

CAPITOLO 4

IL MODELLO DELL'ATOMO DI BOHR

4.1 IL MODELLO DI THOMSON

4.1.1 L'atomo di Thomson

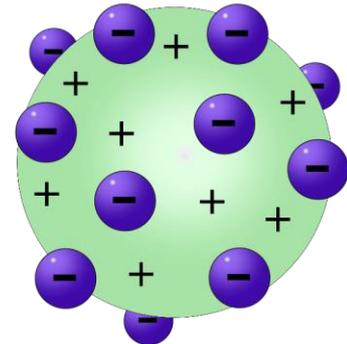
Nel 1910 erano state accumulate una serie di prove sperimentali che dimostravano che gli atomi contengono elettroni (ad esempio, diffusione dei raggi X da parte degli atomi, effetto fotoelettrico, ecc.).

Questi esperimenti fornirono anche una stima di Z , il numero di elettroni in un atomo. Poiché gli atomi sono genericamente neutri, devono contenere anche una carica positiva pari in grandezza alla carica negativa. Quindi un atomo neutro ha una carica negativa $-Ze$, dove e è la carica dell'elettrone, e anche una carica positiva della stessa grandezza.

Il fatto che la massa di un elettrone sia molto piccola rispetto anche alla massa dell'atomo più leggero presente in natura implica che la maggior parte della massa dell'atomo deve essere associata alla carica positiva.

Queste considerazioni portano naturalmente alla questione di studiare la distribuzione delle cariche positive e negative all'interno dell'atomo.

J. J. Thomson propose un modello secondo il quale gli elettroni carichi negativamente erano posizionati all'interno di una distribuzione continua di carica positiva.

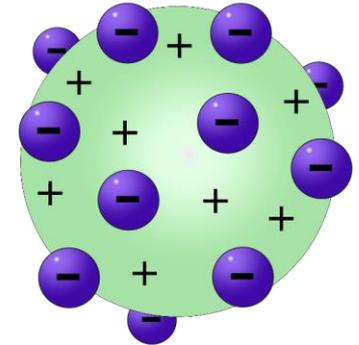


4.1 IL MODELLO DI THOMSON

4.1.1 L'atomo di Thomson

Thomson ipotizzò che la distribuzione della carica positiva fosse di forma sferica con un raggio dell'ordine di grandezza tipico del raggio di un atomo, 10^{-10} m.

A causa della loro mutua repulsione, gli elettroni sarebbero distribuiti uniformemente all'interno della sfera di carica positiva.



Nel suo stato energetico più basso possibile, gli elettroni sarebbero fissi nelle loro posizioni di equilibrio.

Negli atomi eccitati (ad esempio, gli atomi in un materiale che viene riscaldato fino a raggiungere alte temperature), gli elettroni oscillerebbero attorno alle loro posizioni di equilibrio.

Poiché la teoria elettromagnetica classica prevede che un corpo carico accelerato, come un elettrone oscillante, emetta radiazione elettromagnetica, qualitativamente il modello di Thomson spiega l'emissione di tale radiazione da parte di atomi eccitati.

Tuttavia, mancava un accordo quantitativo con gli spettri osservati sperimentalmente.

4.1 IL MODELLO DI THOMSON

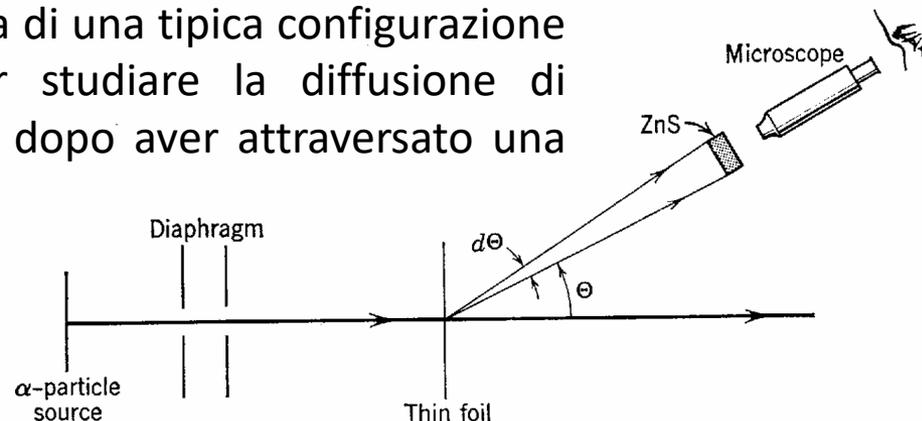
4.1.2 L'esperimento di Rutherford

La prova conclusiva dell'inadeguatezza del modello di Thomson fu ottenuta nel 1911 da Ernest Rutherford, ex allievo di Thomson, dall'analisi di esperimenti sulla diffusione di particelle α da parte degli atomi.

L'analisi di Rutherford mostrò che, invece di essere diffusa in tutto l'atomo, la carica positiva è concentrata in una regione molto piccola, o nucleo, al centro dell'atomo. Questo fu uno degli sviluppi più importanti nella fisica atomica e costituì il fondamento della materia della fisica nucleare.

Rutherford sapeva già che le particelle α erano atomi di elio doppiamente ionizzati (cioè atomi di elio con due elettroni rimossi), emessi spontaneamente da diversi materiali radioattivi ad alta velocità.

La Figura mostra lo schema di una tipica configurazione usata da Rutherford per studiare la diffusione di particelle α nel passaggio dopo aver attraversato una lamina sottile.



4.1 IL MODELLO DI THOMSON

4.1.2 L'esperimento di Rutherford

La sorgente radioattiva emette particelle α che vengono collimate in uno stretto fascio parallelo da una coppia di diaframmi. Il fascio incide su una lamina solitamente metallica.

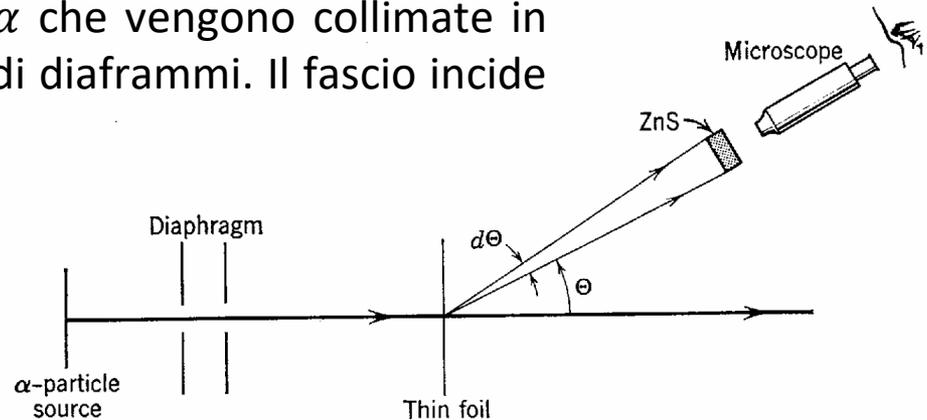
La lamina è così sottile che le particelle la attraversano interamente emergendo con una piccola diminuzione della velocità iniziale.

Nell'attraversare la lamina, ciascuna particella subisce piccole deflessioni dovute all'interazione coulombiana tra la carica α e le cariche positive e negative degli atomi della lamina.

Poiché la deflessione di una particella α a seguito dell'interazione con un singolo atomo dipende dalle caratteristiche della sua traiettoria, la deflessione netta nel passaggio attraverso l'intero foglio sarà diversa per le diverse particelle che compongono il fascio.

Di conseguenza, il fascio di particelle α in uscita dalla lamina sarà un fascio divergente.

Una misura quantitativa della sua divergenza si trova misurando il numero di particelle diffuse all'interno di un intervallo angolare $[\Phi, \Phi + d\Phi]$.

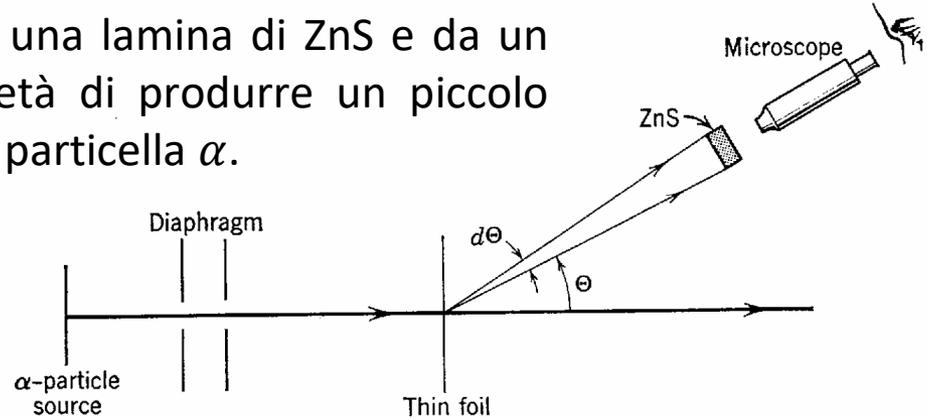


4.1 IL MODELLO DI THOMSON

4.1.2 L'esperimento di Rutherford

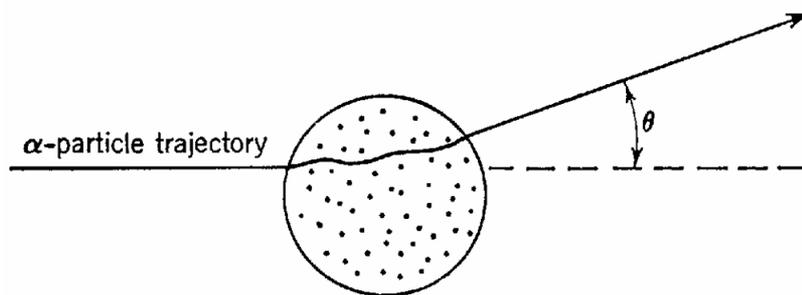
Il rilevatore di particelle era costituito da una lamina di ZnS e da un microscopio. Il cristallo ZnS ha la proprietà di produrre un piccolo lampo di luce quando viene colpito da una particella α .

Se osservato al microscopio si può distinguere il bagliore dovuto all'incidenza di una singola particella α .



Nell'esperimento un osservatore conta il numero di lampi luminosi prodotti nell'unità di tempo in funzione della posizione angolare del rilevatore.

Indichiamo con θ a l'angolo di deflessione nel passare attraverso un atomo e Φ è la deflessione netta nell'attraversare tutti gli atomi lungo la sua traiettoria.



4.1 IL MODELLO DI THOMSON

4.1.2 L'esperimento di Rutherford

Poiché gli elettroni hanno una massa molto piccola rispetto alla particella α , essi possono produrre solo piccole deflessioni della particella α .

Poiché la carica positiva (di quantità uguale a quella elettronica per il principio di neutralità dell'atomo) è distribuita su tutto il volume dell'atomo di Thomson con raggio $r' \approx 10^{-10} \text{ m}$, essa non può fornire una repulsione di Coulomb abbastanza intensa da produrre una grande deflessione della particella α .

Infatti, utilizzando il modello di Thomson si può dimostrare che la deflessione causata da un atomo è $\theta < 10^{-4} \text{ rad}$. Questo è il risultato atteso dall'analisi della diffusione delle particelle α adottando il modello Thomson dell'atomo. Rutherford e il suo gruppo testarono queste previsioni.

L'esistenza di una probabilità seppur piccola, ma diversa da zero, per la diffusione ad angoli grandi non può essere spiegata affatto nei termini del modello dell'atomo di Thomson, che fondamentalemente coinvolge la diffusione a piccoli angoli da parte di molti atomi.

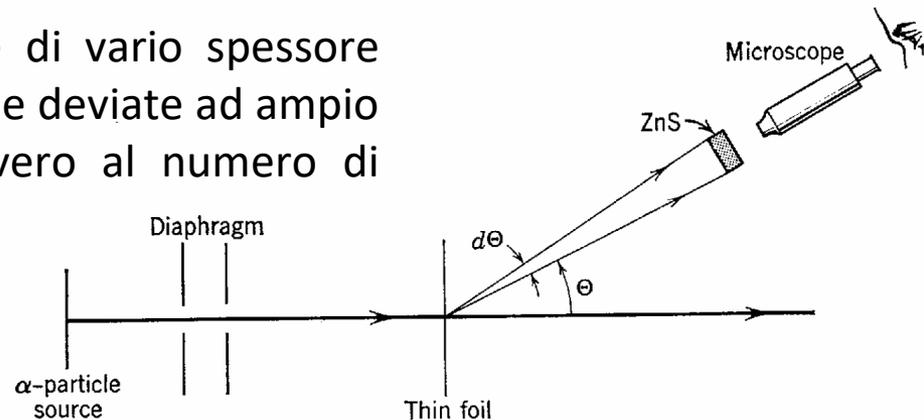
Per gli scienziati abituati a pensare in termini di questo modello è stata una grande sorpresa **osservare sperimentalmente che alcune particelle α venissero deviate di angoli molto ampi, fino a 180° .**

4.1 IL MODELLO DI THOMSON

4.1.2 L'esperimento di Rutherford

were deflected through very large angles, up to 180° . In Rutherford's words: "It was quite the most incredible event that ever happened to me in my life. It was as incredible as if you fired a 15-inch shell at a piece of tissue paper and it came back and hit you."

Altri esperimenti utilizzando lamine di vario spessore mostrarono che il numero di particelle deviate ad ampio angolo era proporzionale a N , ovvero al numero di atomi intercettati dalla particella α .



Questa è proprio la dipendenza da N attesa se ci fosse una piccola probabilità che una particella possa essere diffusa attraverso un ampio angolo in uno scattering con un singolo atomo.

Ciò non può essere spiegato utilizzando il modello dell'atomo di Thomson, e questo portò Rutherford nel 1911 a proporre un nuovo modello.

4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.1 Calcolo della distribuzione angolare delle particelle diffuse

Nel modello della struttura dell'atomo di Rutherford, si assume che tutta la carica positiva dell'atomo, e di conseguenza essenzialmente tutta la sua massa, sia concentrata in una piccola regione al centro chiamata nucleo.

Se le dimensioni del nucleo sono sufficientemente piccole, una particella che passa molto vicino ad esso può essere dispersa da una forte repulsione coulombiana e quindi con un ampio angolo rispetto alla direzione di incidenza.

Rutherford fece un calcolo dettagliato della distribuzione angolare prevista per la diffusione di particelle α da atomi del tipo proposto nel suo modello.

Nel suo modello trascurò la diffusione dovuta agli elettroni atomici. La diffusione è quindi dovuta solo alla forza repulsiva di Coulomb che agisce tra la particella carica positivamente e il nucleo carico positivamente.

Inoltre, considerò solo la diffusione da atomi pesanti, per consentire l'ipotesi che la massa del nucleo sia così grande rispetto a quella della particella α che il nucleo rimane pressoché immobile durante il processo di urto.

Ipotizzò inoltre che la particella α non penetri effettivamente nella regione nucleare, quindi la particella e il nucleo si comportano come cariche puntiformi per quanto riguarda la loro interazione coulombiana.

4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.1 Calcolo della distribuzione angolare delle particelle diffuse

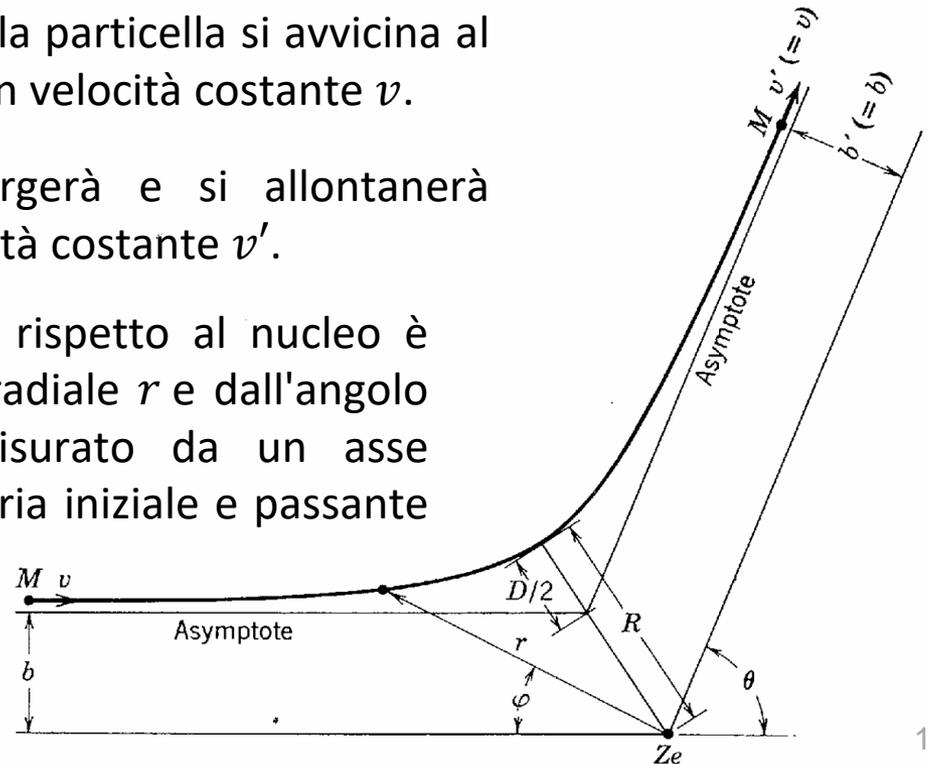
Il modello, infine, utilizza una meccanica non relativistica, poiché $v/c \sim 1/20$.

La Figura illustra la diffusione di una particella α di carica $+ze$ e massa M , nel passaggio vicino a un nucleo di carica $+Ze$. Il nucleo è fissato all'origine del sistema di coordinate.

Quando la particella è molto lontana dal nucleo, la forza di Coulomb su di essa è trascurabile per cui la particella si avvicina al nucleo percorrendo un tratto rettilineo con velocità costante v .

Dopo lo scattering, la particella emergerà e si allontanerà percorrendo un tratto rettilineo con velocità costante v' .

La posizione della particella rispetto al nucleo è specificata dalla coordinata radiale r e dall'angolo polare φ , quest'ultimo misurato da un asse parallelo alla linea di traiettoria iniziale e passante per il centro diffusore Ze .



4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.1 Calcolo della distribuzione angolare delle particelle diffuse

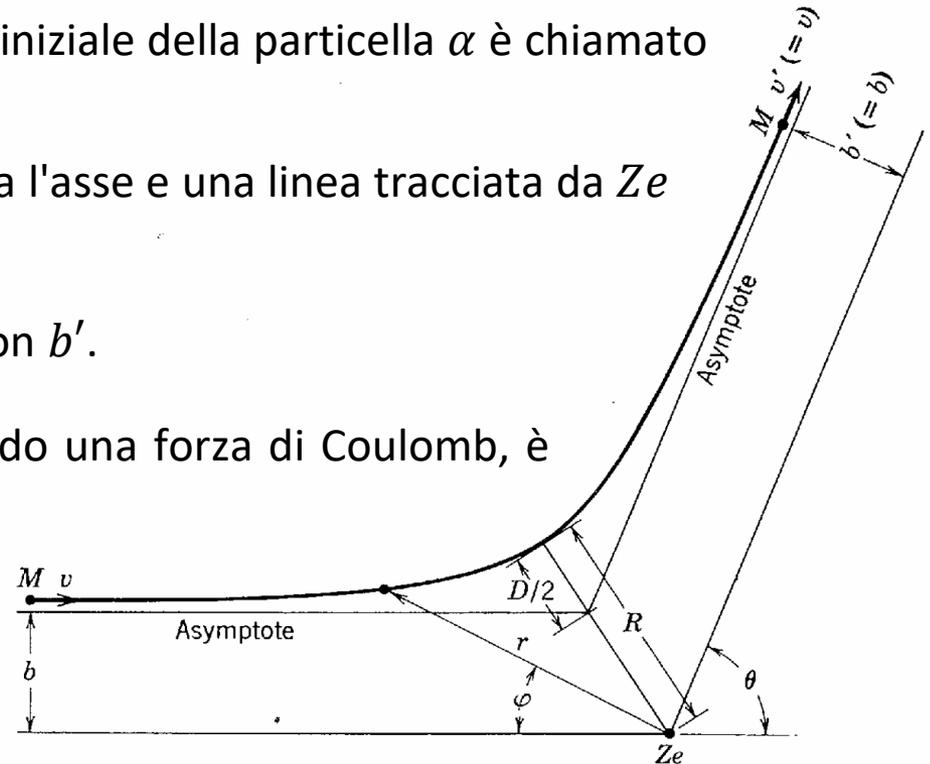
La distanza b tra questo asse e la traiettoria iniziale della particella α è chiamato parametro di impatto.

L'angolo di diffusione θ è proprio l'angolo tra l'asse e una linea tracciata da Ze e parallela alla linea di traiettoria finale.

La distanza tra queste due linee è indicata con b' .

La forza che agisce sulla particella α , essendo una forza di Coulomb, è sempre in direzione radiale.

Quindi il momento angolare della particella attorno all'origine ha un valore costante L .



Determiniamo la traiettoria della particella α a partire dalla legge di Newton $\vec{F} = m\vec{a}$.

Supponendo che agisca solo la forza coulombiana:

$$\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = M \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right]$$

4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.1 Calcolo della distribuzione angolare delle particelle diffuse

$$\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = M \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right]$$

in cui il termine di sinistra è la forza di Coulomb e i termini di destra sono:

- $\frac{d^2 r}{dt^2}$ è l'accelerazione radiale dovuta alla variazione del modulo di \vec{r}
- $-r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -\omega^2 r$ è l'accelerazione centripeta dovuta al cambiamento di direzione di \vec{r} .

Per determinare la traiettoria dobbiamo ottenere r in funzione di φ .

Introduciamo la coordinata $r = \frac{1}{u}$ e esprimiamo la $\frac{d^2 r}{dt^2}$ nella nuova coordinata u :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$

Introduciamo il momento angolare:

$$L = Mr^2 \omega = Mr^2 \frac{d\varphi}{dt}$$

4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.1 Calcolo della distribuzione angolare delle particelle diffuse

$$L = Mr^2\omega = Mr^2 \frac{d\varphi}{dt}$$

da cui:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{Mr^2} = \frac{Lu^2}{M}$$

$$r = \frac{1}{u}$$

Inoltre

$$\frac{dr}{du} = \frac{d}{du} \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{u^2}$$

Sostituendo:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \frac{Lu^2}{M} = -\frac{L}{M} \frac{du}{d\varphi}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$

La derivata seconda la scriviamo come:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dr}{dt} \right) \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{L}{M} \frac{d^2u}{d\varphi^2} \frac{Lu^2}{M} = -\frac{L^2 u^2}{M^2} \frac{d^2u}{d\varphi^2}$$

4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.1 Calcolo della distribuzione angolare delle particelle diffuse

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L^2u^2}{M^2} \frac{d^2u}{d\varphi^2}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Lu^2}{M}$$

$$r = \frac{1}{u}$$

$$\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0r^2} = M \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right]$$

Sostituendo nella legge di Newton:

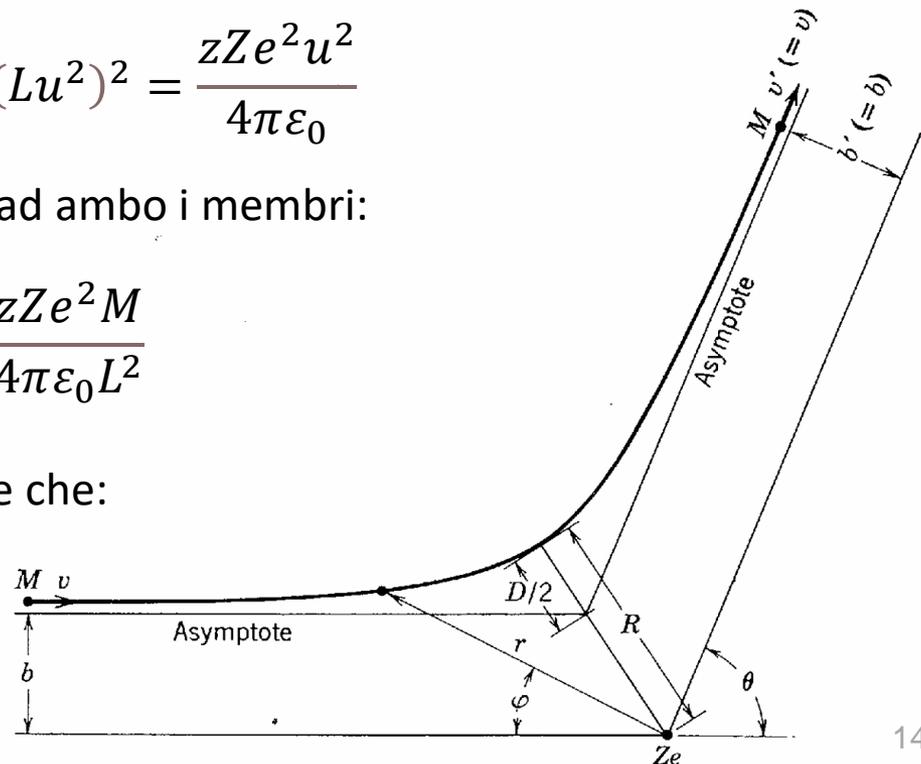
$$-\frac{L^2u^2}{M} \frac{d^2u}{d\varphi^2} - \frac{1}{M} \frac{1}{u} (Lu^2)^2 = \frac{zZe^2u^2}{4\pi\epsilon_0}$$

che possiamo riscrivere, semplificando u^2 ad ambo i membri:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{zZe^2M}{4\pi\epsilon_0L^2}$$

Dalla Figura si evince chiaramente che:

$$L = Mvb$$



4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.1 Calcolo della distribuzione angolare delle particelle diffuse

$$L = Mvb$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{zZe^2M}{4\pi\epsilon_0L^2}$$

Sostituendo:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0Mv^2b^2}$$

Poniamo $D = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0M\frac{v^2}{2}}$, e quindi:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{D}{2b^2}$$

È un'equazione differenziale al secondo ordine la cui soluzione generale è:

$$u = A\cos\varphi + B\sin\varphi - \frac{D}{2b^2}$$

com'è facile provare per sostituzione, con A e B costanti arbitrarie da determinare imponendo le giuste condizioni al contorno.

4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.1 Calcolo della distribuzione angolare delle particelle diffuse

$$u = A \cos \varphi + B \sin \varphi - \frac{D}{2b^2}$$

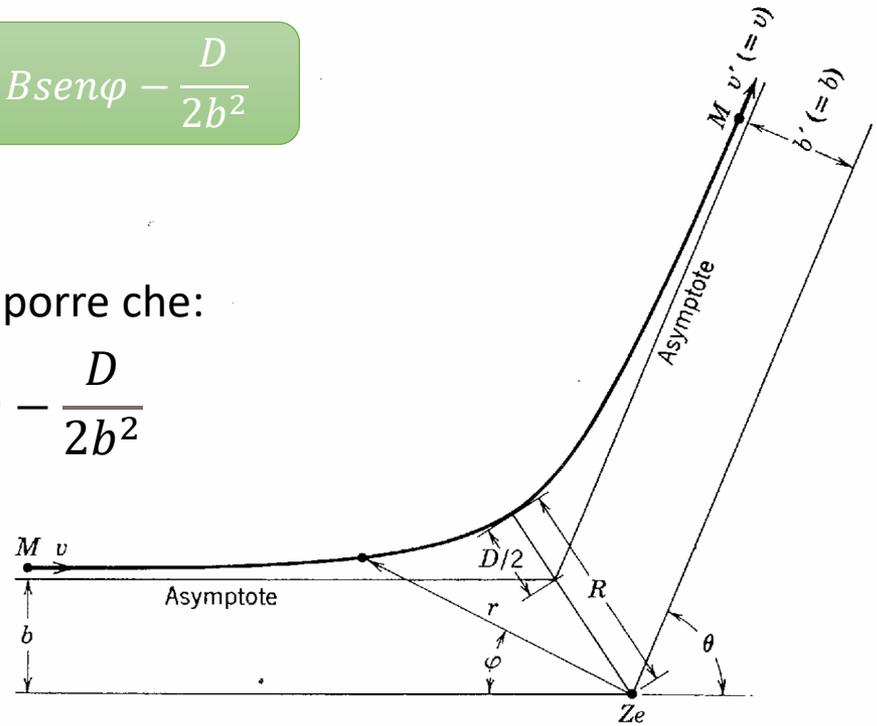
Nel nostro caso le condizioni da imporre sono:

1. Quando $r \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow 0$ che vuol dire imporre che:

$$u = \frac{1}{r} = 0 = A \cos 0 + B \sin 0 - \frac{D}{2b^2}$$

ovvero:
$$A = \frac{D}{2b^2}$$

2. Quando $r \rightarrow \infty$, $\frac{dr}{dt} \rightarrow -v$.



Questa è una diretta conseguenza della conservazione dell'energia cinetica prima e dopo l'urto, $\frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M v'^2$, da cui segue che $v = v'$.

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{L}{M} \frac{du}{d\varphi} = -v = -\frac{L}{M} (-A \sin 0 + B \cos 0)$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{L}{M} \frac{du}{d\varphi}$$

4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.1 Calcolo della distribuzione angolare delle particelle diffuse

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{L}{M} \frac{du}{d\varphi} = -v = -\frac{L}{M} (-A \sin\varphi + B \cos\varphi)$$

da cui:

$$B = \frac{Mv}{L} = \frac{Mv}{Mvb} = \frac{1}{b}$$

$$L = Mvb$$

$$u = A \cos\varphi + B \sin\varphi - \frac{D}{2b^2}$$

$$A = \frac{D}{2b^2}$$

$$B = \frac{1}{b}$$

Quindi la soluzione particolare sarà:

$$u = \frac{D}{2b^2} \cos\varphi + \frac{1}{b} \sin\varphi - \frac{D}{2b^2}$$

che possiamo riscrivere reintroducendo la variabile r :

$$r = \frac{1}{u}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \sin\varphi + \frac{D}{2b^2} (\cos\varphi - 1)$$

4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.1 Calcolo della distribuzione angolare delle particelle diffuse

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \operatorname{sen} \varphi + \frac{D}{2b^2} (\operatorname{cos} \varphi - 1)$$

Questa è l'equazione di un'iperbole in coordinate polari. Poniamo l'attenzione sul parametro:

$$D = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 M \frac{v^2}{2}}$$

Cosa rappresenta D ?

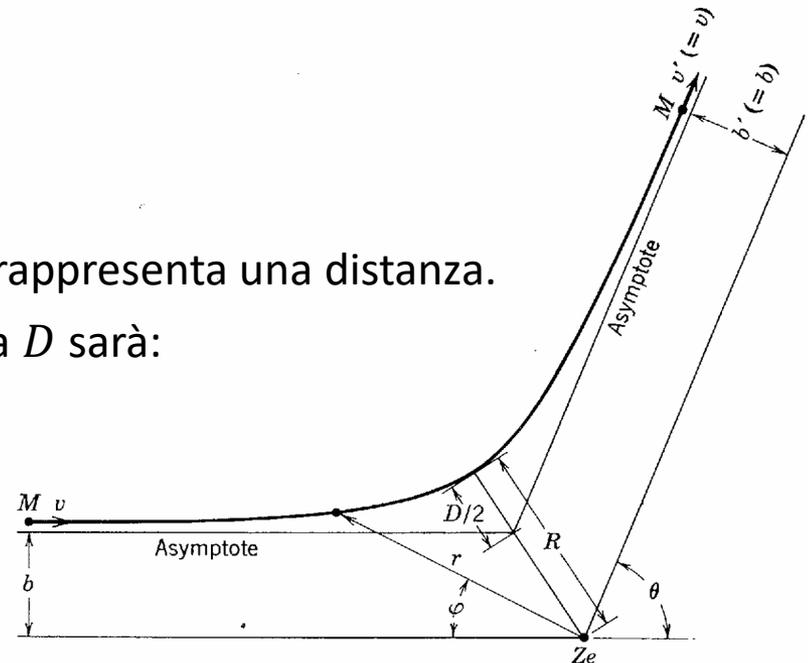
Notiamo subito che, da un'analisi dimensionale, D rappresenta una distanza.

L'energia potenziale della particella α alla distanza D sarà:

$$E_P(D) = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 D}$$

Se eguagliamo $E_P(D)$ con l'energia cinetica iniziale della particella α

$$\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 D} = M \frac{v^2}{2}$$



4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.1 Calcolo della distribuzione angolare delle particelle diffuse

$$\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 D} = M \frac{v^2}{2}$$

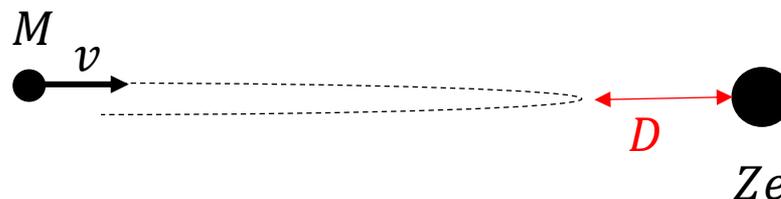
Risolvendola per D otteniamo proprio la definizione di D :

$$D = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 M \frac{v^2}{2}}$$

$$D = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 M \frac{v^2}{2}}$$

Quindi D rappresenta la distanza di massimo avvicinamento al nucleo in un urto frontale ($b = 0$), poiché D rappresenta proprio la distanza alla quale l'energia potenziale $\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 D}$ eguaglia l'energia cinetica iniziale $M \frac{v^2}{2}$.

Ad una distanza D dall'atomo, la particella si fermerebbe per poi invertire la direzione del moto.



4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.1 Calcolo della distribuzione angolare delle particelle diffuse

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \operatorname{sen} \varphi + \frac{D}{2b^2} (\cos \varphi - 1)$$

L'angolo di diffusione θ possiamo determinarlo utilizzando l'equazione dell'iperbole trovando il valore di φ per $r \rightarrow \infty$.

Quindi:

$$\frac{1}{b} \operatorname{sen} \varphi + \frac{D}{2b^2} (\cos \varphi - 1) = 0$$

ovvero:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{D}{2b} (1 - \cos \varphi)$$

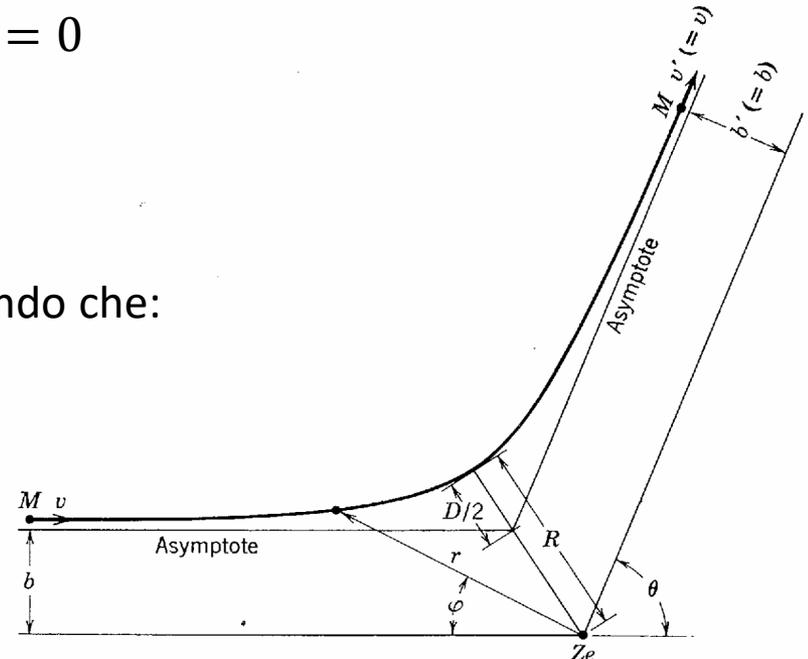
Notiamo dalla Figura che $\theta = \pi - \varphi$, e ricordando che:

$$\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen} \theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

si ha che:

$$\frac{2b}{D} = \frac{(1 + \cos \theta)}{\operatorname{sen} \theta}$$



4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.1 Calcolo della distribuzione angolare delle particelle diffuse

$$\frac{2b}{D} = \frac{(1 + \cos\theta)}{\sin\theta}$$

Elevando al quadrato ambo i membri e procedendo con i calcoli:

$$\left(\frac{2b}{D}\right)^2 = \frac{(1 + \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = \frac{(1 + \cos\theta)^2}{1 - \cos^2\theta} = \frac{(1 + \cos\theta)^2}{(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)} = \frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}$$

Ricordando la relazione trigonometrica:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}}$$

segue immediatamente che:

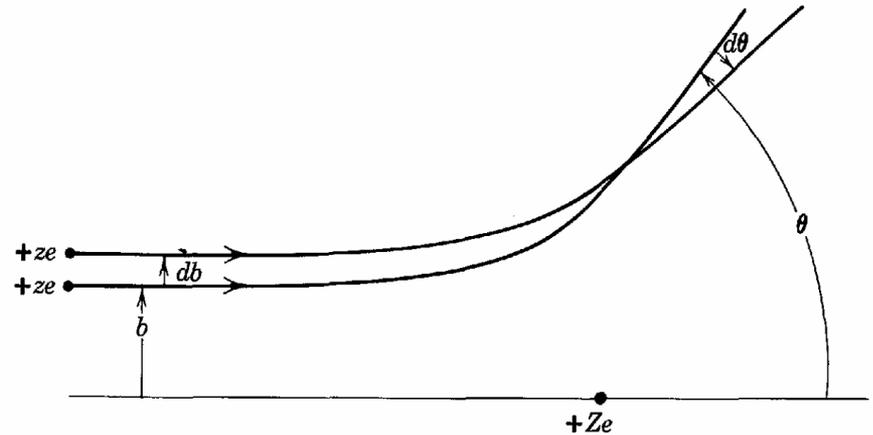
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2b}{D}$$

Da questa relazione si evince che nella diffusione di una particella α da parte di un singolo nucleo, ad un parametro di impatto compreso tra b e $b + db$ corrisponde un angolo di diffusione compreso tra θ e $\theta + d\theta$, dove la relazione tra b e θ è data proprio dall'equazione.

4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.1 Calcolo della distribuzione angolare delle particelle diffuse

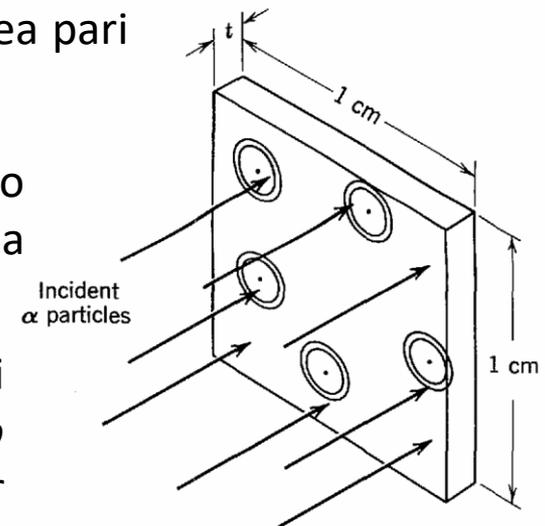
Ne segue che il problema di calcolare il numero di particelle α $N(\theta)d\theta$ a disperse nell'intervallo angolare $[\theta, \theta + d\theta]$ nell'attraversamento dell'intera lamina è quindi equivalente al problema di calcolare il numero di particelle α che incidono sulla lamina con parametro di impatto nell'intervallo $[b, b + db]$.



Consideriamo una sezione unitaria trasversale della lamina di area pari a 1 cm^2 e spessore t , come mostrato in Figura.

Indichiamo con un punto i nuclei e disegniamo un anello di raggio interno b e raggio esterno $b + db$ attorno a ciascun nucleo. L'area di ciascun anello sarà $2\pi b db$.

Indichiamo con ρt il numero di anelli contenuti nella sezione di lamina considerata, essendo ρ il numero di nuclei contenuti nella lamina per unità di volume.

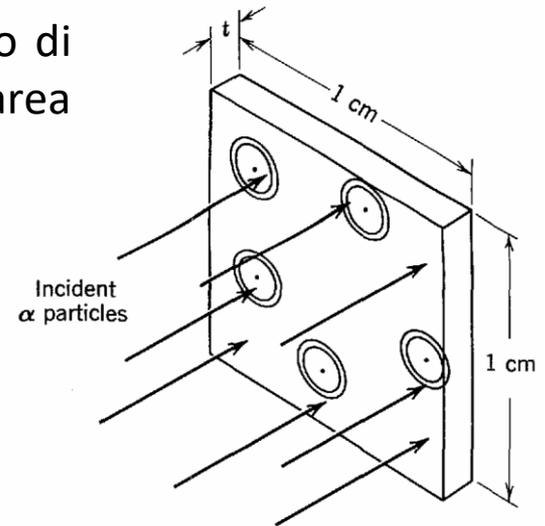


4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.1 Calcolo della distribuzione angolare delle particelle diffuse

La probabilità $P(b)db$ che una particella α passi attraverso uno di questi anelli è uguale all'area totale coperta dagli anelli diviso l'area totale della sezione considerata, che è unitaria.

Assumiamo che la lamina sia sufficientemente sottile da poter ignorare la sovrapposizione di anelli di nuclei diversi. In questa approssimazione, possiamo considerare ogni processo di diffusione come un urto con un singolo atomo e assumere trascurabile la probabilità di diffusione da parte di più di un nucleo.



Quindi, essendo l'area della sezione di lamina considerata unitaria, possiamo scrivere:

$$P(b)db = \rho t 2\pi b db$$

$2\pi b db$ area di ciascun anello
 ρt il numero di anelli

Dalla relazione precedente abbiamo che:

$$b = \frac{D}{2} \text{ctg} \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

$$\text{ctg} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{2b}{D}$$

4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.1 Calcolo della distribuzione angolare delle particelle diffuse

$$b = \frac{D}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

Ricordando la relazione trigonometrica:

$$d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$db = -\frac{D}{2} \frac{d \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}$$

Sostituendo:

$$P(b)db = \rho t 2\pi b db$$

$$P(b)db = -2\pi\rho t \frac{D}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \frac{D}{2} \frac{d \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} = -2\pi\rho t \frac{D^2}{8} \frac{\cos \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\operatorname{sen}^3 \left(\frac{\theta}{2} \right)} d\theta$$

Il passo successivo sarà riscrivere il numeratore $\cos \left(\frac{\theta}{2} \right)$ in maniera differente.

4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.1 Calcolo della distribuzione angolare delle particelle diffuse

$$P(b)db = -2\pi\rho t \frac{D^2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{8 \operatorname{sen}^3\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta$$

Usiamo le relazioni trigonometriche:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}} \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sqrt{\frac{1 - \cos^2\theta}{4}} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

Sostituendo:
$$P(b)db = -\frac{\pi}{8}\rho t D^2 \operatorname{sen}\theta \frac{1}{\operatorname{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta$$

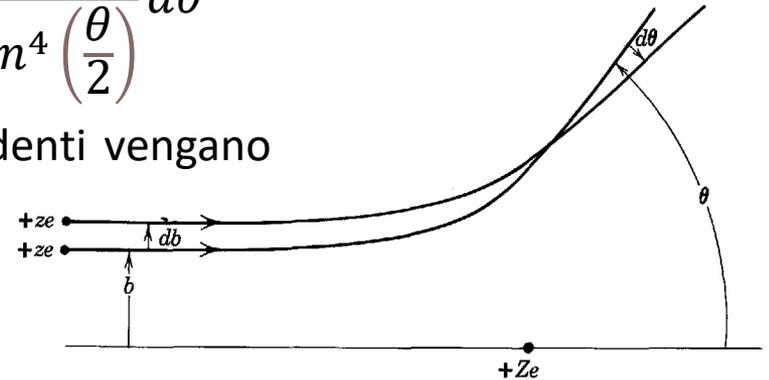
4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.1 Calcolo della distribuzione angolare delle particelle diffuse

$$P(b)db = -\frac{\pi}{8}\rho t D^2 \operatorname{sen}\theta \frac{1}{\operatorname{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta$$

che rappresenta la probabilità che le particelle incidenti vengano disperse nell'intervallo angolare tra θ e $\theta + d\theta$.

Il segno meno indica che ad una diminuzione di b , cioè $-db$, corrisponde un aumento di θ , cioè $+d\theta$.



Reintroducendo Φ , l'angolo di diffusione nel passaggio attraverso l'intera lamina di spessore t , definendo I il numero totale di particelle α che attraversano la lamina :

$$\frac{N(\Phi)d\Phi}{I} = -P(b)db = \frac{\pi}{8}\rho t D^2 \frac{\operatorname{sen}\Phi}{\operatorname{sen}^4\left(\frac{\Phi}{2}\right)} d\Phi$$

Sostituendo l'espressione di D :

$$N(\Phi)d\Phi = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{zZe^2}{2Mv^2}\right)^2 \frac{I\rho t 2\pi \operatorname{sen}\Phi}{\operatorname{sen}^4\left(\frac{\Phi}{2}\right)} d\Phi$$

$$D = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 M \frac{v^2}{2}}$$

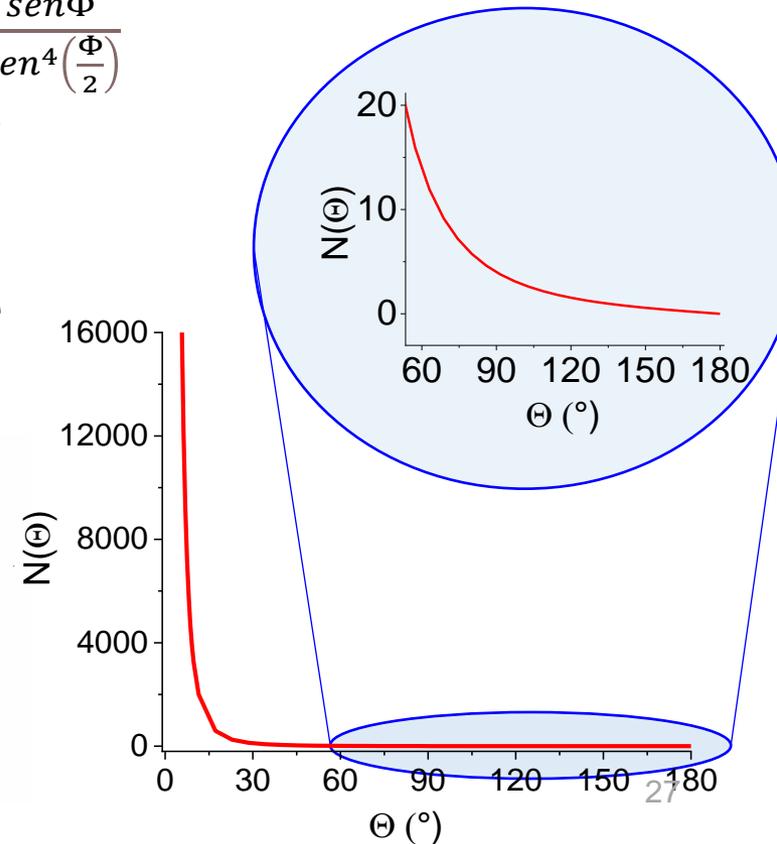
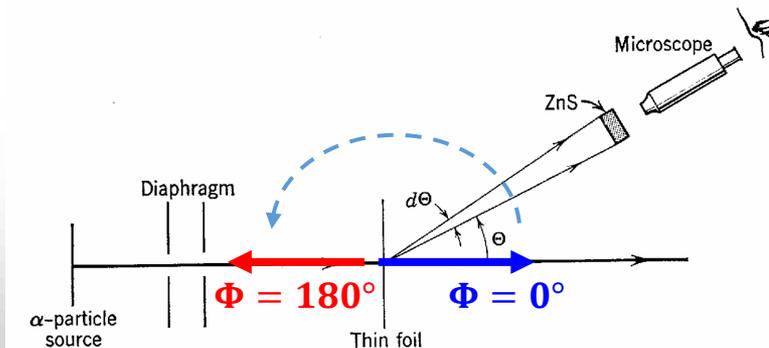
4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.2 Confronto tra modello di Rutherford e modello di Thomson

$$N(\Phi)d\Phi = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{zZe^2}{2Mv^2}\right)^2 \frac{I\rho t 2\pi \text{sen}\Phi}{\text{sen}^4\left(\frac{\Phi}{2}\right)} d\Phi$$

Grafichiamo l'andamento del fattore angolare $N(\Phi) \propto \frac{\text{sen}\Phi}{\text{sen}^4\left(\frac{\Phi}{2}\right)}$

Se confrontiamo il risultato dell'atomo di Rutherford con il risultato dell'atomo di Thomson, vediamo che sebbene il fattore angolare diminuisca rapidamente con l'aumentare dell'angolo, esiste una probabilità finita affinché lo scattering avvenga anche per grandi angoli.



4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.2 Confronto tra modello di Rutherford e modello di Thomson

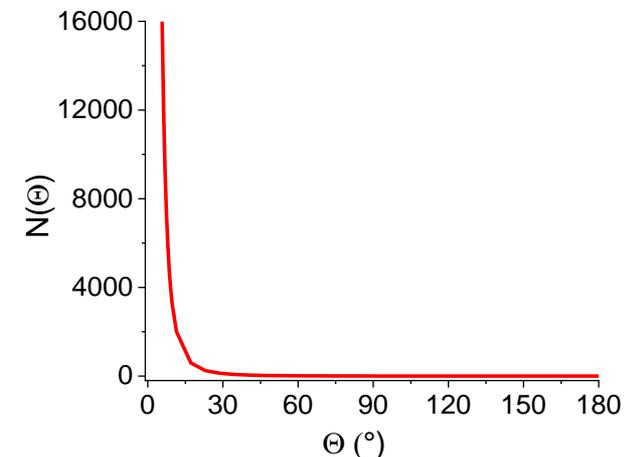
$$N(\Phi)d\Phi = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{zZe^2}{2Mv^2}\right)^2 \frac{I\rho t 2\pi \sin\Phi}{\sin^4\left(\frac{\Phi}{2}\right)} d\Phi$$

Altri esperimenti furono eseguiti da Geiger e Marsden entro pochi mesi dalla derivazione della dipendenza angolare di $N(\Phi)$.

I principali risultati che ottennero sono:

1. Conferma della dipendenza angolare utilizzando lamine di Ag e Au, nell'intervallo angolare compreso tra 5° e 150° .

Sebbene $N(\Phi)d\Phi$ vari di circa cinque ordini di grandezza in questo intervallo, i dati sperimentali sono rimasti proporzionali alla distribuzione angolare teorica entro pochi punti percentuali.



2. Proporzionalità tra $N(\Phi)d\Phi$ e lo spessore t della lamina.

4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.2 Confronto tra modello di Rutherford e modello di Thomson

$$N(\Phi)d\Phi = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{zZe^2}{2Mv^2}\right)^2 \frac{I\rho t 2\pi \sin\Phi}{\sin^4\left(\frac{\Phi}{2}\right)} d\Phi$$

3. Proporzionalità inversa tra il numero di particelle α e il quadrato della loro energia cinetica, $M \frac{v^2}{2}$. Questo fu verificato utilizzando particelle provenienti da diverse sorgenti radioattive e la dipendenza energetica prevista è stata confermata sperimentalmente su una variazione di energia disponibile di circa un fattore 3.

4. Proporzionalità tra $N(\Phi)d\Phi$ e il fattore Ze^2 , il quadrato della carica nucleare. All'epoca Z non era noto per i vari atomi. L'esperimento fu utilizzato per determinare per la prima volta Z , scoprendo che era uguale al numero atomico degli atomi bersaglio. Ciò implicava che il primo atomo nella tavola periodica, H, conteneva un elettrone, il secondo atomo, He, conteneva due elettroni, il terzo atomo, Li, ne conteneva tre, ecc., poiché Z è anche il numero di elettroni in un atomo neutro.

4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

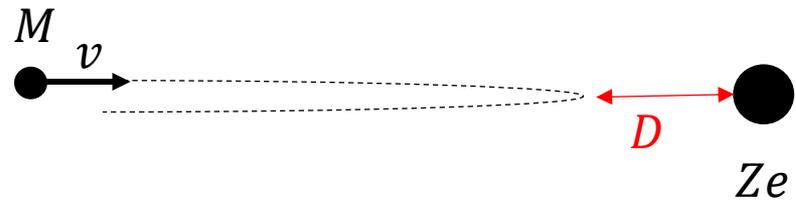
4.2.2 Confronto tra modello di Rutherford e modello di Thomson

Con il suo modello confermato, Rutherford riuscì a porre un limite superiore alla dimensione di un nucleo.

La distanza di avvicinamento D più vicina deve essere il valore più piccolo che può assumere R , ovvero R in corrispondenza di $\Phi = 180^\circ$.

Quindi:

$$R_{180^\circ} = D = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 M \frac{v^2}{2}}$$



Il raggio del nucleo non può essere maggiore di D perché il modello si basa sul presupposto che la forza che agisce sulla particella α è una forza di Coulomb tra due cariche puntiformi.

Questa ipotesi non sarebbe vera se la particella penetrasse nella regione nucleare in corrispondenza distanza di massimo avvicinamento.

4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.3 La sezione d'urto differenziale di Rutherford

La formula di diffusione di Rutherford è solitamente espressa in termini di una sezione d'urto differenziale $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.

Questa quantità è definita come il numero dN di particelle α disperse in un angolo solido $d\Omega$ in corrispondenza di un angolo di diffusione Φ :

$$dN = \frac{d\sigma}{d\Omega} I n d\Omega$$

I numero totale di particelle α che attraversano la lamina

dove $n = \rho t$ è il numero di nuclei bersaglio per centimetro quadro.

Questa definizione è una diretta conseguenza della definizione di sezione d'urto introdotta, per esempio, per l'effetto fotoelettrico:

$$N_{PE} = \sigma_{PE} I n$$

N_{PE} di fotoni assorbiti per effetto fotoelettrico
 I numero di fotoni incidenti su una lastra
 n atomi per unità di area contenuti nella lastra

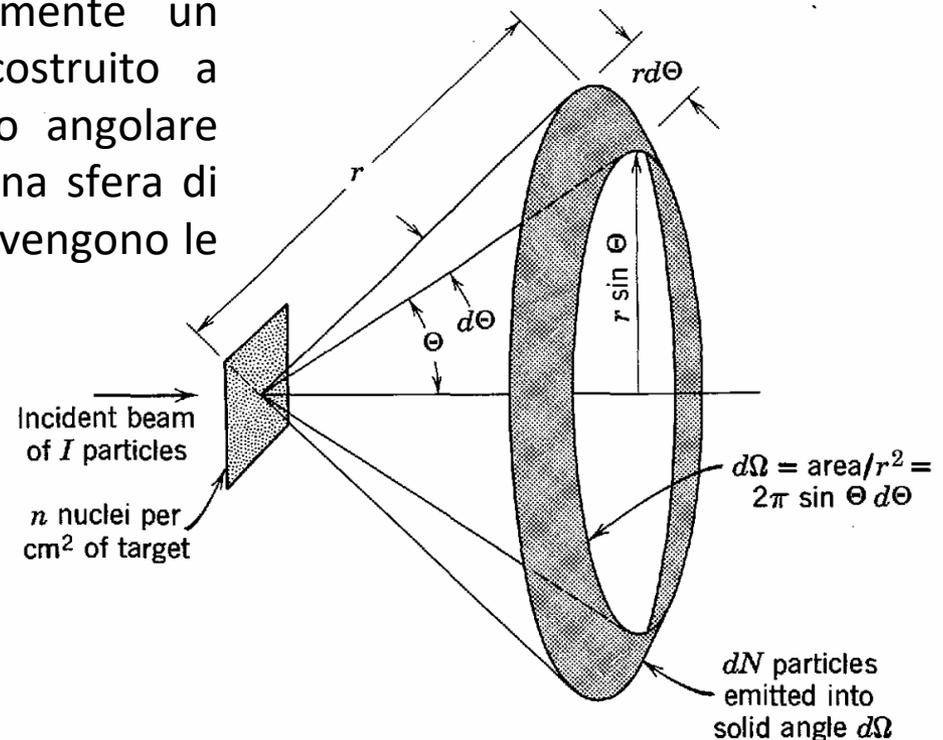
Il concetto di sezione d'urto differenziale è rappresentato nella Figura seguente:

4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.3 La sezione d'urto differenziale di Rutherford

L'angolo solido $d\Omega$, che è essenzialmente un intervallo angolare bidimensionale, è costruito a partire dall'area individuata dall'intervallo angolare che a sua volta è costruito a partire da una sfera di raggio unitario centrata sul punto in cui avvengono le diffusioni.

Per lo scattering Rutherford, che è simmetrico rispetto all'asse parallelo al fascio incidente, siamo interessati all'angolo solido $d\Omega$ corrispondente a tutti gli eventi in cui l'angolo di scattering è compreso tra $[\Phi, \Phi + d\Phi]$.



Per definizione, sappiamo che l'angolo solido $d\Omega$ sotteso da una porzione della superficie della sfera (colorata in grigio in figura) è pari al rapporto tra la sua superficie dS e r^2 :

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$

4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.3 La sezione d'urto differenziale di Rutherford

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$

Dalla Figura è facile verificare che dS possiamo esprimerlo come il prodotto tra la circonferenza blu di raggio $r \sin \Phi$ per lo spessore $rd\Phi$:

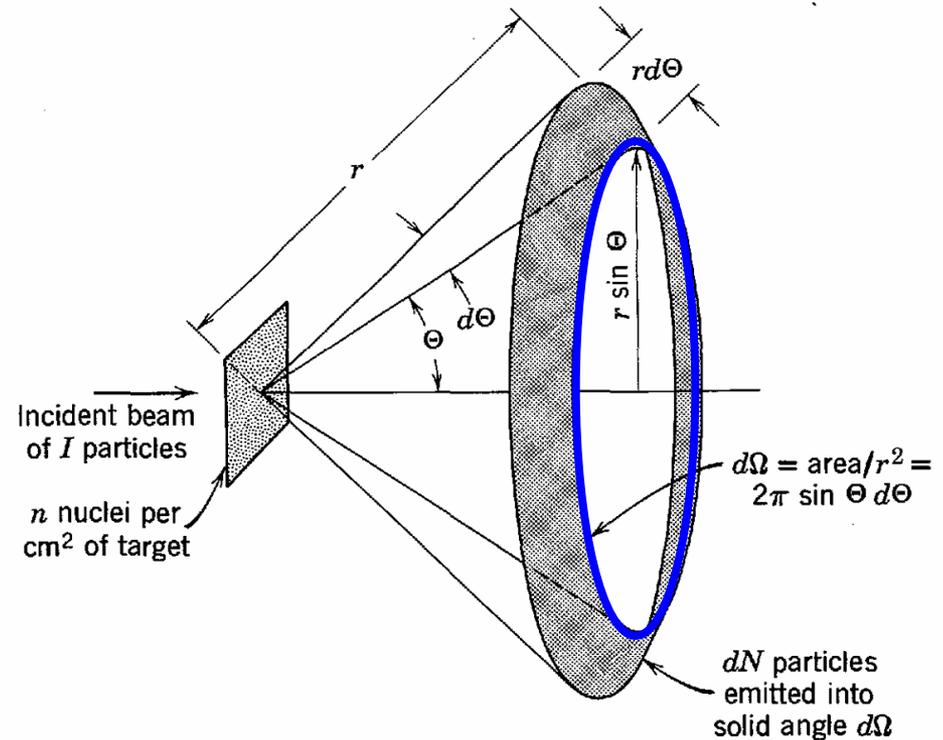
$$dS = 2\pi r \sin \Phi rd\Phi = 2\pi r^2 \sin \Phi d\Phi$$

Quindi l'angolo solido $d\Omega$ sarà:

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{2\pi r^2 \sin \Phi d\Phi}{r^2} = 2\pi \sin \Phi d\Phi$$

da cui:

$$d\Phi = \frac{d\Omega}{2\pi \sin \Phi}$$



4.2 IL MODELLO DI RUTHERFORD

4.2.3 La sezione d'urto differenziale di Rutherford

$$d\Phi = \frac{d\Omega}{2\pi \sin\Phi}$$

Possiamo adesso esprimere la distribuzione angolare delle particelle diffuse in termini dell'angolo solido, scrivendo $N(\Phi)d\Phi$ come dN :

$$N(\Phi)d\Phi = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{zZe^2}{2Mv^2}\right)^2 \frac{I\rho t 2\pi \sin\Phi}{\sin^4\left(\frac{\Phi}{2}\right)} d\Phi$$

$$dN = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{zZe^2}{2Mv^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\Phi}{2}\right)} I n d\Omega$$

$$n = \rho t$$

Confrontandola con la definizione di $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ otteniamo la sezione d'urto differenziale di Rutherford:

$$dN = \frac{d\sigma}{d\Omega} I n d\Omega$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{zZe^2}{2Mv^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\Phi}{2}\right)}$$

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.1 La stabilità del nucleo

Le dettagliate verifiche sperimentali delle previsioni del modello dell'atomo di Rutherford lasciò poco spazio a dubbi riguardo alla validità del modello. Al centro dell'atomo c'è un nucleo la cui massa è approssimativamente quella dell'intero atomo e la cui carica è uguale al numero atomico Z moltiplicata per la carica dell'elettrone; attorno a questo nucleo esistono elettroni Z , che neutralizzano l'atomo nel suo insieme.

Con questa postulazione emergono però seri interrogativi sulla stabilità di un simile atomo.

Se assumiamo, ad esempio, che gli elettroni nell'atomo siano stazionari, non esiste una disposizione stabile degli elettroni che impedisca agli elettroni di cadere nel nucleo sotto l'influenza della sua attrazione di Coulomb.

Non possiamo permettere che l'atomo collassi perché allora il suo raggio sarebbe dell'ordine del raggio del nucleo, che è quattro ordini di grandezza più piccolo del raggio dell'atomo, come verificato da diversi esperimenti.

A prima vista sembra che possiamo semplicemente permettere agli elettroni di circolare attorno al nucleo in orbite simili alle orbite dei pianeti che circolano attorno al sole. Un tale sistema può essere stabile meccanicamente, come lo è il sistema solare.

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.1 La stabilità del nucleo

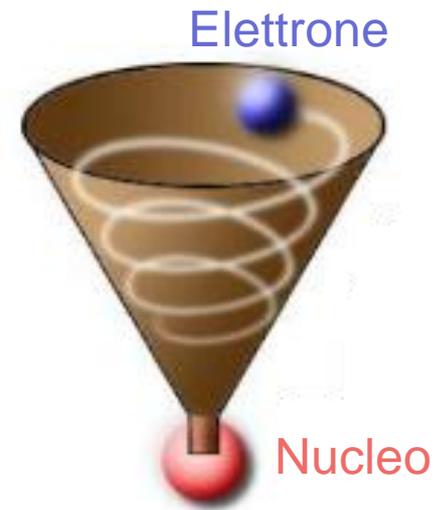
Sorge però una seria difficoltà nel cercare di trasferire questa idea dal sistema planetario al sistema atomico.

Il problema è che gli elettroni carichi accelererebbero costantemente nel loro movimento attorno al nucleo e, secondo la teoria elettromagnetica classica, tutti i corpi carichi in accelerazione irradiano energia sotto forma di radiazione elettromagnetica.

L'energia verrebbe emessa a scapito dell'energia meccanica dell'elettrone, e l'elettrone spiralizzerebbe fino ad impattare sul nucleo, perdendo tutta la sua energia.

Ancora una volta abbiamo un atomo che collasserebbe!

Inoltre, lo spettro continuo della radiazione che verrebbe emessa in questo processo non è in accordo con lo spettro di radiazione discreto emesso dagli atomi.



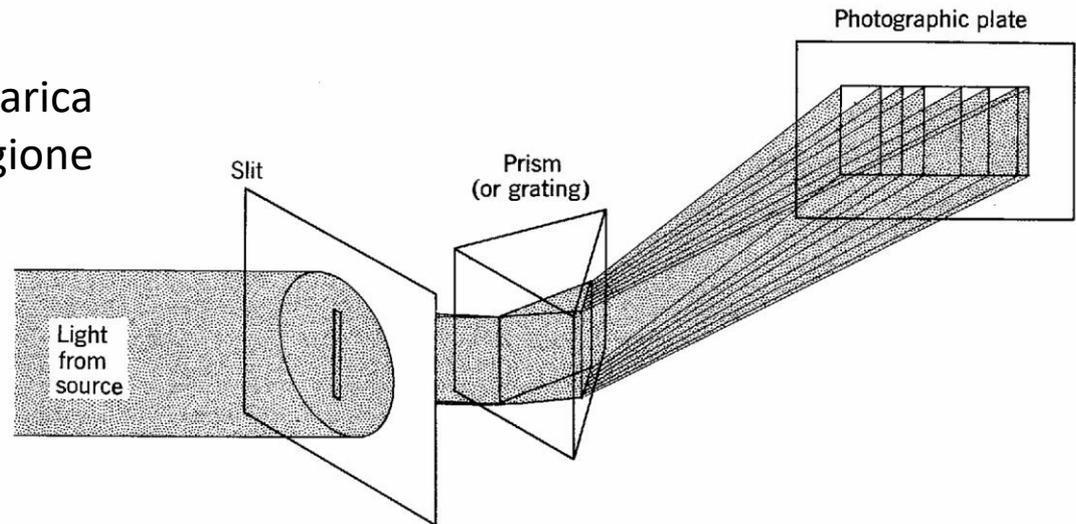
4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.2 Gli spettri atomici

Un tipico apparato utilizzato per misurare l'emissione degli spettri atomici è rappresentato in Figura.

La sorgente è costituita da una scarica elettrica che attraversa una regione contenente un gas monoatomico.

Gli atomi investiti dalla scarica assorbono energia in eccesso e si portano in uno stato eccitato.



Tali atomi eccitati cedono la loro energia in eccesso per ritornare allo stato iniziale emettendo radiazioni elettromagnetiche.

Questa radiazione viene collimata da una fenditura prima di raggiungere un prisma (o reticolo di diffrazione per una migliore risoluzione).

Essendo un elemento disperdente, il prisma devierà le diverse componenti cromatiche del fascio incidente lungo direzioni angolari diversi, che impatteranno su una lastra fotografica.

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.2 Gli spettri atomici

Sulla lastra possiamo osservare la natura degli spettri atomici.



A differenza dello spettro continuo della radiazione elettromagnetica emessa, ad esempio, da un corpo nero all'equilibrio termico, la radiazione elettromagnetica emessa dagli atomi liberi è concentrata in un numero discreto di lunghezze.

Ognuna di queste componenti della lunghezza d'onda viene chiamata linea a causa della linea (l'immagine della fenditura) che produce sulla lastra. L'analisi degli spettri emessi da diversi tipi di atomi mostra che ogni tipo di atomi ha il proprio spettro caratteristico, cioè un insieme caratteristico di lunghezze d'onda in cui si trovano le linee dello spettro.

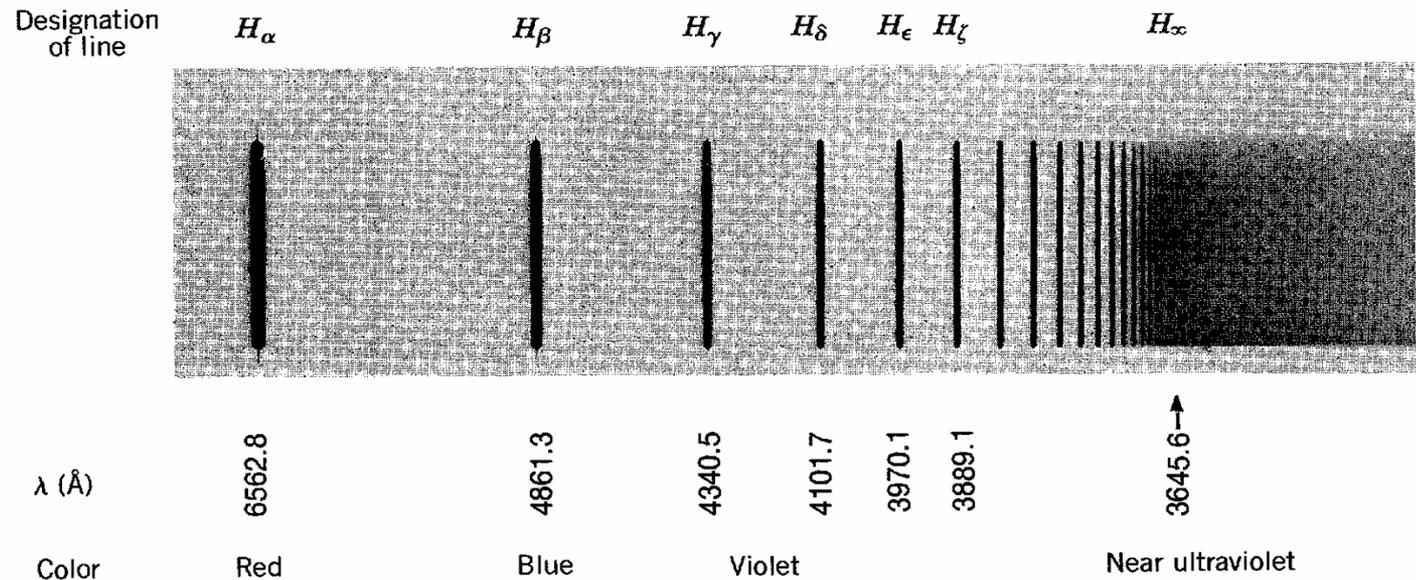
Questa caratteristica è della massima importanza perché rende la spettroscopia un'utile aggiunta alle consuete tecniche di analisi chimica. Per questo motivo furono dedicati molti sforzi alla misura accurata degli spettri atomici e, in effetti, furono necessari molti sforzi perché gli spettri consistevano di molte centinaia di righe, a volte difficile da separare.

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.2 Gli spettri atomici

Tuttavia, lo spettro dell'idrogeno era relativamente semplice. Ciò forse non sorprende poiché l'idrogeno, che contiene un solo elettrone, è di per sé l'atomo più semplice.

La Figura mostra lo spettro atomico dell'idrogeno misurato nell'intervallo spettrale del visibile.



Osserviamo che la spaziatura, in lunghezze d'onda, tra linee adiacenti dello spettro diminuisce progressivamente al diminuire della lunghezza d'onda delle linee, così che la serie di linee converge al cosiddetto limite della serie a 3645.6 Å.

4.3 IL MODELLO DI BOHR

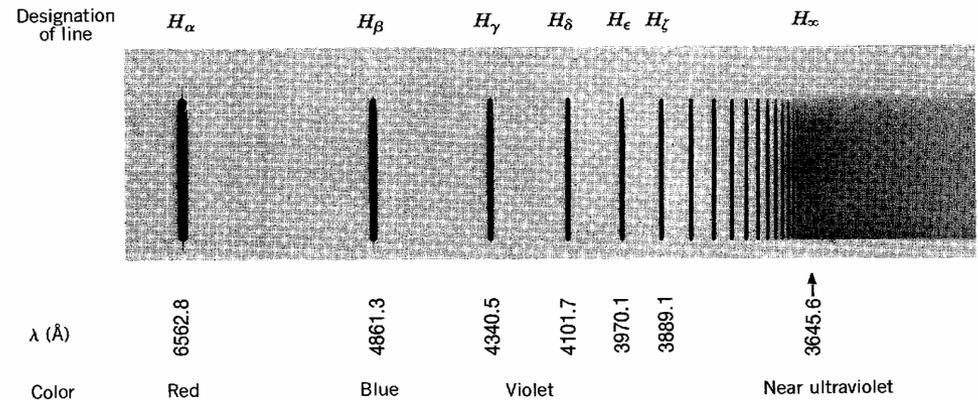
4.3.2 Gli spettri atomici

Questa regolarità dello spettro H ha indotto molte persone a cercare una formula empirica che rappresentasse la lunghezza d'onda della serie di linee.

Tale formula fu postulata nel 1885 da **Balmer**. Scopri che la serie di linee era rappresentabile con la seguente formula:

$$\lambda = 3646 \frac{n^2}{n^2 - 4}$$

dove $n = 3$ per H_α , $n = 4$ per H_β ,
 $n = 5$ per H_γ , ecc.



Con questa ricostruzione fenomenologica, Balmer riuscì a predire la lunghezza d'onda delle prime nove linee della serie, che erano tutto ciò che si conosceva all'epoca, con un'accuratezza migliore di una parte su 1000.

Questa scoperta avviò la ricerca di formule empiriche simili da applicare a serie di righe che talvolta possono essere identificate nella complicata distribuzione di righe che costituiscono gli spettri di altri elementi.

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.2 Gli spettri atomici

La maggior parte di questo lavoro fu svolto intorno al 1890 da **Rydberg**, che trovò conveniente trattare il reciproco della lunghezza d'onda delle linee, ovvero numero d'onda κ . In termini di κ è possibile scrivere la formula di Balmer come:

$$\frac{1}{\lambda} = \kappa = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\lambda = 3646 \frac{n^2}{n^2 - 4}$$

con $n = 3, 4, 5 \dots$ e R_H nota come costante di Rydberg per l'atomo di idrogeno ed è pari a:

$$R_H = 10967757.6 \pm 1.2 \text{ m}^{-1}$$

Formule di questo tipo furono trovate per numerose serie.

Ad esempio, ora sappiamo dell'esistenza di cinque serie di righe nello spettro dell'idrogeno, riassunte in Tabella:

Table 4-1 The Hydrogen Series

| Names | Wavelength Ranges | Formulas |
|----------|------------------------------|--|
| Lyman | Ultraviolet | $\kappa = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 2, 3, 4, \dots$ |
| Balmer | Near ultraviolet and visible | $\kappa = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 3, 4, 5, \dots$ |
| Paschen | Infrared | $\kappa = R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 4, 5, 6, \dots$ |
| Brackett | Infrared | $\kappa = R_H \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 5, 6, 7, \dots$ |
| Pfund | Infrared | $\kappa = R_H \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 6, 7, 8, \dots$ |

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.3 I postulati di Bohr

Tutte queste caratteristiche degli spettri atomici, e molte altre che non abbiamo discusso, devono essere spiegate da qualunque sia il modello riuscito che descriva la struttura dell'atomo.

Inoltre, l'altissima precisione delle misurazioni spettroscopiche impone severi requisiti sull'accuratezza con cui un tale modello deve essere in grado di prevedere le caratteristiche quantitative degli spettri.

Nel 1913 Niels Bohr sviluppò un modello che era in accurato accordo quantitativo con alcuni dati spettroscopici (ad esempio, lo spettro dell'idrogeno).

Il modello dell'atomo di Bohr si fonda a partire da 4 postulati:

1. Un elettrone in un atomo si muove in un'orbita circolare attorno al nucleo sotto l'influenza dell'attrazione di Coulomb tra elettrone e nucleo, obbedendo alle leggi della meccanica classica.

Il primo postulato pone l'esistenza del nucleo atomico.

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.3 I postulati di Bohr

2. Invece dell'infinità di orbite che sarebbero possibili nella meccanica classica, un elettrone può percorrere solo orbite per le quali il suo momento angolare orbitale L è un multiplo intero di \hbar , ovvero la costante di Planck divisa per 2π .

Il secondo postulato introduce la quantizzazione del momento angolare orbitale di un elettrone atomico che si muove sotto l'influenza di una forza di natura coulombiana:

$$L = n\hbar \quad \text{con } n = 1,2,3..$$

3. Nonostante sia in costante accelerazione, un elettrone che si muove in un'orbita così consentita non irradia energia elettromagnetica. Pertanto, la sua energia totale E rimane costante.

Il terzo postulato rimuove il problema della stabilità di un elettrone in moto lungo un'orbita circolare, a causa dell'emissione della radiazione elettromagnetica richiesta all'elettrone dalla teoria classica, postulando che questa caratteristica della teoria classica non vale per l'elettrone atomico.

Il postulato si basava sull'evidenza sperimentale che gli atomi sono stabili, anche se ciò non è previsto dalla teoria classica.

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.3 I postulati di Bohr

4. La radiazione elettromagnetica viene emessa se un elettrone, inizialmente muovendosi su un'orbita di energia totale E_i , cambia discontinuamente il suo moto per raggiungere un'orbita di energia totale E_f . La frequenza ν della radiazione emessa è uguale alla quantità $(E_i - E_f)$ divisa per la costante di Planck h .

Il quarto postulato è in realtà proprio il postulato di Einstein secondo cui la frequenza di un fotone della radiazione elettromagnetica è uguale all'energia trasportata dal fotone divisa per la costante di Planck.

La giustificazione dei postulati di Bohr, o in generale di qualsiasi insieme di postulati, può essere trovata solo confrontando le previsioni che possono essere derivate dai postulati con i risultati dell'esperimento.

Consideriamo un atomo costituito da un nucleo di carica $+Ze$ e massa M , e un singolo elettrone di carica $-e$ e massa m . Per un atomo di idrogeno neutro $Z = 1$, per un atomo di elio ionizzato singolarmente $Z = 2$, per un atomo di litio doppiamente ionizzato $Z = 3$, ecc.

Assumiamo che l'elettrone ruoti su un'orbita circolare attorno al nucleo. 44

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.3 I postulati di Bohr

Supponiamo inoltre che la massa dell'elettrone sia del tutto trascurabile rispetto alla massa del nucleo, e di conseguenza assumiamo che il nucleo rimanga fisso nello spazio.

Applichiamo la seconda legge di Newton, imponendo che la forza di Coulomb che agisce sull'elettrone sia pari a ma , dove a è l'accelerazione centripeta dell'elettrone sulla sua orbita circolare:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

dove v è la velocità dell'elettrone.

Ora, il momento angolare orbitale dell'elettrone, $L = mvr$, deve essere costante, perché la forza che agisce sull'elettrone è di tipo centrale, e quindi interamente radiale.

Applicando la condizione di quantizzazione a L (secondo postulato di Bohr) abbiamo che:

$$mvr = n\hbar$$

$$L = n\hbar$$

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.3 I postulati di Bohr

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$mvr = n\hbar$$

Combiniamo le due espressioni:

$$Ze^2 = 4\pi\epsilon_0 m v^2 r = 4\pi\epsilon_0 \frac{m^2 v^2 r^2}{mr} = 4\pi\epsilon_0 \frac{n^2 \hbar^2}{mr}$$

da cui ricaviamo il raggio dell'orbita dell'elettrone:

$$r = 4\pi\epsilon_0 \frac{n^2 \hbar^2}{mZe^2}$$

ed anche la sua velocità:

$$v = \frac{n\hbar}{mr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{n\hbar}$$

Calcoliamo l'energia totale di un elettrone atomico che si muove su una delle orbite consentite.

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.3 I postulati di Bohr

Definiamo l'energia potenziale pari a zero quando l'elettrone è infinitamente distante dal nucleo.

Allora l'energia potenziale V a qualsiasi distanza finita r può essere ottenuta integrando il lavoro che verrebbe compiuto dalla forza di Coulomb agente da r a ∞ . Quindi:

$$V = - \int_r^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r'^2} dr' = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r'} \Big|_r^{\infty} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

L'energia potenziale è negativa perché la forza di Coulomb è attrattiva; in altre parole, occorre compiere un lavoro per spostare l'elettrone da r all'infinito.

L'energia cinetica K dell'elettrone può essere valutata a partire dalla legge di Newton

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 2r}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

E quindi l'energia totale dell'elettrone sarà:

$$E = K + V = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 2r} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 2r} = -K$$

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.3 I postulati di Bohr

$$E = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 2r}$$

$$r = 4\pi\epsilon_0 \frac{n^2 \hbar^2}{mZe^2}$$

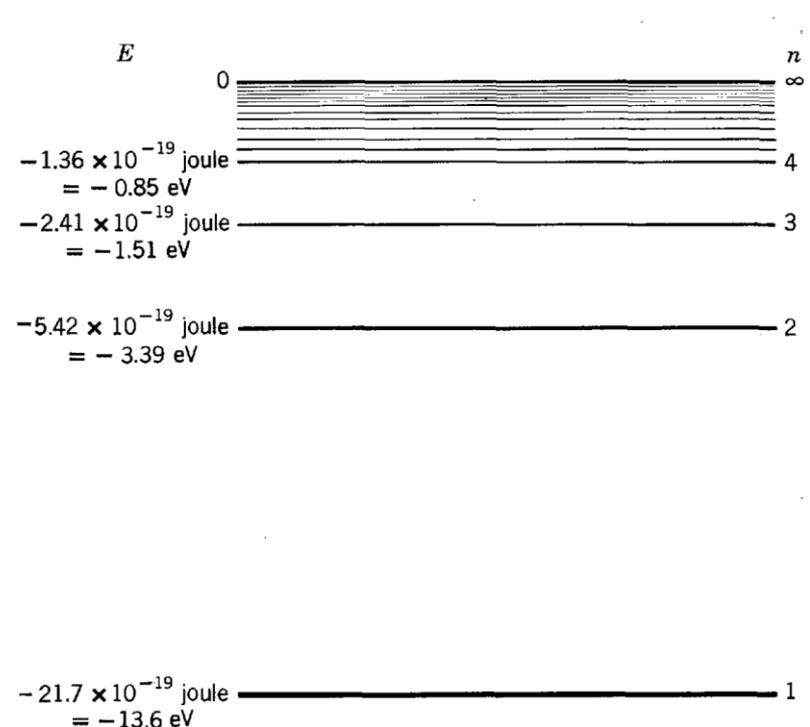
Sostituendo in E l'espressione prima trovata per r :

$$E = -\frac{mZ^2e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

Vediamo che la quantizzazione del momento angolare orbitale dell'elettrone porta ad una quantizzazione della sua energia totale.

Le informazioni contenute in E sono presentate come diagramma del livello energetico in Figura.

L'energia di ciascun livello mostrata a sinistra, in termini di joule ed elettronvolt, e il numero quantico del livello è mostrato a destra.



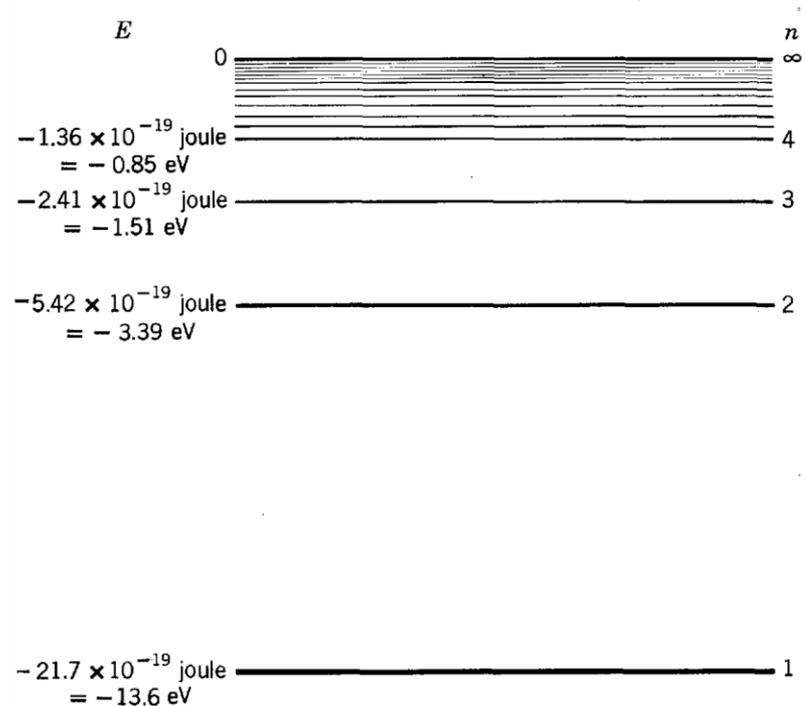
4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.3 I postulati di Bohr

Si nota che il valore consentito più basso (più negativo) dell'energia totale si ha per il numero quantico più piccolo $n = 1$.

All'aumentare di n , l'energia totale dello stato quantistico diventa meno negativa, con E che si avvicina a zero per n che tende all'infinito.

Lo stato di energia totale più bassa $n = 1$ è, ovviamente, lo stato più stabile per l'elettrone.



Calcoliamo adesso la frequenza ν della radiazione elettromagnetica emessa quando l'elettrone effettua una transizione dallo stato quantico n_i allo stato quantico n_f , cioè quando un elettrone muovendosi inizialmente su un'orbita caratterizzata dal numero quantico n_i cambia discontinuamente il suo moto in modo da saltare un'orbita caratterizzata dal numero quantico n_f .

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.3 I postulati di Bohr

Usando il quarto postulato di Bohr e l'ultima espressione scritta per i livelli energetici abbiamo che:

$$v = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{mZ^2 e^4}{4\pi\hbar^3} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

$$E = -\frac{mZ^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

$$v = \frac{E_i - E_f}{h}$$

In termini di numero d'onda $\kappa = \frac{1}{\lambda} = \frac{v}{c}$

$$\kappa = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{mZ^2 e^4}{4\pi\hbar^3 c} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = R_\infty Z^2 \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

$$\text{con } R_\infty = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{me^4}{4\pi\hbar^3 c}$$

Le previsioni più importanti del modello di Bohr sono contenute nelle espressioni trovate per E e κ .

Le conseguenze più dirette sono:

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.3 I postulati di Bohr

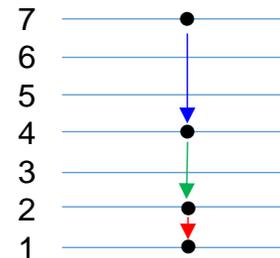
1. Lo stato normale dell'atomo sarà lo stato in cui l'elettrone ha l'energia più bassa, cioè lo stato $n = 1$. Questo è chiamato **stato fondamentale** o ground state.
 2. In una scarica elettrica, o in qualche altro processo, l'atomo riceve energia dall'esterno. Ciò significa che l'elettrone effettuerà, se possibile, una transizione verso uno stato di energia superiore, o stato eccitato, in cui $n > 1$.
 3. Obbedendo alla tendenza comune di tutti i sistemi fisici, l'atomo in uno stato eccitato emetterà la sua energia in eccesso e ritornerà allo stato fondamentale. Ciò si ottiene attraverso una serie di transizioni in cui l'elettrone cade in stati eccitati di energia successivamente inferiore, raggiungendo infine lo stato fondamentale.
- In ogni transizione viene emessa radiazione elettromagnetica con una lunghezza d'onda che dipende dall'energia persa dall'elettrone, cioè dai numeri quantici iniziali e finali.

Ad esempio, se un elettrone eccitato nello stato $n = 7$ rilassa verso gli stati $n = 4$ e $n = 2$ e poi verso lo stato fondamentale $n = 1$, osserveremo tre linee nello spettro atomico che vengono emesse con numeri d'onda calcolati per:

$$n_i = 7 \rightarrow n_f = 4$$

$$n_i = 4 \rightarrow n_f = 2$$

$$n_i = 2 \rightarrow n_f = 1$$



4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.3 I postulati di Bohr

Per l'idrogeno ($Z = 1$) consideriamo il sottoinsieme di linee spettrali che nasce da transizioni in cui di $n_f = 2$.

Secondo la relazione trovata per κ , i numeri d'onda di queste linee sono date dalla relazione:

$$\kappa = R_{\infty} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

$$\kappa = R_{\infty} Z^2 \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

$$R_{\infty} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{me^4}{4\pi\hbar^3 c}$$

Questa è identica alla formula della serie di Balmer dello spettro dell'idrogeno se si assume che $R_{\infty} = R_H$.

$$\kappa = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Sebbene i valori numerici di alcune delle quantità che entrano nell'espressione di R_{∞} non fossero conosciuti con molta precisione all'epoca, Bohr valutò R_{∞} in termini di queste quantità e scoprì che il valore risultante era in buon accordo con il valore sperimentale di R_H .

Secondo il modello di Bohr, ciascuna delle cinque serie conosciute dello spettro dell'idrogeno nasce da un sottoinsieme di transizioni in cui l'elettrone passa ad un certo stato quantico finale n_f .

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.3 I postulati di Bohr

Table 4-1 The Hydrogen Series

| Names | Wavelength Ranges | Formulas |
|----------|------------------------------|--|
| Lyman | Ultraviolet | $\kappa = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 2, 3, 4, \dots$ |
| Balmer | Near ultraviolet and visible | $\kappa = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 3, 4, 5, \dots$ |
| Paschen | Infrared | $\kappa = R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 4, 5, 6, \dots$ |
| Brackett | Infrared | $\kappa = R_H \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 5, 6, 7, \dots$ |
| Pfund | Infrared | $\kappa = R_H \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 6, 7, 8, \dots$ |

per la serie di Lyman $n_f = 1$

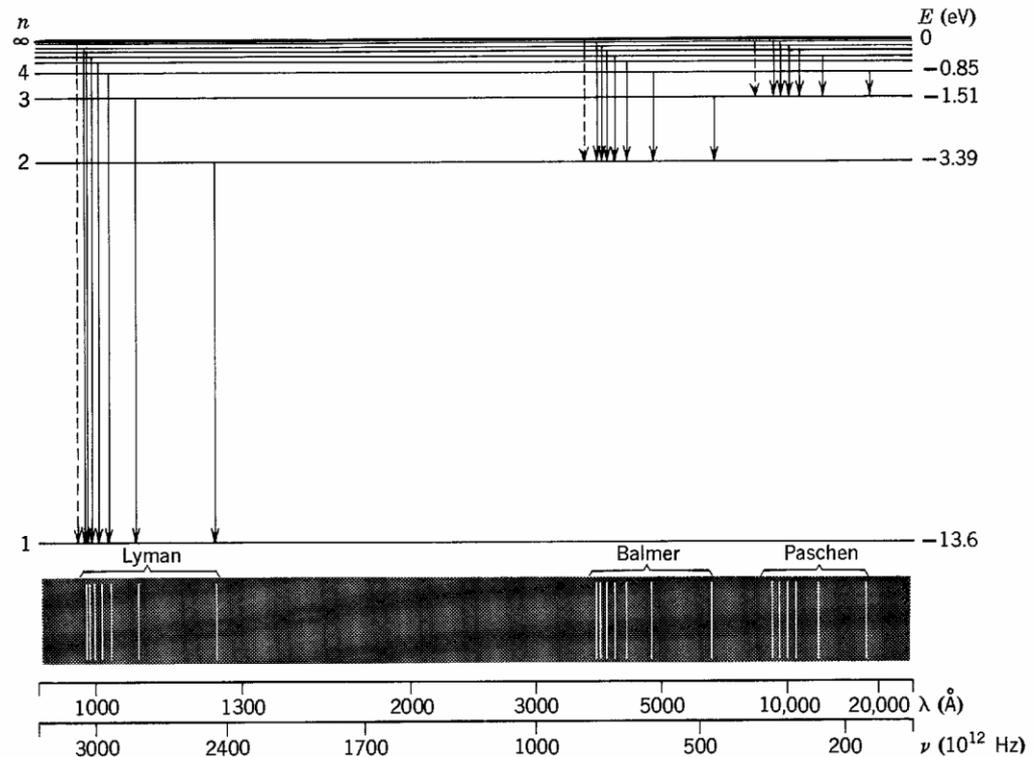
per quella di Balmer $n_f = 2$

per quella di Paschen $n_f = 3$

per quella di Brackett $n_f = 4$

per quella di Pfund $n_f = 5$.

Le prime tre serie sono rappresentate del diagramma dei livelli energetici:



La transizione che dà origine ad una particolare linea di una serie è indicata in questo diagramma da una freccia che va dallo stato quantico iniziale n_i allo stato quantico finale n_f .

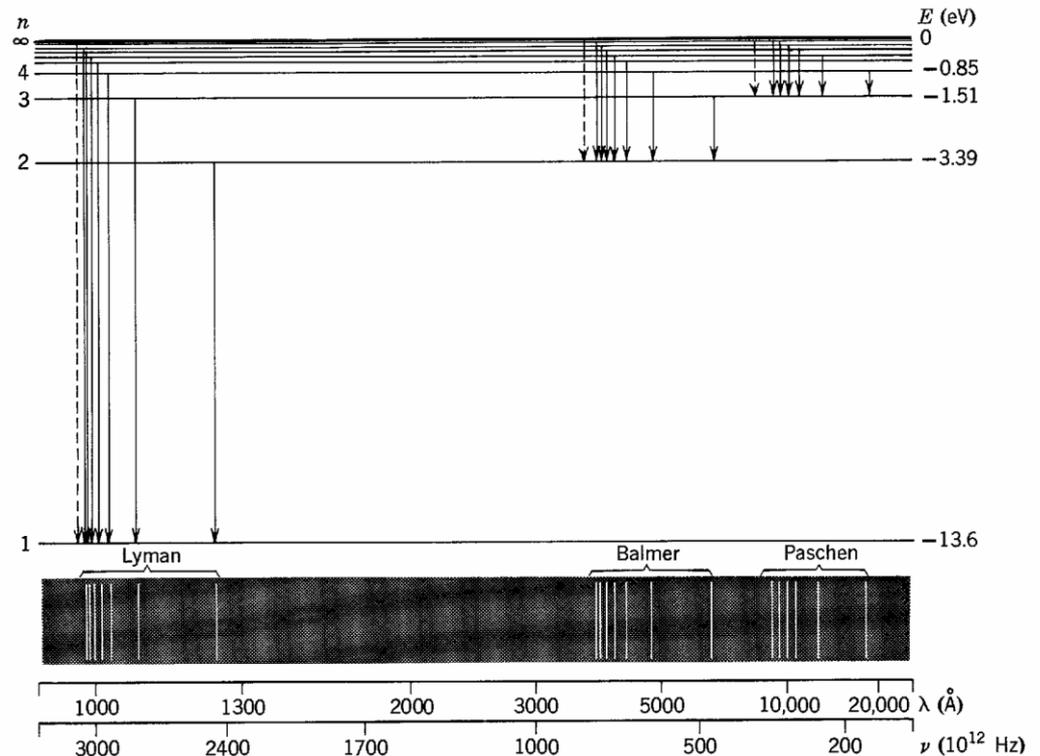
4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.3 I postulati di Bohr

Sono mostrate solo le frecce corrispondenti alle prime righe di ciascuna serie mentre la freccia tratteggiata simboleggia la transizione limite.

Le lunghezze d'onda delle linee di tutte queste serie sono ricavate in modo molto accurato utilizzando il modello di Bohr e il valore appropriato di n_f .

Questo fu un grande trionfo per il modello di Bohr.



Il successo del modello fu particolarmente impressionante perché le serie Lyman, Brackett e Pfund non erano state scoperte al momento in cui il modello fu sviluppato da Bohr. L'esistenza di queste serie fu prevista e presto le serie furono trovate sperimentalmente dalle persone da cui prendono il nome.

4.3 IL MODELLO DI BOHR

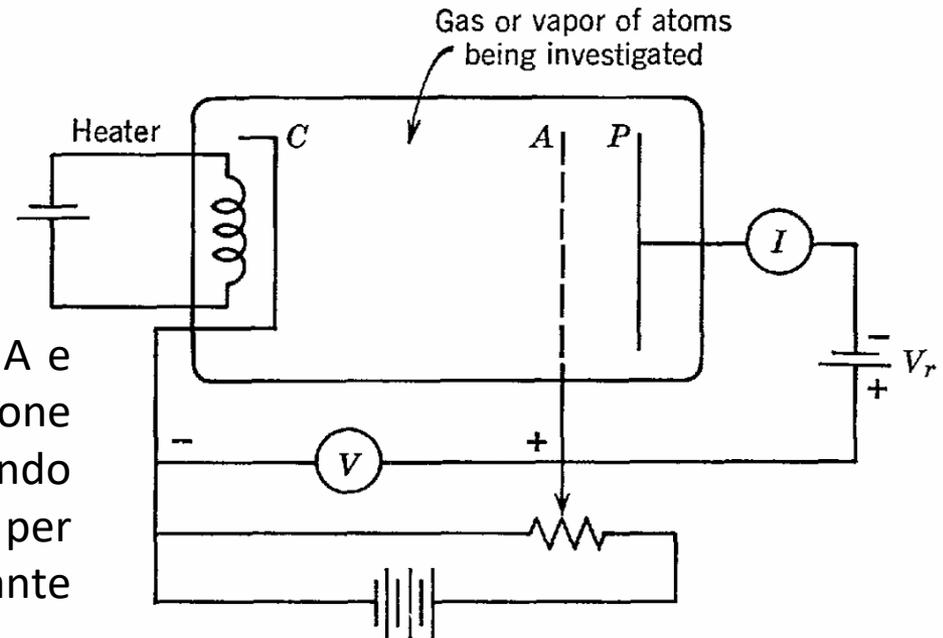
4.3.4 L'esperimento di Franck and Hertz

La conferma diretta che gli stati energetici di un atomo sono quantizzati venne da un semplice esperimento eseguito da Franck e Hertz nel 1914. Il tipo di apparato utilizzato da questi ricercatori è rappresentato in Figura.

Gli elettroni vengono emessi termicamente a bassa energia dal catodo riscaldato C.

Essi vengono accelerati all'anodo A da un potenziale V applicato tra i due elettrodi.

Alcuni elettroni attraversano i fori in A e raggiungono la piastra P, a condizione che la loro energia cinetica, quando abbandonano A, sia sufficiente per superare un piccolo potenziale ritardante V_r applicato tra P e A.



L'intero tubo è riempito con un gas o vapore degli atomi a bassa pressione.

L'esperimento prevede di misurare la corrente elettronica generata a partire dagli elettroni che raggiungono la piastra P (indicato dal galvanometro I) in funzione della tensione di accelerazione V .

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.4 L'esperimento di Franck and Hertz

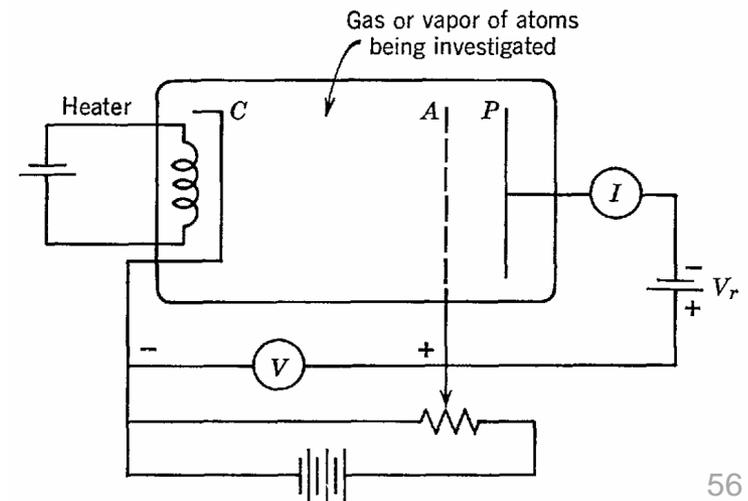
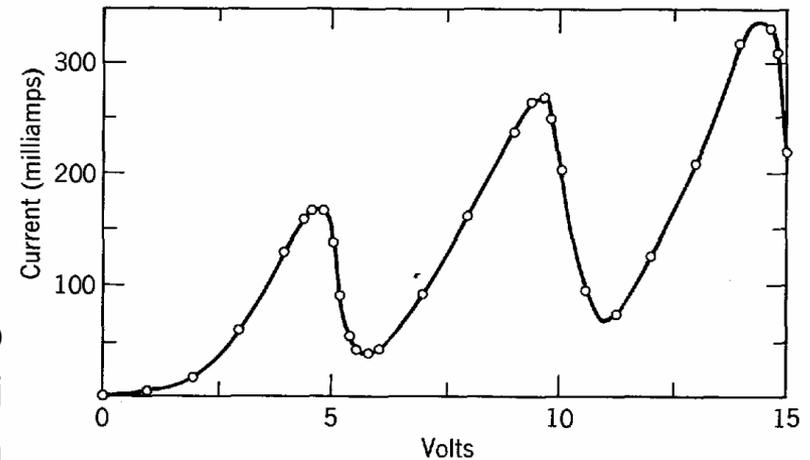
Il primo esperimento è stato eseguito con il tubo contenente vapore di Hg. Il risultato ottenuto è mostrato in Figura.

Per basse tensioni, si osserva che la corrente I aumenta all'aumentare della tensione V .

Quando V raggiunge 4.9 V, la corrente diminuisce bruscamente.

Franck e Hertz interpretarono questo risultato ipotizzando che una certa interazione tra gli elettroni e gli atomi di Hg inizia improvvisamente quando gli elettroni raggiungono un'energia cinetica di 4.9 eV.

Apparentemente una frazione significativa degli elettroni a questa energia eccita gli atomi di Hg e così facendo perdono completamente la loro energia cinetica.



4.3 IL MODELLO DI BOHR

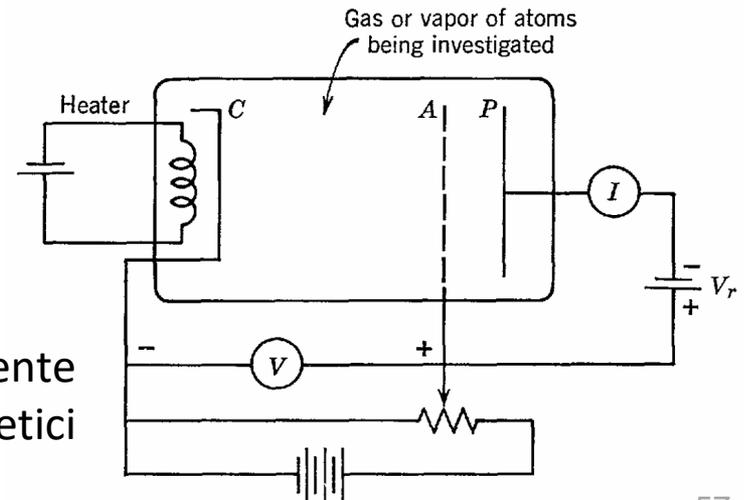
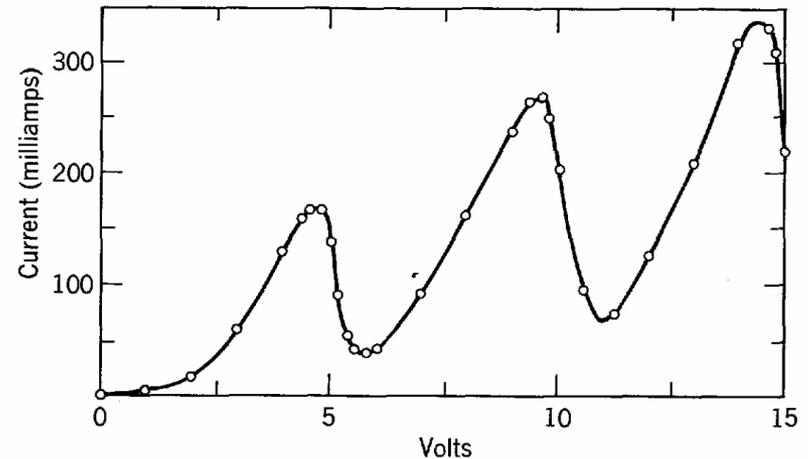
4.3.4 L'esperimento di Franck and Hertz

Questo processo di eccitazione deve avvenire prima dell'anodo A: infatti, dopo aver attraversato la piastra A, gli elettroni non hanno abbastanza energia cinetica per superare il potenziale ritardante V_r e raggiungere la piastra P.

A tensioni maggiori di 4.9 V, gli elettroni riescono a riguadagnare abbastanza energia cinetica dopo il processo di eccitazione per superare V_r e raggiungere P.

La brusca caduta della curva $I - V$ indica chiaramente che elettroni di energia inferiore a 4.9 eV non sono in grado di trasferire la loro energia ad un atomo di Hg.

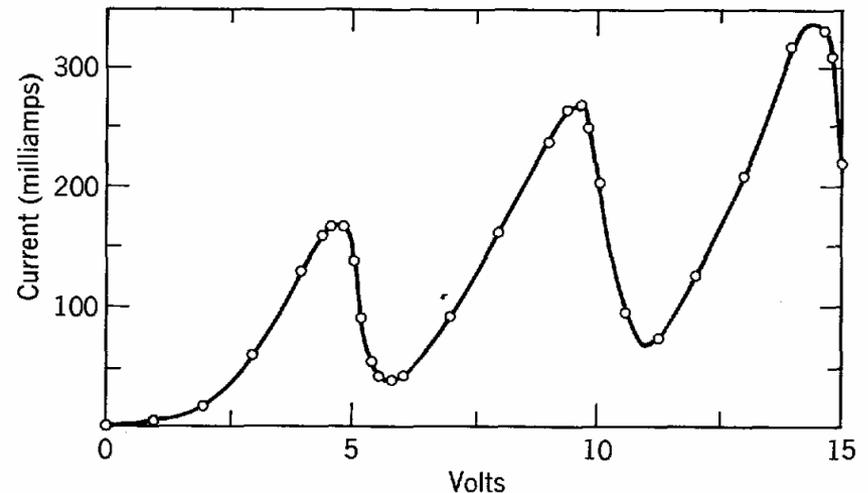
Questa interpretazione è coerente con l'esistenza di stati energetici discreti per l'atomo di Hg.



4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.4 L'esperimento di Franck and Hertz

Supponendo che il primo stato eccitato di Hg abbia un'energia maggiore di 4.9 eV rispetto allo stato fondamentale, un atomo di Hg semplicemente non sarebbe in grado di assorbire energia dagli elettroni bombardanti a meno che questi elettroni non hanno un'energia superiore a 4.9 eV.



Ora, se la separazione tra lo stato fondamentale e il primo stato eccitato fosse effettivamente 4.9 eV, dovrebbe esserci una linea nello spettro di emissione del Hg corrispondente ad una transizione dal primo stato eccitato allo stato fondamentale.

Franck e Hertz scoprirono che quando l'energia degli elettroni bombardanti è inferiore a 4.9 eV, dai vapori di mercurio non viene emessa alcuna riga spettrale, e quando l'energia è di poco superiore a questo valore, nello spettro si vede comunque solo una singola linea di emissione.

Questa linea ha una lunghezza d'onda di 253 nm.

4.3 IL MODELLO DI BOHR

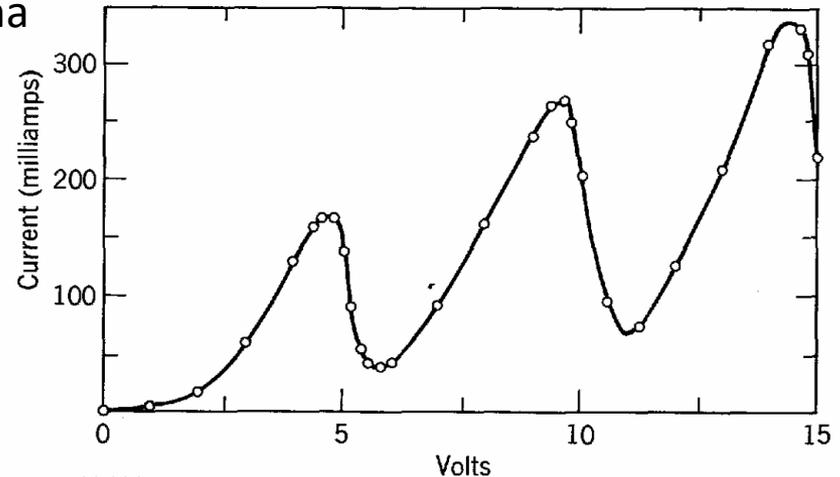
4.3.4 L'esperimento di Franck and Hertz

Calcoliamo l'energia del fotone che ha una lunghezza d'onda di 253 nm.

$$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$$

$$h = 4.1 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$$

$$c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3 \cdot 10^{17} \frac{\text{nm}}{\text{s}}$$



$$E = h \frac{c}{\lambda} = 4.1 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^{17} \frac{\text{nm}}{\text{s}}}{253 \text{ nm}} = 4.86 \text{ eV}$$

L'esperimento di Franck-Hertz fornì prove sorprendenti della quantizzazione dell'energia negli atomi. Fornì anche un metodo per la misurazione diretta delle differenze di energia tra gli stati quantistici di un atomo: le risposte appaiono sul quadrante di un voltmetro!

Quando la curva $I - V$ venne estesa a tensioni più elevate di 4.9 V, si riscontrarono ulteriori cadute di corrente, relative alle eccitazioni degli stati a più alta energia.

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.5 Le regole di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld

Il successo del modello di Bohr, confermato attraverso i risultati di diversi esperimenti, fu certamente molto sorprendente, ma non fece altro che accentuare il carattere misterioso dei postulati su cui si basava il modello.

Uno dei più grandi misteri era la questione di relazionare la quantizzazione di Bohr del momento angolare di un elettrone che si muove in un'orbita circolare e la quantizzazione di Planck dell'energia totale di un'entità, come un elettrone, che esegue un semplice movimento armonico.

Nel 1916 venne fatta luce su questo da Wilson e Sommerfeld, che enunciarono un insieme di regole per la quantizzazione di qualsiasi sistema fisico per il quale le coordinate sono funzioni periodiche del tempo.

Queste regole includevano sia la quantizzazione di Planck che quella di Bohr come casi speciali e furono di notevole utilità per ampliare il campo di applicabilità della teoria quantistica.

Queste regole possono essere definite come segue:

Per ogni sistema fisico in cui le coordinate sono funzioni periodiche del tempo, esiste una condizione di quantizzazione per ciascuna coordinata.

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.5 Le regole di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld

Queste condizioni di quantizzazione sono:

$$\oint p_q dq = n_q h$$

dove q è una delle coordinate, p_q è la quantità di moto associata a quella coordinata, n_q è un numero quantico che assume valori interi e \oint significa che l'integrazione viene effettuata su un periodo della coordinata q .

Il significato di queste regole può essere meglio illustrato in termini di alcuni esempi specifici. Consideriamo un oscillatore armonico semplice unidimensionale.

La sua energia totale può essere scritta, in termini di posizione e quantità di moto, come:

$$E = K + V = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

che riscriviamo come:

$$\frac{p_x^2}{2mE} + \frac{x^2}{2\frac{E}{k}} = 1$$

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.5 Le regole di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld

$$\frac{p_x^2}{2mE} + \frac{x^2}{2\frac{E}{k}} = 1$$

$$\oint p_q dq = n_q h$$

L'integrale di quantizzazione $\oint p_x dx$ si valuta più facilmente, per la relazione esistente tra p_x e x se consideriamo un'interpretazione geometrica.

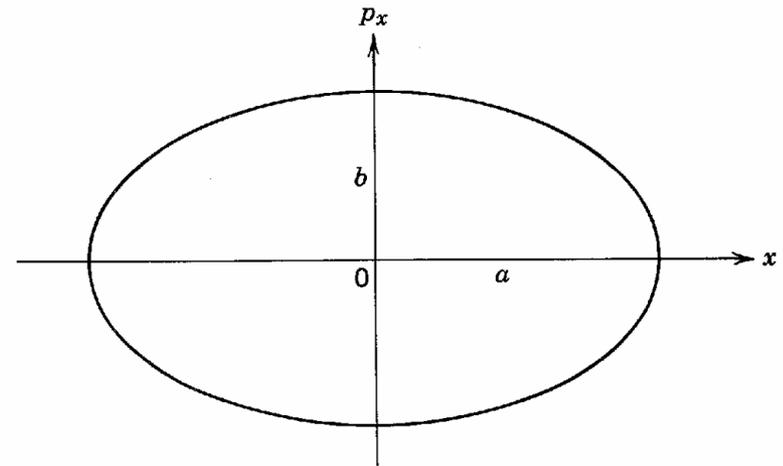
La relazione tra p_x e x è l'equazione di un'ellisse.

Per analogia con i semiassi a e b di un'ellisse di equazione $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$, possiamo dire che i

semiassi dell'ellisse $\frac{p_x^2}{2mE} + \frac{x^2}{2\frac{E}{k}} = 1$ sono:

$$a = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

$$b = \sqrt{2mE}$$



4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.5 Le regole di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld

$$\oint p_q dq = n_q h$$

$$a = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

$$b = \sqrt{2mE}$$

Poiché l'area di un'ellisse con semiassi a e b è pari a πab , ed $\oint p_x dx$ è proprio l'area dell'ellisse, allora:

$$\oint p_x dx = \pi ab = \pi \sqrt{\frac{2E}{k}} \sqrt{2mE} = \frac{2\pi E}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Ma sappiamo che per un oscillatore armonico:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi\nu$$

dove ν è la frequenza dell'oscillazione.

Sostituendo:

$$\oint p_x dx = \frac{E}{\nu}$$

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.5 Le regole di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld

$$\oint p_q dq = n_q h$$

$$\oint p_x dx = \frac{E}{\nu}$$

Applichiamo la regola di quantizzazione di Sommerfeld:

$$\oint p_x dx = \frac{E}{\nu} = n_x h$$

da cui $E = n_x h \nu$, che è la regola di quantizzazione postulata da Planck per la radiazione di cavità di corpo nero.

Possiamo anche dedurre la quantizzazione di Bohr del momento angolare dalla regola di Wilson-Sommerfeld.

Un elettrone che si muove su un'orbita circolare di raggio r ha un momento angolare, $L = mvr$, che è costante. La coordinata angolare è θ , che è una funzione periodica del tempo.

La regola di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld:

$$\oint L d\theta = L \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi L = n h$$

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.5 Le regole di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld

$$\oint L d\theta = L \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi L = nh$$

ovvero:

$$L = n\hbar$$

che è identica alla legge di quantizzazione di Bohr.

Un'interpretazione fisica della regola di quantizzazione di Bohr fu data nel 1924 da de Broglie.

La quantizzazione di Bohr del momento angolare può essere riscritta come:

$$mvr = pr = \frac{nh}{2\pi}$$

dove p è la quantità di moto lineare di un elettrone in un'orbita consentita di raggio r .

Se sostituiamo in questa equazione l'espressione di p in termini della corrispondente lunghezza d'onda di de Broglie si ha:

$$\frac{hr}{\lambda} = \frac{nh}{2\pi}$$

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

ovvero: $2\pi r = n\lambda$

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.5 Le regole di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld

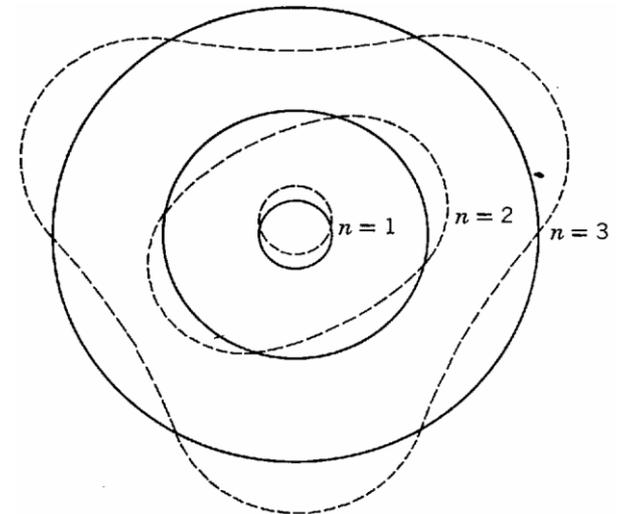
$$2\pi r = n\lambda$$

In altre parole, le orbite consentite sono quelle in cui la circonferenza dell'orbita può contenere esattamente un numero intero di lunghezze d'onda di de Broglie.

Immaginiamo che l'elettrone si muova su un'orbita circolare a velocità costante, con l'onda associata che segue l'elettrone. L'onda, di lunghezza d'onda λ , ripercorre ripetutamente l'orbita circolare, sovrapponendosi agli attraversamenti precedenti.

Se le onde in ogni attraversamento sono esattamente in fase, interferiscono costruttivamente in orbite che ospitano numeri interi di lunghezze d'onda di de Broglie, come illustrato in Figura.

Quando questa condizione non è verificata, l'interferenza, dopo un gran numero di attraversamenti, restituirebbe un'intensità media nulla.



Poiché si suppone che l'intensità media $\overline{\Psi^2}$ delle onde sia una misura della posizione della particella, interpretiamo ciò nel senso che un elettrone non può essere trovato in tale orbita.

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.6 Il modello di Sommerfeld e la struttura fine degli spettri

Una delle applicazioni più importanti delle regole di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld riguarda il caso di un atomo di idrogeno in cui si presume che l'elettrone possa muoversi su orbite ellittiche.

Questo studio fu fatto da Sommerfeld nel tentativo di spiegare la struttura fine dello spettro dell'idrogeno.

La struttura fine è una suddivisione delle righe spettrali in più componenti distinti, che si trova in tutti gli spettri atomici. Può essere osservato solo utilizzando apparecchiature ad altissima risoluzione poiché la separazione tra componenti adiacenti di una singola riga spettrale è dell'ordine di 10^{-4} volte la separazione tra righe adiacenti.

Secondo il modello di Bohr, questo vuol dire che quello che pensavamo fosse un "singolo stato energetico dell'atomo di idrogeno" è in realtà costituito da diversi stati energeticamente molto vicini tra loro.

Sommerfeld valutò innanzitutto la dimensione e la forma delle orbite ellittiche consentite, nonché l'energia totale di un elettrone che si muove su tale orbita, utilizzando le formule della meccanica classica.

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.6 Il modello di Sommerfeld e la struttura fine degli spettri

Descrivendo il movimento in termini di coordinate polari r e θ , applicò le due regole di quantizzazione ad entrambe le coordinate:

$$\oint L d\theta = n_\theta h$$

$$\oint p_r dr = n_r h$$

$$\oint p_q dq = n_q h$$

La prima condizione porta allo stesso risultato ottenuto per le orbite circolari, ovvero:

$$L = n_\theta \hbar$$

con $n_\theta = 1, 2, 3, 4, \dots$

L'integrale di quantizzazione dell'azione radiale è un po' più complicato da calcolare; si comincia osservando che:

$$\oint p_r dr = \oint m \frac{dr}{dt} dr = \oint m \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{d\theta} d\theta$$

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.6 Il modello di Sommerfeld e la struttura fine degli spettri

$$\oint p_r dr = \oint m \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{d\theta} d\theta$$

Utilizziamo l'espressione per il momento angolare per esprimere

$$L = m\omega r^2 = m \frac{d\theta}{dt} r^2$$

da cui:

$$m \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{r^2}$$

Sostituiamo nella funzione integranda:

$$\oint p_r dr = L \oint \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 d\theta$$

L'integrale ciclico si può calcolare (con passaggi non proprio banali) conoscendo l'equazione dell'ellisse in coordinate polari:

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.6 Il modello di Sommerfeld e la struttura fine degli spettri

$$r(\theta) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

$$\oint p_r dr = L \oint \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 d\theta$$

dove $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ è l'eccentricità dell'ellisse.

Dopo passaggi matematici non proprio banali si ottiene:

$$\oint \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 d\theta = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - 1 \right) = 2\pi \left(\frac{a}{b} - 1 \right)$$

E quindi sostituendo:

$$\oint p_r dr = 2\pi L \left(\frac{a}{b} - 1 \right) = n_r h$$

$$\oint p_r dr = n_r h$$

con $n_r = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Combiniamo adesso le due espressioni derivanti dalla due regole di quantizzazione:

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.6 Il modello di Sommerfeld e la struttura fine degli spettri

$$L = n_{\theta} \hbar$$

$$L \left(\frac{a}{b} - 1 \right) = n_r \hbar$$

Dividiamo membro a membro:

$$\left(\frac{a}{b} - 1 \right) = \frac{n_r}{n_{\theta}}$$

Da cui è facile ricavare:

$$b = a \frac{n_{\theta}}{n_{\theta} + n_r} = a \frac{n_{\theta}}{n}$$

con $n = n_{\theta} + n_r$.

Ci serve un'altra condizione che ricaviamo dalla proprietà del moto lungo ellisse secondo cui l'energia meccanica dipende solo dal semiasse maggiore a e non dall'eccentricità dell'orbita:

$$E = - \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 2a}$$

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.6 Il modello di Sommerfeld e la struttura fine degli spettri

$$E = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 2a}$$

Se applichiamo il postulato di Bohr ed eguagliamo le due espressioni

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 2a} = \frac{mZ^2e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2 n^2} \frac{1}{n^2}$$

$$E = -\frac{mZ^2e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2 n^2} \frac{1}{n^2}$$

otteniamo un'espressione per il semiasse maggiore:

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{mZe^2}$$

Abbiamo le espressioni per entrambi i semiassi:

$$b = a \frac{n_\theta}{n}$$

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{mZe^2}$$

$$n = n_\theta + n_r$$

L'intero n è chiamato numero quantico principale, mentre n_θ è chiamato numero quantico azimutale.

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.6 Il modello di Sommerfeld e la struttura fine degli spettri

$$b = a \frac{n_\theta}{n}$$

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{mZe^2}$$

$$n = n_\theta + n_r$$

L'equazione di b mostra che la forma dell'orbita (il rapporto tra il semiasse maggiore e quello minore) è determinata dal rapporto $\frac{n_\theta}{n}$.

Per $n_\theta = n$ le orbite sono circolari di raggio a .

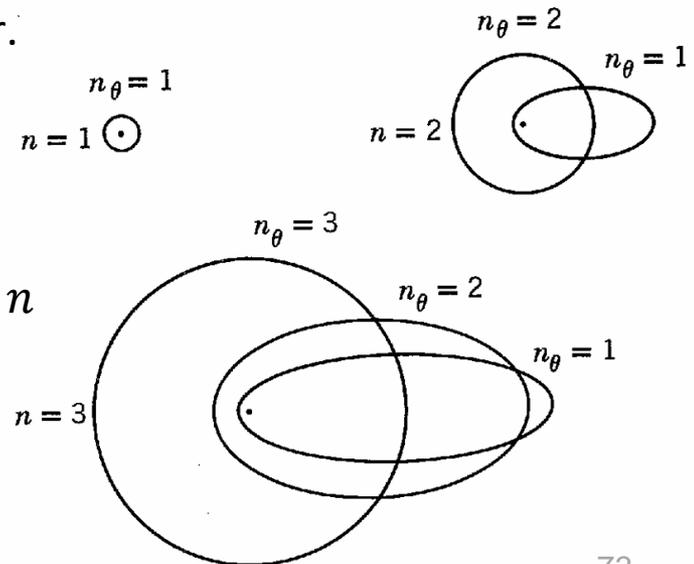
Si noti che l'equazione che dà a in termini di n è identica all'equazione che dà il raggio delle orbite circolari di Bohr.

$$r = 4\pi\epsilon_0 \frac{n^2 \hbar^2}{mZe^2}$$

La Figura mostra, in scala, le possibili orbite corrispondenti ai primi tre valori del numero quantico principale.

Ad ogni valore del numero quantico principale n corrispondono n diverse orbite consentite.

Una di queste, l'orbita circolare, è proprio l'orbita descritta dal modello originale di Bohr. Le altre sono ellittiche.



4.3 IL MODELLO DI BOHR

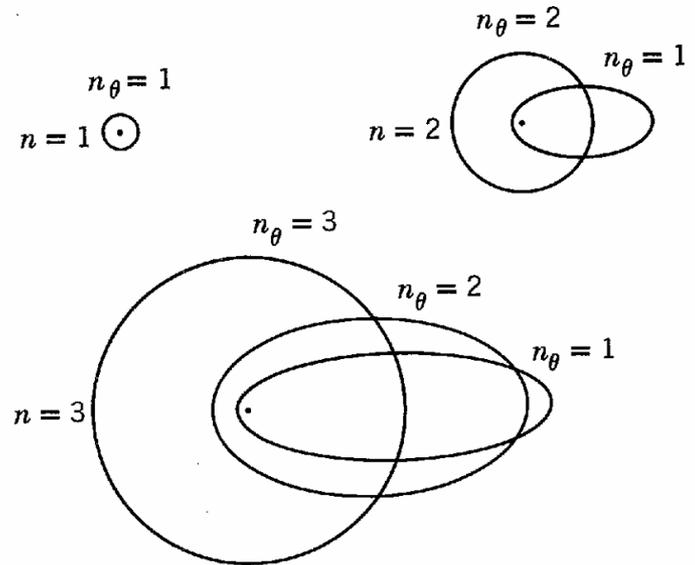
4.3.6 Il modello di Sommerfeld e la struttura fine degli spettri

$$E = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 2a}$$

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{mZe^2}$$

Ma nonostante i percorsi molto diversi seguiti da un elettrone che si muove nelle diverse orbite possibili per un dato n , l'equazione di E ci dice che l'energia totale dell'elettrone è la stessa perché dipende solo da n .

Le varie orbite caratterizzate da un valore comune di n si dicono degeneri. Le energie di diversi stati di moto "degenerano" alla stessa energia totale.



Sommerfeld "rimosse la degenerazione" nell'atomo di idrogeno trattando il moto dell'elettrone in condizioni relativistiche.

Per un elettrone in un atomo di idrogeno, $v/c \approx 10^{-2}$ o meno.

Quindi ci aspetteremmo che le correzioni relativistiche all'energia totale, dovute alla variazione relativistica della massa dell'elettrone sarà dell'ordine di $(v/c)^2 \approx 10^{-4}$.

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.6 Il modello di Sommerfeld e la struttura fine degli spettri

Tuttavia $(v/c)^2 \approx 10^{-4}$ è proprio l'ordine di grandezza della separazione degli stati energetici dell'idrogeno riferiti ad uno stesso n che sarebbe necessaria per spiegare la struttura fine dello spettro dell'idrogeno.

L'entità effettiva della correzione dipende dalla velocità media dell'elettrone che, a sua volta, dipende dall'ellitticità dell'orbita.

Dopo un calcolo troppo laborioso da riprodurre in questo contesto, Sommerfeld dimostrò che l'energia totale di un elettrone in un'orbita caratterizzata dai numeri quantici n e n_θ è pari a:

$$E = -\frac{mZ^2e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2 n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n} \left(\frac{1}{n_\theta} - \frac{3}{4n} \right) \right]$$

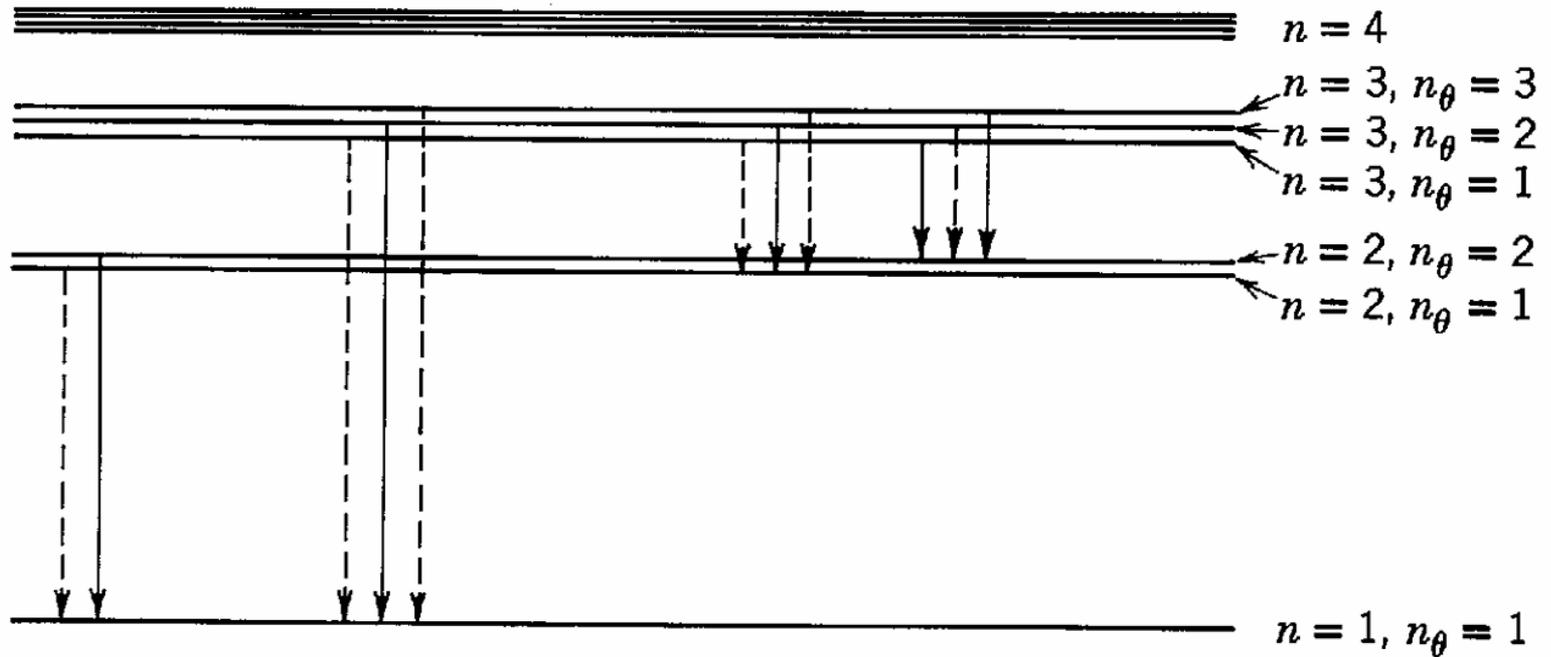
La quantità α è un numero puro noto come costante di struttura fine:

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

4.3 IL MODELLO DI BOHR

4.3.6 Il modello di Sommerfeld e la struttura fine degli spettri

Nella Figura è rappresentato il diagramma dei primi livelli energetici dell'atomo di idrogeno.



La separazione tra i diversi livelli con un valore comune di n è stata notevolmente esagerata per motivi di chiarezza.

Le frecce indicano le transizioni tra i vari stati energetici che producono le linee dello spettro atomico.