettrone  
dopo l'urto



Usando la relazione  $p = \frac{E}{c}$ , possiamo riscrivere il primo membro come:

$$c(p_0 - p_1) = K$$



# 2.2 L'EFFETTO COMPTON

## 2.2.2 La collisione fotone-elettrone

Per l'energia relativistica totale  $E$  dell'elettrone dopo l'urto, possiamo scrivere:

$$E^2 = c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2$$

Essendo dopo l'urto  $E = K + m_0 c^2$ , sostituisco nell'espressione precedente:

$$(K + m_0 c^2)^2 = c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2$$

Sviluppando il quadrato si ottiene facilmente:

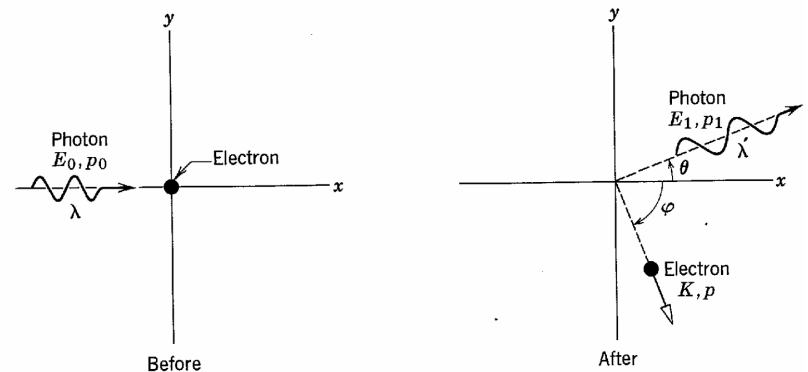
$$K^2 + 2K m_0 c^2 = c^2 p^2$$

che può essere riscritta come:

$$\frac{K^2}{c^2} + 2K m_0 = p^2$$

Sostituiamo le due espressioni trovate prima:

$$(p_0 - p_1)^2 + 2m_0 c(p_0 - p_1) = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos\theta$$



$$E_0 + m_0 c^2 = E_1 + K + m_0 c^2$$

$$p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos\theta = p^2$$
$$c(p_0 - p_1) = K$$

# 2.2 L'EFFETTO COMPTON

## 2.2.2 La collisione fotone-elettrone

$$(p_0 - p_1)^2 + 2m_0c(p_0 - p_1) = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0p_1\cos\theta$$

Sviluppando il quadrato, si riduce a:

$$m_0c(p_0 - p_1) = p_0p_1(1 - \cos\theta)$$

Se dividiamo ambo i membri per  $m_0cp_0p_1$ , si ottiene:

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} = \frac{1}{m_0c}(1 - \cos\theta)$$

Moltiplicando per  $h$  e considerando  $p = \frac{h}{\lambda}$ , otteniamo l'**equazione di Compton**:

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

con  $\lambda_c = \frac{h}{m_0c} = 2.43 \cdot 10^{-12} \text{ m}$  è nota come lunghezza d'onda di Compton.

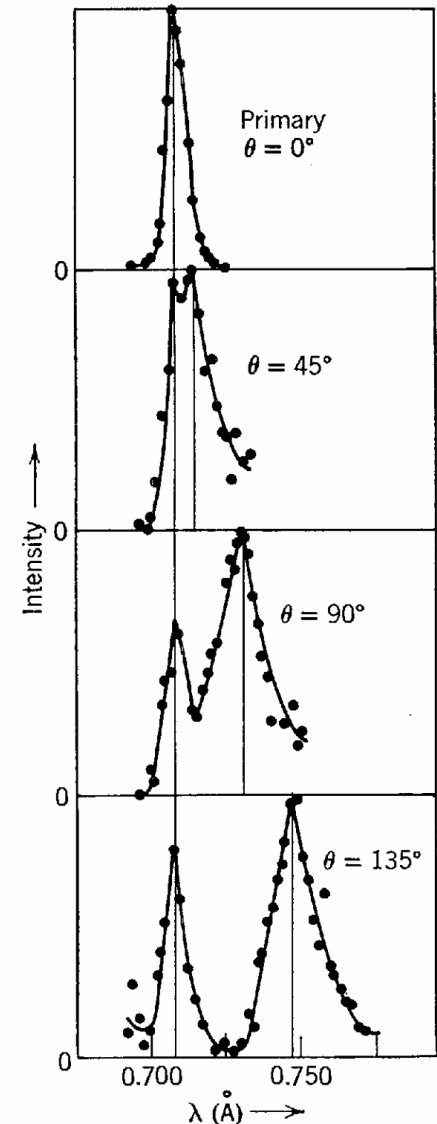
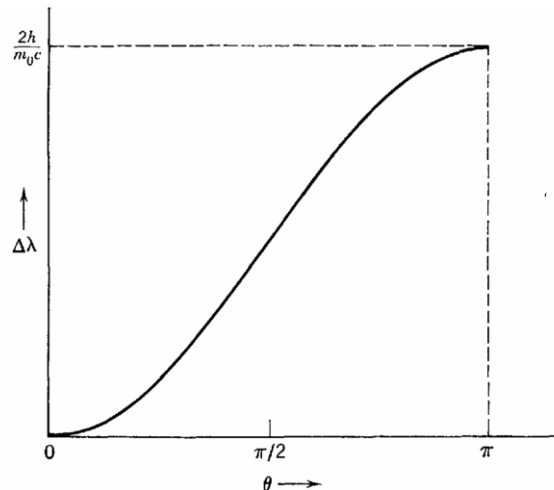
# 2.2 L'EFFETTO COMPTON

## 2.2.2 La collisione fotone-elettrone

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

Si noti che lo shift Compton  $\Delta\lambda$  dipende solo dall'angolo di diffusione  $\theta$  e non dalla lunghezza d'onda iniziale  $\lambda_0$ . L'equazione prevede lo shift Compton  $\Delta\lambda$  osservato sperimentalmente entro i limiti sperimentali di accuratezza.

Se plottiamo  $\Delta\lambda$  in funzione di  $\theta$  osserviamo che  $\Delta\lambda$  varia da zero (per  $\theta = 0$ , corrispondente ad un urto "radente" con il fotone incidente appena deflesso) a  $\frac{2h}{m_0c} = 0,049 \text{ \AA}$  (per  $\theta = 180^\circ$ , corrispondente a una collisione "frontale", con la direzione invertita del fotone incidente).



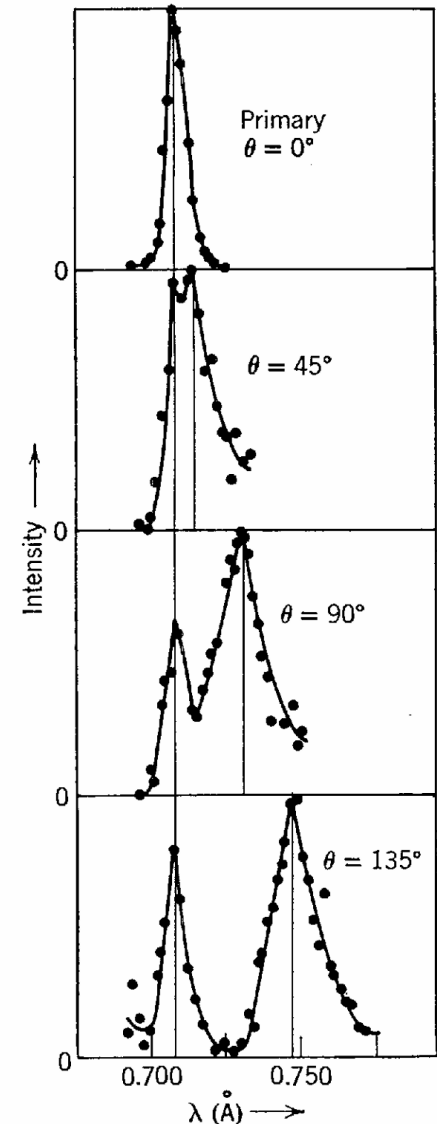
# 2.2 L'EFFETTO COMPTON

## 2.2.2 Scattering Compton e scattering Rayleigh

Il modello dello scattering elettrone-fotone non riesce comunque a spiegare la presenza del picco in Figura per il quale la lunghezza d'onda del fotone non cambia durante la diffusione.

L'unica ipotesi che abbiamo fatto è che l'elettrone con cui urta il fotone sia libero. Anche se l'elettrone è inizialmente legato, l'ipotesi è giustificabile se l'energia cinetica acquisita dall'elettrone nell'urto è molto maggiore della sua energia di legame.

Tuttavia, se l'elettrone è legato in modo particolarmente forte a un atomo nel bersaglio, o se l'energia del fotone incidente è molto piccola, c'è qualche possibilità che l'elettrone non venga espulso dall'atomo. In questo caso si può considerare che la collisione avvenga tra il fotone e l'intero atomo.



# 2.2 L'EFFETTO COMPTON

## 2.2.2 Scattering Compton e scattering Rayleigh

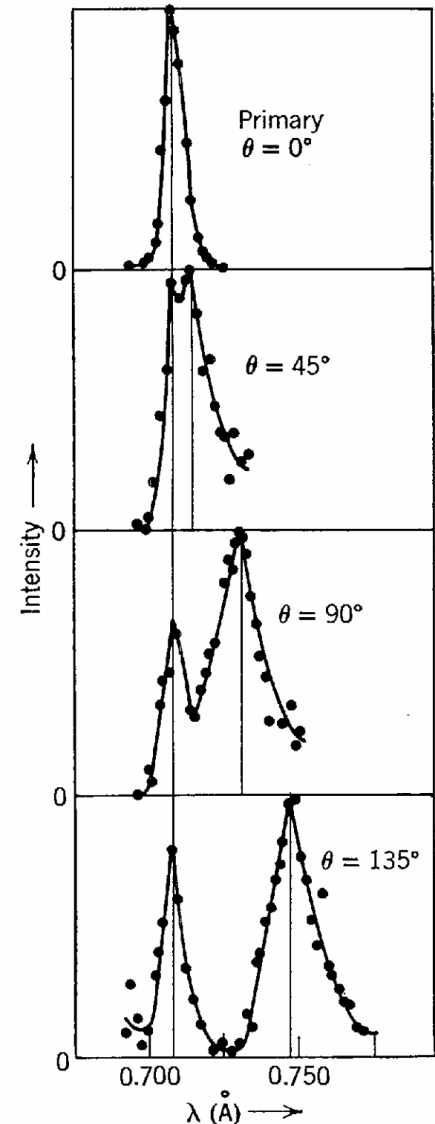
$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0c}$$

In questo caso, la massa  $M$  dell'atomo è la massa caratteristica del processo e deve essere sostituita nell'equazione di Compton alla massa dell'elettrone  $m_0$ .

Poiché  $M \gg m_0$ , è facile verificare che lo shift Compton  $\Delta\lambda$  per collisioni con elettroni strettamente legati è trascurabile e il fotone diffuso non cambia lunghezza d'onda.

Riassumendo, alcuni fotoni vengono dispersi da elettroni liberati dall'urto; questi fotoni emergono dall'urto con una lunghezza d'onda diversa rispetto a quella incidente. Altri fotoni vengono dispersi dagli elettroni rimasti legati durante l'urto; questi fotoni emergono dall'urto con la stessa lunghezza d'onda.



# 2.2 L'EFFETTO COMPTON

## 2.2.2 Scattering Compton e scattering Rayleigh

Il processo d'urto che disperde i fotoni senza modificare la loro lunghezza d'onda è chiamato **scattering di Rayleigh**, dal nome del fisico che intorno al 1900 sviluppò una teoria classica sulla diffusione della radiazione elettromagnetica da parte degli atomi.

Rayleigh considerò un fascio di onde elettromagnetiche il cui campo elettrico oscillante interagisce con le cariche degli elettroni atomici nel bersaglio. Questa interazione induce un campo di forze sugli elettroni che iniziano ad oscillare.

Come risultato dell'oscillazione indotta, gli elettroni irradieranno onde elettromagnetiche alla stessa frequenza e in fase con le onde incidenti.

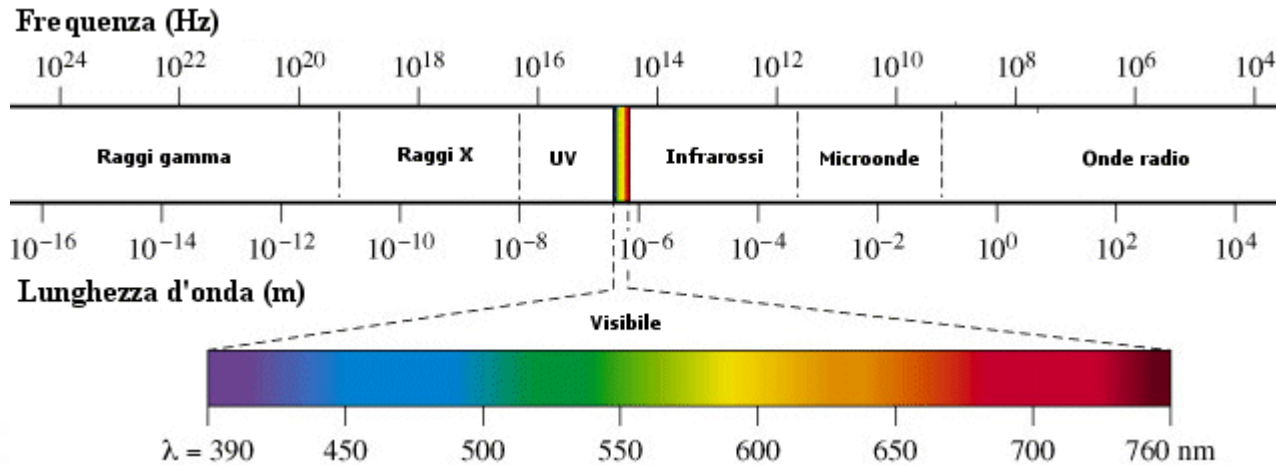
Pertanto, gli elettroni atomici assorbono energia dal fascio incidente di raggi X e la diffondono in tutte le direzioni, senza modificare la lunghezza d'onda.

Sebbene questa spiegazione classica dello scattering di Rayleigh sia diversa dalla spiegazione quantistica presentata nel paragrafo precedente, entrambe spiegano la stessa caratteristica osservata nelle misurazioni. Pertanto, lo scattering di Rayleigh è un caso in cui i risultati classici e quantistici si fondono.

# 2.2 L'EFFETTO COMPTON

## 2.2.2 Scattering Compton e scattering Rayleigh

È interessante chiedersi in quale regione dello spettro elettromagnetico lo scattering Rayleigh sarà il processo dominante, e in quale regione dominerà lo scattering Compton.



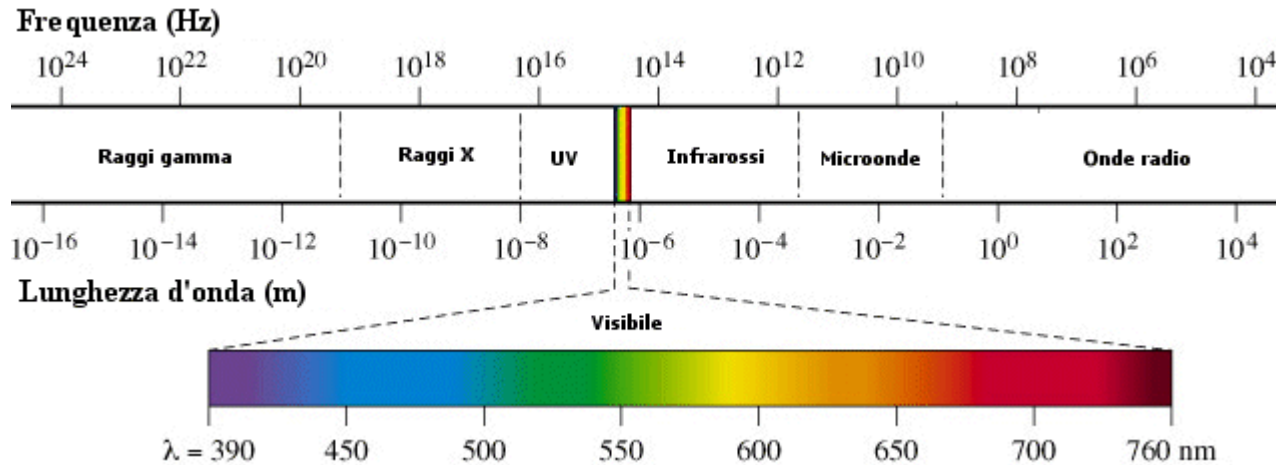
$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0c}$$

Se la radiazione incidente si trova nello spettro visibile, infrarosso, microonde o onde radio, allora  $\lambda$  è estremamente grande rispetto allo shift Compton  $\Delta\lambda$ , indipendentemente dal fatto che venga utilizzato un elettrone libero o la massa atomica (elettrone legato) per valutare lo shift Compton. Pertanto, la radiazione diffusa in questa regione dello spettro avrà in ogni circostanza una lunghezza d'onda che è la stessa della lunghezza d'onda della radiazione incidente, entro l'accuratezza sperimentale.

# 2.2 L'EFFETTO COMPTON

## 2.2.2 Scattering Compton e scattering Rayleigh



$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

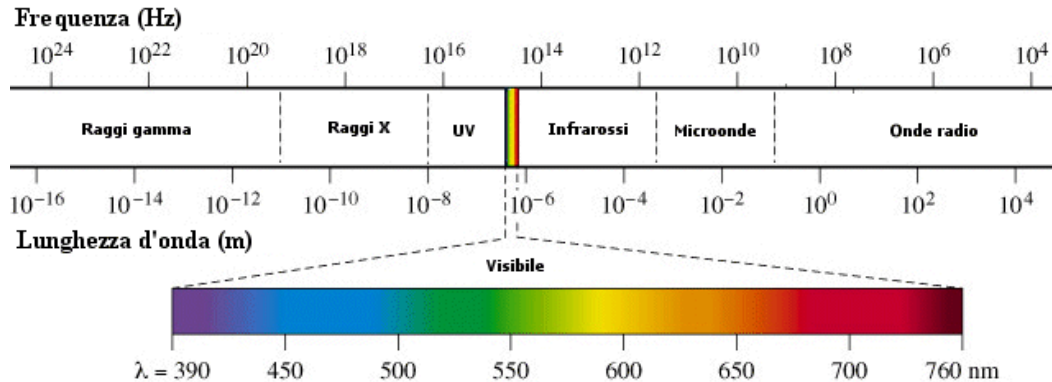
$$\lambda_c = \frac{h}{m_0c}$$

Quindi, nel limite in cui  $\lambda \rightarrow \infty$  i risultati quantistici si fondono con i risultati classici e prevale lo scattering di Rayleigh. Spostandosi nella regione dei raggi X dello spettro, lo scattering Compton inizia a diventare importante, in particolare nel caso di bersagli con basso numero atomico dove gli elettroni atomici non sono strettamente legati, e lo shift della lunghezza d'onda nello scattering da un elettrone che viene liberato nello spettro processo diventa facilmente misurabile.

Nella regione dei raggi  $\gamma$  dove  $\lambda \rightarrow 0$ , l'energia dei fotoni è così grande che in una collisione un elettrone viene sempre liberato e domina lo scattering Compton.



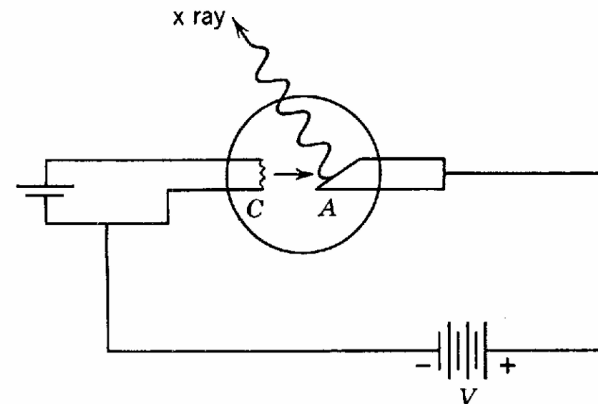
# 2.3 LA RADIAZIONE DI BREMSSTRAHLUNG



I raggi X, così chiamati dal loro scopritore Roentgen perché la loro natura era allora sconosciuta, sono radiazioni nello spettro elettromagnetico con lunghezza d'onda inferiore a circa  $1.0 \text{ \AA}$ .

Essi mostrano il tipico comportamento ondulatorio, con interferenza e diffrazione, che si riscontra nella luce e tutte le altre radiazioni elettromagnetiche.

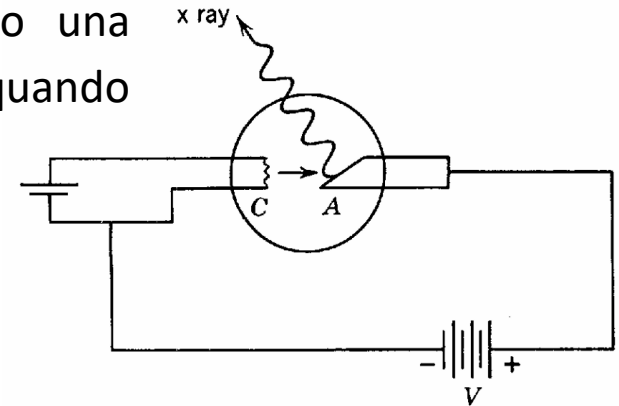
Lo schema tipico di un setup per la produzione di raggi X è mostrato in Figura:



## 2.3 LA RADIAZIONE DI BREMSSTRAHLUNG

Un fascio di elettroni energetici, accelerato attraverso una differenza di potenziale di migliaia di volt, viene fermato quando colpisce il bersaglio.

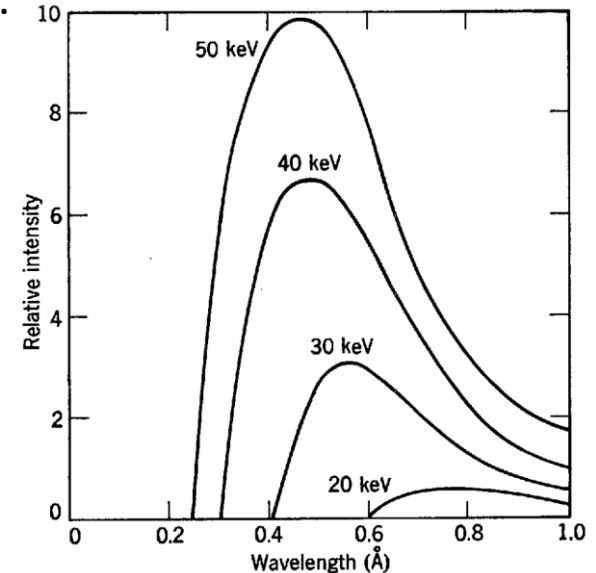
Secondo la fisica classica, la decelerazione degli elettroni prima di fermarsi provoca l'emissione di uno spettro continuo di radiazioni elettromagnetiche.



La Figura mostra la distribuzione dei raggi X che emergono da un bersaglio di tungsteno per quattro diversi valori dell'energia dell'elettrone incidente.

La caratteristica più interessante di queste curve spettrali è che, per una data energia degli elettroni incidente, esiste una lunghezza d'onda minima  $\lambda_{min}$  ben definita di emissione.

Sebbene la forma dello spettro dipenda leggermente dalla scelta del materiale bersaglio e dal potenziale di accelerazione dell'elettrone  $V$ , il valore di  $\lambda_{min}$  dipende solo da  $V$ , essendo lo stesso per tutti i materiali target.



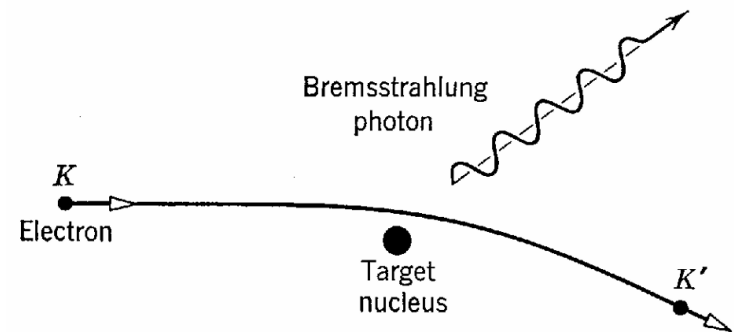
## 2.3 LA RADIAZIONE DI BREMSSTRAHLUNG

La teoria elettromagnetica classica non può spiegare questo fenomeno, non essendoci alcuna ragione per cui le onde, la cui lunghezza d'onda è inferiore a un certo valore critico, non debbano emergere dal bersaglio.

Una spiegazione immediata del fenomeno possiamo ricavarla se consideriamo i raggi X come fotoni.

La Figura mostra una schematizzazione semplice del processo elementare responsabile dello spettro continuo di raggi X, nell'ipotesi di emissione di un fotone X.

Un elettrone di energia cinetica iniziale  $K$  viene decelerato a seguito dell'interazione a distanza con il campo coulombiano del nucleo target, con conseguente trasferimento di quantità di moto al nucleo.



La conseguente decelerazione dell'elettrone porta all'emissione di fotoni. Il nucleo bersaglio è così massiccio che l'energia acquisita durante l'urto può essere tranquillamente trascurata.

Se  $K'$  è l'energia cinetica dell'elettrone dopo l'urto a distanza, allora l'energia del fotone sarà pari a:

# 2.3 LA RADIAZIONE DI BREMSSTRAHLUNG

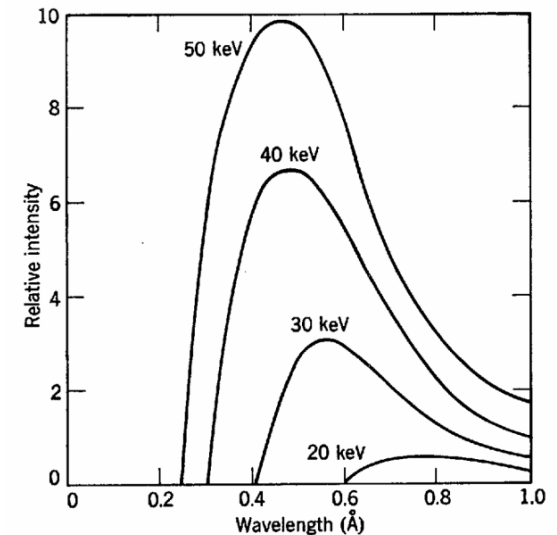
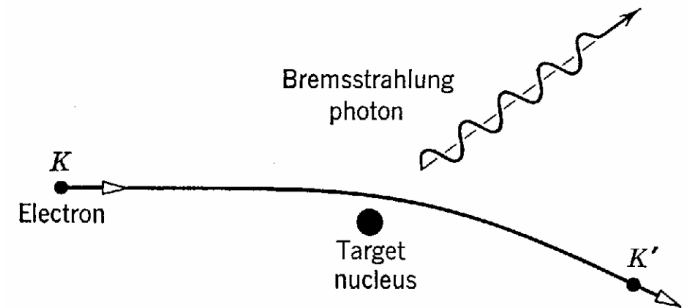
$$K - K' = h\nu$$

che riscritta in termini di lunghezza d'onda:

$$\frac{hc}{\lambda} = K - K'$$

Tornando all'esperimento, gli elettroni del fascio incidente si arresteranno dopo un certo numero di urti, durante i quali perderanno frazioni di energia.

I raggi X così generati da molti elettroni compongono lo spettro continuo della Figura, a cui corrispondono una moltitudine di fotoni discreti le cui lunghezze d'onda variano da  $\lambda_{min}$  ad  $\lambda \rightarrow \infty$ , corrispondenti alle diverse perdite di energia nei singoli urti.



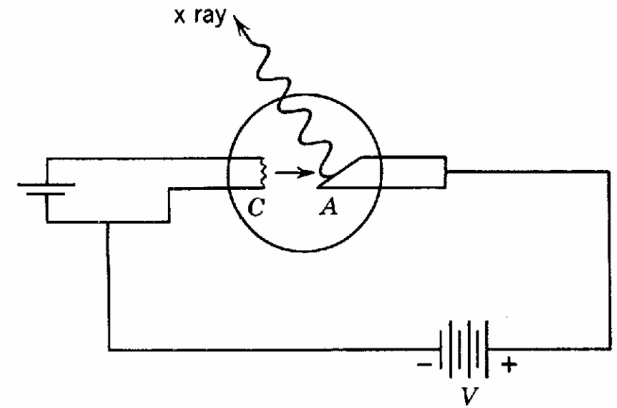
Il fotone con la lunghezza d'onda più corta sarà emesso quando un elettrone perde tutta la sua energia cinetica in un processo di decelerazione; in questo caso  $K' = 0$  quindi  $K = \frac{hc}{\lambda_{min}}$ .

# 2.3 LA RADIAZIONE DI BREMSSTRAHLUNG

Poiché  $K = eV$ , l'energia acquisita dall'elettrone nell'essere accelerato attraverso la differenza di potenziale  $V$  applicata al tubo a raggi X, abbiamo:

$$eV = \frac{hc}{\lambda_{min}}$$

$$K = \frac{hc}{\lambda_{min}}$$

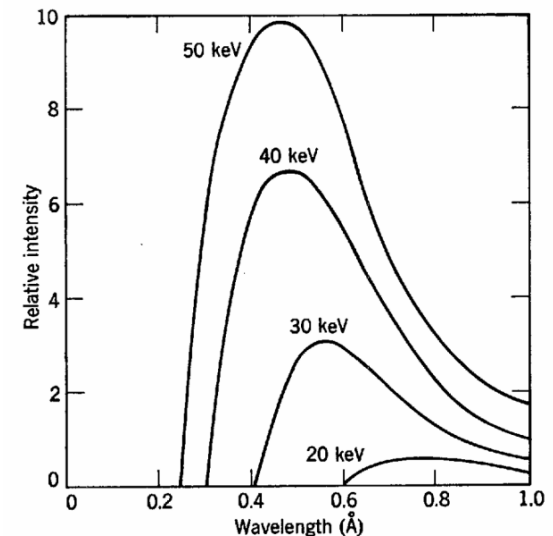


ovvero

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV}$$

In altre parole, la lunghezza d'onda minima rappresenta la conversione completa dell'energia cinetica dell'elettrone in radiazione X.

L'equazione ottenuta mostra chiaramente che se  $h \rightarrow 0$ , allora  $\lambda_{min} \rightarrow 0$ , che è la previsione della teoria classica.



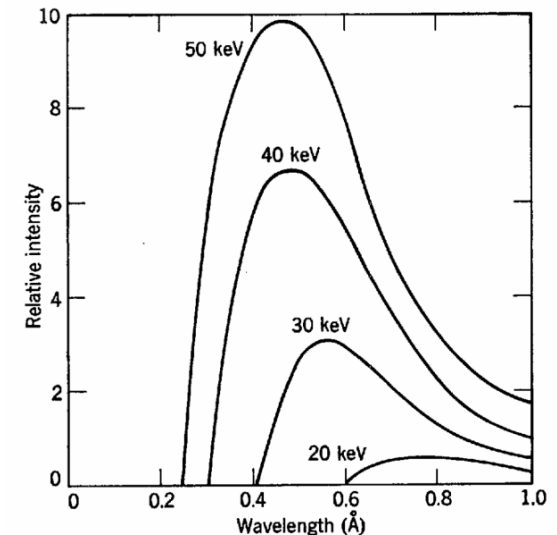
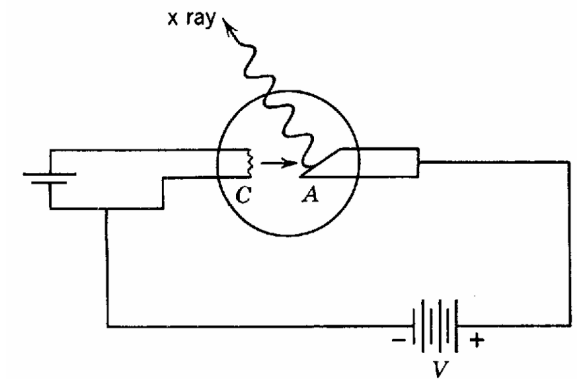
## 2.3 LA RADIAZIONE DI BREMSSTRAHLUNG

Ciò dimostra che l'esistenza stessa di una lunghezza d'onda minima è un fenomeno puramente quantistico.

La radiazione X continua della Figura è spesso chiamata **radiazione di bremsstrahlung**, dal tedesco brems ( frenata, cioè decelerazione) + strahlung (radiazione).

Il processo di bremsstrahlung non avviene solo nei tubi a raggi X, ma in tutti i processi in cui avvengono urti tra elettroni veloci con la materia.

Il processo di bremsstrahlung può essere considerato come un effetto fotoelettrico inverso: nell'effetto fotoelettrico, un fotone viene assorbito e la sua energia e quantità di moto si trasferiscono ad un elettrone e a un nucleo che rincula; nel processo di bremsstrahlung viene creato un fotone, la cui energia e quantità di moto provengono dalla collisione di un elettrone con un nucleo.

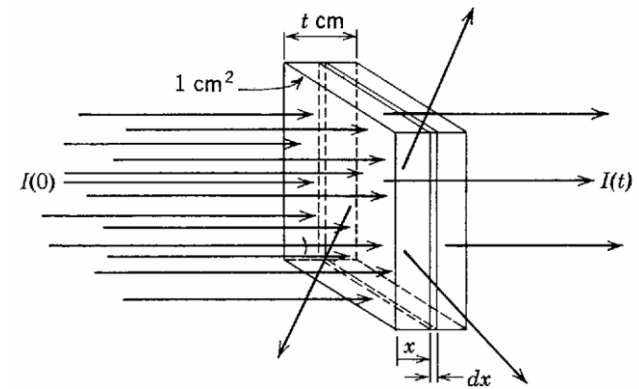


## 2.4 IL CONCETTO DI SEZIONE D'URTO

Consideriamo un fascio parallelo di fotoni che incide su una lastra, come rappresentato in Figura.

I fotoni possono interagire con gli atomi nella lastra mediante tre diversi processi: fotoelettrico, scattering Rayleigh e Compton.

Il primo assorbe completamente i fotoni, mentre gli ultimi due li diffondono, ma in tutti e tre i processi vengono sottratti fotoni dal fascio. La questione di quali siano le possibilità che questi processi si verifichino, in un dato insieme di circostanze, è di notevole importanza teorica e pratica.



La risposta alla domanda è espressa in termini di quantità chiamata **sezione d'urto**.

La probabilità che un fotone di una data energia venga, ad esempio, assorbito dal processo fotoelettrico quando interagisce con un atomo della lastra è specificata dal valore della sezione d'urto fotoelettrica  $\sigma_{PE}$ .

Questa misura della probabilità che si verifichi il processo fotoelettrico è definita in modo che il numero  $N_{PE}$  di fotoni assorbiti sia pari a:

$$N_{PE} = \sigma_{PE} I n$$

quando un fascio contenente  $I$  fotoni incide su una lastra contenente  $n$  atomi per unità di area.

## 2.4 IL CONCETTO DI SEZIONE D'URTO

La definizione può essere considerata un prototipo delle definizioni di tutte le sezioni d'urto ed è sufficientemente importante da giustificare un'attenta interpretazione fisica.

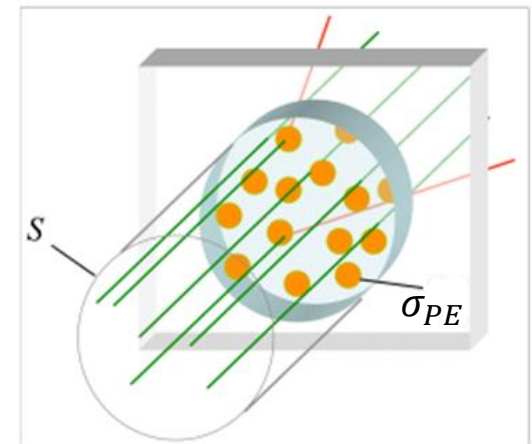
Si noti innanzitutto che il numero  $N_{PE}$  di assorbimenti aumenta in proporzione al numero  $I$  di fotoni incidenti sulla lastra e in proporzione al numero  $n$  di atomi bersaglio per unità di area della lastra.

$$N_{PE} = \sigma_{PE} I n$$

Vediamo così che la sezione d'urto, che ha un valore che dipende sia dall'energia del fotone che dal tipo di atomo, e misura quanto sono efficaci tali atomi nell'assorbire quei fotoni per effetto fotoelettrico.

Poiché le quantità  $N_{PE}$  e  $I$  sono adimensionali, mentre  $n$  ha le dimensioni di  $\text{cm}^{-2}$ , è chiaro che  $\sigma_{PE}$  deve avere le dimensioni di  $\text{cm}^2$ .

Spesso viene data un'interpretazione geometrica immaginando che un cerchio di area  $\sigma_{PE}$  sia centrato su ciascun atomo nel piano della lastra, con la proprietà che qualsiasi fotone che entra nell'area circolare viene assorbito dall'atomo attraverso l'effetto fotoelettrico.



Una sezione d'urto è in realtà solo un modo per esprimere numericamente la probabilità che un certo tipo di atomo faccia sì che un fotone di una data energia subisca un particolare processo.



## 2.4 IL CONCETTO DI SEZIONE D'URTO

Le definizioni e le interpretazioni delle sezioni d'urto per gli altri processi di assorbimento o diffusione sono del tutto analoghe a quelle dell'esempio che abbiamo considerato.

La Figura mostra le sezioni d'urto misurate per processi di diffusione ( $\sigma_s$ ) che include sia lo scattering Compton che Rayleigh, e per l'assorbimento fotoelettrico ( $\sigma_{PE}$ ) per un atomo di piombo in funzione dell'energia del fotone incidente  $h\nu$ . Per il piombo, che ha un numero atomico elevato e quindi elettroni atomici strettamente legati, l'assorbimento fotoelettrico domina quando l'energia del fotone è inferiore a circa  $h\nu = 5 \cdot 10^5 \text{ eV}$ .

Le brusche cadute nella sezione d'urto fotoelettrica si verificano alle energie di legame dei diversi elettroni nell'atomo di piombo.

Quando  $h\nu$  scende al di sotto dell'energia di legame di un particolare elettrone, un processo fotoelettrico che lo coinvolge non è più energeticamente possibile.

La sezione d'urto totale  $\sigma$  è la somma delle sezioni d'urto di diffusione e fotoelettrica. Questa quantità specifica la probabilità che un fotone effettui un qualsiasi tipo di interazione con l'atomo.

