

Prof. **PIETRO PATIMISCO**

**Dipartimento INTERATENO di Fisica
II PIANO – Stanza 233**

pietro.patimisco@uniba.it

ORARIO DI RICEVIMENTO:

A richiesta, da concordare via mail

**PROGRAMMA DEL CORSO
SLIDE DELLE LEZIONI**

<http://polysense.poliba.it/index.php/struttura-della-materia/>

TESTI CONSIGLIATI

- R. Eisberg, R. Resnick, "Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles", Wiley (1985)
- M. Alonso, E. J. Finn, "Fundamental University Physics III Quantum and Statistical Physics", Addison-Wesley (1968)

SYLLABUS

1. La radiazione termica e il postulato di Planck

1.1 La radiazione termica. **1.2 Il concetto di corpo nero.** 1.2.1 La radianza spettrale. 1.2.2 La legge di Stefan-Boltzmann. 1.2.3 La legge di spostamento di Wien. 1.2.4 Emissione di corpo nero da una cavità. **1.3 La teoria classica della radiazione di cavità.** 1.3.1 Le onde stazionarie in cavità. 1.3.2 La legge di Rayleigh-Jeans. **1.4 La Teoria di Planck.** 1.4.1 L'ipotesi di Planck. 1.4.2 Il calcolo della formula di Planck. 1.4.3 Il confronto con i risultati sperimentali. 1.4.4 Il postulato di Planck e le sue implicazioni.

2. La natura corpuscolare della luce

2.1 L'effetto fotoelettrico. 2.1.1 Gli esperimenti di Hertz. 2.1.2 L'esperimento di Lenard e le contraddizioni con la teoria classica. 2.1.3 La teoria di Einstein dell'effetto fotoelettrico. **2.2 L'effetto Compton.** 2.2.1 L'esperimento di Compton. 2.2.2 La collisione fotone-elettrone. 2.2.3 Scattering Compton e scattering Rayleigh. **2.3 La Radiazione di Bremsstrahlung.** **2.4 Il concetto di sezione d'urto.**

3. La natura ondulatoria della materia

3.1 Le onde di materia. 3.1.1 L'ipotesi di de Broglie. 3.1.2 L'esperimento di Davisson and Germer. 3.1.3 Analogia con la legge di diffrazione di Bragg per i raggi X. 3.1.4 L'esperimento di Thomson. **3.2 Il dualismo onda-corpuscolo.** 3.2.1 Il principio di complementarità di Bohr. 3.2.2 Interpretazione di Einstein del dualismo per la radiazione. 3.2.3 Interpretazione di Born del dualismo per la materia.

4. Il modello dell'atomo di Bohr

4.1 Il modello di Thomson. 4.1.1 L'atomo di Thomson. 4.1.2 L'esperimento di Rutherford. **4.2 Il modello di Rutherford.** 4.2.1 Calcolo della distribuzione angolare delle particelle diffuse. 4.2.2 Confronto tra modello di Rutherford e modello di Thomson. 4.2.3 La sezione d'urto differenziale di Rutherford. **4.3 Il modello di Bohr.** 4.3.1 La stabilità del nucleo. 4.3.2 Gli spettri atomici. 4.3.3 I postulati di Bohr. 4.3.4 L'esperimento di Franck e Hertz. 4.3.5 Le regole di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld. 4.3.6 Il modello di Sommerfeld e la struttura fine degli spettri.

SYLLABUS

5. La formulazione di Schroedinger dell'atomo

5.1 Atomo a singolo elettrone. 5.1.1 Soluzione dell'equazione di Schroedinger. 5.1.2 Autovalori, numeri quantici e degenerazione. 5.1.3 Momento angolare orbitale. **5.2 Momento di dipolo magnetico e spin.** 5.2.1 Il magnetone di Bohr. 5.2.2 La precessione di Larmor. 5.2.3 L'esperimento di Stern-Gerlach e lo spin dell'elettrone. 5.2.4 L'interazione spin-orbita. 5.2.5 Il momento angolare totale. **5.3 Atomi a molti elettroni.** 5.3.1 Estensione del modello per atomi a molti elettroni. 5.3.2 Le particelle identiche. 5.3.3 Il principio di esclusione di Pauli. 5.4.4 L'atomo di elio. 5.3.5. Struttura elettronica degli atomi a molti elettroni.

6. Molecole

6.1 La molecola dell'idrogeno mole. 6.2 Orbitali molecolari di molecole diatomiche. 6.3 Configurazione elettronica di alcune molecole diatomiche. 6.4 Molecole poliatomiche. 6.5 Molecole coniugate. 6.6 Rotazione molecolare 6.7 Vibrazione molecolare 6.8 Transizioni elettroniche nelle molecole. 6.9 Problemi.

7. Solidi

7.1 Tipi di solidi. 7.2 Teoria delle bande. 7.3 Modello ad elettroni liberi in un solido. 7.4 Moto degli elettroni in una struttura periodica 7.5 Conduttori, isolanti, semiconduttori. 7.6 Conducibilità elettrica. 7.7 Transizioni radiative nei solidi. 7.8 Problemi



CAPITOLO 1

RADIAZIONE TERMICA E IPOTESI DI PLANCK

1.1 RADIAZIONE TERMICA

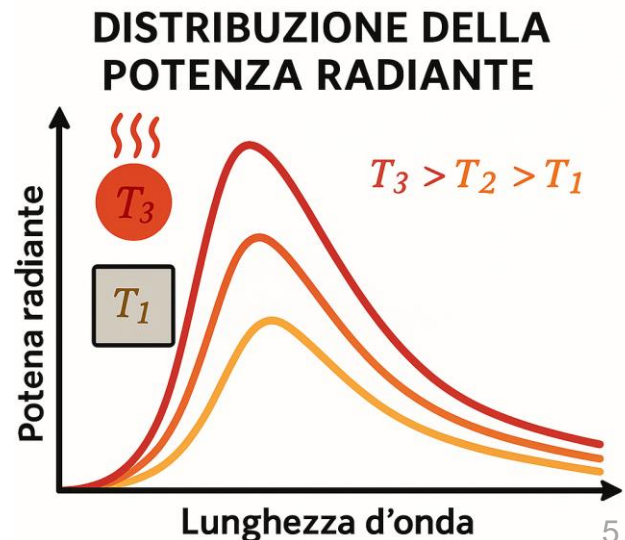
La radiazione emessa da un corpo a causa della sua temperatura è nota come **radiazione termica**. Tutti i corpi emettono radiazione termica verso l'ambiente circostante e, allo stesso tempo, assorbono radiazione da esso.

Se un corpo è inizialmente più caldo dell'ambiente, tenderà a raffreddarsi perché emette energia a una velocità maggiore di quella con cui la assorbe. Quando i tassi di emissione e assorbimento si equilibrano, si raggiunge la condizione di **equilibrio termico**.

La distribuzione della potenza radiante — cioè, l'energia emessa per unità di tempo — in funzione della lunghezza d'onda è chiamata **spettro di emissione**.

La materia in stato condensato (ossia solido o liquido) emette uno spettro continuo di radiazione termica, come illustrato schematicamente in Figura.

Le caratteristiche di tale spettro dipendono fortemente dalla temperatura del corpo, mentre sono quasi indipendenti dal materiale specifico di cui è composto.



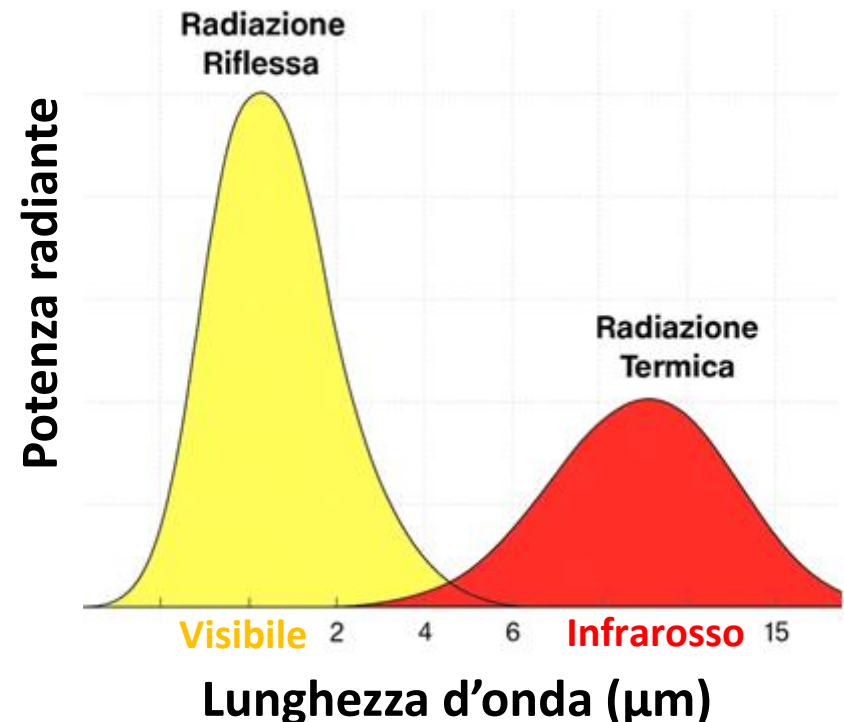
1.1 RADIAZIONE TERMICA

Attenzione: la radiazione termica non va confusa con la luce riflessa dai corpi.

A temperatura ambiente ($\sim 20\text{ }^{\circ}\text{C}$), la maggior parte degli oggetti ci appare visibile non perché emette luce, ma perché riflette quella proveniente da sorgenti esterne. In assenza di illuminazione, infatti, non possiamo vederli.

La radiazione termica emessa a queste temperature si trova principalmente nella **regione infrarossa** dello spettro elettromagnetico, ed è quindi invisibile all'occhio umano.

Il grafico rappresenta simbolicamente le due emissioni caratteristiche di un corpo: una radiazione riflessa nel visibile (campana gialla), dovuta alla luce incidente, e una radiazione termica nell'infrarosso (campana rossa), emessa dal corpo in funzione della sua temperatura.



1.1 RADIAZIONE TERMICA

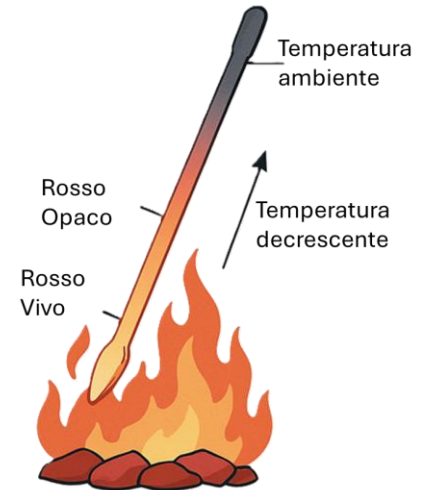
Se però un corpo viene portato a temperature molto elevate, diventa auto-luminoso.

Un esempio classico è un attizzatoio di ferro riscaldato nel fuoco (Figura): man mano che la sua temperatura aumenta, la quantità di radiazione emessa cresce rapidamente (e lo percepiamo come sempre più caldo), fino a manifestare effetti visibili.

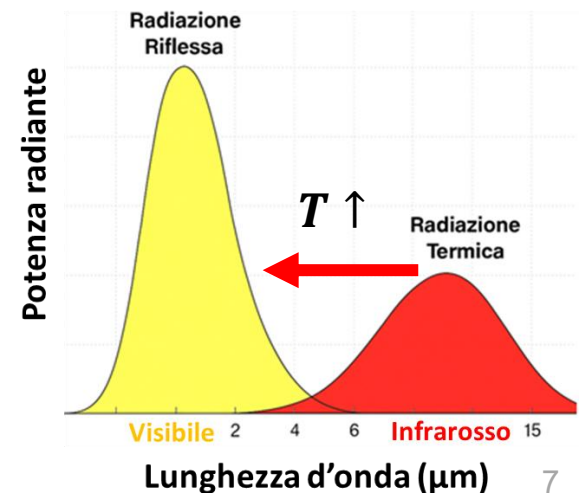
L'attizzatoio inizia a brillare di un rosso opaco, poi rosso vivo, e infine, a temperature ancora più elevate, assume una tonalità bianco-blu intensa.

In altre parole, all'aumentare della temperatura, non solo cresce l'intensità della radiazione termica emessa, ma anche la frequenza corrispondente al massimo dell'emissione si sposta dall'infrarosso verso il visibile.

In generale, la forma dello spettro della radiazione termica dipende fortemente dalla temperatura e, in misura minore, dalla natura del corpo.



Radiazione termica
invisibile alle normali
temperature ambientali



1.2 IL CONCETTO DI CORPO NERO

1.2.1 La radianza spettrale

Esiste una classe di corpi caldi che emette radiazione termica con uno spettro di carattere universale, ovvero che dipende in maniera trascurabile dalla natura del corpo emettitore.

Questi sono detti **corpi neri**, cioè corpi che hanno superfici che assorbono tutta la radiazione incidente su di essi.

Il nome è appropriato perché tali corpi non riflettono la luce e appaiono neri quando la loro temperatura è sufficientemente bassa da non essere autoluminosi. Un esempio di corpo nero sarebbe qualsiasi oggetto rivestito con uno strato diffuso di pigmento nero.

La distribuzione spettrale della radiazione del corpo nero è nota come **radianza spettrale** $R_T(\nu)$, definita in modo che $R_T(\nu)d\nu$ sia uguale all'energia emessa per unità di tempo e per unità di superficie alla temperatura T nell'intervallo spettrale $[\nu, \nu + d\nu]$.

Le prime misurazioni accurate di questa grandezza furono effettuate da Lummer e Pringsheim nel 1899.

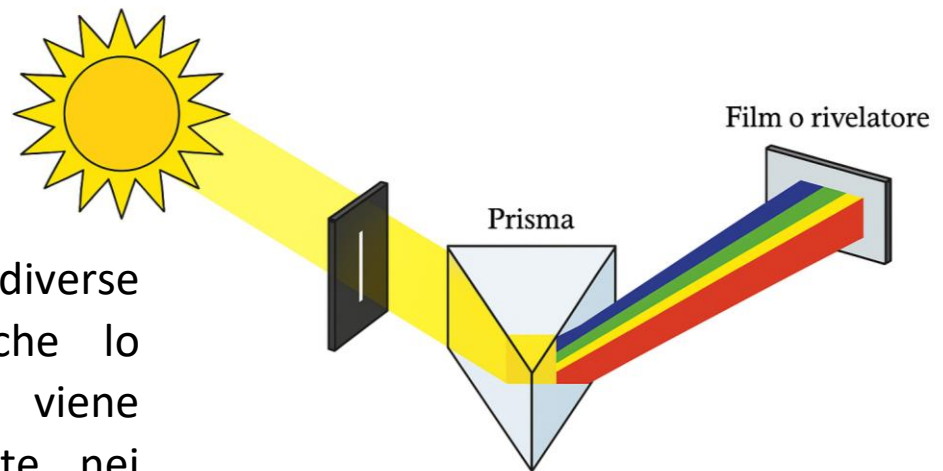
1.2 IL CONCETTO DI CORPO NERO

1.2.1 La radianza spettrale

Ma come si può ricostruire lo spettro di emissione di un corpo nero? L'apparato spettrale più semplice, noto come spettrometro, è illustrato in Figura.

Una fenditura convoglia la radiazione termica emessa dal corpo nero su un elemento disperdente, come un prisma.

Quest'ultimo separa angularmente le diverse componenti spettrali della luce che lo attraversa: ogni lunghezza d'onda viene deviata secondo un angolo differente, nei limiti della risoluzione spettrale del prisma.



Un fotorivelatore registra quindi un segnale proporzionale all'intensità della luce per ciascuna posizione angolare.

Poiché ad ogni angolo corrisponde una specifica lunghezza d'onda, è possibile ricostruire la distribuzione dell'intensità in funzione della lunghezza d'onda, ovvero la radianza $R_T(\nu)$ del corpo nero.

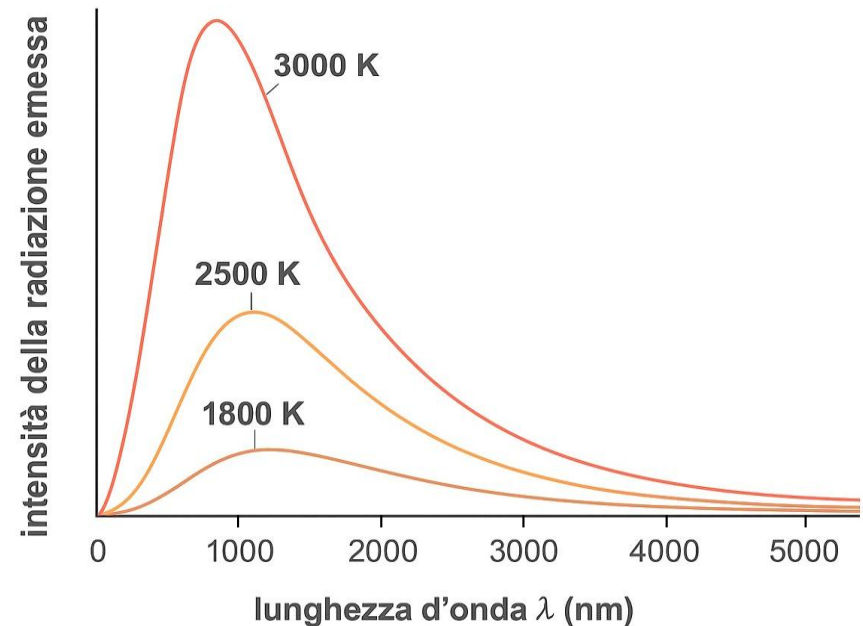
1.2 IL CONCETTO DI CORPO NERO

1.2.1 La radianza spettrale

Lummer e Pringsheim osservarono che, indipendentemente dalla loro composizione, tutti i corpi neri alla stessa temperatura emettono radiazione termica con lo stesso spettro, ovvero con la stessa forma (Figura).

Questa proprietà può essere dedotta utilizzando argomentazioni classiche basate sull'equilibrio termodinamico.

Tuttavia, la forma precisa dello spettro della radiazione di corpo nero non può essere determinata unicamente tramite considerazioni termodinamiche.



Le caratteristiche universali della radiazione emessa da un corpo nero sono così significative che spinsero i fisici a cercare spiegazioni più approfondite per comprendere la forma specifica del suo spettro.

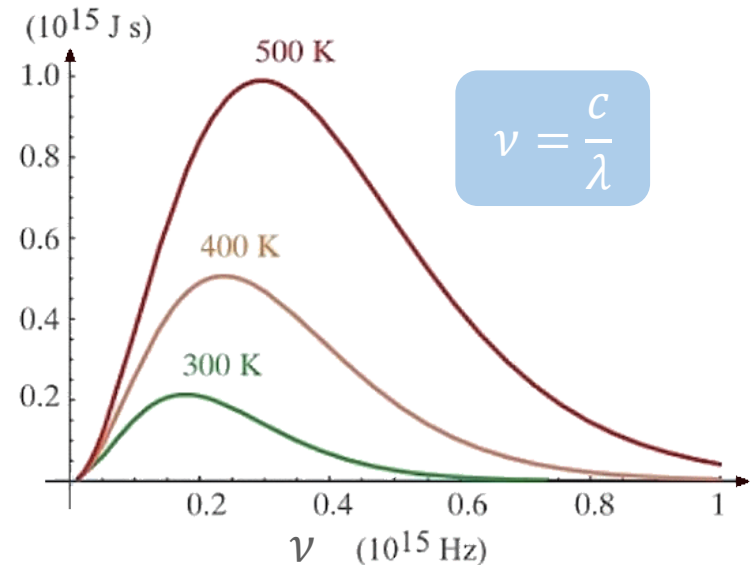
1.2 IL CONCETTO DI CORPO NERO

1.2.2 La legge di Stefan-Boltzmann

L'integrale della radianza spettrale $R_T(\nu)$ su tutto il campo di frequenze ν è l'energia totale emessa per unità di tempo per unità di area da un corpo nero alla temperatura T .

Questa prende il nome di **radianza** R_T ed è definita come:

$$R_T = \int_0^{\infty} R_T(\nu) d\nu$$



Come si evince dalla Figura, R_T aumenta rapidamente con l'aumentare della temperatura.

Questo risultato è noto come **legge di Stefan-Boltzmann** e fu enunciato per la prima volta nel 1879 sotto forma di un'equazione empirica:

$$R_T = \sigma T^4$$

dove

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

è detta costante di Stefan-Boltzmann.

1.2 IL CONCETTO DI CORPO NERO

1.2.3 La legge di spostamento di Wien

La Figura 1.4 mostra anche che, all'aumentare della temperatura T , il picco dello spettro di emissione del corpo nero si sposta verso lunghezze d'onda λ più corte, corrispondenti a frequenze più elevate.

Questo comportamento è noto come **legge di spostamento di Wien**, ed è comunemente espressa nella forma $\nu_{max} \propto T$

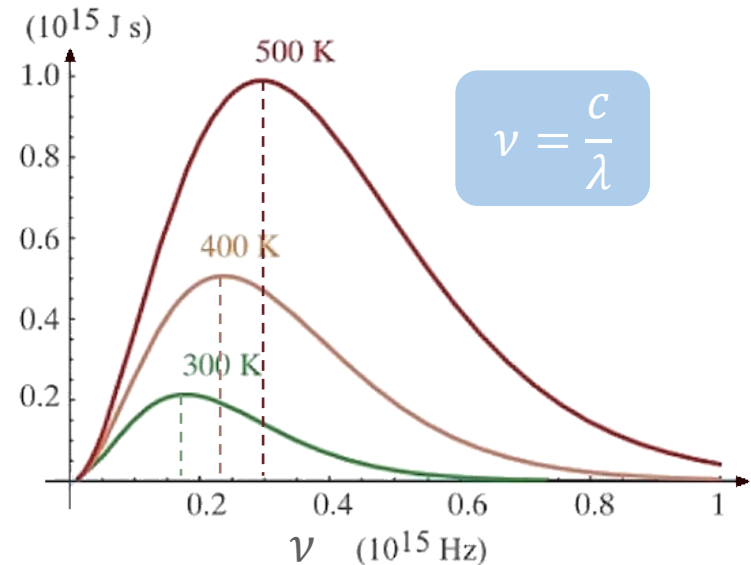
dove ν_{max} rappresenta la frequenza alla quale la curva $R_T(\nu)$ raggiunge il suo massimo per una data temperatura T .

Sia la legge di Stefan-Boltzmann che la legge di spostamento di Wien sono confermate dai dati sperimentali riportati in Figura.

La legge di spostamento di Wien può essere riscritta utilizzando la relazione $\lambda\nu = c$, come:

$$\nu_{max} = \frac{c}{\lambda_{max}} \propto T$$

ovvero: $\lambda_{max}T = cost$



1.2 IL CONCETTO DI CORPO NERO

1.2.3 La legge di spostamento di Wien

$$\lambda_{max}T = cost$$

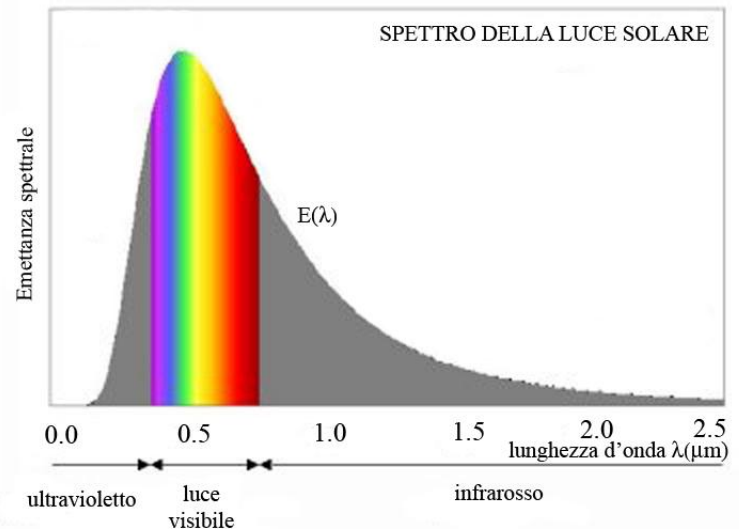
Il valore della costante di Wien è stato sperimentalmente misurato in $2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$.

Se assumiamo che la superficie di una stella si comporti come un corpo nero, possiamo utilizzare la legge di spostamento di Wien per determinare la sua temperatura.

Ad esempio, consideriamo lo spettro di emissione del Sole:

Il picco di emissione è a $\lambda_{max} = 510 \text{ nm}$.

Di conseguenza, la temperatura della superficie solare T_S può essere calcolata applicando la legge di spostamento di Wien.



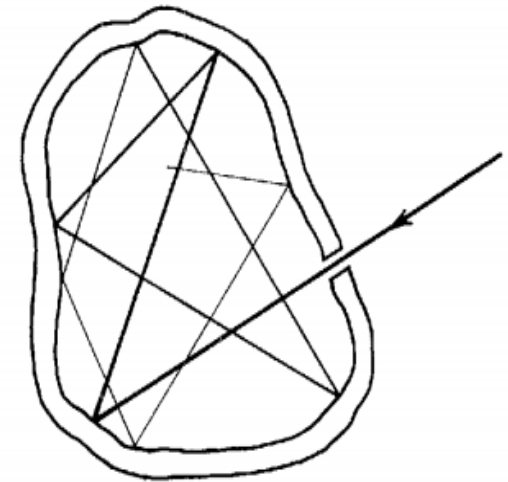
$$T_S = \frac{cost}{\lambda_{max}} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}}{510 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \approx 5700 \text{ K}$$

1.2 IL CONCETTO DI CORPO NERO

1.2.4 Emissione di corpo nero da una cavità

Un altro esempio di corpo nero, che vedremo particolarmente importante per la costruzione di un modello teorico, è costituito da un oggetto contenente una cavità a cui è applicato un piccolo foro che comunica con l'esterno.

La radiazione incidente sul foro dall'esterno entra in cavità e viene riflessa dalle pareti della cavità, fino ad essere assorbita completamente dalle pareti. Se l'area del foro è molto piccola rispetto all'area della superficie interna della cavità, solo una quantità trascurabile della radiazione incidente fuoriuscirà dal foro.



In definitiva, tutta la radiazione incidente sul foro viene assorbita.

Supponiamo ora che le pareti della cavità siano uniformemente all'equilibrio termico ad una temperatura T . Di conseguenza, le pareti emetteranno radiazione termica che riempirà la cavità.

Solo una piccola frazione di questa fuoriuscirà dal foro. Pertanto, il foro fungerà da emettitore di radiazione termica.

1.2 IL CONCETTO DI CORPO NERO

1.2.4 Emissione di corpo nero da una cavità

In definitiva, il foro avrà le proprietà di superficie di un corpo nero e la radiazione emessa dal foro deve avere le caratteristiche di uno spettro di corpo nero alla temperatura T delle pareti, poiché questa è l'unica temperatura definita per il sistema.

Lo spettro emesso dal foro nella cavità può essere specificato in termini di radianza spettrale $R_T(\nu)$.

È più utile, tuttavia, specificare lo spettro della radiazione all'interno della cavità, detta radiazione di cavità, in termini di **densità di energia**, $\rho_T(\nu)d\nu$, che è definita come l'energia contenuta in un volume unitario della cavità a temperatura T nell'intervallo di frequenze $[\nu, \nu + d\nu]$.

È evidente che queste quantità devono essere proporzionali tra loro:

$$\rho_T(\nu) \propto R_T(\nu)$$

Quindi la radiazione all'interno di una cavità con le pareti a temperatura T ha le stesse caratteristiche di emissione di un corpo nero a temperatura T .

Teoricamente, è conveniente studiare la radiazione di corpo nero in termini di densità spettrale perché è possibile applicare argomenti generali per descrivere le proprietà della radiazione in cavità.

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

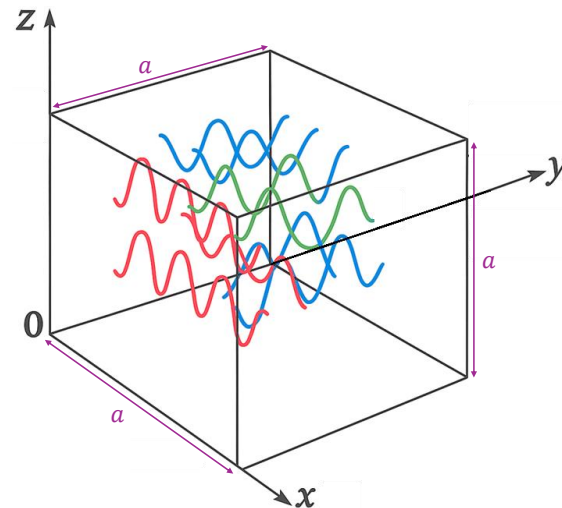
Poco dopo la fine del XIX secolo, Rayleigh e Jeans calcolarono la densità di energia della radiazione all'interno di una cavità (o corpo nero).

Consideriamo una cavità le cui pareti metalliche siano riscaldate uniformemente a una temperatura T .

Le pareti emettono radiazione elettromagnetica, emissione che ha origine, in prima approssimazione, dai moti accelerati degli elettroni all'interno del metallo, generati dall'agitazione termica. Tuttavia, non è necessario analizzare nel dettaglio il comportamento microscopico degli elettroni nelle pareti.

L'attenzione è rivolta piuttosto al comportamento delle onde elettromagnetiche presenti all'interno della cavità.

Poiché lo spettro di corpo nero non dipende dalla forma del corpo che lo genera, supponiamo che la cavità sia di forma cubica, con pareti perfettamente metalliche e con spigolo di lunghezza a , completamente riempita di radiazione elettromagnetica.

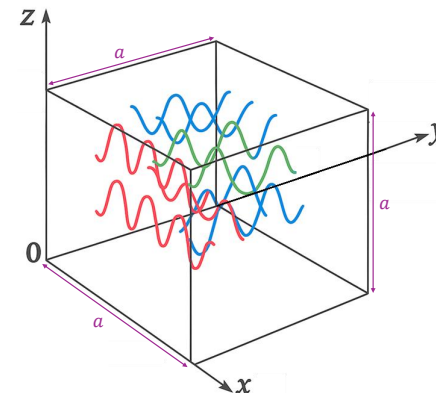


1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

Per semplificare ulteriormente lo studio della propagazione, la riconduciamo inizialmente a una sola dimensione, considerando la direzione x e le due pareti metalliche poste in $x = 0$ e $x = a$.

Le onde che si propagano lungo l'asse x impattano contro queste pareti e vengono riflesse, generando così una combinazione tra le onde incidenti e quelle riflesse all'interno dell'intervallo compreso tra le due pareti.



Poiché il vettore del campo elettrico $\vec{E}$ associato all'onde elettromagnetiche è perpendicolare alla direzione di propagazione, e poiché questa direzione è a sua volta perpendicolare alle due pareti considerate, $\vec{E}$ risulta parallelo a ciascuna delle due pareti.

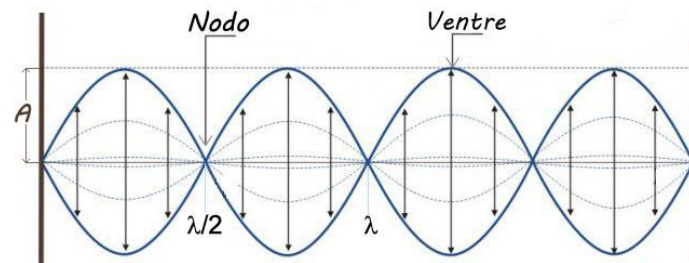
Ad ogni interazione con la parete, l'onda elettromagnetica perderà una parte della propria energia, fino a estinguersi dopo un certo numero di riflessioni.

Affinché $\vec{E}$ possa persistere all'interno della cavità, contribuendo alla densità di energia interna, è necessario che esso sia nullo in corrispondenza delle pareti situate in $x = 0$ e $x = a$.

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

Le frequenze per cui questa condizione è soddisfatta corrispondono a quelle di un'onda stazionaria lungo la direzione x , caratterizzata da nodi (punti di ampiezza nulla) proprio in $x = 0$ e $x = a$



Condizioni analoghe valgono anche per le altre due direzioni: l'onda stazionaria associata alla componente y deve presentare nodi nei punti $y = 0$ e $y = a$, mentre quella associata alla componente z deve avere nodi in $z = 0$ e $z = a$.

Tali condizioni impongono un vincolo sulle lunghezze d'onda ammissibili, e di conseguenza sulle possibili frequenze dello spettro di radiazione elettromagnetica all'interno della cavità.

Consideriamo ora il problema del conteggio delle onde stazionarie con nodi alle estremità della cavità, le cui lunghezze d'onda rientrano nell'intervallo $[\lambda, \lambda + d\lambda]$, corrispondente all'intervallo di frequenze $[\nu, \nu + d\nu]$.

Per semplificare il calcolo, ci concentreremo esclusivamente sulla componente x . Analizzeremo quindi il caso di una cavità unidimensionale di lunghezza a .

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

Il campo elettrico per un'onda stazionaria elettromagnetica unidimensionale può essere descritto matematicamente dalla funzione:

$$E(x, t) = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \operatorname{sen}(2\pi \nu t) \quad \text{con} \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$$

L'equazione rappresenta un'onda la cui ampiezza varia sinusoidalmente nello spazio e che oscilla nel tempo sinusoidalmente con frequenza ν .

Per le posizioni che soddisfano la relazione

$$\frac{2x}{\lambda} = n \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

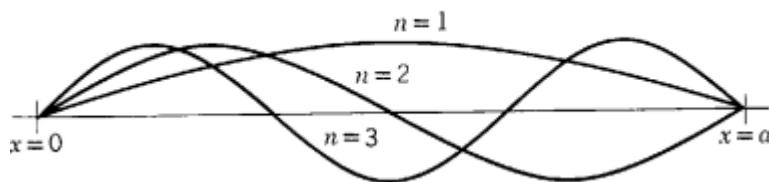
l'ampiezza dell'onda è nulla per ogni istante t ; a queste posizioni corrispondono nodi fissi, il che identifica la configurazione come un'onda stazionaria.

Ponendo l'origine dell'asse x in corrispondenza di un'estremità della cavità ($x = 0$) e imponendo che anche all'altra estremità ($x = a$) ci sia un punto di nodo, si ottiene una condizione di discretizzazione per la lunghezza d'onda λ , ovvero $\lambda = \frac{2a}{n}$.

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

Per questi valori consentiti, l'ampiezza delle onde stazionarie hanno l'aspetto mostrato in Figura.



In altre parole, le onde stazionarie ammesse all'interno della cavità (modi normali di vibrazione) sono quelle per cui la lunghezza del lato a è un multiplo intero di mezza lunghezza d'onda.

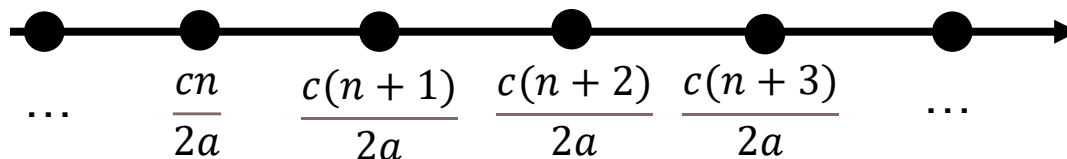
È conveniente proseguire l'analisi esprimendo le condizioni in termini di frequenze consentite, anziché di lunghezze d'onda. La relazione diventa:

$$\nu_n = \frac{cn}{2a}$$

$$\frac{2a}{\lambda} = n$$

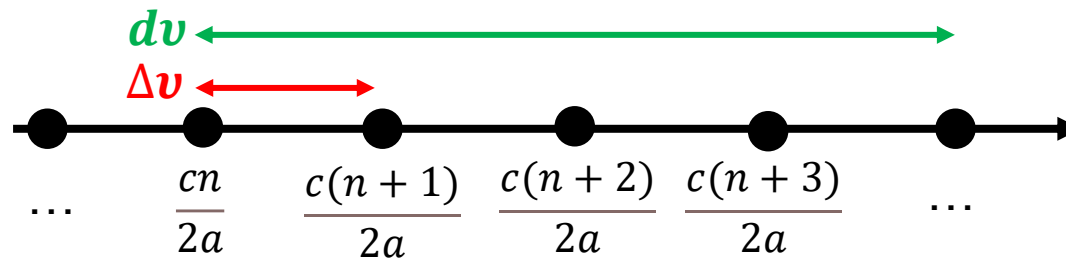
$$\lambda \nu = c$$

Possiamo visualizzare i valori ammessi di frequenza mediante un diagramma in cui, lungo un asse, viene segnato un punto per ciascuna frequenza consentita, ciascuna a sua volta associata a un determinato valore di n .



1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità



Tale diagramma è utile per calcolare il numero di frequenze consentite nell'intervallo $[\nu, \nu + d\nu]$, denomineremo come $N(\nu)d\nu$.

Calcoliamo prima la distanza tra due frequenze consecutive.

$$\Delta\nu = \nu_{n+1} - \nu_n = \frac{c(n+1)}{2a} - \frac{cn}{2a} = \frac{c}{2a}$$

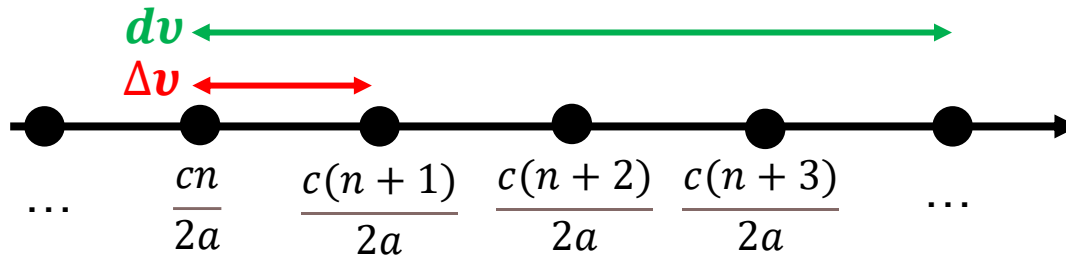
$$\nu_n = \frac{cn}{2a}$$

Poiché $\Delta\nu$ non dipende da n , ne segue che i punti sono distribuiti uniformemente lungo l'asse delle frequenze, e quindi il numero di punti all'interno dell'intervallo $d\nu$ sarà proporzionale a $d\nu$ ma non dipenderà da ν .

All'interno dell'intervallo $d\nu$ il numero di punti è calcolabile geometricamente come rapporto tra l'ampiezza dell'intervallo $d\nu$ e la distanza tra due punti consecutivi $\Delta\nu$.

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità



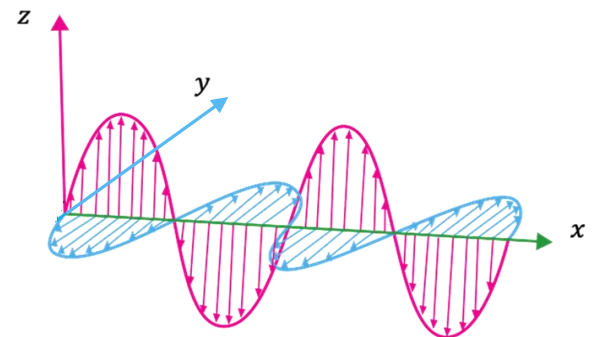
$$N(v)dv = \frac{dv}{\Delta v} = \frac{2a}{c} dv$$

$$\Delta v = \frac{c}{2a}$$

È necessario, tuttavia, moltiplicare il risultato per un ulteriore fattore 2, poiché a ciascuna frequenza consentita corrispondono due onde indipendenti, associate ai due possibili stati di polarizzazione dell'onda elettromagnetica.

Otteniamo quindi:

$$N(v)dv = \frac{4a}{c} dv$$



1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

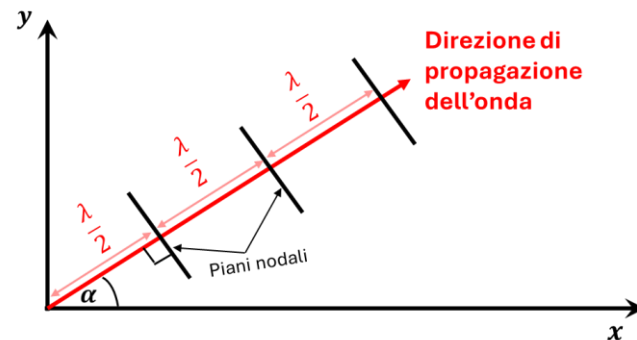
1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

Estendiamo ora il calcolo al caso di una cavità tridimensionale.

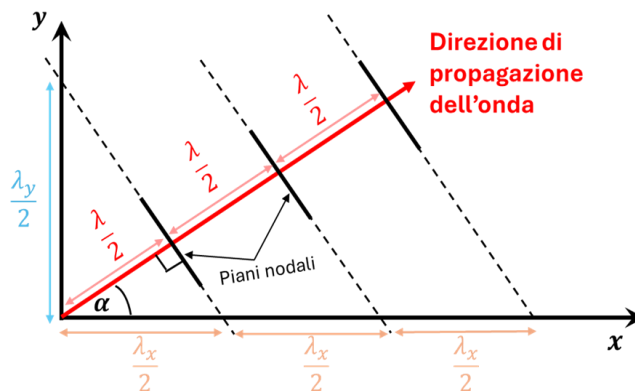
Consideriamo una radiazione di lunghezza d'onda λ che si propaga lungo una direzione formante gli angoli α, β, γ rispettivamente con gli assi x, y e z .

Affinché l'onda sia stazionaria, ciascuna delle sue tre componenti lungo gli assi deve soddisfare le condizioni di un'onda stazionaria.

Per semplicità, consideriamo solo il piano xy e rappresentiamo la direzione di propagazione dell'onda stazionaria che forma un angolo α con l'asse x . Indichiamo i piani corrispondenti ai nodi dell'onda, equidistanti tra loro di $\frac{\lambda}{2}$.



Proiettando questi piani sugli assi cartesiani, otteniamo le distanze nodali delle proiezioni dell'onda lungo gli assi x e y .



1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

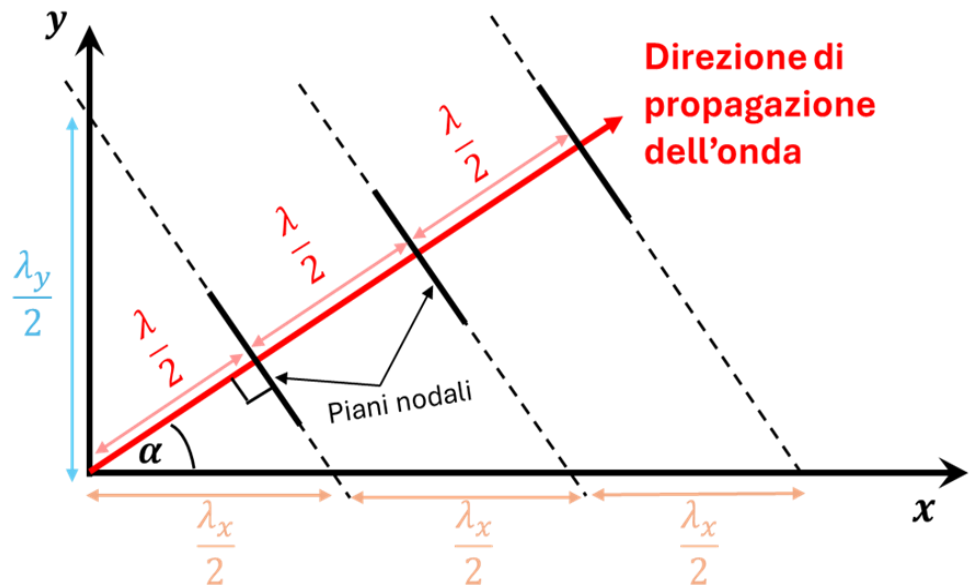
1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

Le proiezioni sugli assi definiscono le componenti λ_x , λ_y e λ_z della lunghezza d'onda lungo gli assi:

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_x}{2} \cos \alpha$$

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_y}{2} \cos \beta$$

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_z}{2} \cos \gamma$$



Affinché siano soddisfatte le condizioni per cui la componente lungo x presenti un nodo in $x = a$, quella lungo y in $y = a$ e quella lungo z in $z = a$, imponiamo che:

$$\frac{2a}{\lambda} = n$$

$$\frac{2x}{\lambda_x} = n_x \text{ per } x = a \text{ con } n_x = 1, 2, 3 \dots$$

$$\frac{2y}{\lambda_y} = n_y \text{ per } y = a \text{ con } n_y = 1, 2, 3 \dots$$

$$\frac{2z}{\lambda_z} = n_z \text{ per } z = a \text{ con } n_z = 1, 2, 3 \dots$$

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_x}{2} \cos \alpha$$

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_y}{2} \cos \beta$$

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_z}{2} \cos \gamma$$

$$\frac{2a}{\lambda_x} = n_x$$

$$\frac{2a}{\lambda_y} = n_y$$

$$\frac{2a}{\lambda_z} = n_z$$

Combinando queste ultime componente per componente, si ottiene:

$$\frac{2a}{\lambda} \cos \alpha = n_x$$

$$\frac{2a}{\lambda} \cos \beta = n_y$$

$$\frac{2a}{\lambda} \cos \gamma = n_z$$

Elevando al quadrato entrambi i membri e sommando le equazioni tra loro:

$$\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$$

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

$$\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$$

Usando la relazione per gli angoli solidi $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$:

$$\frac{2a}{\lambda} = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Questa equazione impone un vincolo sulle possibili lunghezze d'onda della radiazione elettromagnetica presente all'interno della cavità. Esprimiamola in termini di frequenze:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2a} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Dobbiamo ora determinare il numero di frequenze ammesse all'interno di un dato intervallo. A differenza del caso unidimensionale, in cui i punti sono distribuiti uniformemente lungo un singolo asse x , nel caso tridimensionale consideriamo una distribuzione uniforme tridimensionale di punti con coordinate n_x , n_y e n_z che assumono valori interi lungo ciascuno dei tre assi cartesiani.

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

Ogni punto nello spazio di coordinate (n_x, n_y, n_z) corrisponde ad una particolare onda stazionaria tridimensionale consentita, ovvero ad una frequenza consentita.

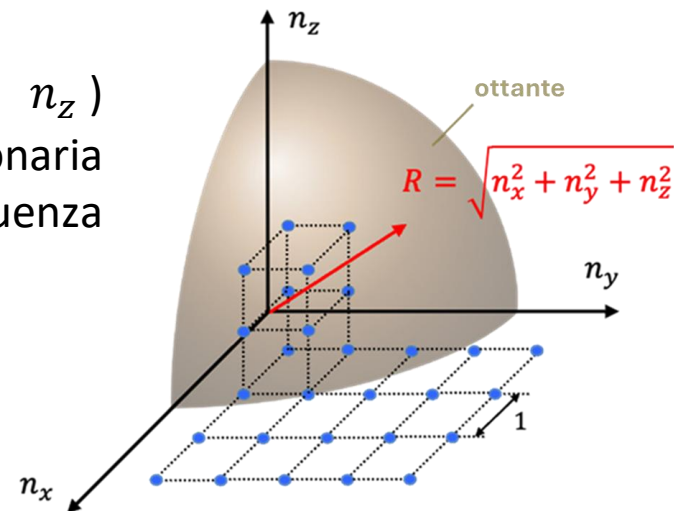
Quindi $N(v)dv$ — il numero di frequenze consentite tra v e $v + dv$ — corrisponderà a $N(r)dr$, ovvero al numero di punti contenuti tra gusci concentrici di raggio r e $r + dr$, dove:

$$r = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Sostituendo nell'espressione precedente:

$$v = \frac{c}{2a} r$$

Per determinare $N(r)dr$, dobbiamo contare il numero di punti all'interno del volume compreso tra le due sfere di raggio r e $r + dr$, che è pari a $4\pi r^2 dr$.

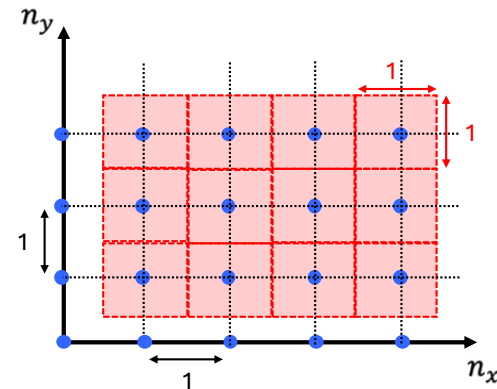


$$v = \frac{c}{2a} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.1 Le onde stazionarie in cavità

Questo conteggio può essere effettuato geometricamente come il rapporto tra il volume considerato ($4\pi r^2 dr$) e il volume occupato da un singolo punto nello spazio (n_x, n_y, n_z), che è uguale a 1, come rappresentato schematicamente in Figura per il piano (n_x, n_y), preso come esemplificativo.



Poiché consideriamo solo 1/8 del guscio in quanto n_x, n_y e n_z possono assumere solo valori positivi, ne segue che:

$$N(r)dr = \frac{1}{8} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \pi r^2 dr$$

$$v = \frac{c}{2a} r$$

Usando la relazione precedente possiamo esprimere dr come: $dr = \frac{2a}{c} dv$

Sostituendo nella precedente:

$$N(v)dv = N(r)dr = \frac{1}{2} \pi r^2 dr = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{2a}{c} v \right)^2 \frac{2a}{c} dv = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2a}{c} \right)^3 v^2 dv$$

Ricordano il fattore 2 derivante dai due stati di polarizzazione consentiti:

$$N(v)dv = \frac{8\pi V}{c^3} v^2 dv$$

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.2 La legge di Rayleigh-Jeans

Il passo successivo consiste nella valutazione dell'energia totale media di ciascuna onda stazionaria di frequenza ν . L'energia di un'onda è proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza del campo elettrico.

Tuttavia, per un sistema composta da un gran numero di entità fisiche dello stesso tipo, che sono in equilibrio termico tra loro alla temperatura T , la fisica classica fornisce una previsione molto precisa sui valori medi delle energie di ciascuna entità.

Questo è il caso che ci riguarda, poiché la moltitudine di onde stazionarie che costituiscono la radiazione termica all'interno della cavità sono entità dello stesso tipo e si trovano in equilibrio termico tra loro alla temperatura T delle pareti della cavità. L'equilibrio termico è garantito dal fatto che le pareti della cavità assorbono e irradiano continuamente, scambiando gradualmente l'energia necessaria per mantenere tale equilibrio.

Questa previsione è diretta conseguenza dalla teoria cinetica classica ed è chiamata **legge di equipartizione dell'energia**, che afferma che l'energia cinetica media di ogni entità per grado di libertà è $kT/2$, dove $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ è detta costante di Boltzmann.

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITÀ'

1.3.2 La legge di Rayleigh-Jeans

Nel caso in esame, le entità sono onde stazionarie, che possiedono un grado di libertà rappresentato dalle loro ampiezze del campo elettrico. Pertanto, in media, le loro energie cinetiche hanno tutte lo stesso valore $kT/2$.

Tuttavia, ogni onda stazionaria che oscilla sinusoidalmente può essere interpretata come un oscillatore classico, la cui energia totale è il doppio della sua energia cinetica media. Di conseguenza, ciascuna onda stazionaria nella cavità ha, secondo la legge di equipartizione, un'energia totale media $\bar{E}$ pari a:

$$\bar{E} = KT$$

Il punto fondamentale da notare è che l'energia totale media $\bar{E}$ è la stessa per tutte le onde stazionarie nella cavità, indipendentemente dalle loro frequenze.

La densità di energia $\rho_T(\nu) \propto R_T(\nu)$ nell'intervallo di frequenze $[\nu, \nu + d\nu]$ dello spettro del corpo nero di una cavità alla temperatura T è esprimibile come il prodotto dell'energia media $\bar{E}$ per onda stazionaria per il numero di onde stazionarie nell'intervallo di frequenza, diviso per il volume V della cavità.

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{KT \cdot N(\nu)d\nu}{V} = \frac{8\pi\nu^2 KT}{c^3} d\nu$$

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu$$

1.3 TEORIA CLASSICA DELLA RADIAZIONE DI CAVITA'

1.3.2 La legge di Rayleigh-Jeans

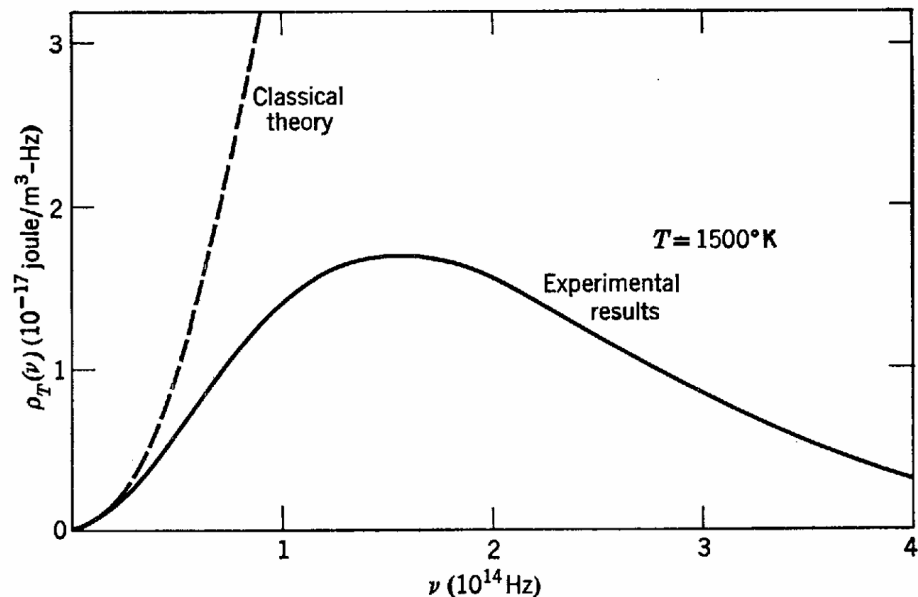
Questa è la **formula di Rayleigh-Jeans** per la radiazione del corpo nero.

La Figura confronta le previsioni di Eq. 1.23 con i dati sperimentali, evidenziando una chiara discrepanza.

$$\rho_T(\nu) = \frac{8\pi\nu^2 K T}{c^3}$$

Nel limite delle basse frequenze, lo spettro classico si avvicina ai risultati sperimentali, ma con l'aumento della frequenza, la previsione teorica diverge all'infinito!

Gli esperimenti, invece, mostrano che la densità di energia rimane sempre finita, come è ovvio, e che essa tende a zero a frequenze molto elevate.



Il comportamento irrealistico della previsione teorica alle alte frequenze è noto in fisica come "**catastrofe ultravioletta**", un termine che mette pesantemente in evidenza il fallimento della teoria classica.

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.1 L'ipotesi di Planck

Nel tentativo di risolvere la discrepanza tra teoria ed esperimento, Planck considerò la possibilità di una violazione della legge di equipartizione dell'energia su cui si basava la teoria classica.

La Figura evidenzia chiaramente che la formula di Rayleigh-Jeans fornisce previsioni corrette solo per basse frequenze.

Di conseguenza, si può ipotizzare che:

$$\bar{E} \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} KT$$

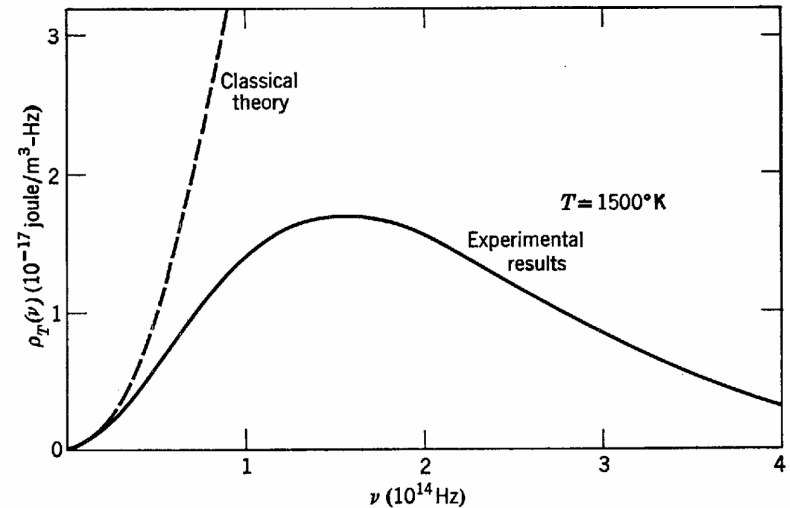
cioè che l'energia totale media tenda a KT quando la frequenza si avvicina a zero.

La discrepanza osservata alle alte frequenze potrebbe essere risolta se, per qualche ragione, esistesse un limite superiore tale che:

$$\bar{E} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$$

$$\rho_T(\nu) = \frac{8\pi\nu^2 KT}{c^3}$$

In altre parole, Planck intuì che, nelle condizioni caratteristiche della radiazione di corpo nero, l'energia media delle onde stazionarie doveva dipendere dalla frequenza, assumendo la forma di una funzione $\bar{E}(\nu)$ che soddisfacesse i comportamenti limite appena descritti.



1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.1 L'ipotesi di Planck

Questa ipotesi è in contrasto con la legge di equipartizione dell'energia, secondo la quale l'energia media è indipendente dalla frequenza.

Per comprendere meglio, consideriamo l'origine di tale legge: essa deriva, in ultima analisi, da un risultato più generale della meccanica statistica classica, ovvero dalla distribuzione di Boltzmann.

La funzione di distribuzione di Boltzmann è espressa in termini di $P(E)dE$, che rappresenta la probabilità di trovare una certa entità fisica del sistema (nel nostro caso, le onde stazionarie in una cavità cubica) con energia nell'intervallo $[E, E + dE]$. Essa è data da:

$$P(E) = \frac{e^{-\frac{E}{KT}}}{KT}$$

Si assume che il sistema sia composto da un gran numero di entità identiche in equilibrio termico alla temperatura T .

Nel nostro caso specifico, il sistema considerato è costituito da semplici onde stazionarie armoniche in equilibrio termico all'interno di una cavità di corpo nero.

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.1 L'ipotesi di Planck

Il valore medio $\bar{E}$ dell'energia di tali onde può essere espresso come

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} EP(E)dE}{\int_0^{\infty} P(E)dE}$$

L'integrando al numeratore rappresenta l'energia E ponderata con la probabilità che un'entità possieda tale energia. Integrando su tutte le possibili energie si ottiene il valore medio dell'energia. Il denominatore rappresenta l'integrale della probabilità su tutto il dominio energetico, che deve essere pari a uno per la normalizzazione della distribuzione.

Calcolando l'integrale al numeratore, si ottiene proprio la legge di equipartizione dell'energia: $\bar{E} = KT$.

Il grande merito di Planck fu quello di intuire che il limite desiderato (Eq. 1.25) poteva essere ottenuto modificando il calcolo che porta da $P(E)$ a $\bar{E}$, trattando l'energia E non più come una variabile continua, ma come una variabile discreta.

In termini quantitativi, questo cambiamento consiste nel riscrivere l'espressione di $\bar{E}$ non più in forma integrale, ma come somma discreta.

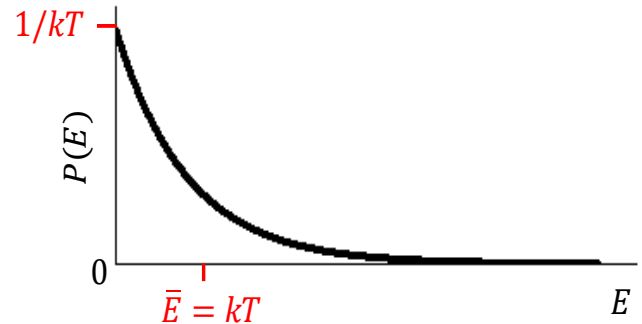
Come vedremo, questo passaggio non è particolarmente complicato, ma sarà molto più istruttivo esaminare prima la rappresentazione grafica dell'ipotesi introdotta da Planck.

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.1 L'ipotesi di Planck

Esaminiamo $P(E) = \frac{e^{-\frac{E}{kT}}}{kT}$

Il valore massimo della probabilità, pari a $1/kT$, si ha per $E = 0$, che corrisponde al valore più probabile dell'energia. È importante non confondere questo valore con l'energia media $\bar{E}$, che risulta invece pari a kT .

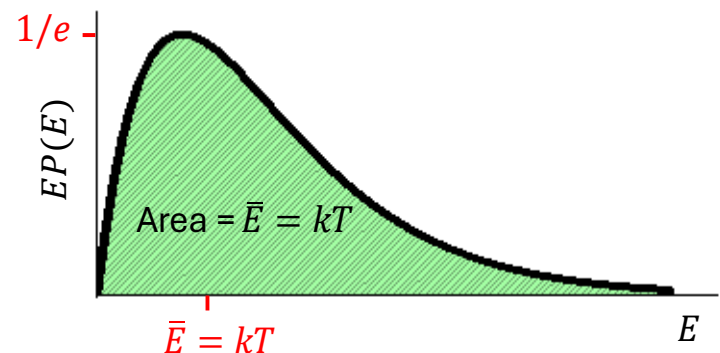


All'aumentare dell'energia, il valore di $P(E)$ diminuisce gradualmente per azzerarsi quando $E \rightarrow \infty$.

Il valore medio dell'energia ottenuto da un grande numero di misurazioni sarà quindi maggiore di zero: sebbene sia molto probabile che un'entità possieda energia nulla, numerose misurazioni di E forniranno valori superiori a zero.

Il grafico mostra proprio $\bar{E}$, calcolato tramite l'integrazione.

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} EP(E)dE}{\int_0^{\infty} P(E)dE}$$



1.4 LA TEORIA DI PLANCK

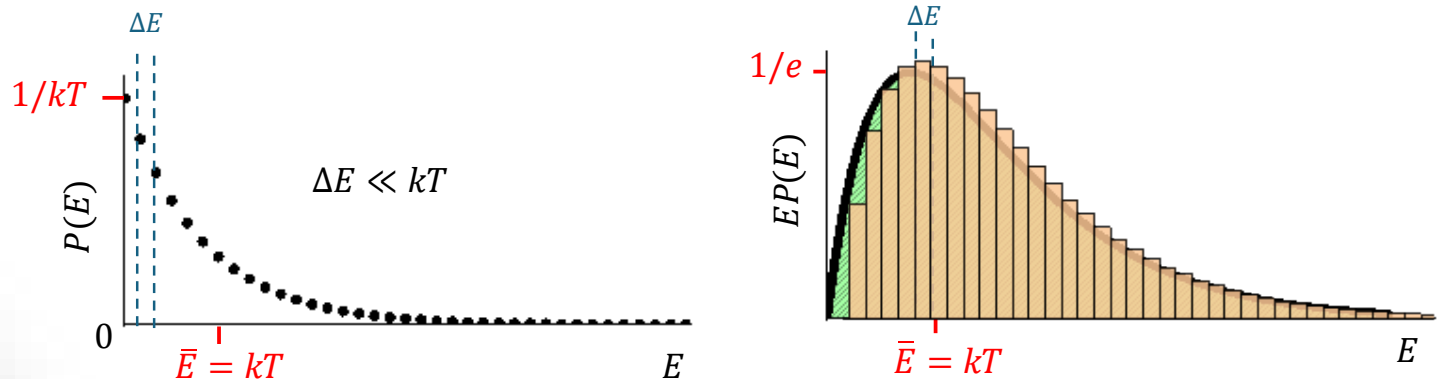
1.4.1 L'ipotesi di Planck

Planck ipotizzò che l'energia E potesse assumere solo determinati valori discreti, piuttosto che variare in modo continuo, e che questi valori fossero equidistanti, ossia:

$$E = 0, \Delta E, 2\Delta E, 3\Delta E \dots$$

La prima domanda che sorge spontanea è: qual è il valore di ΔE ? Per rispondere, possiamo provare a ricostruire la curva $EP(E)$, formulando alcune ipotesi sul valore di ΔE rispetto al valor medio $\bar{E} = kT$.

Se $\Delta E \ll kT$, la curva può essere riprodotta con grande accuratezza, e la differenza tra la descrizione continua e quella discreta risulta trascurabile.

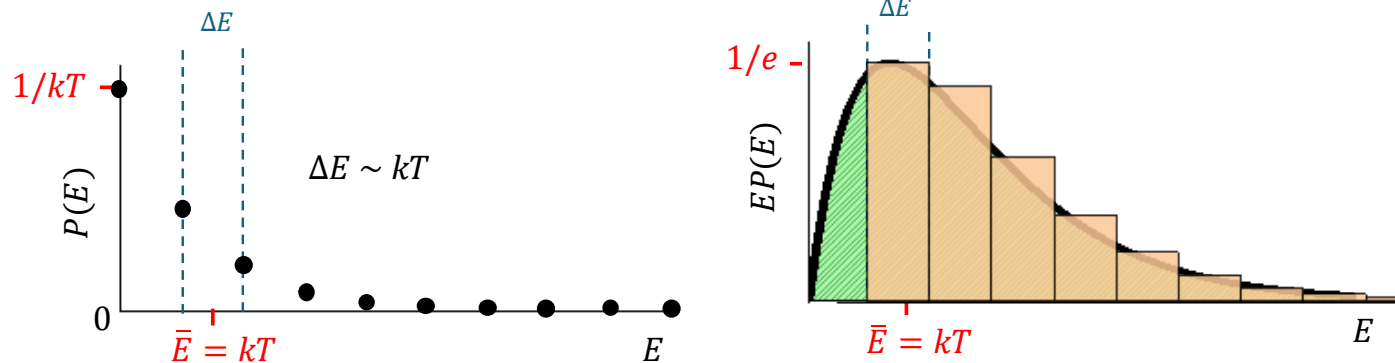


I pallini neri simboleggiano i soli valori di E consentiti, a seguito della discretizzazione. Naturalmente, il primo rettangolo corrispondente a $E = 0$ ha altezza nulla.

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.1 L'ipotesi di Planck

Se $\Delta E \sim KT$, la maggior parte delle entità ha energia $E = 0$, poiché $P(E)$ risulta piuttosto bassa già al primo valore energetico consentito diverso da zero. Di conseguenza, le entità con energia nulla contribuiscono in modo predominante al calcolo dell'energia media $\bar{E}$. Ci aspettiamo quindi che $\bar{E} < KT$.

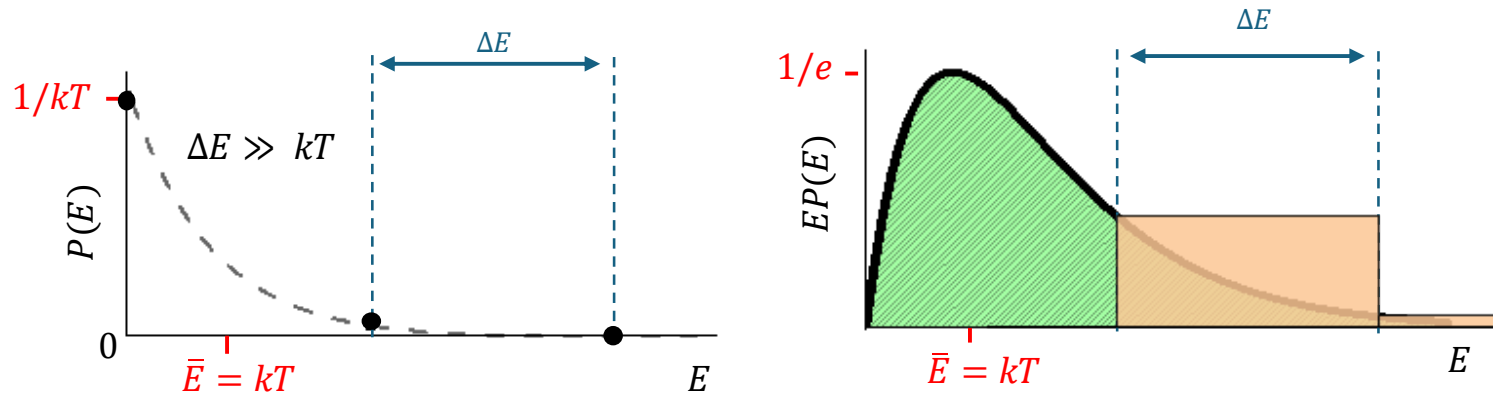


L'effetto della quantizzazione diventa però particolarmente evidente nel caso in cui ipotizziamo che $\Delta E \gg KT$.

In questo caso, la probabilità di trovare un'entità con un qualsiasi valore di energia diverso da zero è trascurabile, poiché $P(E)$ risulta estremamente piccola per tutti questi livelli. Di conseguenza, il valore medio dell'energia sarà molto inferiore a KT , ovvero $\bar{E} \ll KT$.

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.1 L'ipotesi di Planck



Ricapitolando, Planck osservò che si poteva ottenere $\bar{E} \sim KT$ quando la differenza tra due energie adiacenti ΔE è piccola, mentre $\bar{E} \sim 0$ quando ΔE è grande.

Poiché era necessario ottenere il primo risultato per basse frequenze ν , e il secondo per alte frequenze, risultava evidente che ΔE dovesse essere una funzione crescente della frequenza. Planck propose dunque l'ipotesi più semplice, assumendo che le due quantità fossero proporzionali, ovvero:

$$\Delta E \propto \nu$$

Scrivendola come un'equazione si ha:

$$\Delta E = h\nu$$

con h nota come costante di Planck.

$$\bar{E} \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} KT$$

$$\bar{E} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$$

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.2 Calcolo della formula di Planck

Calcoliamo il valore medio $\bar{E}$ dell'energia come una sommatoria, adottando l'ipotesi di Planck:

$$\bar{E} = \frac{\sum_0^{\infty} EP(E)}{\sum_0^{\infty} P(E)}$$

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} EP(E)dE}{\int_0^{\infty} P(E)dE}$$

La discretizzazione dei valori di energia ci porta a scrivere $E = nh\nu$. Sostituendo anche l'espressione per $P(E)$

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nh\nu}{KT} e^{-\frac{nh\nu}{KT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{KT} e^{-\frac{nh\nu}{KT}}}$$

$$P(E) = \frac{e^{-\frac{E}{KT}}}{KT}$$

Imponendo $\alpha = \frac{h\nu}{KT}$, la riscriviamo come:

$$\bar{E} = KT \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}$$

Notiamo che l'argomento della sommatoria al numeratore possiamo esprimerlo come:

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.2 Calcolo della formula di Planck

$$n\alpha e^{-n\alpha} = -\alpha \frac{d}{d\alpha} e^{-n\alpha}$$

$$\bar{E} = KT \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}$$

Sostituendo:

$$\bar{E} = KT \frac{-\sum_{n=0}^{\infty} \alpha \frac{d}{d\alpha} e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}$$

Poiché la sommatoria è solo sull'indice n , possiamo portare l'operazione di derivata fuori dalla sommatoria:

$$\bar{E} = KT \frac{-\alpha \frac{d}{d\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}$$

Questa può essere riscritta richiamando la funzione logaritmo:

$$\bar{E} = KT \left[-\alpha \frac{d}{d\alpha} \ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} \right) \right]$$

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.2 Calcolo della formula di Planck

$$\bar{E} = KT \left[-\alpha \frac{d}{d\alpha} \ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} \right) \right]$$

Ricordando la definizione di α :

$$\alpha = \frac{h\nu}{KT}$$

$$\bar{E} = -h\nu \frac{d}{d\alpha} \ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} \right)$$

Analizziamo la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}$.

E' convergente perché il suo argomento è minore di uno e quindi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}$$

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.2 Calcolo della formula di Planck

$$\bar{E} = -hv \frac{d}{d\alpha} \ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} \right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}$$

Sostituendo:

$$\bar{E} = -hv \frac{d}{d\alpha} \ln \left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha}} \right) = -hv(1 - e^{-\alpha}) \frac{(-1)e^{-\alpha}}{(1 - e^{-\alpha})^2} = \frac{hve^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} = \frac{hv}{e^{\alpha} - 1}$$

Ovvero:

$$\bar{E}(hv) = \frac{hv}{e^{\frac{hv}{KT}} - 1}$$

$$\alpha = \frac{hv}{KT}$$

Verifichiamo se i limiti attesi sono rispettati:

Per $\frac{hv}{KT} \rightarrow 0$, l'esponenziale $e^{\frac{hv}{KT}} \sim 1 + \frac{hv}{KT}$, da cui $\bar{E} \rightarrow KT$,
come predetto dal limite classico.

$$\bar{E} \xrightarrow{v \rightarrow 0} KT$$

$$\bar{E} \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0$$

Per $\frac{hv}{KT} \rightarrow \infty$, si ottiene immediatamente che $\bar{E} \rightarrow 0$

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.2 Calcolo della formula di Planck

La formula che poi ottenne immediatamente per la densità di energia nello spettro del corpo nero, usando il suo risultato per $\bar{E}(h\nu)$ anziché il classico valore $\bar{E} = KT$ nella formula di Rayleigh-Jeans è

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} d\nu$$

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2 KT}{c^3} d\nu$$

$$\bar{E}(h\nu) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1}$$

che rappresenta la **legge di Planck per il corpo nero**.

È importante sottolineare che Planck non modificò la distribuzione di Boltzmann.

"Tutto" ciò che fece fu considerare l'energia delle onde elettromagnetiche stazionarie, che oscillano sinusoidalmente nel tempo, come una grandezza discreta anziché continua.

Adesso esamineremo il confronto tra la teoria proposta da Planck e i risultati sperimentali relativi alla misura dell'emissione di corpo nero, nonché le principali implicazioni derivanti dall'applicazione della sua teoria.

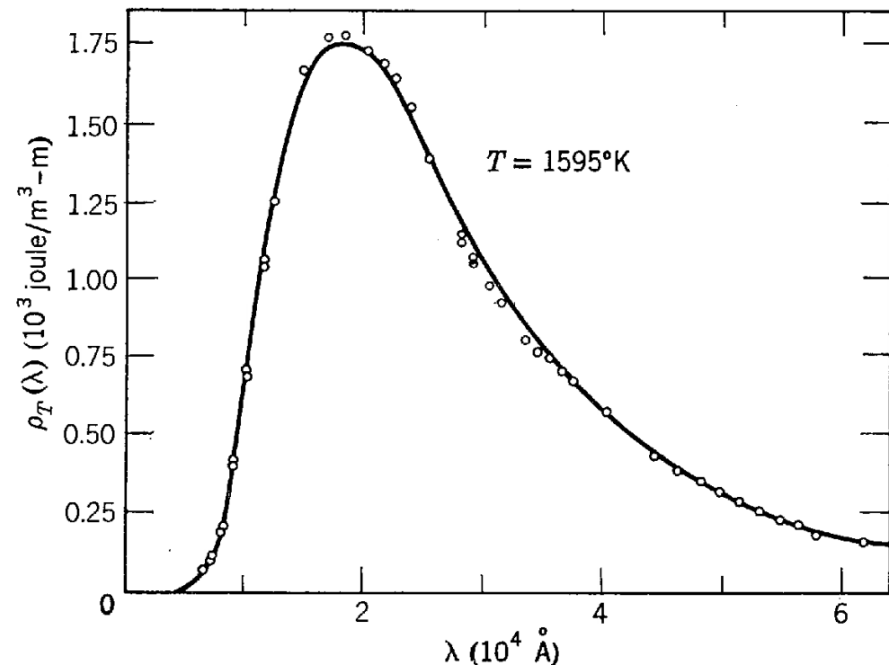
1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.3 Confronto con i risultati sperimentali

La Figura mostra un confronto del risultato della teoria di Planck (espresso in termini di lunghezza d'onda) con i risultati sperimentali per una temperatura $T = 1595^\circ\text{K}$.

I risultati sperimentali furono in completo accordo con la formula di Planck a tutte le temperature.

Successivi lavori numerici consentirono a Planck di determinare il valore della costante h , individuando il valore che meglio si adattava ai dati sperimentali.



Il valore ottenuto era estremamente vicino a quello attualmente accettato:

$$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

universalmente accettata come **costante di Planck**.

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.3 Confronto con i risultati sperimentali

È utile esprimere la legge di corpo nero in funzione della lunghezza d'onda λ , utilizzando la relazione.

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

che in forma differenziale diventa:

$$d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu$$

La relazione tra la densità di energia espressa in funzione della frequenza e quella espressa in funzione della lunghezza d'onda è:

$$\rho_T(\nu)d\nu = -\rho_T(\lambda)d\lambda$$

dove il segno meno identifica il fatto che $d\nu$ e $d\lambda$ hanno segno opposto.

Quindi:

$$\rho_T(\lambda) = -\rho_T(\nu) \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{c}{\lambda^2} \rho_T(\nu) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

Sia la legge di spostamento di Wien che la legge di Stefan-Boltzmann possono essere ricavate a partire dalla legge di Planck.

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.3 Confronto con i risultati sperimentali

Per la legge di spostamento di Wien, occorre determinare la λ_{MAX} soluzione dell'equazione $\frac{\partial \rho_T(\lambda)}{\partial \lambda} = 0$

$$\rho_T(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1}$$

$$\frac{\partial \rho_T(\lambda)}{\partial \lambda} = 8\pi hc \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1} \right] = 8\pi hc \left\{ -\frac{5}{\lambda^6} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1} + \frac{1}{\lambda^5} \left[\frac{-e^{\frac{hc}{\lambda KT}} \frac{hc}{KT} \left(-\frac{1}{\lambda^2} \right)}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1 \right)^2} \right] \right\}$$

Imponiamo che il termine tra parentesi graffa sia nullo.

Scriviamolo con un denominatore comune:

$$\frac{-5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1 \right) + \frac{hc}{\lambda KT} e^{\frac{hc}{\lambda KT}}}{\lambda^6 \left(e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1 \right)^2} = 0$$

e imponiamo che il numeratore sia nullo:

$$-5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1 \right) + \frac{hc}{\lambda KT} e^{\frac{hc}{\lambda KT}} = 0$$

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.3 Confronto con i risultati sperimentali

Introduciamo la variabile $x = \frac{hc}{\lambda KT}$,

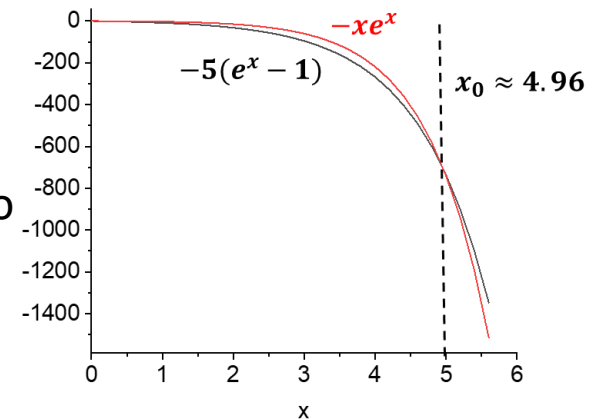
$$-5\left(e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1\right) + \frac{hc}{\lambda KT} e^{\frac{hc}{\lambda KT}} = 0$$

$$-5(e^x - 1) + xe^x = 0$$

L'equazione può essere risolta graficamente e restituisce:

Quindi $\lambda_{MAX} = \frac{hc}{x_0 KT}$ da cui si ottiene la legge di spostamento di Wien:

$$\lambda_{MAX} T \approx 0.2 \frac{hc}{K}$$



La legge di Stefan-Boltzmann si ottiene integrando la legge di Planck sull'intero spettro delle lunghezze d'onda.

$$R_T = \int_0^\infty \rho_T(\nu) d\nu$$

L'integrale può essere risolto nel campo complesso e restituisce una dipendenza dalla quarta potenza della temperatura con la costante di proporzionalità pari a $\frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}$, in perfetto accordo con il valore determinato sperimentalmente della costante di Stefan-Boltzmann $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$.

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.4 Il postulato di Planck e le sue implicazioni

Il contributo di Planck può essere espresso come postulato:

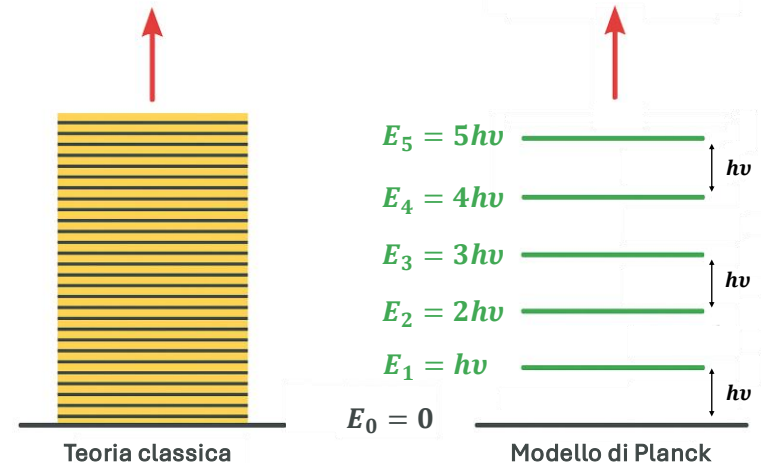
Ogni entità fisica con un solo grado di libertà, la cui "coordinata" sia una funzione sinusoidale del tempo (cioè, che compia oscillazioni armoniche semplici), può assumere soltanto valori di energie totali E che soddisfano la relazione:

$$E = nh\nu$$

con $n = 0, 1, 2, 3 \dots$, ν frequenza dell'oscillazione e h costante universale.

La parola coordinata è usata nel suo senso generale per indicare qualsiasi grandezza che descriva la condizione istantanea dell'entità.

Un diagramma dei livelli energetici, come mostrato in Figura, offre un metodo pratico per rappresentare il comportamento di un'entità che segue questo postulato. In tale diagramma, ciascuno dei possibili stati energetici dell'entità è rappresentato da una linea orizzontale.



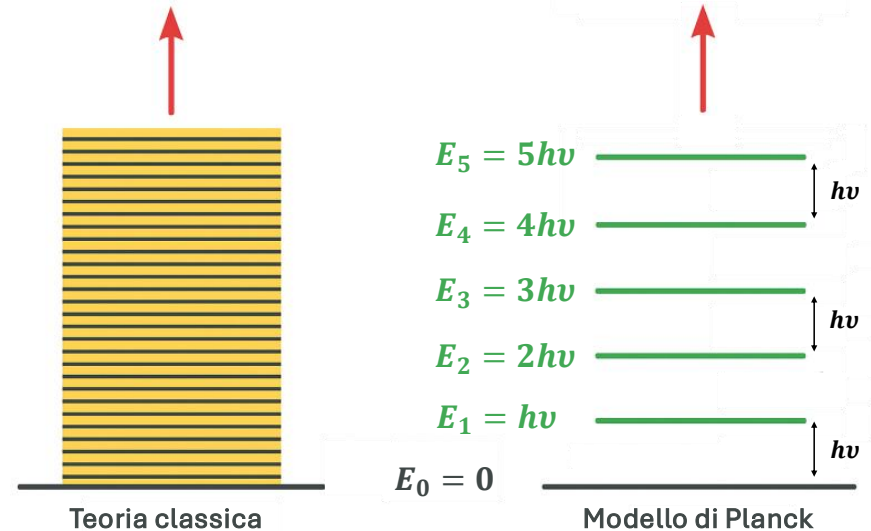
La distanza tra ciascuna linea e la linea a energia nulla ($E_0 = 0$) è proporzionale all'energia totale corrispondente.

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.4 Il postulato di Planck e le sue implicazioni

Un'entità che segue oscillazioni armoniche semplici può possedere solo energie totali discrete, come $E = 0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu \dots$, in accordo con il postulato di Planck.

Si dice che l'energia dell'entità che obbedisce al postulato di Planck è quantizzata, gli stati energetici consentiti sono chiamati **stati quantistici** e l'intero n è chiamato **numero quantico**.



Se l'entità perde energia, effettuerà una sequenza di transizioni verso livelli energetici inferiori nel diagramma; al contrario, se acquista energia, salirà verso livelli energetici superiori.

Secondo la fisica classica, invece, l'entità può avere qualsiasi energia compresa tra zero e infinito, e il diagramma classico dell'energia consisterebbe in un continuo di linee che si estendono da zero verso l'infinito.

1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.4 Il postulato di Planck e le sue implicazioni

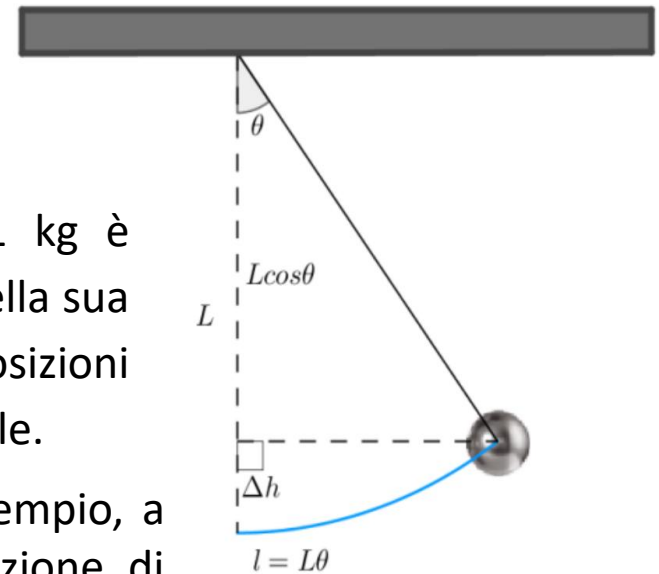
Non ci sono dubbi che la fisica classica è stata elaborata studiando sistemi fisici il cui comportamento non richiede l'adozione del postulato di Planck. Com'è possibile? Proviamo a valutarlo con un esempio.

Consideriamo un normale pendolo che esegue semplici oscillazioni armoniche. E' intuitivo pensare che questo sistema possieda una gamma continua di energie. Prima di accettare questa argomentazione, però, è opportuno fare alcuni semplici calcoli numerici riguardanti tale sistema.

ESERCIZIO

Un pendolo costituito da una massa di 0.01 kg è sospeso ad un filo lungo 0.1 m. Sia l'ampiezza della sua oscillazione tale che la corda nelle sue posizioni estreme formi un angolo di 0.1 rad con la verticale.

L'energia del pendolo diminuisce, ad esempio, a causa degli effetti di attrito. La diminuzione di energia osservata è continua o discontinua?



1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.4 Il postulato di Planck e le sue implicazioni

La frequenza di oscillazione del pendolo è pari a:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9.8 \text{ m/s}^2}{0.1 \text{ m}}} = 1.6 \text{ Hz}$$

L'energia del pendolo è, al massimo della sua energia potenziale, pari a:

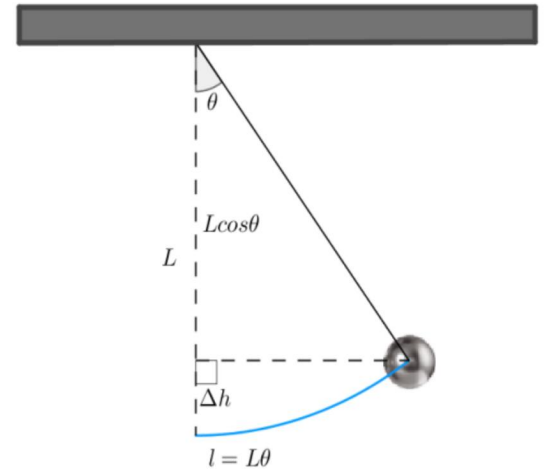
$$mg\Delta h = mgL(1 - \cos\theta) = 0.01 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0.1 \text{ m} \times (1 - \cos 0.1) = 5 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

Se supponiamo di applicare il postulato di Planck, l'energia del pendolo è quantizzata e le variazioni di energia avvengono per salti pari a:

$$\Delta E = h\nu = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \times 1.6 \text{ Hz} = 10^{-33} \text{ J}$$

Valutiamo il rapporto:

$$\frac{\Delta E}{E} \approx 2 \cdot 10^{-29}$$



1.4 LA TEORIA DI PLANCK

1.4.4 Il postulato di Planck e le sue implicazioni

$$\frac{\Delta E}{E} \approx 2 \cdot 10^{-29}$$

Quindi, per misurare la discretezza nella diminuzione di energia dobbiamo misurare l'energia meglio di due parti su 10^{29} . È evidente che anche l'attrezzatura sperimentale più sensibile è totalmente incapace di apprezzare questa risoluzione energetica.

Concludiamo che gli esperimenti che coinvolgono un pendolo ordinario non possono determinare se il postulato di Planck è valido o meno. Lo stesso vale per gli esperimenti su tutti gli altri sistemi meccanici macroscopici. L'ordine di grandezza di h rende la granulosità dell'energia troppo fine per essere distinta da un continuum energetico.

In effetti, h potrebbe anche essere zero per i sistemi classici e, infatti, un modo per ridurre le formule quantistiche ai loro limiti classici sarebbe quello di mandare $h \rightarrow 0$ in queste formule. Solo quando consideriamo sistemi in cui ν è molto grande e/o E è sufficientemente piccolo tale per cui $\Delta E = h\nu$ è dell'ordine di E siamo in grado di verificare il postulato di Planck.

Un esempio è, ovviamente, le onde stazionarie ad alta frequenza nella radiazione del corpo nero. Molti altri esempi verranno presi in considerazione nei capitoli successivi.