



CAPITOLO 2

LA NATURA CORPUSCOLARE DELLA LUCE

2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

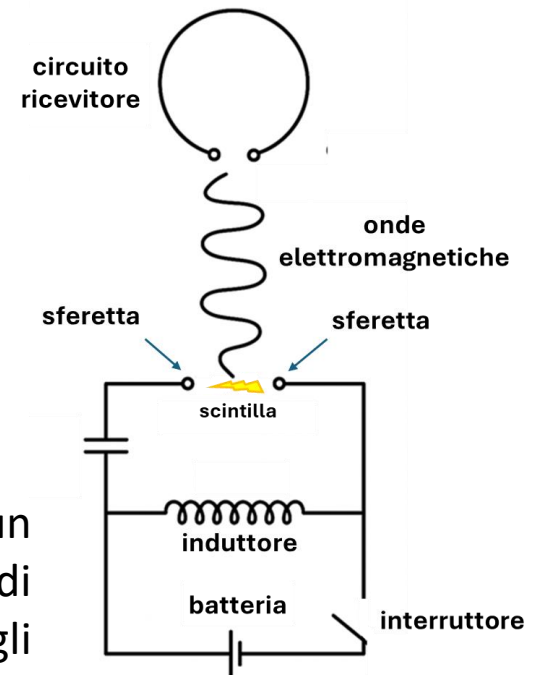
2.1.1 Gli esperimenti di Hertz

Tra il 1886 e il 1887, il fisico tedesco Heinrich Rudolf Hertz condusse una serie di esperimenti fondamentali che confermarono l'esistenza delle onde elettromagnetiche, come previsto dalle equazioni di James Clerk Maxwell.

Utilizzando un oscillatore a scintilla per generare onde elettromagnetiche e un risonatore per rilevarle (Figura), Hertz dimostrò che queste onde potevano essere riflesse, rifratte e polarizzate, comportandosi in modo analogo alla luce visibile.

Misurando la velocità di propagazione delle onde, Hertz trovò che essa coincideva con quella della luce, fornendo così una prova sperimentale della natura elettromagnetica della luce stessa.

Nel corso di questi esperimenti, Hertz osservò un fenomeno curioso: una scarica elettrica tra due elettrodi avveniva più facilmente quando la superficie di uno degli elettrodi veniva illuminata con luce ultravioletta.



Questo effetto, noto come **effetto fotoelettrico**, descrive in generale l'emissione di elettroni da una superficie metallica in seguito all'esposizione alla luce. Sebbene Hertz non approfondì ulteriormente questo fenomeno, la sua scoperta aprì la strada a studi successivi.

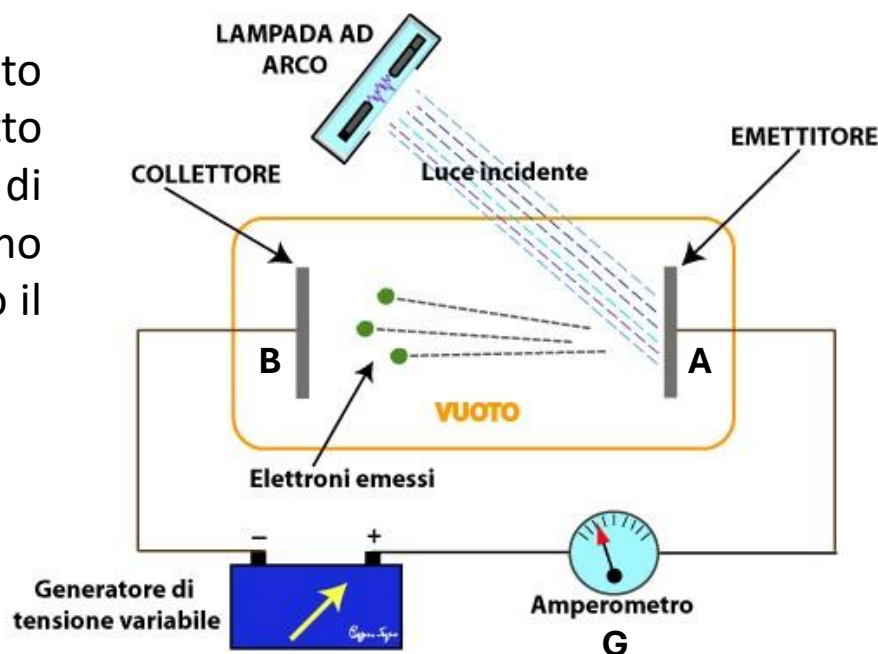
2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

2.1.2 L'esperimento di Lenard e le contraddizioni con la teoria classica

Nel 1902 Philipp Lenard avviò una serie di esperimenti per determinare come l'energia degli elettroni emessi per effetto fotoelettrico (fotoelettroni) dipendesse dall'intensità della luce.

La Figura mostra lo schema dell'apparato utilizzato da Lenard per studiare l'effetto fotoelettrico. All'interno di un involucro di vetro, due piastre metalliche (elettrodi) sono disposte in un ambiente in cui è stato creato il vuoto.

Un fascio di luce monocromatica proveniente da una lampada ad arco colpisce la piastra A (emettitore), inducendo l'emissione di fotoelettroni.



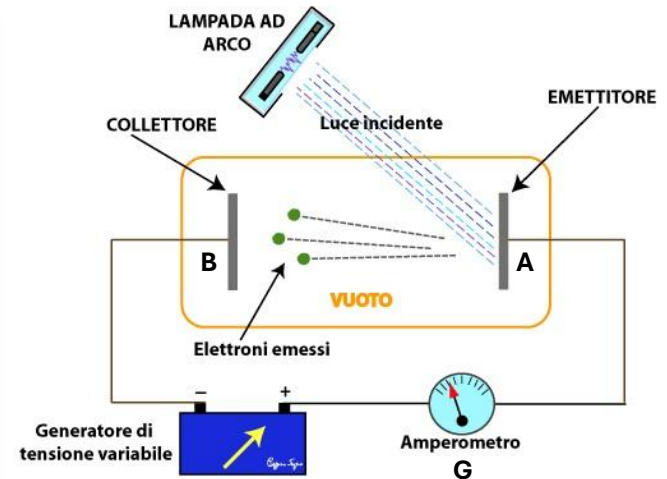
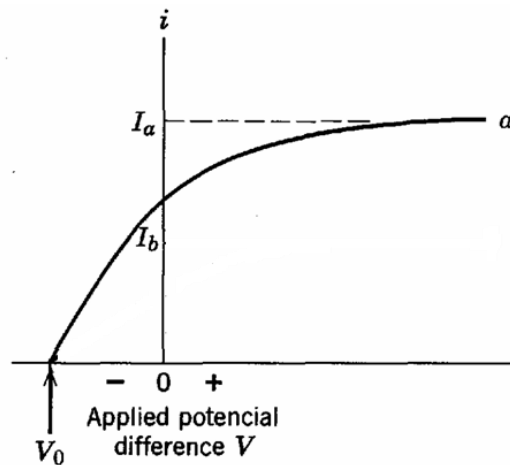
La differenza di potenziale V applicata tra le piastre A e B genera un campo elettrico che accelera i fotoelettroni verso l'elettrodo B, che funge da collettore. Il flusso di elettroni raccolti produce una corrente fotoelettrica, rilevata da un amperometro G .

2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

2.1.2 L'esperimento di Lenard e le contraddizioni con la teoria classica

La curva in Figura mostra l'andamento della corrente fotoelettrica al variare della differenza di potenziale V applicata tra i due elettrodi, mentre l'intensità luminosa della lampada rimane costante.

Anche in assenza di una differenza di potenziale, l'amperometro rileva una corrente, indicando che una certa quantità di elettroni riesce comunque a raggiungere l'elettrodo B.



All'aumentare della tensione applicata, la corrente cresce: il campo elettrico, infatti, guida i fotoelettroni lungo le proprie linee di campo, migliorando l'efficienza con cui vengono raccolti da B.

Quando la differenza di potenziale supera un certo valore, la corrente fotoelettrica si stabilizza su un valore massimo (regime di saturazione), corrispondente alla raccolta di tutti i fotoelettroni emessi da A.

Oltre questo punto, un ulteriore incremento della tensione non determina alcun aumento della corrente.

2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

2.1.2 L'esperimento di Lenard e le contraddizioni con la teoria classica

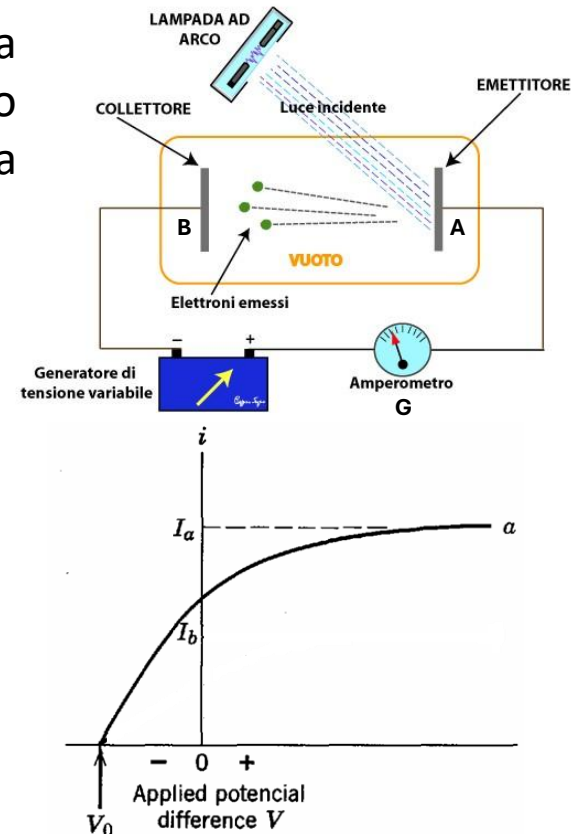
In caso di inversione della polarità del generatore di tensione, la corrente fotoelettrica non si annulla immediatamente, indicando che i fotoelettroni emessi dall'elettrodo A possiedono una certa energia cinetica.

Alcuni di essi riescono infatti a vincere il campo elettrico opposto alla loro direzione di espulsione dall'elettrodo A — che agisce quindi come forza frenante — e a raggiungere comunque l'elettrodo B. Tuttavia, aumentando ulteriormente il valore del potenziale negativo, si arriva a una tensione specifica, detta **potenziale di arresto** V_0 , oltre la quale nessun elettrone ha sufficiente energia per raggiungere B.

In tale condizione, la corrente fotoelettrica si annulla completamente.

Fenomenologicamente, il potenziale di arresto V_0 , se moltiplicato per la carica dell'elettrone, rappresenta l'energia cinetica K_{max} del fotoelettrone più energetico, ossia quello espulso con la maggiore energia cinetica:

$$K_{max} = eV_0$$



2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

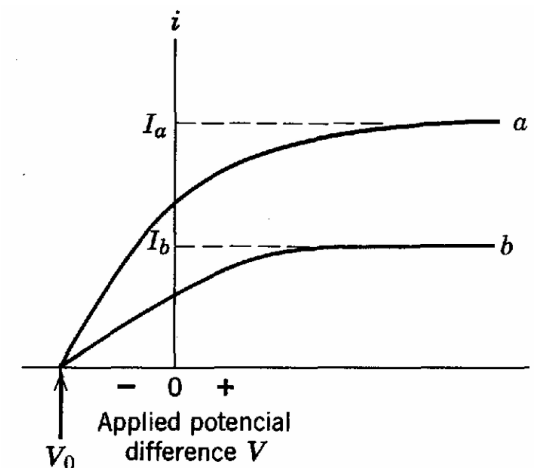
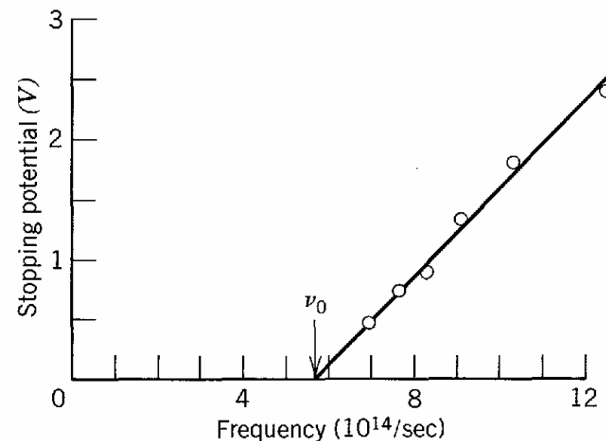
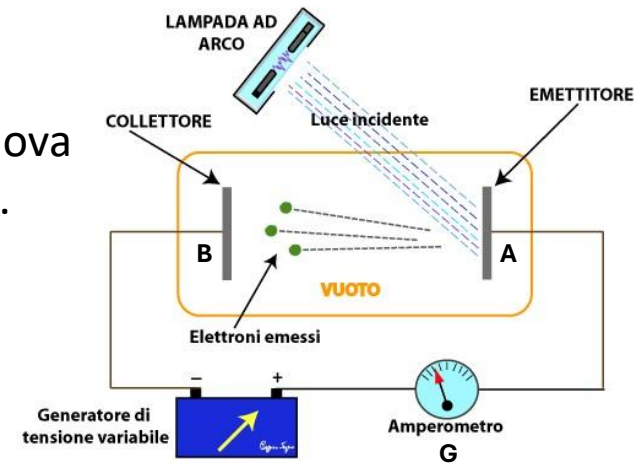
2.1.2 L'esperimento di Lenard e le contraddizioni con la teoria classica

$$K_{max} = eV_0$$

Riducendo l'intensità della luce incidente, si registra una nuova curva tensione-corrente, indicata come **curva b** nella Figura.

L'energia cinetica massima K_{max} dei fotoelettroni risulta sperimentalmente indipendente dall'intensità della luce.

Variando invece la frequenza della radiazione, si osservarono cambiamenti significativi: la Figura in basso mostra l'andamento del potenziale di arresto V_0 in funzione della frequenza della luce.



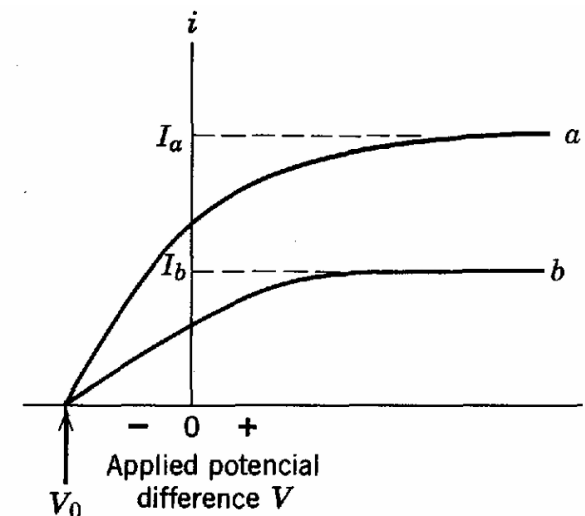
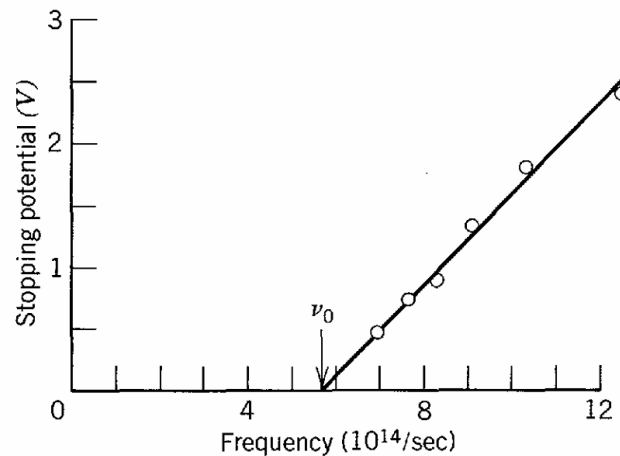
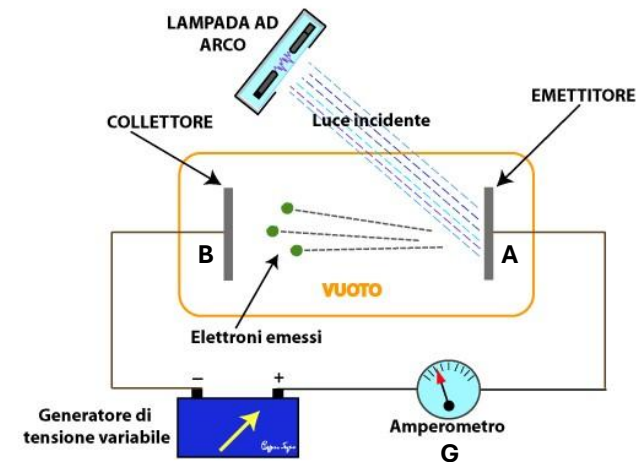
2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

2.1.2 L'esperimento di Lenard e le contraddizioni con la teoria classica

È evidente l'esistenza di una frequenza di soglia, indicata con ν_0 , al di sotto della quale l'effetto fotoelettrico non si manifesta.

Questi dati furono ottenuti nel 1914 da Robert Millikan, il cui rigoroso lavoro sperimentale sull'effetto fotoelettrico gli valse il premio Nobel per la Fisica nel 1923.

Esistono tre caratteristiche fondamentali dell'effetto fotoelettrico che risultano incompatibili con la descrizione fornita dalla teoria classica ondulatoria della luce:



2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

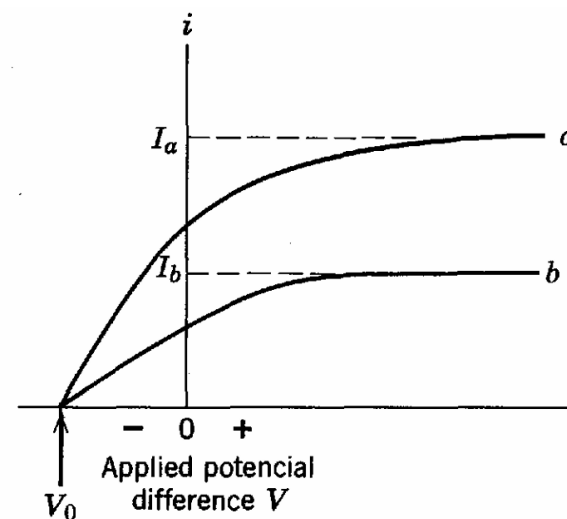
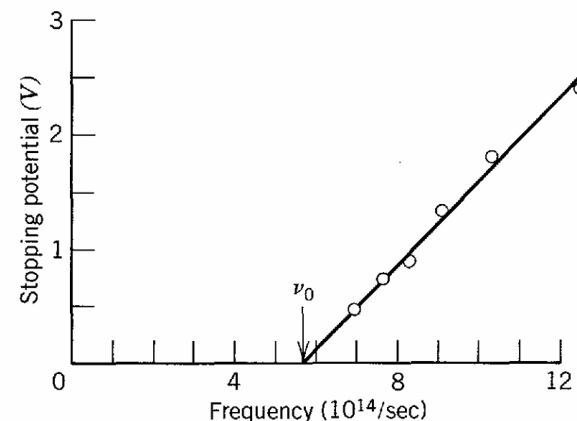
2.1.2 L'esperimento di Lenard e le contraddizioni con la teoria classica

Obiezione 1 - All'aumentare dell'intensità dell'onda elettromagnetica dovrebbe crescere anche l'ampiezza del campo elettrico oscillante $\vec{E}$.

Poiché la forza $\vec{F}$ esercitata su un elettrone di carica e da tale campo è di tipo coulombiano, ovvero $\vec{F} = e\vec{E}$, ci si aspetterebbe che anche l'energia cinetica dei fotoelettroni espulsi aumenti proporzionalmente all'intensità luminosa.

Tuttavia, come evidenziato in Figura 2, l'energia cinetica massima dei fotoelettroni risulta indipendente dall'intensità della radiazione incidente.

$$K_{max} = eV_0$$

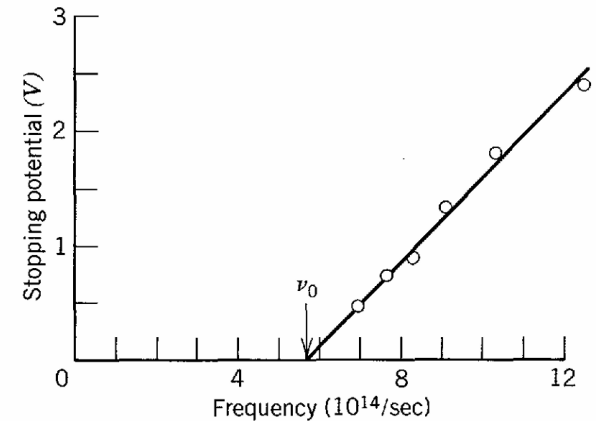


2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

2.1.2 L'esperimento di Lenard e le contraddizioni con la teoria classica

Obiezione 2 - L'effetto fotoelettrico dovrebbe manifestarsi a qualsiasi frequenza, purché l'intensità dell'onda elettromagnetica sia sufficientemente elevata da fornire all'elettrone l'energia necessaria per essere espulso dal materiale.

Tuttavia, come mostrato in Figura, esiste una **frequenza di soglia** caratteristica ν_0 che dipende dal materiale di cui è composto l'elettrodo A: al di sotto di questo valore, l'effetto fotoelettrico non si verifica, indipendentemente dall'intensità della luce incidente.



Obiezione 3 - L'energia della radiazione dovrebbe essere distribuita in modo continuo sull'intero fronte d'onda. In tal caso, per intensità luminose molto deboli, ci si aspetterebbe un **ritardo misurabile** tra l'inizio dell'irraggiamento e l'emissione dell'elettrone, necessario affinché quest'ultimo accumuli l'energia sufficiente per essere espulso. Contrariamente a questa previsione, gli esperimenti non rilevarono alcun ritardo temporale apprezzabile: l'emissione fotoelettronica avveniva praticamente in **modo istantaneo**, appena la luce colpisce la superficie. 9

2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

2.1.3 La teoria di Einstein

Influenzato dagli esperimenti di Lenard, nel 1905 Albert Einstein mise in discussione la teoria classica della luce e propose un nuovo modello, utilizzando l'effetto fotoelettrico come banco di prova cruciale per confrontare le due interpretazioni.

Come discusso nel **Capitolo 1**, Max Planck aveva inizialmente introdotto l'idea di quantizzazione dell'energia limitandola agli scambi tra la radiazione e gli elettroni delle pareti della cavità di un corpo nero. Secondo Planck, una volta emessa, l'energia elettromagnetica si propagava comunque come un'onda continua.

Einstein invece compì un passo che si rivelò poi rivoluzionario: ipotizzò che anche l'energia della radiazione emessa da una sorgente fosse quantizzata, sotto forma di quanti di luce, successivamente chiamati **fotoni**.

Einstein spostò l'attenzione dal modo in cui la radiazione si propaga – fenomeno in cui il comportamento ondulatorio è dominante – al modo in cui essa viene emessa e assorbita, mettendo in evidenza la **natura corpuscolare della luce nel processo di interazione con la materia**.

Secondo Einstein, il campo di radiazione elettromagnetica era composto da un numero discreto di pacchetti di energia.

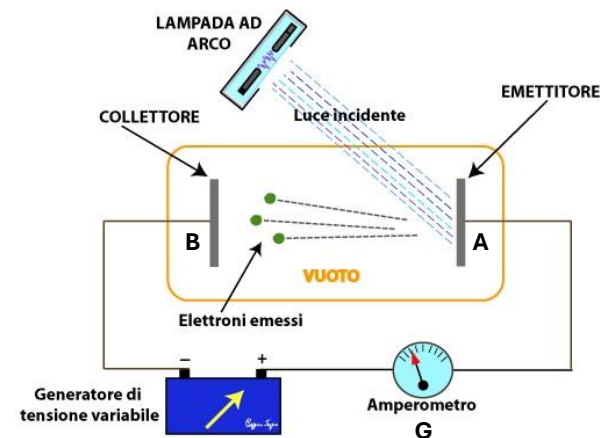
2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

2.1.3 La teoria di Einstein

Egli ipotizzò che l'energia E di ciascun pacchetto, il fotone, fosse direttamente proporzionale alla frequenza ν dell'onda associata durante la propagazione, secondo la relazione fondamentale:

$$E = h\nu$$

Einstein propose inoltre che l'effetto fotoelettrico potesse essere spiegato come una serie di urti di un singolo fotone con un singolo elettrone, in cui l'intero contenuto energetico di un fotone venisse assorbito da un singolo elettrone all'interno dell'elettrodo A.



Di conseguenza, quando l'elettrone viene espulso dalla superficie del metallo, la sua energia cinetica risulterà pari alla differenza tra l'energia del fotone incidente e il lavoro necessario per estrarlo w . In formula

$$K = h\nu - w$$

Il lavoro w rappresenta l'energia necessaria affinché l'elettrone possa vincere le forze attrattive esercitate dagli atomi della superficie del metallo e compensare le eventuali perdite di energia cinetica dovute a collisioni interne durante il suo percorso verso l'esterno.

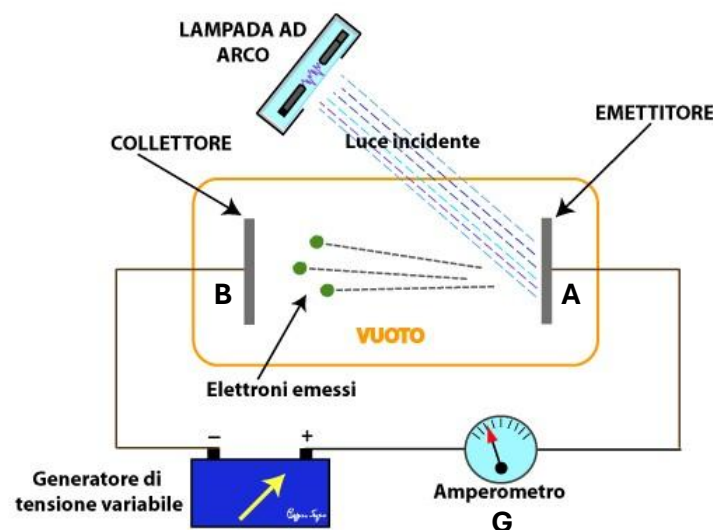
2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

2.1.3 La teoria di Einstein

Gli elettroni all'interno di un metallo non sono tutti legati allo stesso modo: alcuni risultano più fortemente vincolati, mentre altri sono meno legati e perdono meno energia, riuscendo così a emergere con l'energia cinetica massima K_{max} data da:

$$K_{max} = h\nu - w_0$$

dove w_0 è detta **funzione lavoro**, una proprietà caratteristica del materiale che indica l'energia minima necessaria affinché un elettrone possa superare la barriera potenziale della superficie metallica e sfuggire all'attrazione esercitata dal reticolo cristallino.

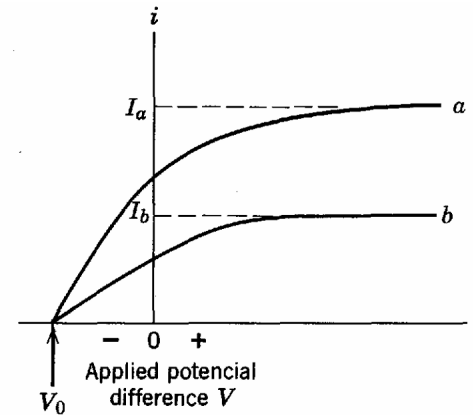


Passiamo ora ad analizzare come l'ipotesi quantistica di Einstein, basata sul concetto di fotone, riesca a spiegare coerentemente le tre principali anomalie dell'effetto fotoelettrico rispetto alle previsioni della teoria ondulatoria classica.

2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

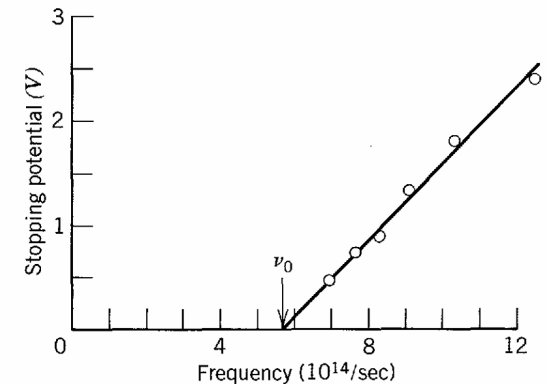
2.1.3 La teoria di Einstein

Per quanto riguarda l'**Obiezione 1**, ovvero l'assenza di dipendenza dell'energia cinetica massima K_{max} (e quindi del potenziale di arresto V_0) dall'intensità della luce incidente vi è piena concordanza tra la teoria di Einstein e i risultati sperimentali. Un aumento dell'intensità luminosa comporta un incremento nel numero di fotoni incidenti e, di conseguenza, nel numero di interazioni fotone-elettrone, aumentando così la corrente fotoelettrica. Tuttavia, l'energia di ciascun fotone $h\nu$ rimane invariata, così come la natura del singolo processo fotoelettrico, che consiste in un urto tra un fotone e un elettrone.



L'**Obiezione 2**, relativa all'esistenza di una frequenza di soglia, viene superata immediatamente considerando la condizione minima per l'emissione di un fotoelettrone dal metallo, ossia quando $K_{max} = 0$. In questo caso si ottiene:

$$h\nu_0 = w_0$$



$$K_{max} = h\nu - w_0$$

2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

2.1.3 La teoria di Einstein

$$h\nu_0 = w_0$$

Tale relazione stabilisce che un fotone di frequenza ν_0 possiede esattamente l'energia necessaria per liberare un elettrone, senza conferirgli energia cinetica: l'elettrone viene quindi espulso con velocità nulla.

Per frequenze inferiori a ν_0 , l'energia dei singoli fotoni è insufficiente a superare la funzione lavoro del materiale; di conseguenza, indipendentemente dal numero di fotoni (ovvero dall'intensità dell'onda elettromagnetica), i fotoni non avranno energia sufficiente per espellere individualmente i fotoelettroni.

L'**Obiezione 3**, relativa all'assenza di ritardo temporale nell'emissione fotoelettrica, viene superata con la teoria di Einstein, in quanto l'energia associata alla radiazione elettromagnetica non è distribuita uniformemente sul fronte d'onda — come previsto dalla teoria ondulatoria — ma concentrata nei singoli pacchetti discreti. Quando la luce incide sul catodo, è garantita la presenza di almeno un fotone che lo colpisce; tale fotone, se soddisfatta la condizione $\nu > \nu_0$, viene assorbito istantaneamente da un elettrone di un atomo del materiale, provocandone l'emissione immediata.

2.1 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

2.1.3 La teoria di Einstein

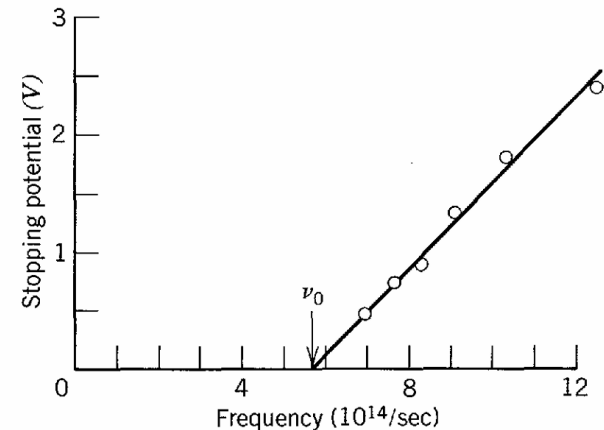
$$K_{max} = eV_0$$

$$K_{max} = h\nu - w_0$$

Combinando le due espressioni in alto, si ottiene

$$V_0 = \frac{h\nu}{e} - \frac{w_0}{e}$$

La teoria di Einstein prevede quindi una dipendenza lineare tra il potenziale di arresto V_0 e la frequenza ν , in completo accordo con i risultati sperimentali riportati in Figura.



La pendenza della curva sperimentale corrisponde a $\frac{h}{e}$; moltiplicando questo valore per la carica dell'elettrone si ottiene una stima della costante di Planck:

$$h = 6,57 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$h = 6,6262 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

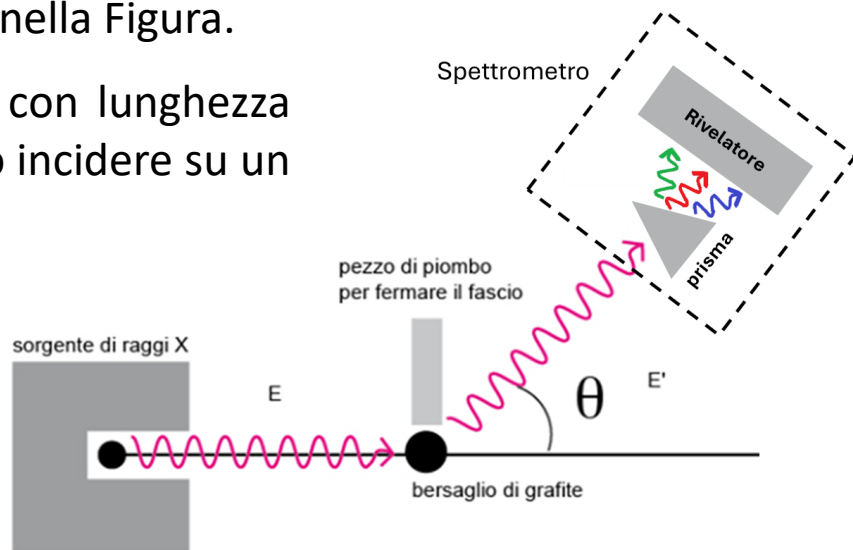
con una precisione di circa lo 0.5%. Il valore ottenuto risultò in ottimo accordo con quello derivato dalla legge di Planck per la radiazione. È notevole il fatto che due determinazioni del valore di h , basate su fenomeni e teorie completamente differenti, conducano a risultati così coerenti.

2.2 L'EFFETTO COMPTON

2.2.1 L'esperimento di Compton

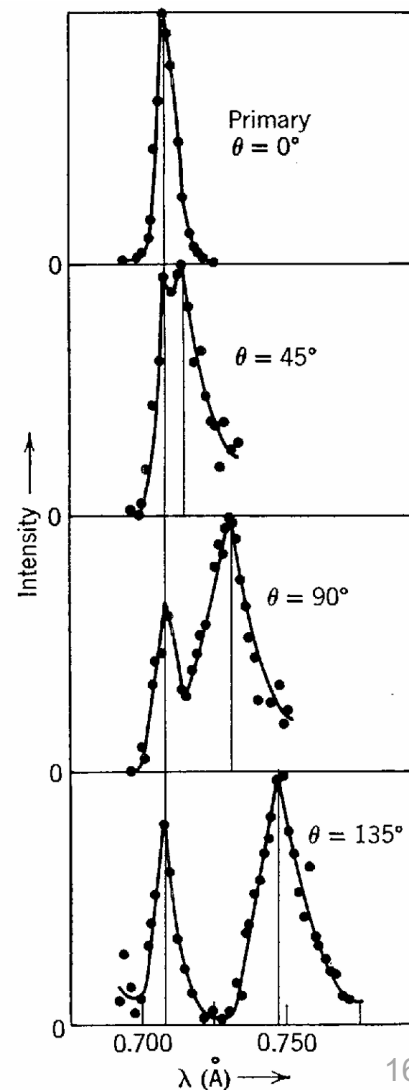
La natura corpuscolare delle radiazioni fu definitivamente confermata nel 1923 grazie agli esperimenti di Arthur Holly Compton. Una ricostruzione dell'apparato sperimentale da lui utilizzato è mostrata nella Figura.

Un fascio di raggi X con lunghezza d'onda λ veniva fatto incidere su un bersaglio di grafite.



Compton, servendosi di uno spettrometro, misurò l'intensità dei raggi X diffusi in funzione della lunghezza d'onda, a diversi angoli di diffusione θ ottenuti mediante la rotazione dello spettrometro.

I risultati ottenuti a quattro distinti angoli sono illustrati nella Figura a lato.



2.2 L'EFFETTO COMPTON

2.2.1 L'esperimento di Compton

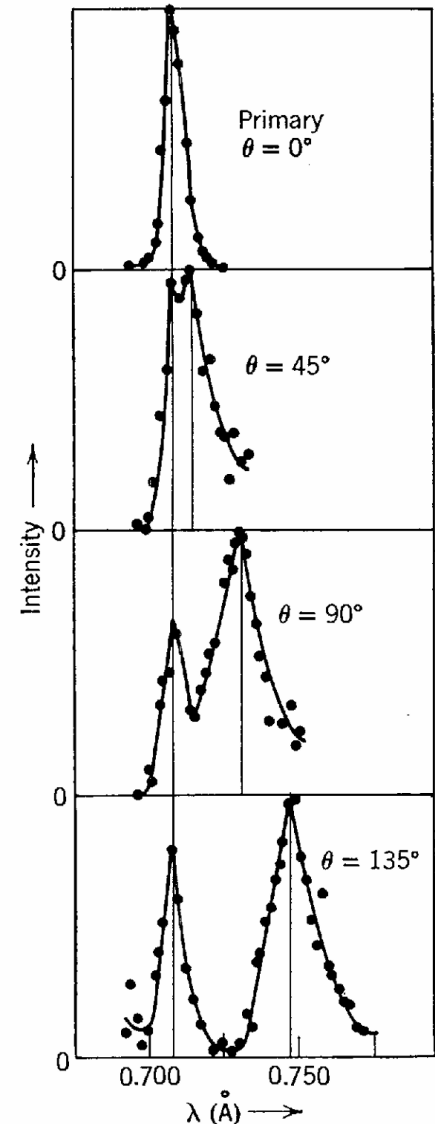
Compton osservò che, quando lo spettrometro è posizionato nella stessa direzione del fascio incidente ($\theta = 0^\circ$), la distribuzione spettrale del fascio diffuso corrisponde esattamente a quella del fascio incidente, con un picco alla lunghezza d'onda λ , in pieno accordo con il modello classico.

Tuttavia, ruotando lo spettrometro ad angoli $\theta > 0^\circ$, lo spettro del fascio diffuso mostra la comparsa di un secondo picco, oltre a quello a λ , ad una lunghezza d'onda $\lambda' > \lambda$.

Questo fenomeno fu denominato inizialmente **scostamento Compton** $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ e varia con l'angolo θ al quale si osservano i raggi X diffusi, ossia $\Delta\lambda(\theta)$.

La presenza della lunghezza d'onda diffusa λ' non può essere spiegata considerando la radiazione incidente come un'onda elettromagnetica classica.

Nel modello classico, il campo elettrico dell'onda incidente, oscillante alla frequenza ν , induce gli elettroni liberi nel bersaglio di scattering a oscillare alla stessa frequenza.



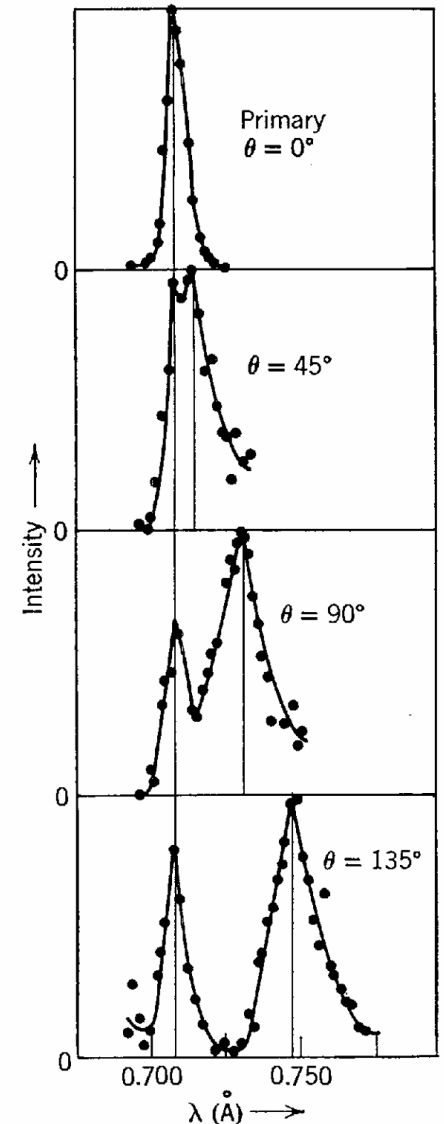
2.2 L'EFFETTO COMPTON

2.2.1 L'esperimento di Compton

Questi elettroni oscillanti dovrebbero quindi emettere onde elettromagnetiche anch'esse con frequenza ν , proprio come avviene nelle antenne, dove l'oscillazione meccanica degli elettroni produce un campo elettromagnetico alla stessa frequenza.

Di conseguenza, secondo il modello classico, l'onda diffusa dovrebbe mantenere la stessa frequenza ν e la stessa lunghezza d'onda λ dell'onda incidente.

Compton interpretò i suoi risultati sperimentali postulando che il fascio di raggi X incidente non fosse descritto da un'onda di frequenza ν , ma piuttosto da un fascio di fotoni, ciascuno con energia $E = h\nu$, che entrano in collisione con gli elettroni liberi come in una collisione classica elettrone-fotone già introdotta per l'effetto fotoelettrico.



2.2 L'EFFETTO COMPTON

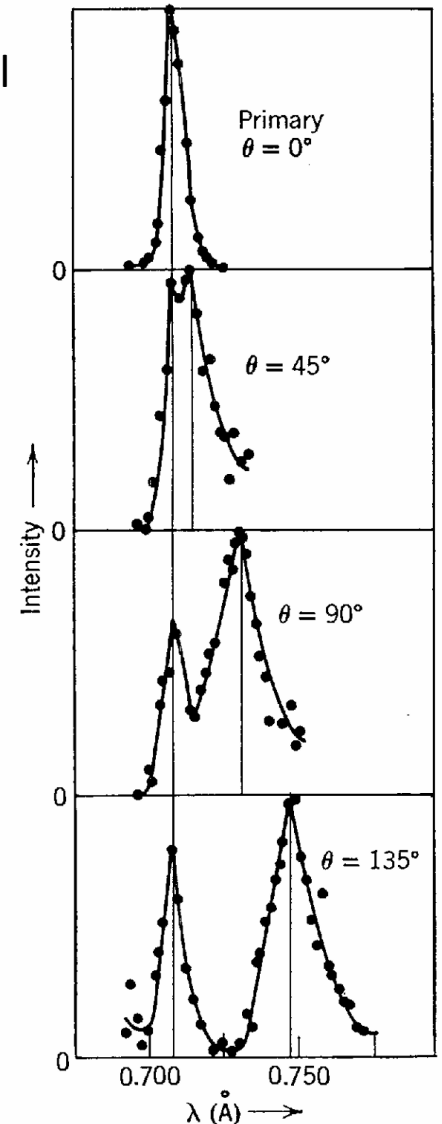
2.2.1 L'esperimento di Compton

In questa prospettiva, i fotoni di “rinculo” che emergono dal bersaglio costituiscono la radiazione diffusa.

Poiché il fotone incidente può cedere parte della sua energia all'elettrone con cui collide, il fotone diffuso avrà un'energia E' inferiore; di conseguenza, la sua frequenza $\nu' = E'/h$ sarà minore rispetto alla frequenza del fotone incidente, implicando una lunghezza d'onda $\lambda' = c/\nu$ maggiore.

Questa ipotesi spiega qualitativamente la comparsa di un secondo picco di lunghezza d'onda λ' nello spettro dei fotoni diffusi, ma non la dipendenza diretta dall'angolo di diffusione θ .

È importante notare che, in questa interazione, i raggi X sono trattati come particelle e non come onde, e che, a differenza del processo fotoelettrico in cui i fotoni vengono assorbiti, qui i fotoni dei raggi X vengono diffusi.



2.2 L'EFFETTO COMPTON

2.2.2 La collisione fotone-elettrone

Analizziamo ora quantitativamente una singola collisione fotone-elettrone. Per un fascio di raggi X di frequenza ν , l'energia E di un fotone nel fascio incidente è:

$$E = h\nu$$

Prendendo alla lettera l'idea del fotone come particella, lo considereremo come una particella di energia relativistica E interamente cinetica, quantità di moto p e massa a riposo nulla.

La quantità di moto di un fotone può essere valutata dalla relazione generale tra l'energia relativistica totale E , la quantità di moto p :

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

dove $\lambda = \frac{c}{\nu}$ è la lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica che accompagna il fotone.

Una prima osservazione importante fu che la frequenza ν della radiazione diffusa era indipendente dal materiale della lamina. Ciò implica che la diffusione non coinvolge atomi interi.

2.2 L'EFFETTO COMPTON

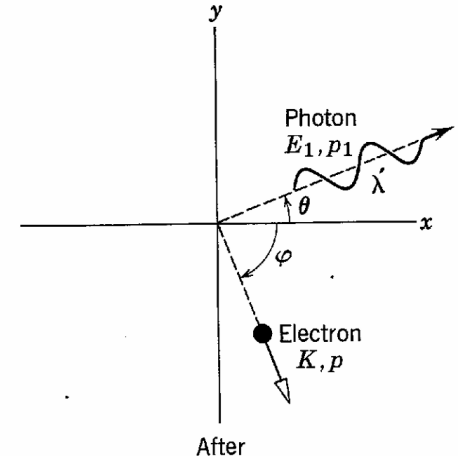
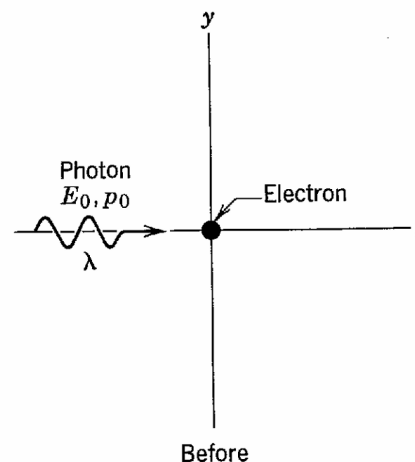
2.2.2 La collisione fotone-elettrone

Compton ipotizzò che la diffusione fosse dovuta alle collisioni tra il fotone e un singolo elettrone nel bersaglio.

Assunse inoltre che gli elettroni partecipanti a questo processo di diffusione fossero liberi e inizialmente stazionari.

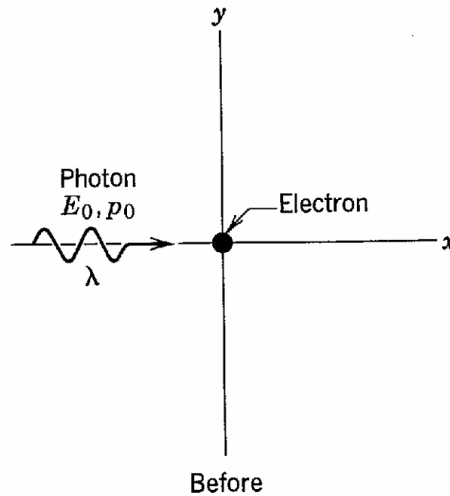
Una giustificazione a priori di queste ipotesi può essere trovata considerando il fatto che l'energia di un fotone di raggi X è diversi ordini di grandezza maggiore dell'energia di un fotone ultravioletto, e dalla nostra discussione sull'effetto fotoelettrico risulta evidente che l'energia di un fotone ultravioletto è paragonabile all'energia minima con cui un elettrone è legato in un metallo.

Consideriamo quindi, una collisione tra un fotone e un elettrone stazionario libero, come rappresentato in Figura.

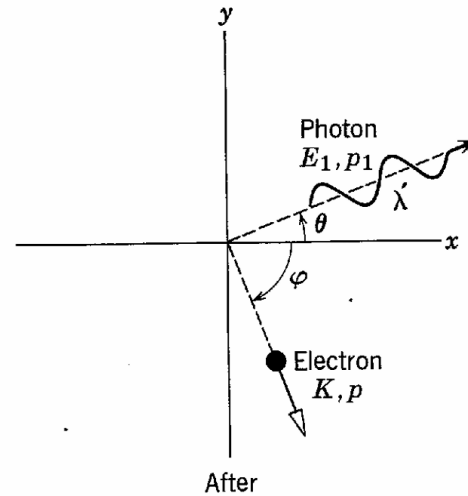


2.2 L'EFFETTO COMPTON

2.2.2 La collisione fotone-elettrone



Nel diagramma a sinistra, un fotone di energia relativistica totale E_0 e quantità di moto p_0 incide su un elettrone stazionario di energia di massa a riposo $m_0 c^2$.

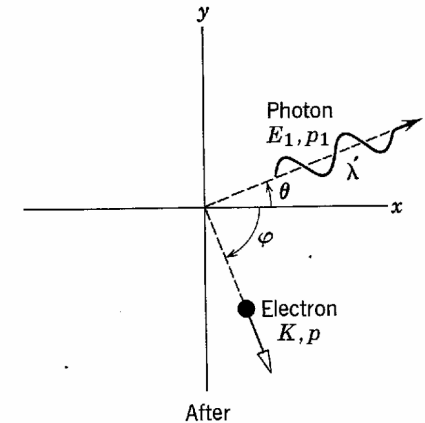
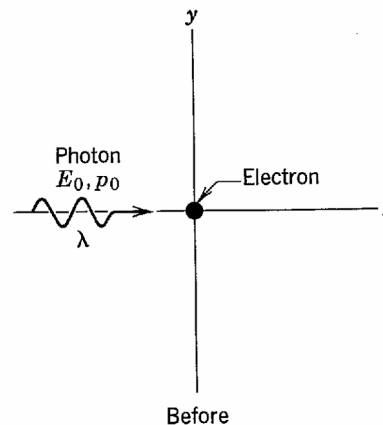


Nel diagramma a destra, il fotone viene diffuso con un angolo θ e si allontana con energia relativistica totale E_1 e quantità di moto p_1 , mentre l'elettrone si allontana dalla posizione a riposo con un angolo ϕ con energia cinetica K e quantità di moto p .

2.2 L'EFFETTO COMPTON

2.2.2 La collisione fotone-elettrone

Compton applicò la conservazione della quantità di moto e dell'energia relativistica totale a questo problema di collisione. Sono state utilizzate equazioni relativistiche poiché il fotone si muove sempre a velocità relativistiche, e anche l'elettrone che rincula può essere trattato con le medesime circostanze.



La **conservazione della quantità di moto** impone che:

$$\begin{cases} p_0 = p_1 \cos \theta + p \cos \varphi & \text{lungo l'asse } x \\ p_1 \sin \theta = p \sin \varphi & \text{lungo l'asse } y \end{cases}$$

Elevando al quadrato ambo i membri:

$$\begin{cases} (p_0 - p_1 \cos \theta)^2 = p^2 \cos^2 \varphi & \text{lungo l'asse } x \\ p_1^2 \sin^2 \theta = p^2 \sin^2 \varphi & \text{lungo l'asse } y \end{cases}$$

2.2 L'EFFETTO COMPTON

2.2.2 La collisione fotone-elettrone

$$\begin{cases} (p_0 - p_1 \cos \theta)^2 = p^2 \cos^2 \varphi & \text{lungo l'asse } x \\ p_1^2 \sin^2 \theta = p^2 \sin^2 \varphi & \text{lungo l'asse } y \end{cases}$$

Sviluppando il quadrato e sommando membro a membro

$$p_0^2 + p_1^2 \cos^2 \theta + p_1^2 \sin^2 \theta - 2p_0 p_1 \cos \theta = p^2 \cos^2 \varphi + p^2 \sin^2 \varphi$$

Usando l'identità trigonometrica $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall x$

$$p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos \theta = p^2$$

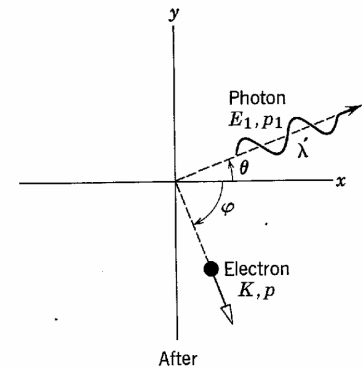
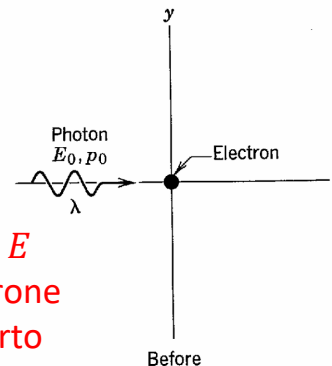
La **conservazione dell'energia** impone:

$$E_0 + m_0 c^2 = E_1 + K + m_0 c^2$$

da cui:

$$E_0 - E_1 = K$$

Energia E
dell'elettrone
dopo l'urto



Usando la relazione $p = \frac{E}{c}$, possiamo riscrivere il primo membro come:

$$c(p_0 - p_1) = K$$

2.2 L'EFFETTO COMPTON

2.2.2 La collisione fotone-elettrone

Per l'energia relativistica totale E dell'elettrone dopo l'urto, possiamo scrivere:

$$E^2 = c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2$$

Essendo dopo l'urto $E = K + m_0 c^2$, sostituisco nell'espressione precedente:

$$(K + m_0 c^2)^2 = c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2$$

Sviluppando il quadrato si ottiene facilmente:

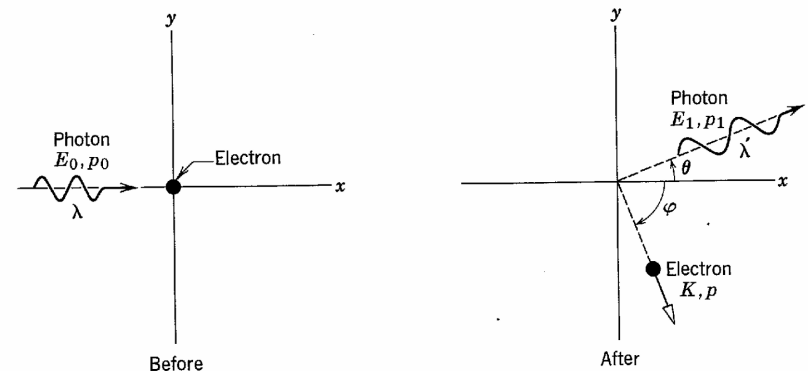
$$K^2 + 2K m_0 c^2 = c^2 p^2$$

che può essere riscritta come:

$$\frac{K^2}{c^2} + 2K m_0 = p^2$$

Sostituiamo le due espressioni trovate prima:

$$(p_0 - p_1)^2 + 2m_0 c(p_0 - p_1) = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos \theta$$



$$E_0 + m_0 c^2 = E_1 + K + m_0 c^2$$

$$p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos \theta = p^2$$
$$c(p_0 - p_1) = K$$

2.2 L'EFFETTO COMPTON

2.2.2 La collisione fotone-elettrone

$$(p_0 - p_1)^2 + 2m_0c(p_0 - p_1) = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0p_1\cos\theta$$

Sviluppando il quadrato, si riduce a:

$$m_0c(p_0 - p_1) = p_0p_1(1 - \cos\theta)$$

Se dividiamo ambo i membri per $m_0cp_0p_1$, si ottiene:

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} = \frac{1}{m_0c}(1 - \cos\theta)$$

Moltiplicando per h e considerando $p = \frac{h}{\lambda}$, otteniamo l'**equazione di Compton**:

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

con $\lambda_c = \frac{h}{m_0c} = 2.43 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ è nota come lunghezza d'onda di Compton.

2.2 L'EFFETTO COMPTON

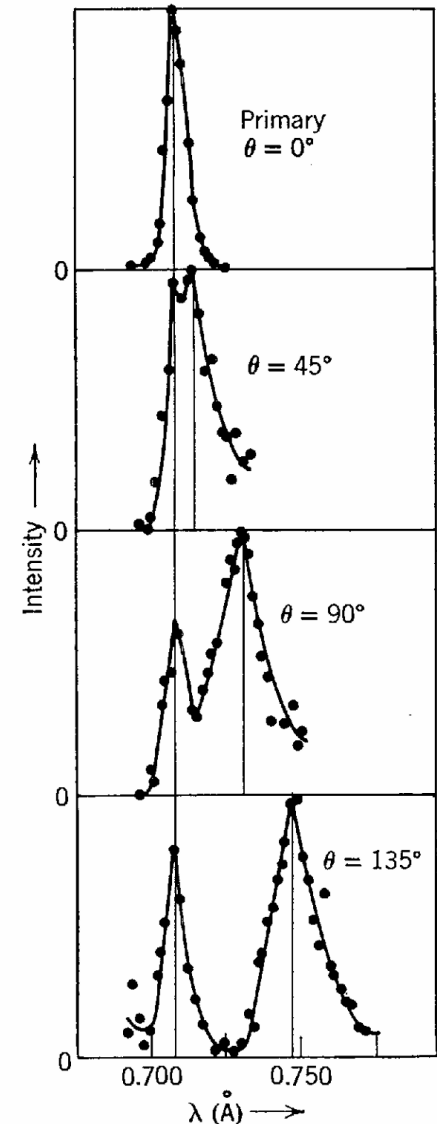
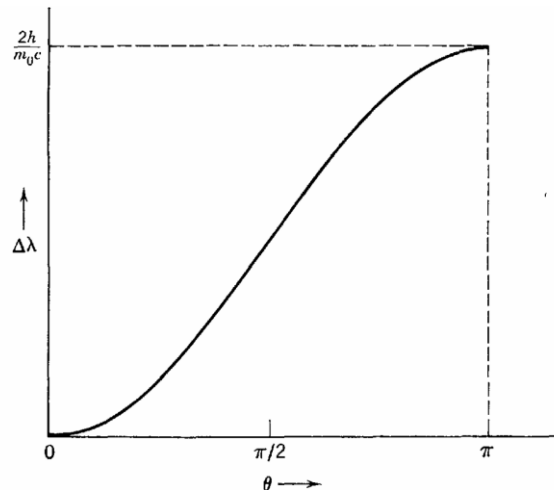
2.2.2 La collisione fotone-elettrone

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

Si noti che lo shift Compton $\Delta\lambda$ dipende solo dall'angolo di diffusione θ e non dalla lunghezza d'onda iniziale λ_0 . L'equazione prevede lo shift Compton $\Delta\lambda$ osservato sperimentalmente entro i limiti sperimentali di accuratezza.

Se plottiamo $\Delta\lambda$ in funzione di θ osserviamo che $\Delta\lambda$ varia da zero (per $\theta = 0$, corrispondente ad un urto "radente" con il fotone incidente appena deflesso)

a $\frac{2h}{m_0c} = 0,049 \text{ \AA}$ (per $\theta = 180^\circ$, corrispondente a una collisione "frontale", con la direzione invertita del fotone incidente).



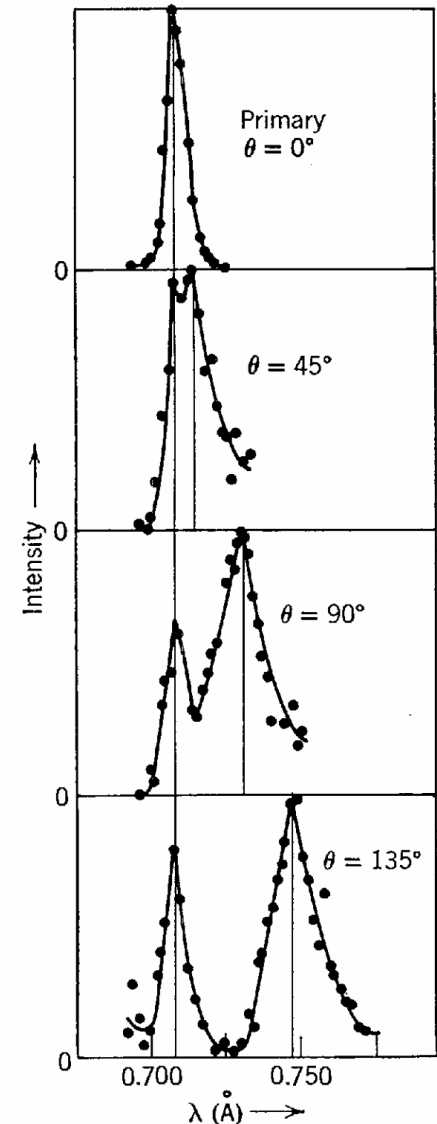
2.2 L'EFFETTO COMPTON

2.2.3 Scattering Compton e scattering Rayleigh

Il modello dello scattering elettrone-fotone non riesce comunque a spiegare la presenza del picco in Figura per il quale la lunghezza d'onda del fotone non cambia durante la diffusione.

L'unica ipotesi che abbiamo fatto è che l'elettrone con cui urta il fotone sia libero. Anche se l'elettrone è inizialmente legato, l'ipotesi è giustificabile se l'energia cinetica acquisita dall'elettrone nell'urto è molto maggiore della sua energia di legame.

Tuttavia, se l'elettrone è legato in modo particolarmente forte a un atomo nel bersaglio, o se l'energia del fotone incidente è molto piccola, c'è qualche possibilità che l'elettrone non venga espulso dall'atomo. In questo caso si può considerare che la collisione avvenga tra il fotone e l'intero atomo.



2.2 L'EFFETTO COMPTON

2.2.3 Scattering Compton e scattering Rayleigh

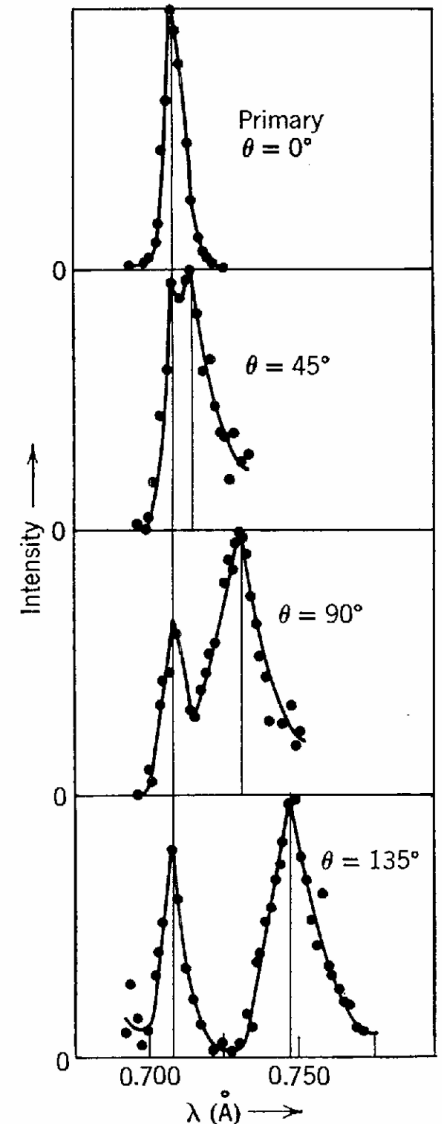
$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$$

In questo caso, la massa M dell'atomo è la massa caratteristica del processo e deve essere sostituita nell'equazione di Compton alla massa dell'elettrone m_0 .

Poiché $M \gg m_0$, è facile verificare che lo shift Compton $\Delta\lambda$ per collisioni con elettroni strettamente legati è trascurabile e il fotone diffuso non cambia lunghezza d'onda.

Riassumendo, alcuni fotoni vengono dispersi da elettroni liberati dall'urto; questi fotoni emergono dall'urto con una lunghezza d'onda diversa rispetto a quella incidente. Altri fotoni vengono dispersi dagli elettroni rimasti legati durante l'urto; questi fotoni emergono dall'urto con la stessa lunghezza d'onda.



2.2 L'EFFETTO COMPTON

2.2.3 Scattering Compton e scattering Rayleigh

Il processo d'urto che disperde i fotoni senza modificare la loro lunghezza d'onda è chiamato **scattering di Rayleigh**, dal nome del fisico che intorno al 1900 sviluppò una teoria classica sulla diffusione della radiazione elettromagnetica da parte degli atomi.

Rayleigh analizzò l'interazione tra un fascio di onde elettromagnetiche e gli elettroni legati negli atomi del bersaglio: il campo elettrico oscillante del fascio esercita una forza sulle cariche elettroniche, sia positive che negative, inducendo in esse un moto oscillatorio e generando quindi un dipolo oscillante.

Queste oscillazioni forzate portano i dipoli ad irradiare a loro volta onde elettromagnetiche con la stessa frequenza e in fase con le onde incidenti.

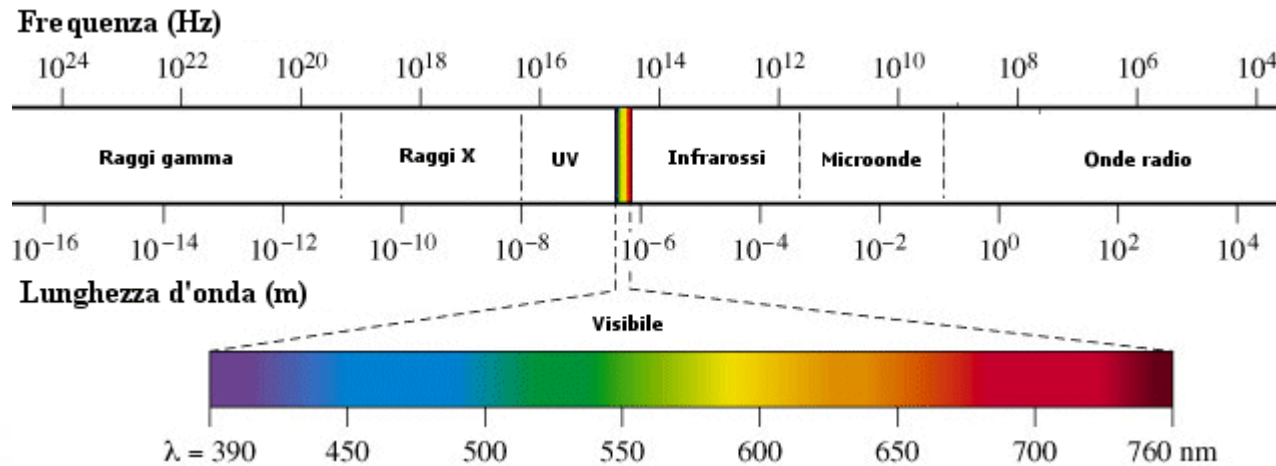
Di conseguenza, l'energia del fascio incidente viene riemessa in tutte le direzioni, ma senza alterare la lunghezza d'onda dei fotoni.

Sebbene la descrizione classica dello scattering di Rayleigh differisca dall'approccio quantistico discusso in precedenza, entrambe le interpretazioni conducono allo stesso risultato sperimentale. Lo scattering di Rayleigh rappresenta quindi un esempio in cui la descrizione classica e quella quantistica si sovrappongono.

2.2 L'EFFETTO COMPTON

2.2.3 Scattering Compton e scattering Rayleigh

È interessante chiedersi in quale regione dello spettro elettromagnetico lo scattering Rayleigh sarà il processo dominante, e in quale regione dominerà lo scattering Compton.



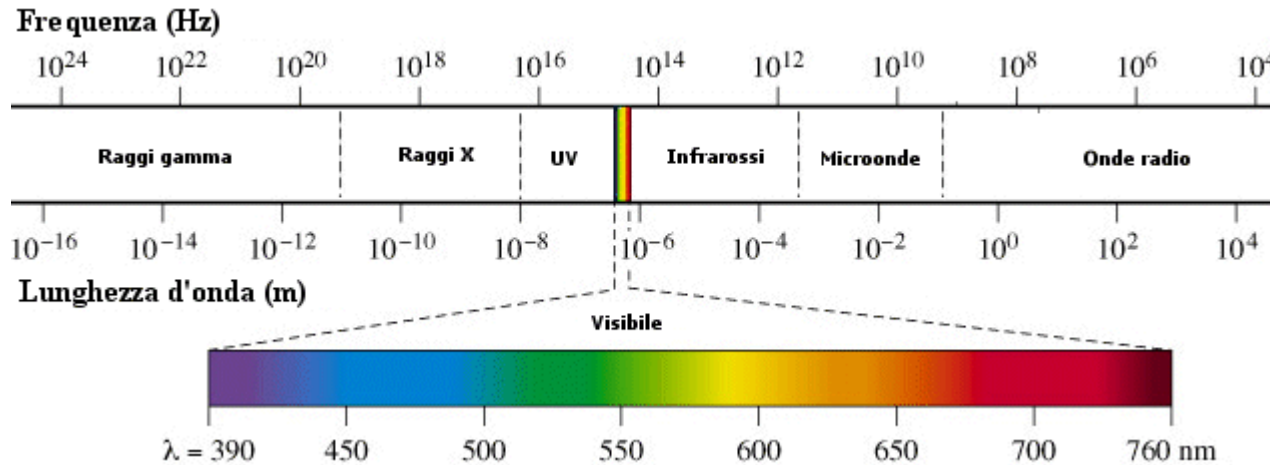
$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$$

Quando la radiazione incidente appartiene alla regione del **visibile**, dell'**infrarosso**, delle **microonde** o delle **onde radio**, la sua lunghezza d'onda λ è estremamente grande rispetto allo scostamento Compton $\Delta\lambda$, sia che si consideri un elettrone libero (m_0), sia che si tenga conto della massa atomica ($M \gg m_0$) nel caso di elettroni legati. In queste condizioni, la lunghezza d'onda della radiazione diffusa risulta praticamente identica a quella della radiazione incidente ($\lambda_1 \sim \lambda_0 \gg \Delta\lambda$) entro la sensibilità sperimentale.

2.2 L'EFFETTO COMPTON

2.2.3 Scattering Compton e scattering Rayleigh



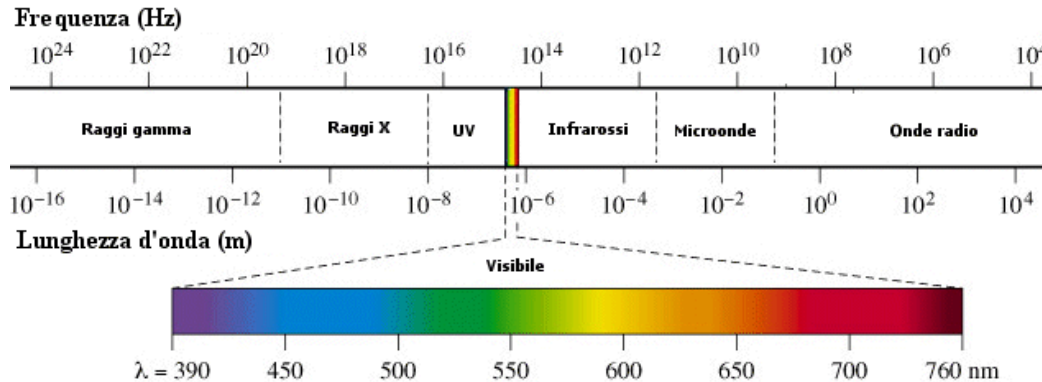
$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0c}$$

Ne consegue che, nel limite $\lambda \rightarrow \infty$, i risultati quantistici si avvicinano a quelli della teoria classica e prevale il regime dello scattering di Rayleigh.

Man mano che ci si sposta verso la regione dei **raggi X**, lo scattering Compton diventa via via più rilevante, soprattutto quando il bersaglio è costituito da atomi con basso numero atomico, in cui gli elettroni non sono fortemente legati. In questi casi, $\Delta\lambda$ dovuto alla diffusione su un elettrone liberato diventa facilmente misurabile. Infine, nella regione dei **raggi gamma** ($\lambda \rightarrow 0$), l'energia dei fotoni è talmente elevata da causare sistematicamente l'espulsione di un elettrone durante la collisione, rendendo lo scattering Compton il processo dominante.

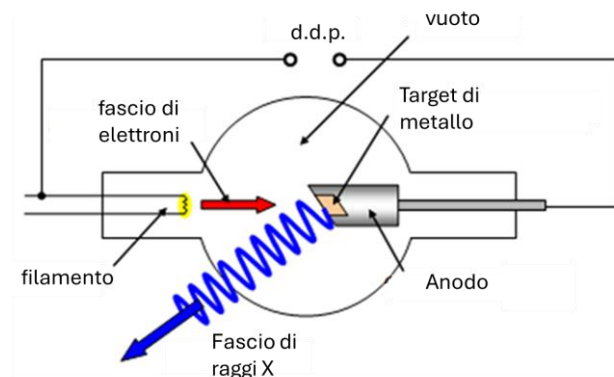
2.3 LA RADIAZIONE DI BREMSSTRAHLUNG



I **raggi X**, denominati così dal loro scopritore Wilhelm Conrad Röntgen per via della loro natura inizialmente ignota, sono radiazioni appartenenti allo spettro elettromagnetico con lunghezza d'onda inferiore a circa $1.0 \text{ \AA}$.

Presentano un comportamento tipicamente ondulatorio, manifestando fenomeni di interferenza e diffrazione analoghi a quelli osservabili nella luce visibile e in tutte le altre forme di radiazione elettromagnetica.

Un tipico schema di apparato per la produzione di raggi X è illustrato in Figura.

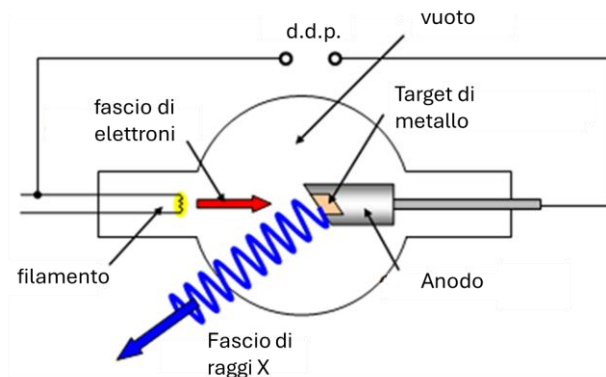


2.3 LA RADIAZIONE DI BREMSSTRAHLUNG

Un fascio di elettroni ad alta energia generato da un filamento incandescente, accelerato da una differenza di potenziale V di migliaia di volt, viene bruscamente rallentato quando impatta contro un bersaglio.

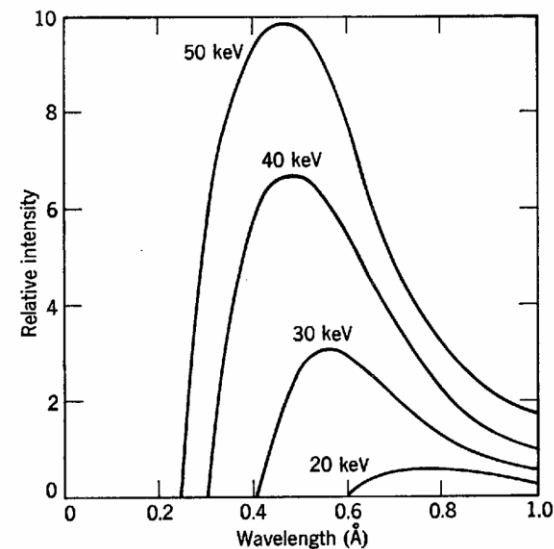
Secondo la fisica classica, questa rapida decelerazione degli elettroni genera l'emissione di uno spettro continuo di radiazione elettromagnetica.

La Figura mostra gli spettri dei raggi X emessi da un bersaglio di tungsteno per quattro diversi valori dell'energia degli elettroni incidenti.



Un aspetto particolarmente significativo di queste curve spettrali è la presenza, per ciascun valore dell'energia degli elettroni, di una ben definita lunghezza d'onda minima di emissione, indicata come λ_{min} .

Sebbene la forma complessiva dello spettro vari leggermente in funzione del materiale del bersaglio e del potenziale di accelerazione V , la lunghezza d'onda minima λ_{min} dipende unicamente da V e risulta indipendente dal tipo di materiale utilizzato.



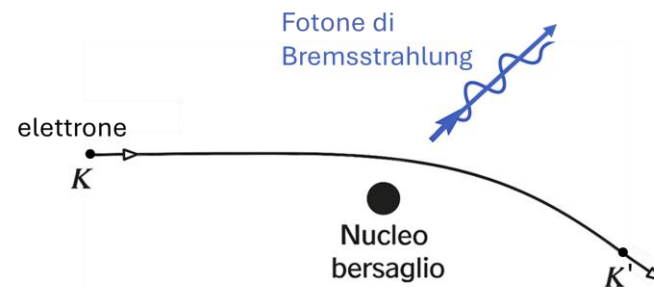
2.3 LA RADIAZIONE DI BREMSSTRAHLUNG

Questo comportamento non può essere spiegato nell'ambito della teoria elettromagnetica classica, la quale non prevede alcun limite inferiore alla lunghezza d'onda delle onde emesse dal bersaglio.

Una spiegazione immediata del fenomeno possiamo ricavarla se consideriamo i raggi X come fotoni.

La Figura rappresenta una schematizzazione del processo elementare che dà origine allo spettro continuo dei raggi X, assumendo l'emissione di un fotone X.

Un elettrone, con energia cinetica iniziale K , viene decelerato a causa dell'interazione a distanza con il campo coulombiano del nucleo bersaglio, trasferendo una quantità di moto al nucleo stesso.



La decelerazione dell'elettrone comporta l'emissione di un fotone. Poiché il nucleo è molto più massiccio dell'elettrone, l'energia da esso acquisita durante l'urto può essere considerata trascurabile.

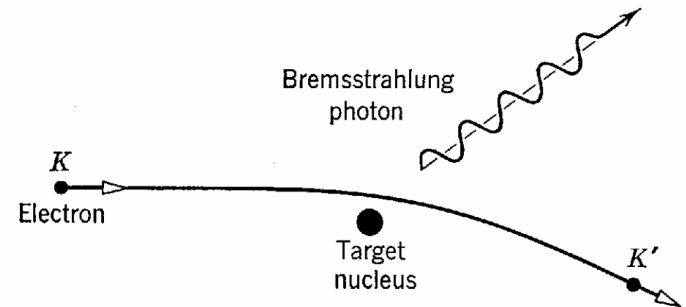
Se K' rappresenta l'energia cinetica finale dell'elettrone dopo l'interazione, allora l'energia $h\nu$ del fotone emesso è data da:

2.3 LA RADIAZIONE DI BREMSSTRAHLUNG

$$K - K' = h\nu$$

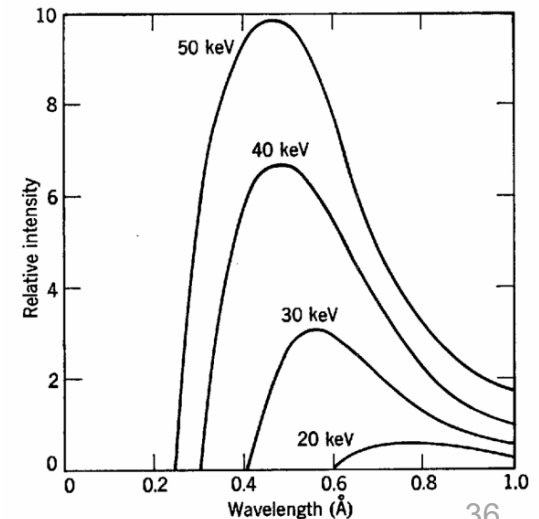
che riscritta in termini di lunghezza d'onda sarà:

$$\frac{hc}{\lambda} = K - K'$$



Tornando all'esperimento in Figura, gli elettroni del fascio incidente si fermano dopo aver subito una serie di urti, durante i quali perdono progressivamente porzioni della loro energia. Per ogni urto, viene emesso un fotone con energia dipendente dalla differenza tra l'energia cinetica iniziale e finale.

I raggi X generati da questo insieme di urti è rappresentato dai fotoni emessi in ciascun urto e danno origine allo spettro continuo osservato in Figura, composto da una moltitudine di fotoni con lunghezze d'onda comprese tra λ_{min} (corrispondente al fotone emesso nell'urto con $K - K'$ più grande) e $\lambda \rightarrow \infty$ (corrispondente a $K - K' \rightarrow 0$), a seconda dell'energia persa in ciascun urto.



2.3 LA RADIAZIONE DI BREMSSTRAHLUNG

Quindi, Il fotone con la lunghezza d'onda più corta (cioè il più energetico) viene emesso quando un elettrone perde interamente la sua energia cinetica in un singolo processo di decelerazione. In tale caso, $K' = 0$, e quindi l'energia iniziale dell'elettrone si converte interamente nell'energia del fotone

Poiché $K = eV$, l'energia acquisita dall'elettrone nell'essere accelerato attraverso la differenza di potenziale V applicata al tubo a raggi X, abbiamo:

$$eV = \frac{hc}{\lambda_{min}}$$

ovvero

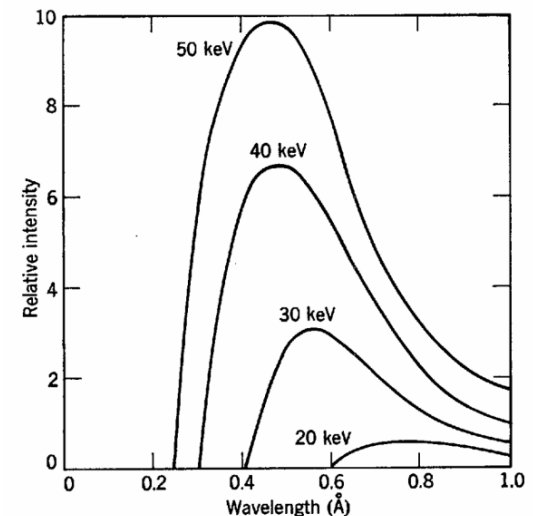
$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV}$$

In altre parole, la lunghezza d'onda minima rappresenta la conversione completa dell'energia cinetica dell'elettrone in radiazione X.

L'equazione ottenuta mostra chiaramente che se $h \rightarrow 0$, allora $\lambda_{min} \rightarrow 0$, che è la previsione della teoria classica.

$$\frac{hc}{\lambda} = K - K'$$

$$K = \frac{hc}{\lambda_{min}}$$



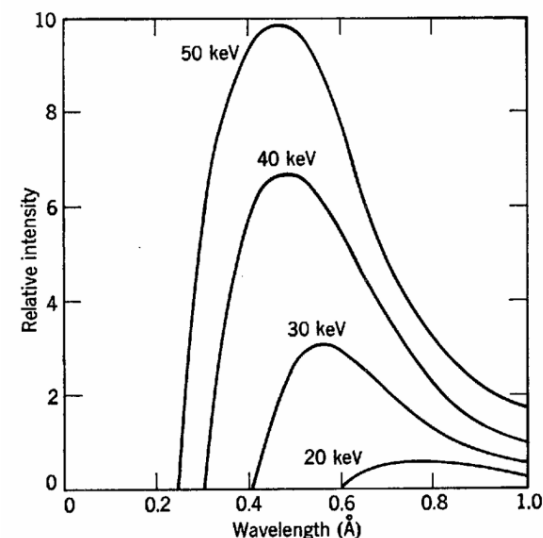
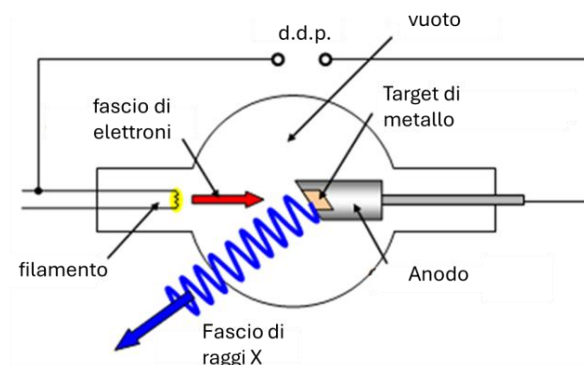
2.3 LA RADIAZIONE DI BREMSSTRAHLUNG

Ciò dimostra che l'esistenza stessa di una lunghezza d'onda minima è un fenomeno puramente quantistico.

La radiazione X continua della Figura è spesso chiamata **radiazione di bremsstrahlung**, dal tedesco brems (frenata, cioè decelerazione) + strahlung (radiazione).

Il processo di bremsstrahlung non avviene solo nei tubi a raggi X, ma in tutti i processi in cui avvengono urti tra elettroni veloci con la materia.

Il processo di bremsstrahlung può essere considerato come un effetto fotoelettrico inverso: nell'effetto fotoelettrico, un fotone viene assorbito e la sua energia e quantità di moto si trasferiscono ad un elettrone e a un nucleo che rincula; nel processo di bremsstrahlung viene creato un fotone, la cui energia e quantità di moto provengono dalla collisione di un elettrone con un nucleo.

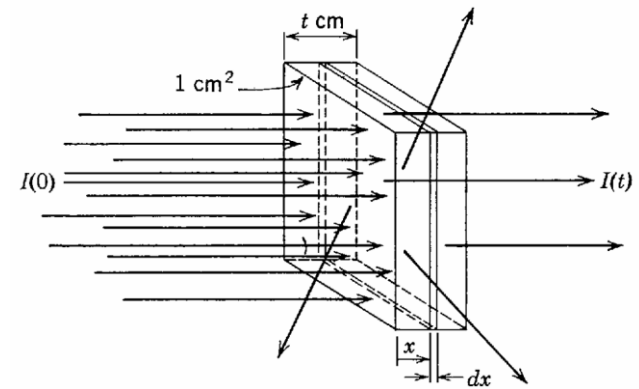


2.4 IL CONCETTO DI SEZIONE D'URTO

Consideriamo un fascio parallelo di fotoni che incide su una lastra, come rappresentato in Figura.

I fotoni possono interagire con gli atomi nella lastra mediante tre diversi processi: fotoelettrico, scattering Rayleigh e Compton.

Il primo assorbe completamente i fotoni, mentre gli ultimi due li diffondono, ma in tutti e tre i processi vengono sottratti fotoni dal fascio. La questione di quali siano le possibilità che questi processi si verifichino, in un dato insieme di circostanze, è di notevole importanza teorica e pratica.



La risposta alla domanda è espressa in termini di quantità chiamata **sezione d'urto**.

La probabilità che un fotone di una data energia venga, ad esempio, assorbito dal processo fotoelettrico quando interagisce con un atomo della lastra è specificata dal valore della sezione d'urto fotoelettrica σ_{PE} .

Questa misura della probabilità che si verifichi il processo fotoelettrico è definita in modo che il numero N_{PE} di fotoni assorbiti sia pari a:

$$N_{PE} = \sigma_{PE} I n$$

quando un fascio contenente I fotoni incide su una lastra contenente n atomi per unità di area.

2.4 IL CONCETTO DI SEZIONE D'URTO

La definizione può essere considerata un prototipo delle definizioni di tutte le sezioni d'urto ed è sufficientemente importante da giustificare un'attenta interpretazione fisica.

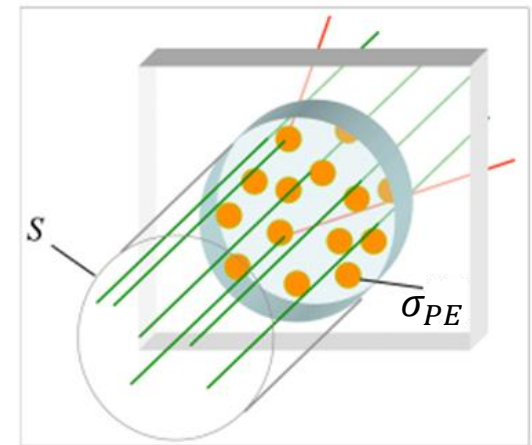
Si noti innanzitutto che il numero N_{PE} di assorbimenti aumenta in proporzione al numero I di fotoni incidenti sulla lastra e in proporzione al numero n di atomi bersaglio per unità di area della lastra.

$$N_{PE} = \sigma_{PE} I n$$

Vediamo così che la sezione d'urto, che ha un valore che dipende sia dall'energia del fotone che dal tipo di atomo, e misura quanto sono efficaci tali atomi nell'assorbire quei fotoni per effetto fotoelettrico.

Poiché le quantità N_{PE} e I sono adimensionali, mentre n ha le dimensioni di cm^{-2} , è chiaro che σ_{PE} deve avere le dimensioni di cm^2 .

Spesso viene data un'interpretazione geometrica immaginando che un cerchio di area σ_{PE} sia centrato su ciascun atomo nel piano della lastra, con la proprietà che qualsiasi fotone che entra nell'area circolare viene assorbito dall'atomo attraverso l'effetto fotoelettrico.



Una sezione d'urto è in realtà solo un modo per esprimere numericamente la probabilità che un certo tipo di atomo faccia sì che un fotone di una data energia subisca un particolare processo.

2.4 IL CONCETTO DI SEZIONE D'URTO

Le definizioni e le interpretazioni delle sezioni d'urto per gli altri processi di assorbimento o diffusione sono del tutto analoghe a quelle dell'esempio che abbiamo considerato.

La Figura mostra le sezioni d'urto misurate per processi di diffusione (σ_s) che include sia lo scattering Compton che Rayleigh, e per l'assorbimento fotoelettrico (σ_{PE}) per un atomo di piombo in funzione dell'energia del fotone incidente $h\nu$. Per il piombo, che ha un numero atomico elevato e quindi elettroni atomici strettamente legati, l'assorbimento fotoelettrico domina quando l'energia del fotone è inferiore a circa $h\nu = 5 \cdot 10^5 \text{ eV}$.

Le brusche cadute nella sezione d'urto fotoelettrica si verificano alle energie di legame dei diversi elettroni nell'atomo di piombo.

Quando $h\nu$ scende al di sotto dell'energia di legame di un particolare elettrone, un processo fotoelettrico che lo coinvolge non è più energeticamente possibile.

La sezione d'urto totale σ è la somma delle sezioni d'urto di diffusione e fotoelettrica. Questa quantità specifica la probabilità che un fotone effettui un qualsiasi tipo di interazione con l'atomo.

